Nutzungsbedingungen



Dieses Werk ist lizensiert unter einer Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz.

Terms of use



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Mathematiſche Exiſtenz.

Unterſuchungen zur Logik und Ontologie mathematiſcher Phänomene.

Von Oskar Becker (Freiburg i. B.).

Vorbemerkung.

Der Ausdruck »Mathematiſche Exiſtenz« entſtammt der mathematiſchen Fachſprache und dieſe Arbeit geht auch von dieſem Wortgebrauch innerhalb der poſitiven Wiſſenſchaft aus. Aber ihre Abſicht iſt nichtsdeſtoweniger eine philoſophiſche; ſie iſt nämlich auf die Ergründung des Seinsſinns der mathematiſchen Phänomene gerichtet. Sie umfaßt nicht nur logiſche, ſondern gerade in den Teilen, auf die ich am meiſten Gewicht legen möchte, ontologiſche Unterſuchungen. Der Ausdruck »ontologiſch« iſt nicht gemeint im Sinne des Rationalismus des 17. und 18. Jahrhunderts, auch nicht im Sinne einer Weſensbetrachtung, die ſich konſtitutiv-phänomenologiſcher Unterſuchung noch enthält, ſondern er ſoll gerade die konſtitutive Frageſtellung ſelbſt und in gewiſſem Sinne ſogar noch mehr oder wenigſtens eine beſonders konkrete Form konſtitutiven Fragens bezeichnen. Es wird in dieſer Arbeit weitgehend außer den natürlich gerade bei mathematiſchen Gegenſtändlichkeiten zunächſt grundlegenden Methoden der formalen, tranſzendental-konſtitutiven Phänomenologie (ſo, wie in Huſſerls »Logiſchen Unterſuchungen« und »Ideen zu einer reinen Phänomenologie« ihren heute bereits klaſſiſch gewordenen Ausdruck gefunden hat) die von Heidegger begründete Forſchungsweiſe der hermeneutiſchen Phänomenologie verwandt. (Vergl. deſſen Abhandlung »Sein und Zeit« in dieſem Jahrbuchband). Heidegger bezeichnet mit »Ontologie« die »Hermeneutik der Faktizität«, die Auslegung menſchlichen Daſeins. Und ſo iſt auch in der gegenwärtigen Unterſuchung immer wieder verſucht worden, die »mathematiſche Exiſtenz« in den Zuſammenhang menſchlichen Daſeins hineinzuſtellen, der als der allenthalben grundlegende Interpretationszuſammenhang überhaupt anzuſehen iſt. Freilich iſt damit von vornherein die Frage nach dem Seinsſinn des μάθημα, des »Mathematiſchen« im allgemeinſten Sinn, hingedrängt auf den Anſatz des μάθημα als μάθησις als »Mathematiſierendes Daſein«. Das »Mathematiſieren« (μαθηματικεύεσθαι) analog dem Philoſophieren ſelbſt oder etwa auch dem Muſizieren, als eine Weiſe des lebendigen Daſeins des Menſchen, iſt das Thema phänomenologiſcher Interpretation

und kann allein nur Thema einer wirklichen Interpretation ſein. Die Mathematik erſcheint als der Niederſchlag »mathematiſierenden« Lebens, ſo wie die Kunſt Niederſchlag des künſtleriſch ſchaffenden Lebens iſt.

Aber, ſo ſehr ſie das iſt, iſt die Mathematik ſonſt nichts? Geht ſie nicht gerade am eheſten von allen menſchlichen Betätigungen auf Gegenſtändliches, Ob-jektives, An-ſich-ewig-Seiendes? Es läßt ſich nicht leugnen, daß »μάθημα« (trotz aller ſeiner Gebundenheit an verbale μανθάνειν, die es zum νόημα ſtempelt) auch dieſen rein gegenſtändlichen Sinn hat. Es iſt die Frage nicht abzuweiſen, was es denn beſage, daß die »äußere Welt« doch offenbar von mathematiſcher Harmonie in ungeahntem, ſich mit jedem neuen Fortſchritt der Wiſſenſchaft für uns ins Unermeßliche ſteigernden Maße durchherrſcht und durchleuchtet iſt. Dieſes große Problem der Exiſtenz des Mathematiſchen in der Natur, das durch die ſchon ſeit Jahrhunderten andauernden, gar nicht ſelbſtverſtändlichen Erfolge der theoretiſches Phyſik geſtellt wird, bleibt als ungelöſter Reſt unſerer konſtitutiven und hermeneutiſchen Unterſuchungen beſtehen. Prinzipiell in ganz ähnlicher Weiſe folgt auch in der Kantiſchen Philoſophie die Kritik der teleologiſchen Urteilskraft noch auf die Kritik der reinen Vernunft (die im Grunde die [kantiſchen] Konſtitutionsprobleme alle ſchon erledigt hat). Für dieſes Reſtproblem iſt weder die konſtitutive noch die hermeneutiſche Analyſe eine zureichende Methode; es verdient den Namen einer im eigentlichen Sinn metaphyſiſchen Frageſtellung, der man ſich – vielleicht – auf dem Wege der Natur-Deutung, eines Verfahrens, das nicht mit irgend einer Art von Auslegung zuſammenfällt, nähern kann. In der gegenwärtigen Schrift bezeichnet dieſes Problem nur die Grenze, die von der Unterſuchung nicht überſchritten wird. –

Wenn auch das eigentliche Thema der Abhandlung, wie angedeutet, ein philoſophiſch-prinzipielles iſt, ſo geht die Betrachtung doch aus von der aktuellen und bis zu einem gewiſſen Grade natürlich zufälligen Problemlage der gegenwärtigen mathematiſchen Grundlagenforſchung. Der Streit zwiſchen dem »Intuitionismus« (Brouwer) und dem »Formalismus« (Hilbert) dient als Anſatzpunkt der Unterſuchung. Das Ergebnis entſcheidet für den Intuitionismus und ſeine »ſachliche« Mathematik, die allein wirkliche Phänomene entdeckt, die orginärer und adäquater Anſchauung zugänglich und exiſtentialer Auslegung fähig ſind. Insbeſondere erweiſt ſich das Unendliche in der Form des Prozeſſes, und zwar nicht bloß des indefiniten ſondern auch des transfiniten, als ein echtes

Phänomen des reinen formalen Bewußtſeins und auch ſogar des konkreten hiſtoriſchen Daſeins; es iſt ſowohl der konſtitutiven Analyſe wie der ontologiſchen Interpretation erreichbar. Aber es iſt freilich nicht zu verkennen, daß dieſe Entſcheidung von den Schranken, die ſich die Unterſuchung ſelbſt auferlegt, bedingt iſt. Es iſt keineswegs geſagt, daß die »Sachlichkeit« für das »metaphyſiſche« Problem der Natur-Deutung, das im vorigen berührt wurde, noch dieſelbe entſcheidende Rolle ſpielt wie für die Interpretation im Zuſammenhange hiſtoriſchen Daſeins. Es muß insbeſondere ſpäterer Forſchung vorbehalten bleiben, die Rolle zu klären, die der neuerdings von H. Weyl auf Grund der Hilbertſchen Forſchungen vertretenen Idee einer rein ſymboliſchen Mathematik im Zuſammenhang mit der Frage deutenden Naturerkennens zukommt. Die zum Teil ſcharfe Kritik, die an Hilberts Philoſophie der Mathematik in dieſer Arbeit geübt wird, läßt alſo nicht nur (was eigentlich ſelbſtverſtändlich iſt) die hohe Bedeutung der tiefen mathematiſchen Gedanken Hilberts unangetaſtet (ſie gibt ihnen nur eine von der eigenen Auffaſſung Hilberts vielfach abweichende Deutung, die aber zeigt, in wie erſtaunlichem Maße gerade die »formaliſtiſchen« Forſchungen Hilberts zum Kontinuumproblem von ſachlicher Bedeutſamkeit ſind), ſondern ſie hält auch die Möglichkeit einer »metaphyſiſchen« Bedeutung der Hilbertſchen transfiniten Mathematik offen. Nur darf man die »Seinsart« der »tranſzendenten« metaphyſiſchen Gegenſtändlichkeiten, die jenſeits der phänomenologiſch ausweisbaren »immanenten« Sachlichkeit liegen, nicht mit eben jener uns aus den bisher angeſtellten konſtitutiven und hermeneutiſchen Unterſuchungen vertrauten phänomenologiſchen Sachlichkeitver wechſeln.

Es handelt ſich da um »Gegenſtände«, die in gewiſſem Sinne nach Platons Worten ἐπέκεινα τῆς οὐσίας, »jenſeits des Seinsſinns« — — ſind, ſo paradox dies auch klingt; Dinge die eine von der bisher betrachteten radikal verſchiedenen transphänomenale, wenn auch vielleicht nicht metaphänomenologiſche »neue Sachlichkeit« an ſich tragen.

Und ſo iſt es ein Hauptziel dieſer Arbeit, ein unbeſonnenes Hineingleiten in eine methodiſch unklare »Metaphyſik« zu verhindern, das Einſchneidende der Grenze, die vor jenem »Jenſeits« liegt, zu betonen und die Geſchloſſenheit, die auch hier den konſtitutiv-hermeneutiſchen Problemkreis auszeichnet, zur Geltung zu bringen. Der Weg über jene Grenze hinaus, den die Forſchung vielleicht ſchon bald zu beſchreiten genötigt ſein wird, ſoll und wird dadurch nicht verſperrt werden.

Wie jede phänomenologiſche Arbeit, iſt auch die vorliegende den methodiſch und inhaltlich in ſo weitem Umfang grundlegenden Forſchungen Huſſerls (die leider nur zum kleinſten Teil veröffentlicht ſind) in erſter Linie verpflichtet. Dies gilt von faſt allen Teilen der Abhandlung; beſonders hervorgehoben ſei die Urteilstheorie (§ 4 a), die Unterſcheidung von »Wahrheit« und »Konſequenz« (§ 4 b) und der Begriff der »Stufencharakteriſtik« (bei der phänomenologiſchen Analyſe des transfiniten Prozeſſes in § 5 a).

Für die hermeneutiſchen, d. h. die weſentlich ontologiſchen Teile (insbeſondere § 6 a, b und teilweiſe auch § 5 a und 6 c) gebührt mein Dank den bahnbrechenden Unterſuchungen Heideggers. Sie konnten im allgemeinen noch nicht in der jetzt vorliegenden, abſchließenden Faſſung, wie ſie in »Sein und Zeit« ſich darſtellt, benutzt werden, ſondern gehen auf Vorleſungen und Übungen vor allem ſeiner Freiburger Lehrtätigkeit 1919 – 1923 zurück. Trotzdem habe ich nachträglich einige wenige Einzelhinweiſe auf »Sein und Zeit« zur Erleichterung des Verſtändniſſes für den Leſer hinzugefügt. Die hermeneutiſche Analyſe der Zeitlichkeit iſt nach einem im Juli 1924 in Marburg gehaltenen Vortrag dargeſtellt. Es ſei noch bemerkt, daß aus verſchiedenen Gründen meine Terminologie nicht überall den oft ſubtilen Unterſcheidungen Heideggers genau folgt; ſo z. B. unterſcheide ich nicht »ontologiſch« und »ontiſch« und gebrauche die Termini »Daſein«, »Exiſtenz« u. ä. nicht in der ſcharfen Begrenzung wie er.

Was am Schluſſe der Arbeit (im § 6 c IV, am Ende) über die Idee einer ſymboliſchen, Natur deutenden Mathematik geſagt wird, verdankt entſcheidende Anregungen der neuſten philoſophiſchen Schrift H. Weyls[1] und außerdem mir liebenswürdiger Weiſe zuteil gewordenen brieflichen Äußerungen. Für wertvollſte Hilfe zum Verſtändnis Leibnizens (vgl. § 6 c III E) bin ich endlich D. Mahnkes bekannten Arbeiten, die ihr Verfaſſer durch einige für mich ſehr lehrreiche briefliche Mitteilungen freundlicherweiſe ergänzte, zu großem Danke verpflichtet.

1) »Philoſophie der Mathematik und Naturwiſſenſchaft« (Handbuch der Philoſophie, her. v. A. Bäumler u. M. Schröter, München u. Berlin 1926, Abt. II, Beitrag A.); die Schrift erſchien leider zu ſpät, um außer in § 6 c IV noch ſyſtematiſch benutzt werden zu können. – Ebenſo konnte die wichtige Abhandlung J. v. Neumanns »Zur Hilbertſchen Beweistheorie« (Math. Zeitſch. Bd. 26, S. 1 ff. [1927], die gerade in einem für mich bedeutſamen Punkte den Hilbert-Bernayſchen Standpunkt modifiziert, nur noch im »Mathematiſchen Anhang« am Schluß der Arbeit berückſichtigt werden.

§ 1.

Der gegenwärtige Streit um die Grundlegung der Mathematik.

Der Begriff der mathematiſchen Exiſtenz iſt derjenige unter allen mathematiſchen Begriffen, der am deutlichſten verrät, wo die philoſophiſchen Fragwürdigkeiten in der mathematiſchen, ſcheinbar ſo feſt gegründeten Wiſſenſchaft beginnen. Er gewährt daher am eheſten die Möglichkeit, zu unterſuchen, welches die philoſophiſchen Wurzeln der mathematiſchen Theorienbildungen ſind, d. h. was den Sinn des Seins mathematiſcher Gegenſtändlichkeit und mathematiſcher Frageſtellung ausmacht.

Man darf nicht hoffen, dieſen Grundbegriff in den programmatiſchen Erklärungen philoſophiſcher Färbung, welche die um die Grundlagen ihrer Wiſſenſchaft bekümmerten Mathematiker ihren Darlegungen zuweilen vorauszuſchicken pflegen, voll zu erfaſſen. Er wird nur da klar ans Licht treten, wo er in der ihm eigentümlichen Leiſtung für das Entſtehen der Theorie beobachtet werden kann. Deshalb iſt es erforderlich, eine Schilderung und Würdigung der tatſächlichen Leiſtungen der gegenwärtigen mathematiſchen Grundlagenforſchung den weiteren Darlegungen vorauszuſchicken. Im Verlaufe dieſer kritiſchen Bemühungen zeigt ſich dann, daß die leitenden Geſichtspunkte für die Forſchungen der gegenwärtigen Mathematiker nicht etwa unſerer heutigen Zeit eigentümlich ſind, ſondern aus hiſtoriſchen Wurzeln entſpringen, die bis in die griechiſche Philoſophie und Mathematik hinabreichen. Sofern eine echte philoſophiſche Klärung ohne richtig verſtandene hiſtoriſche Beſinnung niemals wird geleiſtet werden können, erweiſt ſich damit eine Unterſuchung der antiken Anſchauungen über mathematiſche Exiſtenz als unentbehrlich. Erſt nach dieſen Vorunterſuchungen wird man genügend vorbereitet ſein, um an die eigentlichen philoſophiſchen Fragen herantreten zu können.

Die gegenwärtige geiſtesgeſchichtliche Lage der Philoſophie der Mathematik iſt nun am ſchärfſten gekennzeichnet durch eine gewiſſe Streitfrage, die um das Prinzip der Grundlegung der mathematiſchen Wiſſenſchaften entſtanden iſt. Es erſcheint daher geboten, mit einer Darſtellung dieſes fundamentalen Streitpunktes zu beginnen, den man durch die Doppelfrage kennzeichnen kann: »Soll die Mathematik intuitiv oder formal-axiomatiſch begründet werden?«

Nachdem es in den 70er Jahren des 19. Jahrhunderts anſcheinend gelungen war, die höhere Analyſis nach langen vergeblichen Verſuchen mit derſelben Strenge zu begründen wie die elementare Mathematik (G. Cantor, Dedekind, Meray, Weierſtraß), ſchritt man zu dem Unternehmen fort, die Lehre von den natürlichen Zahlen im Zuſammenhang mit der von Cantor mit erſtaunlicher Kühnheit geſchaffenen Lehre von den unendlichen Mengen ihrerſeits auf eine angemeſſen erweiterte formale Logik zu begründen (G. Frege, B. Ruſſell). Dies mißlang jedoch, indem ſich innerhalb der anſcheinend ungebührlich ausgedehnten formalen Logik ſelbſt unlösbare Widerſprüche ergaben, die ſogenannten »Antinomien der Mengenlehre« (Burali-Forti, Ruſſell uſw.). Trotz mannigfacher, mehr oder weniger geglückter Verſuche von ſeiten der formalen Logiker, dieſe Widerſprüche aus der Welt zu ſchaffen (Frege, Ruſſell, J. König u. a.), wurde dadurch das Vertrauen in die Möglichkeit einer rein logiſchen Begründung der geſamten Mathematik ſtark erſchüttert. Man ſuchte einen Ausweg teils in Begründungen nach axiomatiſcher Methode (Zermelo für die Mengenlehre, Hilbert für die Arithmetik), teils brach ſich die Überzeugung Bahn, daß Logik und Arithmetik eine unlösbare Einheit bilden und daher nur gemeinſam begründet werden können (H. Poincaré, Hilbert, Brouwer, Weyl), eine Anſicht, die ſchon immer in den Kreiſen der ſchöpferiſchen, der Grundlagenforſchung ferner ſtehenden Mathematiker verbreitet war. Hier iſt nun der gemeinſame Ausgangspunkt der verſchiedenen Richtungen der gegenwärtigen Grundlagenforſchung erreicht, die nun in ihrer Gegenſätzlichkeit zu ſchildern und zu würdigen ſind. Es handelt ſich hierbei um zwei einander gegenüberſtehende Grundauffaſſungen der Aufgaben und Löſungsmethoden des Grundlegungsproblems der Mathematik, die man mit den Namen des »Intuitionismus« und des »(axiomatiſierenden) Formalismus« zu bezeichnen pflegt.[1] Dieſe ſind nun der Reihe nach zu erörtern.

a) Der Intuitionismus.

Wie ihr Name ſagt, legt dieſe Auffaſſung entſcheidendes Gewicht auf die Anſchauung (intuitio), die allerdings nicht als »ſinnliche« oder »empiriſche« Anſchauung verſtanden wird, ſondern die Weiſe der unmittelbaren Gewißheit bezeichnet, in der uns die logiſchen,

1) Wohl im Anſchluß an den Titel von Brouwers Antrittsrede »Intuitionisme en formalisme« Amſterdam 1912. (Engl. Überſ.: Bull. of the Am. Math. Soc. 20, S. 81–96, [1913].)

arithmetiſchen und kombinatoriſchen Grundtatſachen[1] gegeben ſind; wie ſie etwa in den üblichen Darſtellungen der Zahlentheorie zu Anfang mehr feſtgeſtellt als begründet oder gar bewieſen zu werden pflegen. Es iſt für die intuitioniſtiſche Anſchauung des mathematiſchen Grundlegungsproblems weſentlich, daß man jene logiſch-arithmetiſchen Grundtatſachen wirklich als ſolche auffaßt, nicht etwa als zweckmäßige oder gar willkürliche an die Spitze der Erörterung geſtellte Annahmen.

Die eben bezeichnete Grundauffaſſung kann eine ſachliche[2] genannt werden, denn ſie beſtrebt ſich, die »Sachen ſelbſt« vor Augen zu haben und nicht bloße Vorausſetzungen, die erſt von der heutigen Wiſſenſchaft her ihre nachträgliche Rechtfertigung erhalten. Es ergibt ſich aus dieſer Anſchauung gewiſſermaßen von ſelbſt der ungefähre Inhalt des allem Weiteren zugrundeliegenden Urgebiets: die Lehre von den arithmetiſchen und kombinatoriſchen Eigenſchaften der endlichen und endloſen (daher notwendig diskreten) Mannigfaltigkeiten, zuſammen mit dem, was an formaler Logik zu ihrer geordneten Darſtellung unumgänglich iſt.

Das Endloſe[3] ergibt ſich von ſelbſt mit der unbeſchränkt fortſetzbaren Reihe der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, ... in inf., die als der Gegenſtand einer »arithmetiſchen Urintuition« (Weyl) angeſehen wird. Die merkwürdigen Eigenſchaften von derartigen endloſen Folgen ſtehen im Mittelpunkt der intuitioniſtiſchen Lehre und bedingen ihren eigentümlichen Inhalt. Sie ſind der eigentliche Grund ihres Gegenſatzes zur hergebrachten Mathematik, während das Endliche, ſobald man ſich einmal zur Anerkennung arithmetiſcher Urtatſachen entſchloſſen hat, keine grundſätzlichen Schwierigkeiten mehr bereitet.

Im elementaren Sinn anſchaulich vorliegen können nur endliche diskrete Geſamtheiten. Das Unendliche iſt nach der intuitioniſtiſchen

---

1) Der Ausdruck »Tatſache« ſoll demgemäß durchaus nicht im Sinne eines philoſophiſchen Empirismus verſtanden werden, ſondern als gleichbedeutend mit »Tatbeſtand«, »Sachverhalt«, »Weſensverhalt« u. dgl. ganz farblos gebraucht werden. – In phänomenologiſcher Redeweiſe handelt es ſich offenbar um Weſensverhalte.

2) Damit iſt nicht das, was Hufſerl als »ſachhaltig« bezeichnet, ſondern nur ein gewiſſer Gegenſatz zum »Formalen«, ſo wie es der »Formalismus« auffaßt, gemeint.

3) Dieſe Bezeichnung für die unbeſchränkt fortſetzbare »offen unendliche«, im Sinne Cantors »abzählbar unendliche« Mannigfaltigkeit iſt Frege nachgebildet, der die »Anzahl« der natürlichen Zahlen (Cantors $\aleph_0$) die »Anzahl Endlos« nennt.

Auffaſſung nur in der Form der Folge zugänglich, die nicht iſt, ſondern wird. Die einzig als rechtmäßig zugelaſſene Art des Unendlichen iſt alſo das Endloſe (potentiell Unendliche). Das maßgebende Vorbild iſt die Reihe der natürlichen Zahlen; alle anderen endloſen Gebilde ſind von hier aus zu verſtehen.

Indeſſen iſt hierbei noch ein entſcheidender Punkt zu beachten: die Folge der natürlichen Zahlen iſt eine geſetzmäßige. Es iſt genau beſtimmt, welche Zahl auf jede vorgegebene unmittelbar folgt. Mit der Zahl n iſt auch $n' = n + 1$ beſtimmt. Das Geſetz des »Immer noch eins«, das aus n das n' erzeugt, iſt das Urbild einer jeden geſetzmäßigen Folge, die durch ein allgemeines Glied gekennzeichnet werden kann, das dann ſeinerſeits die allgemeine Zahl n enthält.

Als Beiſpiele können etwa die Reihe der Quadratzahlen (n^2), der Partialſummen irgendeiner unendlichen Reihe (geometriſche Reihe, Potenzreihe) uſw. dienen. Ein Geſetz kann auch rekurrent ſein, d. h. angeben, wie man das $(n+1)^{te}$ Glied aus dem n^{ten} Glied erhält.

Es gibt aber im Gegenſatz zu den geſetzmäßig beſtimmten Folgen noch eine davon grundſätzlich verſchiedene Art: die ſogenannten »frei werdenden Wahlfolgen«: Zunächſt die völlig freie Wahlfolge, bei der die einzelnen Zahlen ganz beliebig nacheinander gewählt werden, dann Wahlfolgen mit gewiſſen einſchränkenden Bedingungen, endlich ſolche Folgen, bei denen Schritt für Schritt nach beſtimmten Regeln, gemäß anderweitig vollzogener Wahlen, Würfen, Beobachtungen, Rechnungsergebniſſen uſw. die einzelnen Glieder feſtgelegt werden.

Beiſpiele. 1. Die Würfelfolge mit einem Würfel: Man würfelt mit einem gewöhnlichen ſechsſeitigen Würfel und ſchreibt die Zahlen, die ſich ergeben, nieder. Dieſe Folge kann offenbar nur die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 enthalten, ſie muß mindeſtens eine dieſer Zahlen enthalten, aber nicht notwendig mehr als eine.

2. Die Summenfolge zweier völlig freien Wahlfolgen: Man addiert die beiden erſten, die beiden zweiten etc. Glieder der beiden freien Wahlfolgen, die Summen bilden eine Zahl der gewünſchten Folge. — Dieſe Folge kann offenbar alle möglichen Zahlen enthalten außer 1. Denn ſelbſt wenn beide Summanden 1 wären, ſo ergäbe ſich doch ſchon 2, andernfalls eine größere Zahl.

Es iſt weſentlich für dieſe Folgen zweiter Art, daß ſie niemals als vollendet oder auch nur bis ins Unendliche beſtimmt gedacht werden können, ſondern als Schritt für Schritt werdende. Die Zukunft dieſer Entwicklung iſt ſtets zum mindeſten nach gewiſſen Seiten hin unbeſtimmt. Es können alſo nur ſolche Eigenſchaften

ſinnvollerweiſe von einer derartigen Folge ausgeſagt werden, für welche die Entſcheidung, ob ſie der Folge zukommen oder nicht zukommen, ſchon fällt, wenn die Folge in ihrer Entwicklung bis zu einer gewiſſen Stelle gekommen iſt, ohne daß die Weiterentwicklung über dieſen Punkt des Werdens hinaus, wie ſie auch ausfallen möge, die Entſcheidung wieder umſtoßen kann. Mit anderen Worten: man kann wohl über Geſchehenes ſicher urteilen, nicht aber über die Zukunft. Prophezeihen kann man nur inſoweit, als Geſetzmäßigkeiten bekannt ſind, die den zukünftigen Gang der Ereigniſſe (das Entſtehen der Glieder der Folge) mehr oder weniger beſtimmen. (Wahlfolge mit Nebenbedingung, Grenzfall der durchgehenden Beſtimmtheit: geſetzmäßige Folge.)

Beiſpiel: Die augenblicklich vorliegenden Glieder einer Wahlfolge F ſeien: 1, 6, 28, 3, 9, 11 ... Man kann im gegenwärtigen Augenblick dieſer Folge die Eigenſchaft zuſprechen: »F enthält die Zahl 9«, nicht aber »F enthält die Zahl 4« noch auch »F enthält die Zahl 4 nicht«. (Denn darüber iſt noch keine Entſcheidung gefallen.)

Dieſe Überlegung zeigt, daß die Folgen zweiter Art ohne Zeitlichkeit nicht gedacht werden können. Ausſagen über ſolche Folgen ſind auf keine Weiſe von der augenblicklichen Lage, dem Stande der Entwicklung unabhängig zu machen.

Nun ſind die völlig geſetzmäßig (durch ein »allgemeines Glied« u. dgl.) beſtimmten Folgen erſter Art zwar auch nicht ihrem eigentlichen Seinsſinn nach zeitlos oder überzeitlich, aber alle über ſie möglichen Ausſagen laſſen ſich unabhängig von irgendeinem Zeitpunkt ausſprechen, ſo daß ſie in einem gewiſſen logiſchen Sinn in ihrer ganzen unendlichen Erſtreckung wirklich gegeben ſind. Bei den Folgen zweiter Art ſind derartige zeitunabhängige Ausſagen lediglich in genau dem Maße möglich, als manche ihrer Eigenſchaften (durch Nebenbedingungen oder die Regel ihrer ſchrittweiſen Erzeugung) geſetzmäßig beſtimmt ſind.

Aus dieſer Sachlage ergeben ſich einige merkwürdige Folgerungen bezüglich der logiſchen Eigentümlichkeit von Urteilen über Folgen:

Es ſcheint nämlich, daß der Satz vom ausgeſchloſſenen Dritten, nach dem von zwei kontradiktoriſch entgegengeſetzten Urteilen eines wahr ſein muß und eines falſch, im Gebiete der endloſen Zahlfolgen gewiſſe Ausnahmen erleidet.

Die Urteile:

1. Es gibt in der Folge F eine Zahl von der Eigenſchaft E,
2. Alle Zahlen der Folge F haben die Eigenſchaft E,

haben nämlich unter Umſtänden beide kein »eigentliches« kontradiktoriſches Gegenteil, d. h. das rein formal gebildete kontradikto-

riſche Gegenteil gehorcht nicht dem Satze vom ausgeſchloſſenen Dritten, weil es nämlich gar keine ſachlich greifbare Bedeutung hat.

In der Tat: Die negativen Urteile:

1. Es gibt in der Folge F *keine* Zahl von der Eigenſchaft E,

2. *Nicht* alle Zahlen der Folge F haben die Eigenſchaft E,

haben für *frei werdende* Folgen F im allgemeinen keinen ſachlich klaren Sinn. Es läßt ſich ja – was das erſte Urteil betrifft –, falls nicht eine geeignete einſchränkende Geſetzmäßigkeit vorliegt, bei einer frei werdenden Folge nicht ſagen, was für Zahlen in ihr noch auftreten werden, und deshalb auch nicht, ob etwa eine Zahl mit der Eigenſchaft E nicht doch noch erſcheinen wird. Ähnlich iſt es beim zweiten Urteil: es beſteht unter den gemeinten Umſtänden ſtets die Möglichkeit des Erſcheinens einer Ausnahme, aber ob dieſe je zur Wirklichkeit wird, iſt offenbar ganz unbeſtimmt.

Die Disjunktion: »Entweder gibt es in der Folge eine Zahl mit der Eigenſchaft E oder nicht« iſt alſo keine echte vollſtändige Disjunktion bzw., wenn man ſie aus formalen Gründen für eine vollſtändige Disjunktion halten will, erleidet für ſie der Satz vom ausgeſchloſſenen Dritten eine Ausnahme.

Wohlgemerkt, dieſe Schwierigkeiten treten nur ein bei frei werdenden Folgen, nicht bei geſetzmäßig beſtimmten. Bei dieſen letzten ermöglicht das Geſetz einen Überblick über ſämtliche »unendlich vielen« Glieder.

Das führt dann weiter zu dem eigentümlichen Verhalten der Folgen ſelbſt, wenn man ihnen gegenüber die Frage ſtellt »Gibt es eine Folge F mit der Eigenſchaft E?«.

Dieſe Frage kann man dann bejahen, wenn F eine geſetzmäßige, vorliegende Folge iſt, oder eine frei werdende Folge mit gewiſſen geſetzmäßigen Eigenſchaften, derer Konſtruktion in ganz beſtimmter Weiſe vorgelegt werden kann. Ihre Verneinung hat keinen Sinn, ſolange man die Folge noch als eine geſetzmäßige auffaßt. Denn ein Überblick über alle »möglichen« Geſetze, die jemals aufgeſtellt werden können, ſcheint nicht gewonnen werden zu können.[1] Wendet man aber die negative Antwort auf die in Rede ſtehende Frage poſitiv: »Jede Folge hat die Eigenſchaft nicht-E«, ſo hat das nur

1) Die im Text angegebene Meinung wird von intuitioniſtiſcher Seite zumeiſt vertreten. Wir werden indeſſen ſpäter (in § 5b) im Anſchluß an die neueſten Forſchungen *Hilberts* zum Kontinuumproblem (»Über das Unendliche«, Math. Ann. Bd. 95) darlegen, daß die geleugnete Möglichkeit einer Überſicht über »alle möglichen« Geſetze für eine endloſe Folge im gewiſſen Sinne doch beſteht.

Sinn, wenn man unter Folge eine freie Wahlfolge (mit gewiſſen Nebenbedingungen) verſteht; nicht aber für geſetzmäßige Folgen.

Beiſpiele: »Jede Würfelfolge (mit einem Würfel) hat die Eigenſchaft, die Zahl 21 nicht zu enthalten«. Das gilt natürlich auch für alle geſetzmäßigen Folgen, die innerhalb des »Rahmens« der Würfelfolge betrachtet werden können. (Wenn z. B. an das Auftreten gewiſſer regelmäßiger Wurffolgen eine gewiſſe Spielregel geknüpft iſt, ſo liegt das Konſtruktionsprinzip einer derartigen Folge »im Rahmen« des Begriffes der Würfelfolge.) – Ein beſſeres Beiſpiel bietet das Schachſpiel dar. Eine Schachpartie kann als eine frei werdende Folge mit Nebenbedingungen angeſehen werden, die u. U. abbricht (wenn einer der Spieler Matt ſetzt), die aber auch endlos ſein kann (bei gewiſſen Arten von Remis). Unter beſonderen Umſtänden kann ſie aber auch, nachdem eine endliche Anzahl von Gliedern vorliegt, in eine geſetzmäßige Folge übergehen (bei gewiſſen Arten von Zugzwang, wie »ewiges Schach«). In dieſem letzten Fall liegt eine geſetzmäßige Folge »im Rahmen« einer frei werdenden Folge mit Nebenbedingungen vor.

Die ſoeben dargeſtellten Betrachtungen hängen eng zuſammen mit der Frage der Entſcheidbarkeit eines beſtimmten mathematiſchen Problems. Die Frage iſt, ob jedes rein mathematiſche Theorem, alſo zunächſt ſchon jeder klar formulierte zahlentheoretiſche Satz, entweder bewieſen oder widerlegt werden kann.

Beiſpielsweiſe kann man fragen: »Gibt es mehr als 5 Primzahlen von der Form 2^n+1? (Bekannt ſind heute nur 5 Primzahlen dieſer Form, nämlich für $n=1, 2, 4, 8, 16$.)[1] Man kann dieſe Frage nicht mit ja oder nein entſcheiden durch Probieren, denn die Anzahl der Zahlen von der Form 2^n+1 iſt unendlich, und man kann doch immer nur eine nach der andern auf ihre Teilbarkeit hin unterſuchen. Die Beziehung zur Lehre von den endloſen Folgen wird klar, wenn man folgende Zuordnung ſtiftet: Man erzeuge eine werdende Folge nach der Regel: Man probiert die nach der Größe geordneten Zahlen der geſetzmäßigen Folge mit dem allgemeinen Glied 2^n+1 auf ihre Teilbarkeit der Reihe nach durch: erweiſt ſich eine der erwähnten Zahlen als teilbar, ſo wähle man die Zahl 1, wo nicht, die 2; ſo erhält man eine echte werdende Folge, die nur die Zahlen 1 und 2 enthalten kann, von der man aber nicht weiß, ob ſie mehr als 5 oder gar unendlich viele Zweien enthält. Und zwar kann man dies erſtere gar nicht wiſſen, bevor nicht eine ſechſte Zwei aufgetreten iſt (was bisher noch nicht der Fall war), – und ob es in ihr unendlich viele Zweien gibt, könnte man überhaupt nur dann jemals erfahren, wenn die Folge einmal durch ein Geſetz dargeſtellt würde, alſo ihren Charakter als »frei werdende« Folge verlöre.

Ein anderes Beiſpiel iſt die bekannte Fermatſche Behauptung, es gäbe für $n>2$ keine vier ganzen Zahlen n, x, y, z die die Gleichung

$$x^n+y^n=z^n$$

befriedigen. Ob dieſe Behauptung richtig oder falſch iſt, läßt ſich offenbar nicht durch Probieren entſcheiden; man kann auch hier den ſyſtematiſch an-

1) Dies Beiſpiel nach Fraenkel, Einleitung in die Mengenlehre (2. Aufl. Berlin 1923) S. 170.

geordneten Proben (nachdem man alle Zahlenquadrupel (n, x, y, z), für die $n > 2$ iſt, in eine eindimenſionale Folge geordnet hat, was bekanntlich ſtets ausgeführt werden kann,) eine echte werdende Folge der Zahlen 1 und 2 zuordnen, indem man bei Befriedigung der Gleichung jeweils die 1, bei Nichtbefriedigung die 2 wählt; es iſt dann bisher (für $n > 2$!) noch keinmal die 1 erſchienen, ob ſie das jemals tun wird und wie oft, iſt z. Zt. gänzlich unbekannt.

Der intuitioniſtiſche Standpunkt der Entſcheidbarkeitsfrage gegenüber iſt nun der, daß, ſofern eine arithmetiſche Frage zur Zeit tatſächlich unentſchieden iſt, ſich wiſſenſchaftlich über die Möglichkeit oder Unmöglichkeit, jemals zu ihrer Entſcheidung zu gelangen, gar nichts ausſagen läßt.[1]

Auf Grund dieſer Anſchauung verlangt der Intuitioniſt, daß der Satz vom ausgeſchloſſenen Dritten, auf dem das Verfahren des indirekten Beweiſes beruht, auf unendliche Geſamtheiten, die in der geſchilderten Art mit endloſen Wahlfolgen zuſammenhängen, nicht angewandt werden dürfe. Dies bringt für die Möglichkeit der Führung mathematiſcher Beweiſe und der Definition mathematiſcher Begriffe und Gegenſtändlichkeiten empfindliche Einſchränkungen gegenüber der bisherigen Übung mit ſich.

So ſind z. B. Begriffe, wie der der Geſamtheit aller möglichen Zahlfolgen nicht zuläſſig; womit auch die Möglichkeit wegfällt, etwa die Menge der Dual- oder Dezimalbrüche zwiſchen 0 und 1 zu bilden oder die Menge der transzendenten Zahlen zwiſchen 0 und 1 und überhaupt die meiſten nicht abzählbaren Mengen. Der Begriff einer willkürlichen reellen Funktion (im Sinne Dirichlets) erweiſt ſich als unhaltbar, ebenſo der einer beliebig zuſammengewürfelten unendlichen Punktmenge mit beſtimmten deſkriptiven Eigenſchaften und daraus abgeleitete Begriffe, wie der der »oberen Grenze«. Die Cantorſche Definition des Linearkontinuums als einer beſtimmt gekennzeichneten Punktmenge fällt auch in ſich zuſammen. – Die geſamte Analyſis, die ja mit dem Begriff der reellen Zahl beginnt, bedarf einer neuen Begründung, obwohl damit nicht geſagt iſt, daß nicht

1) Es ſind natürlich in manchen Fällen ſozuſagen »gefühlsmäßige« auf Analogie mit gewiſſen bekannten Tatſachen beruhende Vermutungen möglich. So kann man etwa nach der Analogie mit dem bekannten von Euklid (IX, 20) bewieſenen Satz über die Exiſtenz unendlich vieler Primzahlen in der natürlichen Zahlenreihe vermuten, daß allgemein in jeder arithmetiſchen Reihe erſter Ordnung, die aus ganzen Zahlen beſteht, unendlich viele Primzahlen enthalten ſind. Dieſe Vermutung wurde, wie bekannt, durch den Beweis von Dirichlet beſtätigt, allerdings unter Zuhilfenahme infinitеſimaler Betrachtungen. Solange der Dirichletſche Beweis aber nicht vorlag, war jene Vermutung, vom ſtreng mathematiſchen Standpunkt aus geſehen, lediglich eine ganz leere logiſche Möglichkeit.

erhebliche Teile, vielleicht die erheblichſten, nach Änderung der Beweisform wieder übernommen werden können. Immerhin erleiden Analyſis wie Mengenlehre empfindliche Einbußen (»Amputationen«).

Gewonnen wird andrerſeits eine ganz neue Theorie des Kontinuums als eines »Mediums freien Werdens«, die im Gegenſatz zu dem abſtrakten »atomiſtiſchen« Kontinuumsbegriff der überlieferten Mengenlehre, die begriffliche Erfaſſung des anſchaulichen Stetigen, in dem es keine »Punkte« gibt, ermöglicht.[1]

Es iſt begreiflich, daß dieſe »Amputationen« am Körper der überlieferten Mathemik ſeitens der intuitioniſtiſchen »Putſchiſten« heftigen Widerſtand der auf ihre Traditionen ſtolzen Mathematiker gefunden haben. Der hervorragendſte Gegner der intuitioniſtiſchen »Revolution« iſt Hilbert, deſſen Anſchauungen nunmehr zu ſchildern ſind.

b) Hilberts axiomatiſcher Formalismus.

Obwohl Hilbert und ſein Mitarbeiter Bernays gewiß nicht die einzigen ſind, die die Mathematik auf ein notwendig formales Syſtem von Axiomen gründen wollen, ſo haben ſie doch dieſes Verfahren mit einer bis ins Letzte gehenden Folgerichtigkeit ausgebaut und deshalb iſt es für eine grundſätzliche Unterſuchung der Sachlage das Zweckmäßigſte, an ſie anzuknüpfen.

Hilbert unterſcheidet von vornherein »inhaltliche« und »formale« Mathematik.[2] Die erſte iſt auf das Endliche beſchränkt und iſt nicht ihrerſeits auf Axiome gegründet, ſondern auf die ſachliche Feſtſtellung von gewiſſen Grundtatſachen. Die Notwendigkeit dafür ergibt ſich daraus, daß Hilbert zum Zwecke der Begründung der »formalen« eigentlichen Mathematik einer (»metamathematiſchen«) »Beweistheorie« bedarf, die jeden mathematiſchen Beweis ſelbſt als ein

1) Vergleiche darüber und über den hierfür gehörigen Begriff der »entſcheidungsdefiniten Mannigfaltigkeit« meine Abhandlung im 6. Bande dieſes Jahrbuches; ferner die dort angeführten Arbeiten Brouwers und Weyls (am wichtigſten ſind die Arbeiten Brouwers in den Abhandlungen der Amſterdamer Akademie des Jahres 1918 und 1919 [in neuer Faſſung Math. Ann. 93, 95, 96], und Weyls in der Mathematiſchen Zeitſchrift Bd. 10 u. 20), zu denen inzwiſchen noch der Aufſatz Weyls im »Sympoſion« I. Band, 1. Heft, gekommen iſt. – Über den intuitioniſtiſchen Standpunkt weſentlich hinaus geht Weyls neueſter Aufſatz im »Handbuch der Philoſophie« (München 1926). Ein Verzeichnis der geſamten neueſten Literatur über Grundlagenfragen findet man bei A. Fraenkel, Zehn Vorleſungen über die Grundlegung der Mengenlehre (Leipzig u. Berlin 1927).

2) Die erſte heißt auch »Metamathematik«, die zweite Mathematik im engeren Sinne.

mathematiſches Gebilde auffaßt, beſtehend aus einer endlichen Anzahl in gewiſſer Anordnung und Gruppierung vorliegender Zeichen. Dabei iſt vorausgeſetzt, daß die Beweiſe begriffsſchriftlich dargeſtellt ſind, als eine Reihe von Formeln, die auseinander nach beſtimmten formalen Regeln hervorgehen.

Der Grundgedanke Hilberts iſt nun folgender: Ein mathematiſcher Beweis als ein endliches Gebilde iſt durch die keine grundſätzlichen Schwierigkeiten darbietende Lehre von den endlichen Geſamtheiten (endliche formale Logik, Arithmetik, Kombinatorik) vollſtändig beherrſchbar. Insbeſondere beſteht die Möglichkeit zu zeigen, daß aus beſtimmten Axiomen nach beſtimmten Regeln geführte Beweiſe nicht auf die einen Widerſpruch darſtellende Zeichenkombination führen können. Richtet man alſo die Beweiſe der höheren (formalen) Mathematik ſo ein, daß ihr Abbild in Formeln jene Eigentümlichkeit hat, nicht auf die Formel für eine widerſpruchsvolle Ausſage führen zu können, ſo weiß man damit, daß jene Begriffe und Axiome der höheren Mathematik auf Grund der benutzten logiſchen Schlußweiſen niemals zu widerſprechenden Sätzen führen können, – ohne daß es dazu nötig wäre, jene Begriffe und Axiome ihrem Inhalt nach zu verſtehen und etwa auf ihre ſachliche Wahrheit zu prüfen. Die Entbehrlichkeit einer ſachlichen Nachprüfung iſt der entſcheidende Punkt; daraufhin iſt es geſtattet, axiomatiſche Vorausſetzungen einzuführen, deren ſachliche Tragweite gewiſſermaßen den »endlichen menſchlichen Verſtand« überſchreitet, die alſo mit Recht als »transfinit« oder »tranſzendent« zu bezeichnen ſind. So gelingt es, den Herrſchaftsbereich mathematiſcher Wiſſenſchaft weit über das von Seiten der Intuitioniſten zugelaſſene Maß hinaus auszudehnen, ohne jemals befürchten zu müſſen, durch ſich einſtellende Widerſprüche Lügen geſtraft zu werden. Und Widerſprüche ſind, wie ſchon Kant bemerkte, das Einzige, was die über die Schranken der Erfahrung (hier der mathematiſchen Intuition) hinausſchweifende menſchliche Vernunft in ihrem Laufe zurückhalten kann. Auf dieſe Weiſe wird das geſamte von der überlieferten Mathematik eingenommene Forſchungsgebiet erhalten einſchließlich der Cantor-Zermeloſchen Mengenlehre.

Es iſt nun kurz darzuſtellen, wie es Hilbert gelingt, 1. die Widerſpruchsloſigkeit eines beſtimmten Axiomenſyſtems zu beweiſen, und 2. das Transfinite durch eine ihrer formalen Beſchaffenheit nach endliche Begriffsbildung zu erfaſſen.

1. Nachweis der Widerſpruchsloſigkeit einer endlichen Anzahl endlicher Formeln. – Wie aus der ſoeben

gegebenen allgemeinen Darſtellung hervorgeht, iſt ſtreng zu ſcheiden zwiſchen dem formalen Abbild der arithmetiſchen Sätze und Beweiſe als dem »Gegenſtand« der Theorie und dem inhaltlichen Denken über dieſen Formalismus als dem »Inhalt« der Theorie.

Der Schwerpunkt dieſer Beweistheorie liegt in dem genauen Studium der Art und Weiſe, wie aus beſtimmten vorliegenden Formeln andere neue hervorgehen. Dies geſchieht einmal durch »Einſetzen« (Subſtitution) von ſpeziellen Ausdrücken in »allgemeine« Formeln, alſo – ganz wie in der hergebrachten Mathematik – durch Erſetzen eines einen Allgemeinbegriff andeutenden Zeichens durch eine ſpezielle, einen unter jenen Allgemeinbegriff fallenden Gegenſtand darſtellende Zeichenkombination. Zweitens entſtehen neue Formeln durch Schlüſſe nach dem Schema:

$$\frac{\mathfrak{S} \qquad \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{T}}{\mathfrak{T}}$$

Das heißt: 1. Die Formel $\mathfrak{S}$ gilt. 2. Es gilt: Aus $\mathfrak{S}$ folgt $\mathfrak{T}$. Alſo: 3. Es gilt $\mathfrak{T}$.

Auf dieſe beiden Arten, durch »Einſetzen« und »Schließen« (das dann noch in verwickelteren Formen vor ſich gehen kann) entſtehen alſo nacheinander alle beweisbaren Formeln aus den Axiomen. Man kann u. U. überſehen, aus dem formalen »Geſetz« des Verfahrens heraus, daß eine beſtimmte Endformel, etwa $0 \neq 0$, niemals erreicht werden kann.

Gelingt es andererſeits, die Formulierung des Widerſpruchs immer auf die Geſtalt $0 \neq 0$ zu bringen, ſo iſt der Nachweis der Unmöglichkeit des Auftretens der Formel $0 \neq 0$ im Beweiſe gleichbedeutend mit dem Nachweis, daß in den Beweiſen der vorliegenden Art eine widerſpruchsvolle Ausſage nicht formuliert werden kann; d. h. daß ein derartiger Beweis nicht zu einem Widerſpruch führen kann.

Man kann die zunächſt befremdende Sachlage durch einen Vergleich mit gewiſſen beim Schachſpiel auftretenden Möglichkeiten erläutern: Es gibt bekanntlich beim Schach gewiſſe »Endſpiele«, bei denen ein Matt von keiner Partei erzwungen werden kann bei richtigem Spiel. Der einfachſte Fall iſt der, daß nur noch die beiden Könige ſich im Spiel befinden. Dann iſt eine Mattſtellung niemals zu erreichen, wie auch geſpielt werden möge. Verwickelter iſt etwa der Fall: Weißer König mit zwei Springern gegen den ſchwarzen König. In dieſem Falle kann Weiß bei korrektem Spiel von Schwarz das Matt nicht erzwingen. Fügt man alſo zu der üblichen Spielregel des Schach die Zuſatzbedingung hinzu, daß Schwarz beſtimmt ge-

kennzeichnete »fehlerhafte« Züge nicht ſpielen darf, ſo kann man ſicher ſein, daß Weiß niemals Matt ſetzt, – wie im übrigen das Spiel auch verlaufen möge. In beiden Beiſpielen iſt alſo das Auftreten einer Mattſtellung ausgeſchloſſen, die offenbar einer widerſpruchsanzeigenden Formel im mathematiſchen Beweis entſpricht, während die nacheinander entſtehenden Stellungen auf dem Schachbrett etwa den nacheinander auftretenden Formeln des Beweiſes gleichzuſetzen ſind; beide Male geht ja ein Gebilde aus dem andern gemäß gewiſſer Regeln hervor.

Nun ſei ein Beiſpiel für eine Hilbertſche Beweisführung gegeben.[1] Es werde gezeigt, daß aus den gleich anzuführenden fünf Axiomen die Formel $a \neq a$ niemals gefolgert werden kann.

Die Axiome ſollen wie folgt lauten:

1. $a = a$
2. $a = b \rightarrow a + 1 = b + 1$
3. $a + 1 = b + 1 \rightarrow a = b$
4. $a = c \rightarrow (b = c \rightarrow a = b)$
5. $a + 1 \neq 1$.

Die Zeichen a, b, c ſind allgemeine Zeichen für Zahlen und aus Zahlen zuſammengeſetzte Ausdrücke (Funktionen). Das Zeichen »$\rightarrow$« bedeutet »folgt« oder »wenn – ſo« (»Implikation«).

Es wird zunächſt der folgende Hilfsſatz bewieſen:

a) Hilfsſatz: Eine beweisbare Formel kann das Zeichen »$\rightarrow$« höchſtens zweimal enthalten.

Beweis: Läge ein Beweis für eine Formel mit mehr als zwei »$\rightarrow$«-Zeichen vor, ſo müßte es in ihm notwendig eine Formel geben, wo dies zum erſten Male der Fall iſt. Dieſe Formel kann unmittelbar durch Einſetzen in die Axiome offenbar nicht entſtanden ſein. Denn für die Zeichen a, b, c können Ausdrücke, die bereits ein »$\rightarrow$«-Zeichen enthalten, nicht eingeſetzt werden. Sie kann aber auch nicht als Endformel $\mathfrak{T}$ eines Schluſſes auftreten, denn dann wäre die zweite Prämiſſe des Schluſſes, nämlich $\mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{T}$, auch ſchon eine Formel mit mehr als zwei »$\rightarrow$«-Zeichen, gegen die Vorausſetzung, daß $\mathfrak{T}$ die erſte derartige im Beweiſe auftretende Formel iſt. –

Nunmehr iſt der Beweis des eigentlichen Satzes möglich:

b) Hauptſatz: $a \neq a$ iſt keine aus den Axiomen 1–5 beweisbare Formel.

Beweis: Um eine das »$\neq$«-Zeichen enthaltende Formel zu gewinnen, muß man Axiom 5 heranziehen. Alle daraus durch Einſetzen entſtehenden Formeln haben die Geſtalt $a' + 1 \neq 1$ und hiervon iſt $a' + 1$ gewiß nicht dasſelbe Zeichen wie 1. Es bleibt alſo nur die Möglichkeit, daß $a \neq a$ die Endformel eines Schluſſes iſt. In dieſem Falle müßte deſſen zweite Prämiſſe lauten $\mathfrak{S} \rightarrow a \neq a$. Da dieſe offenbar nicht direkt durch Einſetzen aus den

---

1) Nach Hilbert, Abhandl. d. Math. Sem. d. Hamburgiſchen Univerſität (1922), Bd. I, Heft 2, S. 157ff. (leicht verändert).

Axiomen entſtehen kann, ſo müßte ſie ihrerſeits Endformel eines Schluſſes ſein, deſſen zweite Prämiſſe dann

$$\mathfrak{T} \rightarrow (\mathfrak{S} \rightarrow a \neq a)$$

ſein würde. Aber auch dieſe Formel könnte wiederum nicht anders zuſtande kommen als durch einen Schluß, deſſen zweite Prämiſſe notwendig die Geſtalt hätte: $\mathfrak{U} \rightarrow \{\mathfrak{T} \rightarrow (\mathfrak{S} \rightarrow a \neq a)\}$.

Dieſe Formel enthält aber mehr als zwei »→«-Zeichen, iſt alſo nach dem »Hilfsſatz« unmöglich. — Damit iſt aber auch die Unmöglichkeit eines Beweiſes für die Formel $a \neq a$ nachgewieſen.

Das angeführte Beiſpiel zeigt wohl zur Genüge, daß derartige Unmöglichkeitsbeweiſe unter gewiſſen Umſtänden möglich ſind. Der vollſtändige Nachweis der Widerſpruchsloſigkeit der endlichen Arithmetik iſt von Hilberts Schüler W. Ackermann in ſeiner Diſſertation Abſchn. I u. II erbracht worden. (Abgedruckt: Math. Annalen Bd. 93, S. 1 ff., 1924[1].)

Es wird nun weſentlich darauf ankommen, dieſen Nachweis der Widerſpruchsloſigkeit auf die »transfinite« Mathematik auszudehnen.

2. Die begriffliche Erfaſſung des Transfiniten und der Nachweis ihrer Widerſpruchsloſigkeit. –

Nachdem die Axiome der finiten Arithmethik neben den allgemeinen logiſchen Axiomen formuliert ſind,[2]) fügt Hilbert als »transfinites Axiom« die Formel V (11) hinzu:

$$A(\tau A) \rightarrow A(a): \quad \begin{array}{l}\text{»Wenn } A \text{ dem } \tau(A) \text{ zukommt,}\\ \text{ſo kommt es allen } a \text{ zu.«}\end{array}$$

Hier bedeutet: A ein Prädikat, $A(a)$ die Ausſage »a beſitzt das des Prädikat A«, $\tau(A)$ einen beſtimmten Gegenſtand, der zum Prä-

1) Daß ſachlich damit nichts Neues gewonnen iſt, weil ja Hilbert für ſeine eigene Beweistheorie bereits die endliche Arithmetik und Kombinatorik vorausſetzen muß, iſt klar. Immerhin iſt mit dem Umſtand, daß die endliche Arithmetik de facto widerſpruchsfrei iſt, noch nicht geſagt, daß das auch in der Art Hilberts bewieſen werden kann. Weſentliche Vereinfachungen und Berichtigungen ſind neuerdings von v. Neumann (»Zur Hilbertſchen Beweistheorie«, Math. Zeitſchrift, Bd. 26, S. 1 ff., 1927) gegeben worden. Vgl. auch H. Weyl, Handbuch der Philoſophie (her. von Bäumler u. Schröter, München 1926), Abt. II, A, S. 12 ff., 14 ff.

2) Es würde hier zu weit führen, dieſe Axiome ſämtlich aufzuführen, ſie ſind in vier Gruppen eingeteilt: I. (1–4) Axiome der Folge (Zufügen Weglaſſen, Vertauſchen von Vorausſetzungen, Elimination von Ausſagen, d. i. Kettenſchlüſſe). II. (5 u. 6) Axiome der Negation (Satz vom Widerſpruch und ausgeſchloſſenen Dritten, rein formal für Ausſagen). III. (7 u. 8) Axiome der Gleichheit (Identität mit ſich ſelbſt, Erſetzung durch Gleiches). IV. (8 u. 9) Axiome der Zahl (Offenheit der Zahlenreihe, Beziehung einer Zahl zur folgenden). — Im übrigen vgl. Hilberts Originalarbeit: »Die logiſchen Grundlagen der Mathematik«, Mathem. Annalen Bd. 88, S. 151 ff. (1922) und W. Ackermanns ſoeben zitierte Diſſertation.

dikat A gehört und folgende Eigentümlichkeit hat: Falls nicht das Prädikat A ſchlechthin allen Gegenſtänden (worauf es ſeiner Kategorie nach überhaupt ſinnvollerweiſe angewandt werden kann) zukommt, ſo iſt $\tau(A)$ eine ſichere Ausnahme, d. h. ihm kommt A nicht zu.

Beiſpiele:	A = beſtechlich ſein.	$\tau(A)$: Ariſtides.
	A = feige ſein.	$\tau(A)$: Achilles.
	A = klein ſein.	$\tau(A)$: Goliath.

Oder aus der Mathematik:

A = teilbar ſein.	$\tau(A)$: die Zahl 7.
A = einer algebraiſchen Gleichung mit ganzen Koeffizienten genügen.	$\tau(A)$: die Zahl e.
A = ein Zahlquadrupel ſein, ſo daß die Fermatſche Gleichung nicht erfüllt iſt.	$\tau(A)$: ein beſtimmtes Fermatſches Zahlquadrupel.
A = eine Fläche mit Innen- und Außenſeite ſein.	$\tau(A)$: das Möbiusſche Blatt.
A = mit einer von 3 verſchiedenen Zahl beſetzt ſein (ausgeſagt von den Stellen einer Wahlfolge).	$\tau(A)$: eine beſtimmte mit 3 beſetzte Stelle der Wahlfolge. uſw. uſw.

Das Axiom macht auf den erſten Blick einen evidenten Eindruck. In der Tat ist es, falls ſämtliche Gegenſtände a eine endliche Geſamtheit bilden, ſelbſtverſtändlich. Das Weſentliche iſt aber, daß es auf beliebige unendliche Geſamtheiten angewendet werden ſoll. Alſo auch auf ſolche, die nach der intuitioniſtiſchen Auffaſſung ihm nicht genügen, wie etwa die Zahlquadrupel beim Fermatſchen Problem oder die Zahlen von der Form $2^n + 1$ (mit Hinblick auf die Frage, ob unter ihnen mehr als 5 Primzahlen ſind) oder die Stellen einer Wahlfolge uſw. Für derartige Geſamtheiten iſt alſo die Geltung des Axioms nach der »ſachlichen« intuitioniſtiſchen Anſchauung durchaus zweifelhaft. Nun iſt es gerade der weſentliche Gedanke des Hilbertſchen Verfahrens, daß in eine ſachlich-inhaltliche Erörterung der Frage der Gültigkeit des transfiniten Axioms gar nicht eingetreten wird, ſondern nur nachgewieſen wird, daß es zuſammen mit den vorangehenden »finiten« Axiomen auf keinen Widerſpruch führen kann. Wenn dieſer Beweis gelingt, iſt nach Hilberts Anſicht die Begründung der Analyſis und Mengenlehre im überlieferten Umfang möglich.

In der Tat ſtellt das transfinite Axiom einerſeits jene von den Intuitioniſten bekämpfte verſchärfte Form des Satzes vom ausgeſchloſſenen Dritten für unendliche Geſamtheiten dar, andrerſeits iſt es möglich aus ihm das Zermeloſche Auswahlprinzip, eines der Grundprinzipien der transfiniten Mengenlehre, zu folgern.

Man braucht in der Tat nur das »logiſche« transfinite Axiom V(11) geeignet zu ſpezialiſieren.[1]

Der Beweis der Widerſpruchsloſigkeit des um das transfinite Axiom vermehrten Syſtems wird von Hilbert für die einzelnen Spezialfälle des transfiniten Axioms geſondert geführt. Der Gedankengang des von ihm einzig ausgeführten Spezialbeweiſes[2] ſei im folgenden wiedergegeben. (Math. Ann. Bd. 88, S. 158–160.)

Man ſpezialiſiere das »logiſche« transfinite Axiom

$$A(\tau A) \rightarrow A(a)$$

in der Weiſe, daß anſtelle von $A(a)$ die Gleichung $f(a) = 0$ tritt, wo $f(a)$ eine gewöhnliche ganzzahlige Funktion der ganzzahligen Variablen a bedeutet.

$$\tau(f) = \tau a \; [f(a) = 0],$$

iſt alſo eine der Funktion $f(a)$ zugeordnete ganze Zahl und das transfinite Axiom nimmt die Geſtalt an:

$$f[\tau(f)] = 0 \rightarrow f(a) = 0.$$

Es iſt beiſpielsweiſe erfüllt, wenn man $f(a)$ und $\tau(f)$ folgendermaßen definiert:

a) Iſt $f(a) = 0$ für alle a, ſo ſoll $\tau(f) = 0$ geſetzt werden.

b) Iſt $f(a)$ nicht Null für alle Zahlen a, ſo iſt unter $\tau(f)$ die kleinſte Zahl zu verſtehen, für die $f(a)$ von Null verſchieden ausfällt. (Siehe Fig. 1).

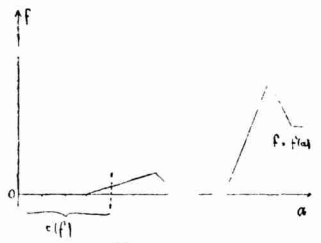


Fig. 1.

1) Für das Zermeloſche Prinzip ſei dies kurz angedeutet; dieſes beſagt: Iſt M eine Menge von elementenfremden Mengen m, von denen jede Elemente enthält (keine eine Nullmenge iſt), ſo gibt es eine Menge S, die ſog. »Auswahlmenge«, die mit jedem m gerade ein Element gemein hat. – Setzt man nun im transfiniten Axiom für das Prädikat A »nicht zu der Menge m gehörig«, ſo lautet es: Es gibt ein beſtimmtes Element $\tau(m)$ zu jedem m, derart, daß entweder alle Elemente zu m nicht gehören oder $\tau(m)$ zu m gehört. Die Menge dieſer Elemente $\tau(m)$ für alle m, die keine Nullmengen ſind, iſt dann die von Zermelo geforderte Auswahlmenge (S).

2) Der Beweis iſt ſpäter (1924) für ganze große Gruppen von transfiniten Axiomen von Ackermann (a. a. O.) zu geben verſucht worden, doch enthalten ſeine Argumentationen noch Lücken. Ihre Wiedergabe iſt hier unmöglich. Vgl. dazu die zitierten Schriften von v. Neumann (l. c. S. 41 ff.) und Weyl (beſ. l. c. S. 48, 25–49, 2).

Das transfinite Axiom besagt dann: Entweder $f(a)$ verschwindet für alle Zahlen a, oder es gibt (zum mindesten) die Ausnahmezahl $\tau(f)$, für die das nicht der Fall ist. (Unter den Ausnahmewerten des Arguments a ist $\tau(f)$ eindeutig charakterisiert als der kleinste.)[1]

Der Beweis für die Widerspruchslosigkeit des Axioms

$$f[\tau(f)] = 0 \rightarrow f(a) = 0$$

in Verbindung mit den finiten Axiomen wird von Hilbert geführt durch die Betrachtung geeigneter Spezialfälle. Es scheint bei oberflächlicher Betrachtung, daß damit nicht mehr gezeigt ist, als eben die Widerspruchslosigkeit des betreffenden Spezialfalles. Aber dem ist nicht so. Denn wenn ein Beweis für die widerspruchsvolle Gleichung $0 \neq 0$ vorläge, der in gewissen, Variablen enthaltenden, formalen Schlüssen fortschreitet, so müßte dieser Beweis auch nach der Ersetzung der allgemeinen Variablen durch spezielle Zahlen bestehen bleiben, da ja durch die Substitution die Schlußform als solche nicht angetastet wird. Es ist etwa so, wie wenn man irgend eine algebraische identische Formel, etwa die des binomischen Satzes, dadurch nachprüft, daß man für die allgemeinen Größen bestimmte Zahlen einsetzt und dann zusieht, ob die beiden Seiten der Gleichung dasselbe Zahlenresultat beim Ausrechnen ergeben. Falls sich beiderseits verschiedene Zahlen ergeben, so ist die allgemeine Formel sicher falsch. Nun handelt es sich beim Nachweis der Widerspruchslosigkeit ja um den Beweis, daß ein bestimmtes Gefüge von Formeln mit der Endformel $0 \neq 0$ unmöglich ist. Das kann offenbar genau so wie im Falle der algebraischen Identität dadurch dargetan werden, daß ein bestimmter spezieller Fall als unmöglich erwiesen wird.

Hilbert spezialisiert nun in der zu erörternden Form des transfiniten Axioms die beliebige (variable) Funktion f, die eine unbestimmte Menge von Sonderfällen $\varphi, \varphi', \varphi'' \ldots$ als »Werte« umfaßt, auf den bestimmten Sonderfall φ. Ferner setzt er die Zahl $\tau(\varphi)$ erstens, sozusagen versuchsweise, gleich Null. Dann gewinnt das transfinite Axiom die besondere Gestalt:

$$\varphi(0) = 0 \rightarrow \varphi(\delta) = 0,$$

wo für eine bestimmte Zahl δ auch $\varphi(\delta)$ eine bestimmte Zahl ist. Es fragt fragt sich nun, ob $\varphi(\delta)$ für alle δ gleich Null ist, oder ob es auch einmal ein von Null verschiedenes δ gibt. Ist das erste der Fall, so ist die obige Formel offenbar richtig, denn das Hinterglied ist richtig. Ist das zweite der Fall

---

1) Die Beziehung auf die früher, bei der Schilderung der intuitionistischen Auffassung, gebrauchten Beispiele für nicht-entscheidbare Disjunktionen ist leicht einzusehen. Nehmen wir etwa die Frage, ob in der Form $2^n + 1$ für $n > 16$ Primzahlen enthalten sind. Man kann offenbar eine zahlentheoretische Funktion wie folgt definieren: $f(n)$ ist für $n = 1, 2 \ldots 16$ Null; für $n = 17, 18, 19 \ldots$ ist es dann gleich Null, wenn $2^n + 1$ eine teilbare Zahl ist; dagegen ist $f(n) = 1$ für alle n, für die $2^n + 1$ eine Primzahl darstellt. Nimmt man nun für $f(n)$ die Gültigkeit des transfiniten Axioms im obigen Sinne an, so besagt das: Entweder alle Zahlen der Form $2^n + 1$ ($n > 16$) sind teilbar oder es gibt eine bestimmte Zahl $\tau[f(n)]$, für die die Form $2^n + 1$ zum erstenmal (nach den fünf bekannten Primzahlen, die unter $n = 17$ liegen) eine Primzahl darstellt.

(iſt alſo u. U. $\varphi(\mathfrak{z}) \neq 0$), ſo ſetze man zweitens $\tau(\varphi) = \mathfrak{z}$. Dann nimmt die transfinite Formel die Geſtalt an:

$$\varphi(\mathfrak{z}) = 0 \rightarrow \varphi(\mathfrak{s}) = 0,$$

wo $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{s}$ Zahlzeichen ſind. Dieſe Formel iſt aber ſicher richtig, weil das Vorderglied falſch iſt (denn $\varphi(\mathfrak{s})$ iſt ja nicht allgemein gleich Null!) In jedem Fall – ob $\varphi(\mathfrak{z})$ immer verſchwindet oder nicht – läßt ſich alſo ein beſonderer Fall konſtruieren, in dem das transfinite Axiom richtig iſt. In dieſen Fällen kann alſo auch kein Beweis vorliegen, der mit den (als widerſpruchsfrei vorher nachgewieſenen) finiten Axiomen und dem transfiniten geeignet ſpezialiſierten Axiom die Endformel $0 \neq 0$ hervorbrächte. Infolgedeſſen iſt aber auch ein allgemeiner Beweis dieſer Art unmöglich.

Das Hilbertſche Verfahren läuft alſo auf eine Art doppelter Negation hinaus: es wird die Unmöglichkeit eines zu der unmöglichen Formel $0 \neq 0$ führenden Beweiſes aus den fraglichen Axiomen bewieſen.

Hilbert bemerkt zu dieſem Beweiſe ausdrücklich, daß er nicht die Auffindung oder Auswahl des Gegenſtandes $\tau(A)$ unter den unendlich vielen Gegenſtänden ſeiner Kategorie tatſächlich bewerkſtelligen könne, »wohl aber, daß man ohne das Riſiko eines Irrtums ſtets ſo tun kann, als wäre die Auswahl getroffen.«[1]

Ähnliche Beweiſe ſind dann noch für andere Formen des transfiniten Axioms zu führen, die aber ſämtlich von dem »logiſchen« transfiniten Axiom ihren Urſprung nehmen. Indem damit einerſeits gezeigt iſt, daß die Einführung dieſer transfiniten Annahmen nicht auf Widerſprüche führen kann, andrerſeits aus dieſen Annahmen die traditionelle Analyſis und Mengenlehre ſich herleiten laſſen, iſt – die endgültige Ausführung der bisherigen Skizzen vorausgeſetzt[2] – die Neubegründung der Mathematik geleiſtet und der revolutionäre Anſturm der Intuitioniſten endgültig abgeſchlagen. Das iſt der Kernpunkt der Hilbertſchen Auffaſſung.

Damit iſt der Grundlagenſtreit in ſeinen weſentlichſten Zügen geſchildert und eine Ausgangsſtellung für die weiteren Erörterungen gewonnen.

§ 2.

Formulierung des Problems der mathematiſchen Exiſtenz.

Es handelt ſich um die Frage, wie ſich das das eigentliche Thema dieſer Ausführungen bildende Problem der mathematiſchen Exiſtenz

1) In ganz analoger Weiſe gibt der Zermeloſche Wohlordnungsſatz nicht die aktuelle Konſtruktion für eine Wohlordnung des Kontinuums.

2) Nach v. Neumann (l. c. S. 46) iſt bis jetzt nur die Widerſpruchsfreiheit der ſog. »halbintuitioniſtiſchen« Mathematik (vgl. Weyl, Das Kontinuum, 1918) bewieſen.

durch die im Vorigen geſchilderte geiſtesgeſchichtliche Lage des Grundlagenſtreits als beſtimmt erweiſt. Um dieſen Streit nach den in ihm zutage tretenden Tendenzen zu verſtehen und für die Problematik der mathematiſchen Exiſtenz fruchtbar machen zu können, iſt es zunächſt notwendig ſich über diejenigen Punkte, über die kein Streit beſteht, klar zu werden. Auf dem ſo herausgeſtellten gemeinſamen Boden läßt ſich dann die Entſtehung und Fortbildung der gegenſätzlichen Auffaſſungen klarer erkennen. Ferner muß von vornherein der Gang der geſchichtlichen Entwicklung berückſichtigt werden, der in der Weiſe verlaufen iſt, daß der Intuitionismus einen Angriff gegen die hergebrachte Begründungsweiſe der Mathematik gemacht hat, gegen den dann Hilberts Formalismus ſich erhob.[1]

Doch liegt die Sache keineswegs ſo, daß Hilbert etwa den Verſuch gemacht hätte, die »klaſſiſchen« Methoden der Begründung der Mathematik (von Cantor, Dedekind, Weierſtraß) gegenüber den intuitioniſtiſchen Einwänden zu ſtützen. Vielmehr ſetzt auch er neue Methoden anſtelle jener älteren Begründungsweiſe, nur erhebt er den Anſpruch auf dasſelbe umfangreiche Gebiet für die geſicherte mathematiſche Forſchung, das die »klaſſiſche« Mathematik des 19. Jahrhunderts zu beſitzen glaubte. Auf dieſe Weiſe kommt es dazu, daß gewiſſe Geſichtspunkte und Ergebniſſe den heutigen Intuitioniſten und Formaliſten gegenüber den älteren Mathematikern gemeinſam ſind.

Man orientiert ſich am beſten darüber bei Hilbert, der ja bei Aufſtellung ſeiner eignen Theſe auch immer gleichzeitig ſchon den intuitioniſtiſchen Standpunkt vor Augen hat.[2]

Der erſte Punkt, der in dieſem Zuſammenhang zu nennen iſt, iſt die Grundtheſe von der Notwendigkeit einer gemeinſamen Begründung von Logik, Arithmetik (nebſt Kombinatorik) und Mengenlehre, und zwar zunächſt mit Beſchränkung auf das Endliche. Dieſe Theſe richtet ſich gegen den Verſuch der »Logiſtiker« (Peano, Frege, Ruſſell uſw.), die Arithmetik und Mengenlehre aus der formalen Logik herzuleiten. Daß dies unmöglich ſei, und zwar ſchlechterdings unmöglich, weil näher betrachtet widerſinnig,

1) Dies iſt der Verlauf ſeit der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts. Geht man weiter zurück in der Geſchichte der Mathematik, ſo ändert ſich das Bild beträchtlich und man erkennt, daß der Intuitionismus eine bis auf die klaſſiſche Antike (Ariſtoteles, Euklid) zurückreichende Vorgeſchichte hat. Davon wird ſpäter noch ausführlich zu reden ſein.

2) Vgl. auch die ähnliche Darſtellung Weyls, Math. Zeitſchr. Bd. 20, S. 146 ff.

das iſt die gemeinſame Überzeugung von Brouwer, Weyl und andererſeits Hilbert. Die Begründung dieſer Überzeugung beruht auf dem einfachen (übrigens ſchon früher von Henri Poincaré betonten) Gedanken, daß in allen formallogiſchen Sätzen (beſonders deutlich, wenn ſie in der Geſtalt »begriffsſchriftlicher« Formeln ausgedrückt ſind) ſchon eine Reihe von arithmetiſch-kombinatoriſchen Momenten enthalten ſind. (In der »Begriffsſchrift« dargeſtellt durch die »Klammern« und andere Interpunktionszeichen', bei Peano und Ruſſell durch Punktgruppen, bei Frege durch ſich zweidimenſional verzweigende Strichſyſteme.) Gleichgültig, ob jene formallogiſchen Schlußketten auf inhaltlich letzten Endes begründete, für evident angeſehene Grundſätze zurückgehen, oder ob an ihrer Spitze nur »Konventionen« ſtehen ſollen, der ſtillſchweigenden Benutzung arithmetiſch-kombinatoriſcher Verfahrungsweiſen entrinnt kein Logiker. Durch dieſe ihre faktiſche Benutzung werden ſie zu (ſtillſchweigend) anerkannten Grundtatſachen, deren Begründung mittels eines logiſchen Formalismus zu verſuchen ein offenbarer Zirkel wäre. (Von hier aus ließe ſich eine ausführliche Kritik der Frege-Ruſſellſchen logiſchen Begründung der Arithmetik geben, die aber nicht hierher gehört.)

Für den Intuitioniſten iſt dieſe Erkenntnis nicht verwunderlich, ſondern nur eine Folge ſeiner Auffaſſung, daß die reine Mathematik überhaupt auf eine Reihe von intuitiv zu erkennenden Akten und kategorialen Gegenſtändlichkeiten beruht, wie Kolligieren, Ordnen, Zuordnen, Vertauſchen uſw., die ſogar eine Ausdehnung ins Endloſe geſtatten.[1]

Für den Intuitioniſten gibt es innerhalb der reinen Mathematik überhaupt keine axiomatiſche Begründung, denn nichts iſt für ihn willkürlich anſetzbar, alles »ſachlich« d. h. gemäß einem »Weſensverhalt«, beſtimmt. Axiome können höchſtens auftreten als Definitionen einer zu betrachtenden Mannigfaltigkeit, um ſie als Thema der Forſchung gegen anderes abzugrenzen; – wobei dann die Motive für die Wahl gerade dieſes Themas nicht in den Rahmen einer mathematiſchen Erörterung fallen.

Aber auch Hilbert verteidigt in ſeinen neueſten, hier allein

1) Neuerdings iſt dieſe gegen die axiomatiſche Begründung der Arithmetik (nicht etwa der Geometrie) gerichtete Auffaſſung von O. Hölder (Die mathematiſche Methode, Berlin 1924) in ſehr gründlich durchdachten Ausführungen verfochten worden. Hölder ſteht in vielem den Intuitioniſten nahe, ohne doch eigentlich zu ihnen zu gehören.

in Betracht gezogenen Schriften keineswegs einen rein axiomatischen Standpunkt in Sachen der Begründung der Arithmetik[1].

Die »inhaltliche« Metamathematik wird bei ihm auch genetisch, d. h. auf Beobachtung der elementaren, mathematischen Tätigkeiten und Gegenstände aufgebaut. Wenn sich Hilbert auch über den phänomenologischen Charakter dieser endlichen Gegenstände, die er und Bernays als der sinnlichen Anschauung voll zugänglich auffassen, nicht im klaren ist,[2] so werden sie doch in ihrer eigentlichen Tatsächlichkeit hingenommen: sie werden als Voraussetzungen weiterer logischer Bearbeitung anerkannt.

»Als Vorbedingung für die Anwendung logischer Schlüsse und die Betätigung logischer Operationen muß schon etwas in der Vorstellung gegeben sein, gewisse außerlogische diskrete Objekte, die anschaulich als unmittelbares Erlebnis vor allem Denken da sind[3].« Es handelt sich um etwas Letztes, nicht weiter Zurückführbares. »Sollen die logischen Schlüsse sicher sein, so müssen sich diese Objekte in allen Teilen überblicken lassen und ihre Aufweisung, ihre Unterscheidung, ihr Aufeinanderfolgen ist mit den Objekten zugleich anschaulich für uns da als etwas, daß sich nicht noch auf etwas anderes reduzieren läßt.« Es wird also ausdrücklich eine intuitive Grundlage anerkannt.

Es besteht also anscheinend für das Gebiet der endlichen Gesamtheiten volle Übereinstimmung zwischen Hilbert und seinen intuitionistischen Gegnern.

Erst wenn das Unendliche in Betracht gezogen wird, treten die Unterschiede der Auffassungen zutage. Aber auch hier ist das Verhältnis zwischen Hilbert und den Intuitionisten nicht einfach zu kennzeichnen. Sieht man zunächst nur auf das »inhaltlich« durchforschte (metamathematische) Gebiet, so ist Hilbert zurückhaltender

1) In einer früheren Schrift «Über den Zahlbegriff« (1900), Math. Ver. Bd. 8, S. 180 = Grundlagen der Geometrie, Anh. VI) hatte Hilbert noch eine rein axiomatische Begründung der Arithmetik befürwortet. Gegen diese Hilbertsche Untersuchung richtet sich O. Hölders vorhin genannte Kritik (l. c. § 117), die ein sehr lehrreiches Beispiel für die Aufweisung versteckter arithmetisch-kombinatorischer Verfahrungsweisen in einer angeblich rein logischen Ableitung darstellt.

2) Seit Husserls Unterscheidung etwa zwischen »figuralem Moment« (Philosophie der Arithmetik, S. 227) oder »sinnlichem Einheitsmoment« (Logische Untersuchungen, II. Bd., VI. Unters. § 51) und Kollektivum ist es nicht mehr angängig, auch nur die einfachste Menge als rein sinnlich konstituiert anzusehen. (Vgl. auch des Verf. Bemerkungen in ds. Jahrb. 6, S. 418/9.)

3) Hilbert, Neubegründung der Arithmetik. (Erste Mitteilung), Abhandl. d. Math. Seminars d. Hamburg. Universität (1922), Bd. I, S. 157–163.

als ſeine Gegner. Er macht (in ausdrücklicher Weiſe!) nur Anſpruch auf die »inhaltliche« Erkenntnis des Endlichen; Brouwer und Weyl dagegen dehnen dieſe Art der Betrachtung (und für ſie iſt ja, nach Hilberts Redeweiſe, alle Mathematik eigentlich »Metamathematik«!) auch auf das Endloſe aus. Sieht man genauer zu, ſo lehnt Hilbert die Möglichkeit, das Endloſe inhaltlich zu erfaſſen, nicht geradewegs ab, nur iſt es nach ihm in Anbetracht anderer fruchtbarer Möglichkeiten nicht notwendig, dieſen mühſamen Weg inhaltlicher Erkenntnis so weit zu gehen. Bernays ſagt in ſeinem Vortrag »Über Hilberts Gedanken zur Grundlegung der Arithmetik«[1], eine Berufung auf ein anſchauliches Erfaſſen der unendlichen Zahlenreihe ſei möglich, aber es könne ſich dabei nicht um Anſchauung im »primitiven« Sinne handeln, »und wenn es auch ganz voreilig wäre, jede weitergehende Art von anſchaulicher Evidenz von vornherein abzuſtreiten, werden wir doch derjenigen Tendenz der exakten Wiſſenſchaft Rechnung tragen, welche darauf gerichtet iſt, die feineren Organe der Erkenntnis nach Möglichkeit auszuſchalten und nur die primitivſten Erkenntnismittel zu Hilfe zu nehmen.« Der Hilbert-Bernaysſche Standpunkt unterſcheidet ſich alſo von dem Brouwer-Weylſchen viel mehr durch die verſchiedene methodiſche Abſicht als in der Beurteilung der vorliegenden Sachlage.[2]

Das tritt noch viel eindringlicher vor Augen, wenn man auf die Theorie des »Endloſen« etwas näher eingeht. Es iſt in erſter Linie Brouwers große Leiſtung, die Idee des Unendlichen wieder auf ihren ſpezifiſchen »potentiellen« Urſprung im Ariſtoteliſchen ἄπειρον δυνάμει ὄν (Phyſik III, 6) zurückgeführt zu haben, indem er 1. die endloſe Folge als Urbild des Unendlichen anſprach, 2. die echte Zeitbedingtheit dieſer Folge, als einer werdenden, durch die eingehende Betrachtung der »frei werdenden Wahlfolgen« dartat (dabei außer Ariſtoteliſchen auch Kantiſche Gedanken über das Weſen der natürlichen Zahlenreihe und des Unendlichen wieder aufnehmend. – Vgl. darüber § 6 b II). Dieſen poſitiven und in der Tat unwiderleglichen Aufſtellungen der Intuitioniſten über die endloſen Folgen hat Hilbert ſeine Anerkennung ebenfalls nicht verſagt. Er bemerkt ausdrücklich in ſeinem Aufſatz [in den Math. Ann. 88], daß man das »tertium non datur« nicht ohne weiteres

1) Jahresbericht der Deutſchen Mathematiker-Vereinigung, Band 31, S. 10 ff. (1922).

2) Kürzlich hat ſich Hilbert allerdings gegen die Berechtigung des »inhaltlichen« Unendlich überhaupt ausgeſprochen (Math. Ann. 95).

von endlichen auf unendliche Gesamtheiten ausdehnen könne. »Bei unendlich vielen Dingen hat die Negation des allgemeinen Urteils $(a)\,A(a)$ {= alle a haben das Prädikat A} gar keinen präzisen Inhalt, ebensowenig wie die Negation des Existenzialurteils $E(a)\,A(a)$ {= es gibt ein a mit der Eigenschaft A}. Allerdings können gelegentlich diese Negationen einen Sinn erhalten, nämlich wenn die Behauptung $(a)\,A(a)$ durch ein Gegenbeispiel widerlegt wird oder wenn aus der Annahme $(a)\,A(a)$ bzw. $E(a)\,A(a)$ ein Widerspruch abgeleitet werden kann. Diese Fälle sind aber nicht kontradiktorisch entgegengesetzt; denn wenn $A(a)$ nicht für alle a gilt, wissen wir noch nicht, daß ein Gegenstand mit der Eigenschaft Nicht-A wirklich vorliegt; ebensowenig dürfen wir ohne weiteres sagen: entweder gilt $(a)\,A(a)$ bzw. $E(a)\,A(a)$ oder diese Behauptungen weisen einen Widerspruch wirklich auf. Bei endlichen Gesamtheiten sind »es gibt« und »es liegt vor« einander gleichbedeutend; bei unendlichen Gesamtheiten ist nur der letztere Begriff ohne weiteres deutlich« [l. c. S. 155]. Diese Darlegungen könnte wörtlich ein Intuitionist geschrieben haben. In der sachlichen Beurteilung der Problematik des Endlosen ist ebenfalls kein Unterschied in den Auffassungen der beiden Parteien festzustellen. Aber die Folgerungen, die jede Partei aus dieser einmütig festgestellten Sachlage zieht, sind durchaus verschieden. Schon hier zeichnet sich ein Tatbestand ab, der noch weiterhin unsere schärfste Beachtung fordern wird: das Motiv für das Einschlagen so verschiedener Wege kann nicht einfach in der feststellbaren identischen mathematischen Sachlage liegen, sondern muß von andersartigen Überzeugungen, die man als philosophische wird anzusprechen haben, ausgehen.

Das Weiterschreiten von dem jetzt erreichten Punkte aus erfolgt schon dem Problemsatz nach in ganz verschiedenen Richtungen. Die Intuitionisten sehen sich vor die Notwendigkeit gestellt, die eigentümlichen Verhältnisse hinzunehmen, die die wesentliche Zeitbestimmtheit oder, was sonst das Endlose als solches kennzeichnet, mit sich bringt; d. h. sie suchen ihre Begriffe und Forschungswege dieser eigenartigen Gegenständlichkeit und ihrem Sinngehalt anzumessen; – mag das auch noch so unbequem sein, noch so viel Arbeit der Neubegründung angeblich schon seit langem gesicherter mathematischer Ergebnisse erfordern und noch soviel schmerzlichen Verzicht auf schon Errungenes in der Mengenlehre und verwandten Disziplinen bedeuten. Hilbert, der »Formalist«, weicht dagegen dieser bitteren Notwendigkeit aus, indem er von vornherein auf die »inhaltliche« Erkenntnis des Unendlichen überhaupt ver-

zichtet; [man denke an die oben angeführte eigenartige Begründung von Bernays mit der angeblichen »Tendenz der exakten Wiſſenſchaft«!] Er erblickt ſeine Aufgabe lediglich darin, »zu erkennen, worin und inwiefern die Anwendung transfiniter Schlußweiſen, ſo wie ſie in der Analyſis und Mengenlehre geſchieht, doch ſtets ‚richtige' Reſultate liefert. Auf dem Boden des Finiten ſoll alſo die freie Handhabung und volle Beherrſchung des Transfiniten erreicht werden!« (l. c. S. 156). Es liegt ihm alſo vor Allem an der Erhaltung des Beſitzſtandes der mathematiſchen Wiſſenſchaft, an der Möglichkeit, eine Reihe hergebrachter Beweisführungen unter Umdeutung ihrer früheren Meinung in der neubegründeten Wiſſenſchaft beizubehalten. Das unter dieſer Bemühung ſich das Thema, der Gegenſtand und das Ziel mathematiſcher Forſchung unverſehens verſchoben hat, bekümmert ihn wenig. Nicht etwa, daß ihm die Tatſache dieſer Verſchiebung entginge: es finden ſich bei ihm (ſpäter noch näher zu beſprechende) Ausführungen, in denen er ausdrücklich ablehnt, »Wahrheiten im abſoluten Sinne« über Transfinites auszuſprechen. Und Bernays, deſſen quaſi-philoſophiſche Auslegung der Hilbertſchen Abſichten dieſe vielleicht doch etwas überſpannt, macht gewiſſermaßen aus der Not eine Tugend und erblickt den Vorzug des Hilbertſchen Verfahrens gerade darin, »daß die Probleme und Schwierigkeiten, welche ſich in der Grundlegung der Mathematik bieten, aus dem Bereich des Erkenntnistheoretiſch-Philoſophiſchen in das Gebiet des eigentlich Mathematiſchen übergeführt werden. Die Mathematik ſchafft ſich hier ſelbſt ein Schiedsgericht, (infolge der Möglichkeit, die Widerſpruchsloſigkeit vorgelegter Axiomenſyſteme zu beweiſen), vor welchem alle grundſätzlichen Fragen in ſpezifiſch mathematiſcher Weiſe zum Ausdruck gebracht werden können, ohne daß man es nötig hat, ſich über ſubtile logiſche Gewiſſensfragen den Kopf zu zerbrechen . . .«[1]

Auf Grund dieſer vorläufigen Skizze der Gemeinſamkeiten und Gegenſätze der Parteien im Grundlagenſtreit kann der Zuſammenhang mit dem Problem der mathematiſchen Exiſtenz herausgeſtellt werden.

Der Terminus »Exiſtenz«, im allgemeinen eine Weiſe des Seins bezeichnend, hat in der hergebrachten Mathematik eine beſondere

1) Ähnlich äußert ſich Hilbert ſelbſt in ſeinem letzten Aufſatz (Math. Ann. 95). Er leugnet dort das Sein des Unendlichen überhaupt, es iſt für ihn eine bloße »Redensart«. Trotzdem gewinnt man, ſobald er ſich mit mengentheoretiſchen Dingen beſchäftigt, den zwingenden Eindruck, daß er doch insgeheim an das Unendliche irgendwie »glaubt«.

Bedeutung gewonnen. Dies tritt beſonders hervor, wenn man den Gebrauch der Ausdrücke »Exiſtentialaxiom«, »Exiſtentialſatz« und »Exiſtenzbeweis« (und ſeinen Gegenſatz: »Unmöglichkeitsbeweis«) näher prüft.

Zu Beginn einer ſtreng, d. h. auf Axiome aufgebauten, mathematiſchen Erörterung, wird die »Exiſtenz« der mathematiſchen Gegenſtändlichkeiten gefordert, die in den nachfolgenden Axiomen eine Rolle ſpielen. So beginnt etwa Hilberts heute ſchon klaſſiſche Axiomatik der Geometrie mit den Worten »Wir denken drei verſchiedene Syſteme von Dingen . . .« (Punkt, Gerade, Ebene genannt). »Wir denken die Punkte, Geraden, Ebenen in gewiſſen gegenſeitigen Beziehungen . . .« Unter dieſem »Wir denken« iſt gemeint: wir denken ſie als mathematiſch exiſtierend, unter Umſtänden, die in den folgenden Axiomen noch genauer beſtimmt werden. Unter dieſen Axiomen ſind nämlich noch explizite »Exiſtentialaxiome« wie z. B. I, 3 »Auf einer Geraden gibt es ſtets wenigſtens zwei Punkte . . . .« uſw. Auch wenn in manchen Darſtellungen ſo allgemeine Exiſtentialaxiome wie die genannten mit »Wir denken« beginnenden Sätze Hilberts nicht vorangeſtellt werden, ſo ſind ſie doch ſtets ſtillſchweigend mitgemeint. Die häufig verwendete implizite Definition der einer beſtimmten Theorie zugrunde liegenden mathematiſchen Gegenſtändlichkeiten macht häufig ins einzelne gehende Exiſtentialaxiome überflüſſig. Es iſt dann immer ſtillſchweigend vorausgeſetzt, daß es die implizit definierten »Dinge« gibt, d. h. daß es ſolche »Dinge« gibt, die den in den Axiomen ausgedrückten Bedingungen genügen.[1]

Was bedeutet aber nun dieſes »exiſtiert« oder »es gibt«? Zunächſt doch wohl nur das, daß jene »exiſtierenden Gegenſtändlichkeiten« zum Thema der weiteren Betrachtung gemacht werden[2].

Aber freilich iſt dies nicht hinreichend. Denn von allem anderen abgeſehen könnte es ſich ereignen, daß dieſe harmlos zum Thema gemachten »Dinge« im Laufe der Theorie widerſprechende Eigenſchaften erhielten. Das würde die Theorie unmöglich machen. (Die genaueren Gründe für dieſe für gewöhnlich als ſelbſtverſtänd-

1) Man könnte einwenden: Die implizite Definition beſagt nur: »ſofern ſolche Gegenſtände exiſtieren, ſtehen ſie in den und den Beziehungen«. Aber das iſt angeſichts des hypothetiſchen Charakters der gemeinhin verwendeten Axiome kein weſentlicher Unterſchied.

2) Vgl. A. Fraenkel, Einleitung in die Mengenlehre. Berlin 1923, S. 188: »Die Behauptung ‚m exiſtiert' will alſo nichts anderes ausdrücken, als daß m eine der für uns in Betracht kommenden Mengen bezeichnet.«

lich angeſehene Annahme werden ſpäter auseinandergeſetzt werden.) Man wird alſo von den »mathematiſch exiſtierenden« Gegenſtänden zum mindeſten verlangen müſſen, daß ſie in widerſpruchsfreier Weiſe in einer Theorie figurieren können. Hiermit ſind wir in der Tat zu einem erſten denkbaren Begriff von mathematiſcher Exiſtenz gelangt.

Def. I. Mathematiſch exiſtent heißen Gegenſtändlichkeiten, die zum Thema einer mathematiſchen Theorie gemacht werden und in dieſer Theorie **widerſpruchsfrei fungieren** können.

Wichtig iſt, das lediglich dies implizite »Fungieren«, »in Funktion ſtehen« notwendig iſt. Ob die »Gegenſtändlichkeit« als ſolche zugänglich, d. h. ob ſie überhaupt ein eigentlicher Gegenſtand iſt (wozu gehört, daß ſie ein mögliches Phänomen iſt), das bleibt zunächſt ganz dahingeſtellt.

Gegenüber dieſem, in ſich allem Anſchein nach unanfechtbaren erſten Begriff von Exiſtenz iſt ſchon ſeit der Antike ein zweiter aufgetreten, der das Kennzeichnende des exiſtierenden mathematiſchen Gegenſtandes in ſeiner Konſtruierbarkeit gelegen ſein läßt. So wird etwa im I. Buche Euklids gleich zu Beginn (I, 1) das gleichſeitige Dreieck konſtruiert und damit als exiſtierend hingeſtellt. Soll dieſe Forderung der Konſtruierbarkeit einen präziſen Sinn haben, ſo iſt es notwendig die Konſtruktionsgrundlagen und Konſtruktionsmittel anzugeben. Dieſe ſind bei Euklid (für die Planimetrie), roh geſprochen, durch die beiden αἰτήματα (»Poſtulate« in der urſprünglichen, jetzt verblaßten Bedeutung) gegeben: »Um jeden Punkt der Ebene kann man mit beliebigem Radius den Kreis ſchlagen.« Und: »Durch zwei beliebige Punkte der Ebene kann man eine Gerade ziehen.« Betrachtet man das Verfahren Euklids genauer, ſo ſieht man, daß er nur ſolche Punkte als exiſtierend annimmt, die von einem gewiſſen Ausgangspunkt und einer gewiſſen Einheitsſtrecke aus mit Zirkel und Lineal konſtruierbar ſind. (Alſo ſo, daß in den Koordinaten der exiſtierenden Punkte höchſtens aus Quadratwurzeln zuſammenſetzbare Irrationalitäten vorkommen.) Nach dieſem (nun wieder hinreichend zu verallgemeinernden) Prinzip muß man alſo folgende zweite Erklärung des Begriffs der mathematiſchen Exiſtenz geben:

Def. II. Mathematiſch exiſtent ſind ſolche Gegenſtände, die von einem feſtgelegten Ausgangspunkt aus mit beſtimmt umſchriebenen Mitteln **konſtruiert werden** können.

Die Angabe der Konſtruktionsgrundlagen oder -mittel beſtimmt dann im einzelnen Fall den jeweils vorliegenden Exiſtenzbereich. In jedem Fall wird dann die Zugänglichkeit (d. h. in gewiſſem Sinn die »Phänomenalität«) des Gegenſtands durch die Konſtruktion zum mindeſten relativ auf die Konſtruktionsgrundlage geſichert, d. h. iſt der Ausgangspunkt »ſelbſt gegeben«, ſo iſt es auch das Konſtruierte.

Es iſt offenſichtlich, daß die beiden im Vorigen ſkizzierten Auffaſſungen der Grundlegungsfrage dieſen beiden »Definitionen« der mathematiſchen Exiſtenz in gewiſſer Weiſe entſprechen. Die erſte dem axiomatiſchen Formalismus, die zweite dem Intuitionismus.

Dieſen Definitionen entſprechen dann auch zwei verſchiedene hiſtoriſche Auffaſſungen der Exiſtenzbeweiſe bzw. der Exiſtenztheoreme. Während die antike Auffaſſung (II) die aktuelle Konſtruktion des Exiſtierenden im Exiſtenzbeweis verlangt und es auch in der neueren Mathematik vielfach derartige konſtruktive Exiſtenzbeweiſe gibt, ſo ſtehen dem doch gerade in der neueſten Mathematik auch häufig Exiſtenzbeweiſe und Exiſtenzprinzipien gegenüber, die keineswegs geſtatten, die als »exiſtierend« nachgewieſene Gegenſtändlichkeit wirklich »vorzulegen«. Zuerſt geſchieht das vielleicht in Riemanns ſogenanntem Dirichletſchen Prinzip[1].

Ein anderes berühmtes Beiſpiel iſt der erſte (von P. Gordan als »theologiſch« bezeichnete) Beweis der Endlichkeit des vollen Invariantenſyſtems von Hilbert. Ein einfacheres, ſehr inſtruktives Beiſpiel mit Gegenbeiſpiel gibt ebenfalls Hilbert in ſeinem Aufſatz »Axiomatiſches Denken« (Math. Ann. Bd. 78, S. 412–5). Nach Toeplitz (im Hilbert-Heft der »Naturwiſſenſchaften« Bd. 9) ſind derartige Beweiſe überhaupt für Hilberts mathematiſches Denken beſonders charakteriſtiſch, und es iſt daher ſeine prinzipielle Stellung zu der ganzen Frage von beſonderem Intereſſe. Hilbert meint auch für ſeine Auffaſſung aus den konſtruktiven Tendenzen Brouwers oder Weyls Nutzen ziehen zu können. »Das Hindernis für die Vereinigung der beiden Ziele (der konſtruktiven und der axiomatiſchen Methode) liegt nur in der vorgefaßten Meinung . . ., daß . . .

1) Riemann, Geſammelte Werke, 1. Aufl., S. 30–35, 90–93. Hiſtoriſch iſt die Benennung »Dirichletſches Prinzip« nicht ganz korrekt; das Prinzip geht, wie Bolza in ſeinem Aufſatz »Gauß und die Variationsrechnung« III. Teil, § 2) in Gauß' Geſammelten Werken, Bd. X, 2) gezeigt hat, auf Gauß' Unterſuchungen zur Potentialtheorie (1834/40) zurück. Vgl. auch F. Klein, Geſammelte Abhandl., Bd. III, S. 493, Anm. 2.

im Gebiete der Arithmetik jede Konſtruktion durchaus eine Zahlenkonſtruktion ſein müſſe.« Dieſe Anſicht erachtet Hilbert für ein Vorurteil. »Eine konſtruktive Umdeutung der Exiſtentialaxiome iſt nicht nur in der Weiſe möglich, daß man ſie in Erzeugungprinzipien zur Konſtruktion von Zahlen umwandelt, ſondern die durch ein ſolches Axiom ermöglichte Schlußweiſe kann als Ganzes durch einen formalen Prozeß erſetzt werden, derart, daß an Stelle der Allgemeinbegriffe wie Zahl, Funktion uſw. beſtimmte Zeichen treten. »Wo Begriffe fehlen, da ſtellt ein Zeichen zur rechten Zeit ſich ein.« Dies iſt das methodiſche Prinzip der Hilbertſchen Theorie.«[1] Man könnte auf den Schlußgedanken mit Bezug auf dieſe eigentümliche »Theorie« mit dem anderen Fauſt-Zitat antworten »Spottet ihrer ſelbſt und weiß nicht wie«! Denn θεωρία heißt doch »Schau« und dieſe wird ſozuſagen grundſätzlich abgelehnt! Selbſt wenn man dieſe Darſtellung in ihren Formulierungen nicht ganz ernſt nimmt, ſo iſt doch ſo viel erſichtlich, daß jene Erſetzung des Exiſtenzſatzes durch einen formalen Prozeß gar nichts mehr mit der Herſtellung eines wirklichen Zugangs zu der fraglichen Gegenſtändlichkeit zu tun hat, ſondern gerade ſich der Dringlichkeit der Zugangsforderung (der Forderung der »Phänomenalität«) zu entziehen ſucht durch den Schleichweg einer Schein-Konſtruktion, eines Konſtruktions-Erſatzes!

Es erhellt aus dem Vorſtehenden der fundamentale Zuſammenhang zwiſchen dem philoſophiſchen Problem des Sinns der Mathematik überhaupt, und dem mathematiſchen Grundlagenſtreit.

Sofern nämlich Philoſophie Wiſſenſchaft vom Seienden als ſolchem (dem ὄν ᾗ ὄν des Ariſtoteles oder dem ὄντως ὄν Platons) iſt, beſteht ihre Grundaufgabe gegenüber dem Mathematiſchen, wie gegenüber jedem Gegenſtändlichen darin, ſeinen Seinsſinn, das Wie ſeines Seins aufzudecken[2]. Alſo ſtellt ſie die ontologiſche Fundamentalfrage nach dem Sinn der »mathematiſchen Exiſtenz«. Auf dieſe Frage geben aber die beiden Parteien im Grundlagenſtreit weſentlich verſchiedene Antworten. Dieſe Antworten der »Sachverſtändigen« werden nun dem Philoſophen als Unterlagen dienen müſſen für ſeine kritiſche Unterſuchung des Wie der mathematiſchen Exiſtenz.

Aus dieſem Grunde knüpft die folgende Darſtellung immer wieder an die Formulierungen der Gegner im Grundlagenſtreite an.

1) Zitiert nach Bernays, Jahresber. d. D. Math. Ver. Bd. 31, S. 16.

2) Der Terminus »Seins-Sinn« ſtammt von Heidegger als Überſetzung des Ariſtoteliſchen »οὐσία« (entſtellt in der ſcholaſtiſchen Tradition mit »Subſtantia« wiedergegeben).

»Was beſagt, nicht nur in mathematiſcher, ſondern in philoſophiſcher Strenge gefragt, mathematiſche Exiſtenz? Wie ſind die beiden in den »Definitionen« zutagetretenden »Löſungen« jenes Problems zu beurteilen?« – Das ſind die Fragen, die im folgenden behandelt werden ſollen.

§ 3.

Immanente Kritik der Hilbertſchen Theorie.

Der Grundlagenſtreit, deſſen Zuſpitzung auf die Idee der mathematiſchen Exiſtenz ſoeben gezeigt wurde, ſcheint zunächſt keiner unparteiiſchen Schlichtung fähig. Man mag eben Hilberts grundſätzlichen Verzicht auf philoſophiſche Klärung noch ſo ſehr bedauern, man wird deswegen ſeine eigene, in philoſophiſcher Hinſicht ſehr reſignierte, in mathematiſcher ſehr kühne Grundſtellung in ihrer inneren Folgerichtigkeit nicht erſchüttern können. Insbeſondere wird es unmöglich ſein, ihm die Aufgabe philoſophiſcher Klärung von außen aufzuzwingen. Man wird daher zweckmäßigerweiſe verſuchen, ſich zunächſt auf ſeinen Standpunkt zu ſtellen und zu erwägen haben, ob ſich nicht auch innerhalb ſeines eigenen Gedankenganges Fragen erheben, die bis ans Ende verfolgt, ſchließlich zur Aufgabe oder wenigſtens Modifikation des urſprünglichen Frageanſatzes führen.

a) Die Bedeutung der Forderung der Widerſpruchsfreiheit.

Auch wenn man ſich Hilberts Geſichtspunkt ganz zu eigen macht, kann man fragen: Sind die »Probleme und Schwierigkeiten, welche ſich in der Grundlegung der Mathematik bieten« wirklich damit erledigt, daß man die Widerſpruchsfreiheit eines zur Begründung der hergebrachten Analyſis und Mengenlehre hinreichenden Axiomenſyſtems nachgewieſen hat?

Was iſt mit dieſer Widerſpruchsfreiheit gewonnen? Welche Bedeutung hat ſie für die Grundlegung der Mathematik? Warum ſoll man ihr eine ſolche Bedeutung beilegen?

Man könnte geneigt ſein, dieſe Frage für bloß rhetoriſch zu halten. Denn, ſo könnte man ſagen, was iſt ſelbſtverſtändlicher als die Forderung der Widerſpruchsfreiheit? Iſt ſie nicht die von jeher bekannte conditio sine qua non jeglichen wiſſenſchaftlichen Denkens überhaupt? Aber man beachte genau, um was es ſich hier bei Hilbert handelt! Nicht um die Widerſpruchsfreiheit der inhaltlich erforſchbaren »Metamathematik«, ſondern um die der nur formal, in dem Zuſammenhang ihrer Konſequenzen und ſonſt nicht irgendwie

gegebenen, inhaltlich völlig ſinnleeren eigentlichen Mathematik. Man gebe ſich über die völlige Inhaltsloſigkeit dieſer Hilbertſchen Mathematik keiner Täuſchung hin. Wohl gibt Hilbert ſelbſt zur Erläuterung ſeines transfiniten Axioms das Beiſpiel des unbeſtechlichen Ariſtides. Aber es handelt ſich offenbar um nichts mehr als um eine dazu noch ziemlich vage Analogie. Denn die Menge der Menſchen iſt zwar in gewiſſem Sinne konkret unüberſehbar, aber ſicher endlich. Und die Mengen, die Hilbert »eigentlich« meint, ſind nicht nur nicht endlich, ſondern im eigentlichen Sinne transfinit; »überendlich«, nicht bloß endlos.[1]) Durch dieſe Erſchleichung (ſubreptio) wird die inhaltliche Bedeutſamkeit des transfiniten Axioms vorgetäuſcht. Nun ſoll hier dieſer Merkwürdigkeit, daß nach Hilbert die geſamte Mathematik eine gänzlich inhaltsleere Wiſſensſchaft ſein ſoll, noch nicht weiter nachgeforſcht werden. Aber es bleibt die Frage zu beantworten, was denn ein Widerſpruch in dieſer Kette von Schlüſſen zwiſchen zugeſtandenermaßen leeren Begriffen zu bedeuten habe. Daß Sätze mit irgend einem ſachlichen Gehalt[2]) nicht widerſpruchsvoll und zugleich wahr ſein können, iſt freilich evident, – zum mindeſten in der hier allein betrachteten mathematiſchen Sphäre. Und ebenſo evident iſt, daß falſche und überhaupt nicht wahre und nicht verifizierbare Sätze ohne wiſſenſchaftlichen Wert ſind. Aber die Sätze im Hilbertſchen logiſchen Formalismus ſind weder wahr noch falſch. Von ihnen gilt in aller Strenge das Ruſſellſche Witzwort, die reine Mathematik handle von Dingen, die völlig unbekannt, und von Sätzen, von denen niemand wiſſe, ob ſie wahr oder falſch

---

1) Es ſei der Klarheit und Kürze des Ausdrucks wegen geſtattet, folgende Bezeichnungen anzuwenden:

1. endliche oder finite Mengen.
2. endloſe oder indefinite Mengen. (In Cantors Redeweiſe entſprechen ihnen die abzählbaren Mengen, und beſonders die vom Ordnungstyp ω.)
3. überendliche oder transfinite Mengen. (Die nicht abzählbaren Mengen Cantors, wie das Kontinuum [$2^{\aleph_0}$] oder auch die 2. Zahlenklaſſe mit der Mächtigkeit: $\aleph_1$.)

2. und 3. können unter der Bezeichnung »unendliche« (infinite) Mengen zuſammengefaßt werden.

2) Es iſt hier der »ſachliche Gehalt« durchaus noch zu ſcheiden von der Sachlichkeit im Sinne des 1. Abſchnitts der Huſſerlſchen »Ideen«. Bei der Unterſcheidung der materialen (ſachhaltigen) Ontologie und der formalen Ontologie ſteht natürlich auch die »ſachliche« reine Mathematik (alſo in Hilberts Redeweiſe »Metamathematik«) auf der Seite der formalen Ontologie und macht ſogar deren wichtigſten Teil aus.

ſeien[1]. Die einzelnen Theoreme der Hilbertſchen Mathematik machen ſozuſagen gar keinen Anſpruch darauf, verifizierbar zu ſein. Man kann ihnen gegenüber dieſe Frage gar nicht ſtellen; – ſondern nur die andere, ob ſie (aus den vorausgeſetzten Axiomen) beweisbar ſind oder nicht.[2]

Daß ein beſtimmtes Theorem der Analyſis beweisbar iſt und ein beſtimmtes anderes nicht, das ſind alſo auch für Hilbert wahre (bzw. falſche) Ausſagen, – nur ſind ſie keine mathematiſchen, ſondern »metamathematiſche« Ausſagen. Und überhaupt gilt: nur metamathematiſche, nicht eigentlich mathematiſche Sätze ſind der Wahrheit bzw. Falſchheit fähig.

Es ſei nun die Frage wiederholt: Welche Bedeutung vermag die Forderung der Widerſpruchsloſigkeit in der Hilbertſchen Theorie zu haben? Offenbar keine mathematiſche, ſondern nur eine metamathematiſche Bedeutung. Beweisbarkeit iſt eine metamathematiſche Eigenſchaft eines einzelnen Theorems, Widerſpruchsfreiheit eine ſolche des ganzen Syſtems der Mathematik. Es handelt ſich ja keineswegs um die Widerſpruchsfreiheit der Geſamtheit der metamathematiſchen Ausſagen ſelbſt, – darin läge kein Problem, ſondern um Widerſpruchsfreiheit in bezug auf die eigentliche Mathematik. Was kann es aber für einen Sinn haben, von der Wahrheit bzw. Falſchheit unfähigen Sätzen und Satzſyſtemen Widerſpruchsfreiheit zu fordern? Sie kann doch jetzt nicht mehr in ihrer Funktion als conditio sine qua non der Wahrheit von Wert ſein![3]

Die Antwort iſt einigermaßen merkwürdig; ſie lautet: iſt die Widerſpruchsfreiheit der formalen Hilbertſchen Mathematik auch

---

1) Vielleicht müßte man noch ſchärfer ſagen, nicht nur wiſſe man nichts über ihre Wahrheit oder Falſchheit, ſondern »an-ſich« ſei eine Frage danach ſinnlos. Aber wir ſind nicht ſicher, ob wir damit Hilberts Meinung treffen würden.

2) Dieſe Eigentümlichkeit teilen die Hilbertſchen Theoreme bekanntlich mit allen Theoremen eines hypothetiſch-deduktiven Syſtems (beiſpielsweiſe des Syſtems der verſchiedenen Geometrien), aber neu iſt, daß die Analyſis ſelbſt, die Grundlage der höheren Mathematik überhaupt, jeder Möglichkeit der Verifikation ermangeln ſoll.

3) H. Weyl ſtellt die nämliche Frage in ſeinen »Randbemerkungen zu Hauptproblemen der Mathematik« (Math. Zeitſchr. 20, S. 148): »Auf dieſem (Hilbertſchen) Standpunkt darf man nicht nach einem tieferen Grund für die angenommenen Axiome und Operationsregeln fragen; auch iſt nicht abzuſehen, warum man gerade Wert darauflegt, daß das »Formelſpiel widerſpruchsfrei iſt, oder warum man das inhaltliche Denken ſich nicht noch mit anderen aus dem Spiel entſpringenden Fragen beſchäftigen läßt.« Er verſucht aber keine Löſung.

nicht die unerläßliche Bedingung der Wahrheit der Theoreme, ſo iſt ſie doch die conditio sine qua non der Fortführbarkeit des Deduktionsprozeſſes. Durch die Widerſpruchsfreiheit und durch ſie allein iſt alſo das mathematiſche »Formelſpiel« vor dem vorzeitigen Abbrechen geſchützt. Dies iſt der metamathematiſche Sinn der Forderung der Widerſpruchsloſigkeit.

Was befähigt die Widerſpruchsfreiheit zu dieſer Leiſtung? Wieſo hemmt der Widerſpruch die Deduktion, wo es doch gar nicht auf die Wahrheit des Deduzierten ankommt?

Weil nach einem bekannten Theorem der formalen Logik ein »falſcher« (und daher a fortiori ein »widerſpruchsvoller«) Satz alle denkbaren Sätze nach ſich zieht. Das rührt daher, daß ja zugleich mit dem »falſchen« Satze auch ſein kontradiktatoriſches Gegenteil »gilt«. Zwei kontradiktoriſch entgegengeſetzte Sätze erfüllen aber das »All der Ausſage« d. h. ſie ſind äquivalent mit allen Sätzen überhaupt (der betreffenden deduktiven Region). Bei Hilbert gälte im beſonderen zugleich mit $0 \neq 0$ (der Formel des Widerſpruchs) auch die »richtige« Formel $0 = 0$. Die »Richtigkeit« dieſer Formel hat einen formadefinierten Sinn, hat alſo mit »Wahrheit« im inhaltlichen Sinn nichts zu tun.[1] Ebenſowenig die Falſchheit des kontradiktoriſchen Gegenteils. Die Sache iſt die: es folgen aus den zugleich vorausgeſetzten Formeln $0 = 0$ und $0 \neq 0$ alle Sätze zugleich mit ihren kontradiktoriſchen Verneinungen, alſo immer mit irgend einem p zugleich ſein Gegenteil $\bar{p}$ (nicht-p). Damit hat es aber jeden Sinn verloren, noch von irgend einem Satz p zu behaupten, er ſei beweisbar; denn da ja doch ſtets entweder p oder $\bar{p}$ beſtehen muß, ſo weiß man ja von vornherein, daß jeder Satz beweisbar iſt[2]. Die Beweisbarkeit verliert daher völlig ihren auszeichnenden Charakter; man kann von keinem (innerhalb der vorliegenden mathematiſchen Region) denkbaren Satz mehr behaupten, er folge irgendwie eher aus den vorausgeſetzten Axiomen als ſein Gegenteil oder irgend ein anderer Satz. Man kann alſo alles beweiſen, und daß heißt ſoviel als man kann nichts mehr beweiſen. Das Spiel der formalen Deduktion iſt zu Ende[3].

---

1) Vgl. W. Ackermann, Mathematiſche Annalen Bd. 93, S. 4.

2) Im Hilbertſchen logiſchen Kalkül gilt formal der Satz vom ausgeſchloſſenen Dritten.

3) Vgl. zum ganzen Gedankengang O. Hölder, Die mathematiſche Methode (Berlin 1924), S. 276f.

Somit hat ſich herausgeſtellt, daß allerdings die Widerſpruchsfreiheit von höchſter Bedeutung iſt für jedes deduktive Verfahren aus axiomatiſchen Grundſätzen überhaupt, mag ihm nun ein inhaltlicher Sinn zukommen oder nicht. Sie iſt ſozuſagen eine notwendige Lebensbedingung für den Deduktionsprozeß ſelbſt. Damit iſt ihre zentrale Stellung unter den Aufgaben der Metamathematik, die ſie in Hilberts Theorie einnimmt, gerechtfertigt.

b) Das Transfinite und das Imaginäre.

Nachdem es als geſichert betrachtet werden kann, daß die Hilbertſche Forderung der Widerſpruchsfreiheit auch bei ſtrenger Innehaltung ſeines rein formaliſtiſchen Standpunkts ihren guten Sinn hat, nämlich als unerläßliche Bedingung der Möglichkeit der Deduktion, erhebt ſich die weitere Frage, ob man darüber hinaus den ſo als möglich erkannten widerſpruchsfreien Gegenſtändlichkeiten der Hilbertſchen Mathematik nicht auch eine poſitive Bedeutung zuſchreiben muß. In der Tat liegt doch die Frage nahe: Wozu eigentlich dieſes widerſpruchsloſe Deduzieren? Mit ſeiner Möglichkeit iſt doch noch nicht ſeine Notwendigkeit, ſeine poſitive Sinnhaftigkeit gezeigt. Hilbert ſelbſt hat auf dieſe Frage, deren Dringlichkeit er ſich nicht hat entziehen können, folgende Antwort gegeben:[1] »In meiner Beweistheorie werden zu den finiten Axiomen die transfiniten Axiome und Formeln hinzugefügt, ähnlich wie in der Theorie der komplexen Zahlen zu den reellen die imaginären Elemente und wie in der Geometrie zu den wirklichen die ideellen Gebilde. Und auch der Beweggrund dafür und der Erfolg des Verfahrens iſt in meiner Beweistheorie der gleiche wie dort: nämlich die Hinzufügung der transfiniten Axiome geſchieht im Sinne der Vereinfachung und des Abſchluſſes der Theorie«[2]. Es iſt nun zu prüfen; ob dieſe Theſe Hilberts einer kritiſchen Betrachtung ſtand hält. Über die Bedeutung der imaginären Zahlen iſt nach allgemeinem Urteil ſchon von Gauß das Weſentliche geſagt worden, an jener berühmten Stelle der Anzeige der Theoria residuorum biquadraticorum, Commentatio secunda vom 23. April 1831[3], wo von ihm »die wahre Metaphyſik der imaginären Größen in ein neues helles Licht geſtellt« wird. Gauß geht davon aus, daß die Arithmetik ſich erſt

1) Math. Annalen Bd. 88, S. 160/61.

2) Später (in Math. Ann. 95) hat ſogar Hilbert dieſen »pragmatiſtiſchen« Gedanken zum Leitfaden ſeiner geſamten Beweistheorie gemacht!

3) Werke, II. Band, S. 175ff.

in neuerer Zeit entwickelt habe, im Gegenſatz zur Geometrie. Der Begriff der Zahl ſei ſtufenweiſe von den ganzen zu den gebrochenen Zahlen, dann zu den negativen und endlich zu den imaginären erweitert worden. »Dieſes Vorſchreiten iſt aber immer anfangs mit furchtſam zagendem Schritt geſchehen. Die erſten Algebraiſten nannten noch die negativen Wurzeln der Gleichungen falſche Wurzeln, und ſie ſind es auch, wo die Aufgabe, auf welche ſie ſich beziehen, ſo eingekleidet vorzutragen iſt, daß die Beſchaffenheit der geſuchten Größe kein Entgegengeſetztes zuläßt. Allein ſo wenig man in der Allgemeinen Arithmetik Bedenken hat die gebrochenen Zahlen mit aufzunehmen, obgleich es ſo viele zählbare Dinge gibt, wobei eine Bruchzahl ohne Sinn iſt, ebenſowenig durften in jener den negative Zahlen gleiche Rechte mit den poſitiven deshalb verſagt werden, weil unzählige Dinge kein Entgegengeſetztes zulaſſen: Die Realität der negativen Zahlen iſt hinreichend gerechtfertigt, da ſie in unzähligen anderen Fällen ein adäquates Subſtrat finden. Darüber iſt man freilich ſeit langer Zeit im klaren: allein die den reellen Größen gegenübergeſtellten imaginären – ehemals und hin und wieder noch jetzt, obwohl unſchicklich, unmögliche genannt – ſind noch immer weniger eingebürgert als nur geduldet, und erſcheinen alſo mehr wie ein an ſich inhaltsleeres Zeichenſpiel, dem man ein denkbares Subſtrat unbedingt abſpricht, ohne doch den reichen Tribut, welchen dieſes Zeichenſpiel zuletzt in den Schatz der Verhältniſſe der reellen Größen ſteuert, verſchmähen zu wollen.« Gauß betrachtet nun im weiteren die Sache »aus einem anderen Geſichtspunkt.« Er legt dar, wie ſchon poſitive und negative Zahlen nur da Anwendung finden können, »wo das Gezählte ein Entgegengeſetztes hat, was mit ihm vereinigt gedacht der Vernichtung gleichzuſtellen iſt.«

»Genau betrachtet findet dieſe Vorausſetzung nur da ſtatt, wo nicht Subſtanzen (für ſich denkbare Gegenſtände), ſondern Relationen zwiſchen je zwei Gegenſtänden das Gezählte ſind.« In ähnlicher Weiſe zeigt er dann, daß wenn die Gegenſtände derart ſind, »daß ſie nicht in eine, wenngleich unbegrenzte, Reihe geordnet werden können, ſondern ſich nur in Reihen von Reihen ordnen laſſen«, d. h. wenn ſie eine »zweidimenſionale Mannigfaltigkeit« bilden, es neben der poſitiven und negativen Einheit $+1$ und -1 noch »zweier anderer unter ſich auch entgegengeſetzen« Einheiten $+i$ und $-i$ bedarf. Darauf wird dann die uns heute ſo wohlbekannte Vorſtellung der komplexen Zahlenebene entwickelt und am Schluß ſtehen die bedeutſamen Worte: »Hat man dieſen Gegenſtand bisher aus einem falſchen

Geſichtspunkt betrachtet und eine geheimnisvolle Dunkelheit dabei gefunden, ſo iſt dies großenteils den wenig ſchicklichen Benennungen zuzuſchreiben. Hätte man $+1$, -1, $\sqrt{-1}$ nicht poſitive, negative, imaginäre (oder gar unmögliche) Einheit, ſondern etwa direkte, indirekte, laterale Einheit genannt, ſo hätte von ſolcher Dunkelheit kaum die Rede ſein können.« Die an ſich ſehr bekannten Gauß-ſchen Ausführungen wurden deshalb mit ſolcher Ausführlichkeit wiedergegeben, weil ſie wirklich verdienen, klaſſiſch genannt zu werden. Es iſt darin mit aller Klarheit alles Entſcheidende über die Frage des Imaginären vom Standpunkt des Mathematikers aus geſagt. Auch die neuere Begründung des Rechnens mit komplexen Zahlen mittels des Begriffs des »Zahlenpaares« bringt kein wirklich neues Moment in die Diskuſſion.[1] Den philoſophiſch entſcheidenden Kernpunkt der Gauß ſchen Auffaſſung kann man ſo ausdrücken: das »Imaginäre« bildet zuſammen mit dem »Reellen« ein »komplexes« Gebiet, das ebenſo real, d. h. wirklichkeitsnah iſt, wie das Gebiet der urſprünglich allein »reell« genannten Zahlen. Die Leiſtung von Gauß beſteht gerade darin, dem geſamten komplexen Zahlſyſtem nicht nur ein »denkbares« Subſtrat ſondern ſogar eine »anſchaulichſte Verſinnlichung« gegeben zu haben[2]. Das beſagt, phänomenologiſch angeſehen, daß er das Imaginäre nicht als leer, obgleich vielleicht widerſpruchslos Vermeintes hat ſtehen laſſen, ſondern zu ſeiner erfüllten Anſchauung gebracht hat. Dabei braucht man übrigens nicht an die geometriſche »anſchauliche Verſinnlichung« in wörtlicher Bedeutung zu denken; phänomenologiſch geſehen handelt es ſich dabei ja doch um »kategoriale Anſchauung«[3]; die »arithmetiſche«

1) Zur Theorie des Imaginären vgl. Hölder, l. c. X. Abſchnitt, über die Zahlenpaare insbeſ. § 80; ferner F. Klein, Vorleſungen über Elementar-Mathematik vom höheren Standpunkt aus. I. Teil, 1. Hauptteil, Abſchn. IV. (Urſprünglich autographiert 1908 und 1911, neuerdings im weſentlichen unverändert gedruckt, Berlin 1924.) Dieſe Werke ſind auch zur Orientierung für Nichtmathematiker beſonders geeignet.

2) Vgl. dazu noch die folgende Äußerung von Gauß (l. c. S. 174): »Die Verſetzung der Lehre von den biquadratiſchen Reſten in das Gebiet der komplexen Zahlen könnte vielleicht manchem, der mit der Natur der imaginären Größen weniger vertraut und in falſchen Vorſtellungen davon befangen iſt, anſtößig und unnatürlich ſcheinen, und die Meinung veranlaſſen, daß die Unterſuchung dadurch gleichſam in die Luft geſtellt ſei, eine ſchwankende Haltung bekomme und ſich von der Anſchaulichkeit ganz entferne. Nichts würde ungegründeter ſein als eine ſolche Meinung. Im Gegenteil iſt die Arithmetik der komplexen Größen der anſchaulichſten Verſinnlichung fähig ...«

3) Vgl. Huſſerl, Log. Unterſuchungen, Bd. II, 2 (VI. Unterſuchung).

Vorſtellung der doppelt endloſen Reihe iſt phänomenologiſch durchaus erfüllte Anſchauung, wenn auch »kategoriale«, – während noch Leibniz die reſignierten Worte ſchrieb[1]: Der göttliche Geiſt habe »eine feine und wunderbare Ausflucht gefunden in jenem Wunder der Analyſis, dem Monſtrum der idealen Welt, faſt einem Amphibium zwiſchen Sein und Nicht-Sein, daß wir die imaginäre Wurzel nennen.« Dieſe »ſchwankende Haltung des Imaginären« hat Gauß von Grund aus und für immer gefeſtigt. Das Imaginäre als »Laterales« hat keinen prinzipiell anderen Seins-Sinn als etwa das Negative (»Inverſe«).

Wie ſteht es nun mit dem Hilbertſchen Transfiniten? Bedarf es da auch nur einer zweckmäßigen Veränderung der Bezeichnungsweiſe, um alle Dunkelheit verſchwinden zu laſſen?

Man ſieht nach einiger Überlegung leicht, daß beim Transfiniten Hilberts die Dinge ganz anders liegen als beim Imaginären. Die Hilbertſchen transfiniten Axiome ſind offenbare Analogiebildungen zu Geſetzmäßigkeiten, die für endliche Mengen gelten. Das Ariſtides-Beiſpiel, das ſchon beſprochen wurde, beweiſt dies klar.[2] Das leitende Prinzip iſt, möglichſt viele Eigenſchaften endlicher Mengen auch für die unendlichen als gültig anzuſehen[3]. »Möglichſt viele« beſagt dabei: ſo viele ihrer ſich anſetzen laſſen, ohne daß man zu widerſprechenden Konſequenzen kommt. Wenn man in der Geſchichte der Lehre von den imaginären Zahlen nach einem entſprechenden Standpunkt ſucht, ſo ſtößt man auf denjenigen, den Hankel das »Prinzip der Permanenz formaler Geſetze« genannt

1) Leibniz, Math. Schrift. (Gerhard) V., 357. Die ganze Stelle lautet im Urtext:

»Verum enim vero tenacior est varietatis suae pulcherrimae Natura rerum aeternarum varietatum parens, vel potius Divina Mens, quam ut omnia sub unum genus compingi patiatur. Itaque elegans et mirabile effugium reperit in illo Analyseos miraculo, idealis mundi monstro, pene inter Ens et non-Ens Amphibio, quod radicem imaginariam appellamus.«

2) Auch Hilbert ſelbſt iſt ſich darüber keineswegs im Unklaren, man vgl. W. Ackermanns Äuſſerung (Math. Ann. Bd. 93, S. 8).

3) Vgl. Weyl, Math. Zeitſchr. 20, S. 143, 147 (das über den »Exiſtenzialabſolutismus« Geſagte) und 150: »Vielleicht iſt es aber ja doch ſo, wie Hilbert zu meinen ſcheint, daß für den mathematiſchen Teil der theoretiſchen Weltkonſtruktion das Prinzip der Widerſpruchsloſigkeit zuſammen mit der Forderung, die vom neuen Exiſtentialabſolutismus über das Unendliche nach Analogie des Endlichen aufgeſtellten Behauptungen ſo weitgehend wie möglich ſymboliſch zu rechtfertigen, als einziger Leitfaden genügt.«

hat[1]. Es ist dies zugleich diejenige Auffassung, die, ohne explizite formuliert zu werden, die Anfänge des Rechnens mit den Imaginären geleitet hat, die bis in das 16. Jahrhundert zurückreichen[2]. Man führt etwa $i = \sqrt{-1}$ also $i^2 = -1$ ein und rechnet mit diesem zunächst ganz bedeutungsleeren Symbol nach den sachlich für reelle Zahlen sinnvollen Rechenregeln. Dabei erweist sich im Verlaufe einer ausgedehnten Benützung die mathematische Fruchtbarkeit dieses zunächst ganz willkürlichen Verfahrens. Der erste Fall, indem es sich als fruchtbar erwies, war der sog. Casus irreducibilis der kubischen Gleichung, den Bombelli zuerst mit Hilfe des Imaginären behandelte[3]. Indessen tritt nun bei der naiven Anwendung eines solchen Verfahrens sofort das Gespenst eines möglichen Widerspruchs auf, der sich bei dem fortgesetzten Gebrauch des neuen Verfahrens ergeben könnte. Es entsteht damit die Aufgabe, die Widerspruchslosigkeit des Rechnens mit den neuen Zahlen nachzuweisen. Dieser Nachweis geschieht in der Zeit vor Hilbert stets dadurch, daß man das Rechnen mit den neuen Zahlen abbildet (in eineindeutiger Weise) auf das Rechnen mit bestimmten Komplexen schon eingeführter Zahlen. (Dabei genügt es bekanntlich, für die gebrochenen, negativen und komplexen Zahlen »Zahlenpaare« einzuführen[4]. Dagegen liegt der Fall bei den irrationalen Zahlen ganz anders und viel schwieriger.) Es ist dann zumeist leicht, für die besonderen eingeführten Komplexe eine anschauliche Deutung aufzuzeigen. Historisch und auch sinngenetisch im Sinne der geistesgeschichtlichen Entwicklung liegt die Sache natürlich umgekehrt. Das anschauliche Substrat ist das erste, was in das wissenschaftliche Bewußtsein tritt. Dann erst wird es formalisiert und damit führt es allererst zu den abstrakten Zahlkomplexen, die dann den neuen Zahlenarten zugeordnet werden.

Dieser Umstand verdeckt nun den Unterschied, der zwischen dem abstrakten Nachweis der Widerspruchslosigkeit durch Abbildung

---

1) Vgl. H. Hankel, Theorie der komplexen Zahlensysteme, Leipzig 1867, S. 10. — Historisch tritt dieses Prinzip zuerst im 14. Jahrhundert bei Oresme auf. S. Hankel, Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter, Leipzig 1874, S. 350/351.

2) Bei Oresme (14. Jahrh.) dient das fragliche Prinzip zur Erweiterung des Potenzbegriffs durch die Zulassung gebrochener Exponenten.

3) In seiner Algebra von 1579. Vgl. darüber Hölder, l. c. § 78.

4) Eine zusammenhängende Darstellung dieser Dinge gibt z. B. Hölder in seinem akadem. Programm »Die Arithmetik in strenger Begründung.« (Leipzig 1914).

auf eine als widerſpruchsfrei bekannte abſtrakte Mannigfaltigkeit und der Bereitſtellung eines konkreten »Subſtrats« beſteht: alſo etwa zwiſchen der Abbildung der gebrochenen, negativen, imaginären Zahlen auf gewiſſe »Zahlenpaare« und ihrer anſchaulichen Deutung mittels der Teilung von Gegenſtänden, der Richtungsunterſchiede in der Geraden und in der Ebene. Wir haben alſo, um ganz deutlich zu ſein, drei verſchiedene Momente bei der Einführung neuer Zahlenarten zu unterſcheiden:

1. den Anſatz der formalen Rechenregel; zumeiſt nach dem Prinzip der (größtmöglichen) Permanenz der formalen Geſetze,

2. den Nachweis der Widerſpruchsloſigkeit des eingeführten Rechnungsverfahrens; i. A. geführt durch Abbildung auf bereits als widerſpruchsfrei bekannte Syſteme,

3. die Aufweiſung eines anſchaulichen Subſtrats, in dem die neueingeführten Zahlenbeziehungen konkret (beſonders in ihrem Zuſammenhang mit den bereits bekannten Verhältniſſen) gedeutet werden können.

Die vor Hilbert übliche Beweismethode für den zweiten Punkt bringt es, wie ſchon ausgeführt, mit ſich, daß zugleich mit der Erledigung des Problems (2) auch das Problem (3) gelöſt iſt: zugleich mit dem Nachweis der Widerſpruchsloſigkeit iſt der Aufweis eines anſchaulichen Subſtrats gegeben. Das Neue am Hilbertſchen metamathematiſchen Beweisverfahren iſt dagegeu, daß durch es nur das 2. aber nicht auch das 3. Problem gelöſt wird: die Widerſpruchsfreiheit des arithmetiſchen Axiomenſyſtems einſchließlich der transfiniten Axiome wird nachgewieſen, ohne daß ſich aus ihrem gelungenen Nachweis auch nur die leiſeſte Hindeutung auf ein konkretes Subſtrat ergäbe, an dem das Transfinite gedeutet werden könnte.

Logiſch iſt gewiſſermaßen alles in Ordnung, und die Unterſuchung leidet keineswegs an einer »ſchwankenden Haltung«, aber in ontologiſcher Hinſicht ſtellt das Transfinite Hilberts eine ſehr merkwürdige Gegenſtändlichkeit dar, auf die man ſehr wohl die Leibnizſche Bezeichnung »Amphibium zwiſchen Sein und Nichtſein« anwenden kann. Es läßt ſich auch nicht leugnen, daß die vorhin angeführte Gauß ſche Äußerung vom »inhaltsleeren Zeichenſpiel, dem man ein denkbares Subſtrat unbedingt abſpricht, ohne doch den reichen Tribut, welches dieſes Zeichenſpiel zuletzt in den Schatz der Verhältniſſe der reellen Größen ſteuert, verſchmähen zu wollen« genau auf das Hilbertſche Transfinite paßt. Höch-

ſtens könnte man ſich gegen den Ausdruck »ein denkbares Subſtrat« wenden, der von Gauß ziemlich gleichbedeutend mit »anſchaulich« gebraucht wird, während gerade hier eine tiefer gehende phänomenologiſche Unterſuchung einen grundlegenden Weſensunterſchied aufdecken würde.

In der Tat liegt die Sache, phänomenologiſch betrachtet, ſo, daß man dem Hilbertſchen Transfiniten ſehr wohl die »Denkbarkeit« zuerkennen muß, die jeder komplexen Bedeutungsintention zukommt, ſofern ſie nur widerſpruchsfrei iſt; aber damit iſt noch keineswegs die Möglichkeit der anſchaulichen Erfüllung jener leeren Bedeutung geſichert. Vielmehr kann ſich jener in der Bedeutung gemeinte, proleptiſch ſupponierte Gegenſtand »transfinite Menge« bei dem methodiſchen Verſuch, zu ihm einen phänomenologiſchen Zugang zu finden, als »widerſinnig« herausſtellen, d. h. als weſensmäßig unzugänglich, auch für die kategoriale Anſchauung.

Freilich iſt zu betonen, daß es ſich beim Transfiniten um eine ganz eigenartige Sachlage handelt. Man könnte etwa meinen, den bekannten Siebenflächner oder den regulären Tauſendflächner zum Vergleich heranziehen zu dürfen. Auch da, ſo könnte man ſagen, lägen Gegenſtände vor, die als blos vermeinte ihrem »Begriff« nach durchaus widerſpruchsfrei ſeien. Verſuche man aber zu einer echten, erfüllten Anſchauung jener Gegenſtände fortzuſchreiten, ſo erweiſe ſich dieſe als evident unmöglich, man ſtoße auf einen »material-ontologiſchen« (anſchaulich-räumlichen) Widerſinn. Indeſſen iſt die Gleichſetzung dieſes Vorkommniſſes mit der Sachlage beim Transfiniten irrig. Denn die Unmöglichkeit jener Polyeder läßt ſich beweiſen, aus den Axiomen der euklidiſchen Geometrie des dreidimenſionalen Raumes, d. h. die – auch ganz in abstracto (ohne Rekurrenz auf irgendwelche Anſchaulichkeit) – gemachte Annahme ihrer »mathematiſchen Exiſtenz« würde auf Widerſprüche im Syſtem der euklidiſchen Raumgeometrie führen.[1] Nicht nur mißlingt der »Exiſtenzbeweis«, ſondern er ſchlägt in einen echten »Unmöglichkeitsbeweis« um. Es liegt alſo auch ein formal-ontologiſcher Widerſinn vor, wenn man die betr. Polyeder als auf Grund der abſtrakten euklidiſchen Axiome abſtrakt definierte Gegenſtände betrachtet. Beim Hilbertſchen Transfiniten verhält es ſich aber gerade ſo, daß die Unmöglichkeit derartiger Widerſprüche in aller Stringenz durch

1) Beim Tauſendflächner geriete man etwa mit dem Satz über die Summe der »Seiten« einer »körperlichen Ecke« in Konflikt. Vgl. Weber-Wellſtein[3], (Enzyklopädie der Elementar-Mathematik) Bd. II, § 91.

Hilberts eigenartige Methode nachgewieſen iſt. Man muß alſo zuſammenfaſſend ſagen: die Hilbertſchen transfiniten Mengen ſind mit allen ihren Eigenſchaften:

1. widerſpruchslos denkbar, d. h. im Sinne der Bedeutungs-Logik »exiſtierende Gegenſtändlichkeiten«,

2. auch im Sinne der formalen Ontologie nicht »widerſinnig«,

3. trotzdem prinzipiell der (das Sein in der formal-ontologiſchen Sphäre konſtituierenden) »kategorialen Anſchauung« nicht zugänglich, alſo formal-ontologiſch nicht poſitiv exiſtierend.

Die Unterſcheidung von (2) und (3) iſt ein Novum[1]. Bisher wurde angenommen, daß die Eigenſchaft (2) ſtets (3) nach ſich zöge. Die Möglichkeiten »formal-ontologiſcher Widerſinn – formal-ontologiſche Exiſtenz« ſchienen eine vollſtändige Disjunktion zu bilden. Und nun hat ſich herausgeſtellt, daß gewiſſe Gegenſtändlichkeiten im Sinne der formalen Ontologie weder widerſinnig noch exiſtent ſind.[2] Zu dieſen merkwürdigen Gegenſtändlichkeiten gehören eben Hilberts transfinite Mengen.

Hieraus erhellt, daß ein grundſätzlicher ontologiſcher Unterſchied zwiſchen ihnen und den imaginären Zahlen beſteht. Denn dieſe ſind – als »laterale Zahlen« im Gaußſchen Sinn – der kategorialen Anſchauung ohne weiteres zugänglich. Damit iſt alſo dem Hilbertſchen Vergleich zwiſchen dem Transfiniten und Imaginären ſeine weſentlichſte Stütze entzogen. Die Funktion des Imaginären[3] in der geklärten Gaußſchen Auffaſſung läßt ſich nicht mehr mit der des Transfiniten auf ein Stufe ſtellen.

Will man den gegenwärtig (ſeitens der ſog. »Philoſophie des Als-Ob«) ſo viel gebrauchten Begriff der Fiktion einführen, ſo kann man ſagen: beim Transfiniten handelt es ſich um eine echte, beim Imaginären um eine bloß ſcheinbare Fiktion. Die zweite iſt durch eine geeignete Änderung der Bezeichnung zum Verſchwinden zu bringen, die erſte nicht. (Die transfiniten Ausſagen ſind prinzipiell nicht anſchaulich verifizierbar.)

---

1) Man könnte höchſtens die Kantiſche Unterſcheidung von ens imaginariun, ens rationis und nihil negativum (Kritik der reinen Vernunft[2] S. 347f. vergleichen. (Siehe unten § 6c III D und IV.)

2) Sie ſind alſo wirklich »Amphibien zwiſchen Sein und Nicht-Sein«!

3) Das Gleiche gilt mutatis mutandis von den »idealen« Gebilden der Geometrie und ebenſo von den »Idealen« der höheren Arithmetik.

Indeſſen muß entgegen der Meinung der »Fiktionaliſten« geſagt werden, daß hier auch bei den »echten Fiktionen« Widerſprüche nachweislich nicht vorkommen. Eine Philoſophie des Als-Ob im Sinne Vaihingers kann ſich alſo keineswegs zur Beſtätigung ihrer Lehre von der »Fiktion in der Mathematik« auf Hilberts Transfinites berufen.

Aus der Ablehnung des Hilbertſchen Vergleichs zwiſchen Transfinitem und Imaginärem ergibt ſich aber auch eine ernſtere Konſequenz: die Frage nach einem berechtigten Motiv für die Einführung des Transfiniten bleibt offen. Die Analogie mit dem Imaginären iſt nicht wirklich vorhanden, alſo kann auch dies für die Einführung des Imaginären maßgebende Motiv »der Vereinfachung und des Abſchluſſes der Theorie« nicht mehr für das Transfinite in Anſpruch genommen werden. Wozu alſo das Hilbertſche Formelſpiel?

Dieſe Frage muß trotz ihrer Dringlichkeit vorläufig unbeantwortet bleiben[1].

---

1) Hilbert hat in ſeiner ſchon zitierten neuen Arbeit »Über das Unendliche« den Geſichtspunkt der Analogie ſeiner Einführung des Transfiniten mit der des Imaginären uſw. durch frühere Mathematiker an die Spitze ſeiner geſamten Betrachtung des Unendlichen geſtellt. Er ſagt (Math. Ann. Bd. 95, S. 174): »Wenn wir im Bereich der finiten Ausſagen bleiben ..., ſo walten da ſehr unüberſichtliche Verhältniſſe ob, und dieſe Verhältniſſe ſteigern ſich bis zur Unerträglichkeit, wenn das »alle« und »es gibt« kombiniert und in eingeſchachtelten Sätzen auftritt. Jedenfalls diejenigen logiſchen Geſetze, die die Menſchen, ſeit ſie denken, ſtets gebraucht haben, und die eben Ariſtoteles gelehrt hat, gelten nicht. Nun könnte man darauf ausgehen, die für den Bereich der finiten Ausſagen gültigen logiſchen Geſetze aufzuſtellen; aber damit wäre uns nicht gedient, da wir eben auf den Gebrauch der einfachen Geſetze hinauswollen ... Gerade wie $i=\sqrt{-1}$ eingeführt wurde, um die Geſetze der Algebra ... in der einfachſten Geſtalt aufrecht zu erhalten, gerade wie die Einführung der idealen Faktoren geſchah, um auch unter den algebraiſchen Zahlen die einfachen Teilbarkeitsgeſetze beizubehalten, ... ſo haben wir hier zu den finiten Ausſagen die idealen Ausſagen zu adjungieren, um die formal einfachen Regeln der üblichen ariſtoteliſchen Logik zu erhalten.«

Bei der Aufſtellung dieſer Analogie iſt, wie im Text gezeigt, ein entſcheidender Punkt überſehen: Während die imaginär-komplexen Zahlen durch Paare gewöhnlicher Zahlen, die unendlich fernen »idealen« Punkte durch Parallelbüſchel, die Zahlideale durch gewiſſe geſetzmäßig gebildete Zahlſyſteme aus gewöhnlichen Zahlen abgebildet und im Sinne der urſprünglichen, »wirklichen« mathematiſchen Gegenſtändlichkeiten interpretiert werden können, – iſt dies bei den »idealen Ausſagen« nicht der Fall. Dieſe ſind vielmehr reine »Geſetztheiten«, die keiner irgendwie inhaltlichen Interpreta-

c) Die immanente Unvermeidlichkeit des Unendlichen in der Metamathematik.

Blickt man auf die bisher gegebenen Erörterungen über die Hilbertſche Theorie zurück, ſo erkennt man, daß das ihr zugrundeliegende Prinzip der Widerſpruchsfreiheit zwar ſeinen guten Sinn hat, inſofern es die unbeſchränkte Möglichkeit weiterer Deduktionen garantiert, daß aber andererſeits jede poſitive Motivation vermißt wird, überhaupt zu deduzieren. Indeſſen, trotz dieſer eigentümlichen Zweckloſigkeit ſcheint doch die Möglichkeit einer ſozuſagen auf eigenen Füßen ſtehenden, mit lediglich finiten Mitteln operierender Theorie des Transfiniten geſichert und der immanenten Kritik entzogen. Eine Entſcheidung zwiſchen der intuitioniſtiſchen und der formaliſtiſchen Auffaſſung des mathematiſchen Grundlegungsproblems wird ſo nicht erreicht.

Sie würde indeſſen erreichbar ſein, wenn es gelänge zu zeigen, daß das Endloſe auch in Hilberts Theorie eine (wenn auch verſchwiegene) »inhaltliche«, metamathematiſche Bedeutung hat. Denn der Streit zwiſchen Brouwer und Hilbert geht eigentlich um das Endloſe. Hilbert lehnt die Bemühungen der Intuitioniſten um das Endloſe als überflüſſig und bedenklich ab. Denn einerſeits kann ſeines Erachtens ſogar das Tranfinite, alſo erſt recht das bloß Indefinite, rein finit »begründet« werden. Andererſeits ſcheint ihm eine Erweiterung der Intuition über das Finite hinaus mit einem gewiſſen Unſicherheitsfaktor behaftet, und deshalb ſoll ſie vermieden werden. Dieſen beiden Gegenargumenten gegen den Intuitionismus wäre nun in dem Augenblick der Boden entzogen, wo gezeigt würde, daß das Indefinite in dem metamathematiſchen Teil der Hilbertſchen Theorie ſelbſt notwendig eine Rolle ſpielt. Denn alsdann wäre es offenbar ſicher nicht überflüſſig und, wenn vielleicht auch bedenklich, jedenfalls mit Hilberts eigenen Mitteln nicht vermeidbar.

Im Folgenden ſoll nun gezeigt werden, daß das Indefinite auch in den metamathematiſchen Überlegungen der Hilbertſchen Theorie tatſächlich nicht vermieden wird und nicht vermieden werden kann.

---

tion fähig ſind. Man verſchleiert einfach durch Einführung der idealen Aussagen den tiefgehenden Unterſchied zwiſchen der Logik des Endlichen und der des Unendlichen, die – darin weichen wir vom Finitismus Hilberts ab –, wenn man nur die richtigen Urphänomene zugrunde legt, gerade ſo real und konkret entwickelt werden kann, wie die Logik des Endlichen.

Das Indefinite tritt nämlich ſchon in der grundlegenden Frageſtellung Hilberts ſo offenſichtlich hervor, daß man ſich wundern muß, daß kaum jemand darauf aufmerkſam geworden iſt[1].

Wie iſt denn das Problem der Widerſpruchsfreiheit eines beſtimmten Axiomenſyſtems ſelbſt genauer zu formulieren? Doch wohl ſo: »Es iſt zu zeigen, daß aus dem vorgelegten Axiomenſyſtem keine einander widerſprechenden Theoreme gefolgert werden können, wie weit man auch die Deduktion fortſetzen mag«. Oder: »Die Reihe der aus den Axiomen deduzierten Formeln kann unbeſchränkt verlängert werden, ohne daß $0 \neq 0$ als Formel auftritt, — unbeſchränkt, d. h. bis ins Endloſe. Man kann die i. A. nicht lineare, ſondern nach Art eines Stammbaumes oder beſſer eines Netzes verzweigte Mannigfaltigkeit der Axiome durch Zerlegung in unverzweigte »Fäden«[2] in eine endliche Anzahl linearer »Folgen« von Formeln verwandeln. Nun kann man dieſer Formelfolge eine Zahlenfolge nach der Regel eindeutig zuordnen, daß für jede von $0 \neq 0$ verſchiedene Formel die 1 und für die Formel $0 \neq 0$ die 2 geſetzt wird. Dann kann man die Ausſage der Widerſpruchsfreiheit in die Form kleiden: In der zugeordneten, frei werdenden, nur die Zahlen 1 oder 2 enthaltenden Zahlenfolge, die mit 1111... beginnt, kommt die 2 niemals vor. Die Zahlenfolge iſt in der Tat eine frei werdende, denn die Entwicklung der zugeordneten Formelfolge erfolgt Schritt für Schritt, je nach dem Fortſchritt der Entwicklung der mathematiſchen Theorie.

Wie iſt nun eine ſolche Behauptung, die 2 komme in jener Folge niemals vor, zu beweiſen?

Der nächſtliegende Gedanke iſt: durch eine Art vollſtändiger Induktion. So ſagt wirklich H. Poincaré[3]: »Man müßte feſtſtellen, daß man ſich, ſoweit man auch die Reihe der

---

1) Zu den wenigen Ausnahmen gehört H. Poincaré, deſſen Ausführungen aber gegenwärtig nur noch wenig Beachtung zu finden ſcheinen. (Siehe die in Anm. 3 gegebenen Zitate.) Nur A. Fraenkel (Einleitung in die Mengenlehre, S. 240) erwähnt die Ausführungen Poincarés.

2) Durch Wiederholung von Sätzen uſw. vgl. W. Ackermann, Math. Ann. 93, S. 6; Hilbert, Math. Ann. 88, S. 157/58.

3) Vgl. H. Poincaré, Wiſſenſchaft und Methode (deutſch von F. u. L. Lindemann, Leipzig u. Berlin 1914), S. 138, 147/48, 151, 155, 157/58. Das Zitat ſteht auf S. 147/48. Es iſt leicht verändert und ſteht im Original in einem anderen Zuſammenhang. Hilberts Theorie iſt S. 151 – 158 behandelt, allerdings nur in der Faſſung von 1904.

Schlußfolgerungen verfolgt, niemals dem Widerſpruche ausgeſetzt. . . . Wir können verifizieren, daß die Operationen der Logik, wenn ſie auf widerſpruchsfreie Prämiſſen angewandt werden, nur Folgerungen ergeben können, die gleichfalls von Widerſprüchen frei ſind. Wenn wir alſo in n Operationen auf keinen Widerſpruch ſtoßen, ſo werden wir einem ſolchen auch nicht in der $(n+1)^{\text{ten}}$ Operation begegnen. Es iſt demnach unmöglich, daß der Widerſpruch beginnt, was beweiſt, daß wir ihm niemals begegnen werden . . .«. Ähnliche Argumentationen finden ſich nun wirklich bei Hilbert[1], aber »wenn zwei dasſelbe tun, ſo iſt es nicht dasſelbe«. Denn in Hilberts Schule[2] unterſcheidet man »zwei Formen von vollſtändiger Induktion:

1. Die »engere Form«, die ſich nur auf etwas konkret und abgeſchloſſen Vorliegendes bezieht.

2. Die »weitere Form«, die entweder den Allgemeinbegriff der Zahl oder das Operieren mit Variablen benutzt.«

»Während die weitere Form eine höhere Schlußweiſe iſt, deren Begründung eine der Aufgaben der Hilbertſchen Theorie bildet, gehört die engere Form den primitiven anſchaulichen Erkenntnisweiſen an und kann daher als Hilfsmittel der inhaltlichen Beweisführung angewandt werden.« (Bernays.)

In der Tat beginnt jeder Hilbertſche Widerſpruchsfreiheitsbeweis mit den Worten »Wir nehmen an, es ſei uns ein Beweis vorgelegt, der zur Endformel $0 \neq 0$ führt«. Und dann wird gezeigt, daß dies unmöglich iſt.

Aber, was iſt damit eigentlich gezeigt? Oder vielmehr: was iſt damit eigentlich vorausgeſetzt?

Es wird geſagt: »es liege ein Beweis abgeſchloſſen vor«. Genauer müßte es heißen »irgend ein Beweis«, mit dem Nebengedanken »das gilt von jedem beliebigen Beweis« (der überhaupt der Menge der auf Grund des in Frage ſtehenden Axiomenſyſtems zu führenden Beweiſe angehört). Denn nur, wenn man dieſe Interpretation des unbeſtimmten Artikels »ein« zuläßt, wird die Hilbertſche metamathematiſche Beweismethode zwingend. Wird hierbei aber nicht bereits die »weitere Form« des Prinzips der vollſtändigen Induktion angewandt? Spielt hierbei nicht bereits »der Allgemeinbegriff der Zahl oder das Operieren mit Variablen«

1) ſ. oben § 1 b. (S. 16.)

2) Bernays, Jahresber. d. D. Math. Vereinig. Bd. 31 (1922), S. 10 ff.

eine Rolle? Iſt nicht gerade das ſcheinbar ſo harmloſe »ein« ein verſchleierter Ausdruck für eine logiſche Variable[1]?

In der Tat iſt ja die Menge der aus einem beſtimmten Axiomenſyſtem zu führenden Beweiſe – trotzdem jeder einzelne Beweis aus einer endlichen Anzahl von »Zeichen« beſteht – unendlich[2]. Das beruht weſentlich darauf, daß man für den einzelnen Beweis B_q zwar eine Zahl M_q angeben kann, die die Anzahl ſeiner einzelnen Formeln übertrifft, aber daß es keine derartige obere Schranke M gibt, die für alle Beweiſe gleichzeitig gilt, ſodaß ſie alſo alle mit ihrer Formelzahl unter derſelben feſten Schranke liegen würden. (In ähnlicher Weiſe liegt die Sache etwa bei der allgemeinen Formel für $(a+b)^n$, dem binomiſchen Satz. Bis zu einer beſtimmten Zahl n, etwa für $n = 1, 2, 3 \ldots, 34$ kann man ihn durch finite (engere) Induktion beweiſen, aber nicht allgemein, obwohl doch auch im letzteren Fall jedes einzelne vorlegbare n endlich iſt.) Indem Hilbert bei ſeiner metamathematiſchen Beweisführung immer nur auf den einen, als Beiſpiel dienenden finiten Beweis hinblickt, vergißt er, daß er die weitere (verſchwiegene) Annahme macht, es könne die geſamte unendliche Menge ſolcher möglichen Beweiſe mit einem Blicke erfaßt werden. Aber das iſt eine petitio principii: es wird die »inhaltliche« (metamathematiſche) Erfaſſung der unendlichen (freilich nur indefiniten, nicht im engeren Sinne transfiniten) Menge vorausgeſetzt.

Man kann dies leicht noch weiter im einzelnen dartun, wenn man ſich der vorhin gemachten Zuordnung zu der aus Einſen und Zweien beſtehenden Zahlenfolge bedient.

Ein »Beweisfaden« werde dargeſtellt durch die Formelfolge: ($\mathfrak{A}$: Axiom, $\mathfrak{R}_1\ \mathfrak{R}_2 \ldots$: Konſequenzen.)

$$\mathfrak{A}\ \mathfrak{R}_1\ \mathfrak{R}_2\ \mathfrak{R}_3\ \ldots\ \mathfrak{R}_p$$

Zugeordnet ſei jeder Formel die 1, wenn ſie nicht $0 \neq 0$ iſt; die 2, wenn ſie $0 \neq 0$ iſt. Dann hat man alſo bei jedem einzelnen »richtigen« Beweis:

$$\begin{matrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{R}_1 & \mathfrak{R}_2 & \mathfrak{R}_3 & \ldots & \mathfrak{R}_p \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{matrix}$$

---

1) Es ſei daran erinnert, daß auch B. Ruſſell den logiſchen Sinn der mathematiſchen Variablen durch das engliſche Wort »any« (irgendein) ſprachlich wiedergibt. Vgl. The principles of mathematics (Cambridge 1903), § 87, p. 89.

2) Wenigſtens iſt das Problem des Nachweiſes der Widerſpruchsloſigkeit nur in dieſem Falle ſinnvoll oder wenigſtens nicht trivial. Es könnte vielleicht (!) ſein, daß aus beſtimmten Axiomenſyſtemen nur eine endliche Anzahl voneinander verſchiedener Folgerungen gezogen werden könnte (die ſich dann

Beim Widerſpruchsloſigkeitsbeweis handelt es ſich nun aber nicht um eine derartige endliche Folge, ſondern um jede mögliche derartige Folge, wie weit dieſe Folgerungsketten ſich auch ausdehnen mögen. Alſo um:

$$\begin{cases} \mathfrak{A}\,\mathfrak{K}_1\,\mathfrak{K}_2\,\mathfrak{K}_3\,\ldots\,\mathfrak{K}_p\,\mathfrak{K}_{p+1}\,\ldots\ldots & \text{in indefinitum} \\ 1\;1\;1\;1\;\ldots\;1\;1\;\ldots\ldots & \text{in indefinitum.} \end{cases}$$

Wie kann man zeigen, daß in der unteren Folge niemals (!) die 2 auftritt?

W. Ackermann hat die Methoden im einzelnen angegeben. Wie geht er vor?

Zunächſt führt er nach beſtimmten formalen Geſichtspunkten eine Unterſcheidung von »richtigen« und »falſchen« Formeln ein. Dabei handelt es ſich um »numeriſche Formeln«, d. h. ſolche, die außer den elementaren logiſchen Zeichen (für »und«, »oder«, »folgt«, »nicht«, »gleich«, »ungleich«) nur Zahlzeichen enthalten.

»Der Beweis der Widerſpruchsfreiheit vollzieht ſich nun auf folgende Weiſe. Man gibt ein Verfahren an, das die Formeln einer vorliegenden Beweisfigur, deren Endformel eine numeriſche Formel iſt, ſämtlich in numeriſche Formeln verwandelt, ſo weit ſie nicht ſchon ſolche ſind, und zeigt dann, daß auf Grund dieſes Verfahrens eine vorliegende Beweisfigur in ein Syſtem von lauter richtigen Formeln übergeht. Da $0 \neq 0$ falſch iſt, iſt damit die Widerſpruchsfreiheit des betreffenden Axiomenſyſtems gezeigt[1].«

Das Verfahren kann hier nicht im einzelnen geſchildert werden. Es verläuft im großen ſo: Man geht von der Endformel des Beweiſes ſchrittweiſe rückwärts, indem man alle Variablen Schritt für Schritt fortſchafft und gelangt ſo ſchließlich zur Anfangsformel, die offenbar ein Axiom iſt. Schließlich beſteht die ganze Beweisfigur aus numeriſchen Formeln. Dann heißt es weiter:

»Die Verbindung der Formeln durch das Schlußſchema bleibt unberührt. Sämtliche Formeln der Beweisfigur ſind in richtige übergegangen, falls dieſes mit den Axiomen der Fall iſt. Der Beweis der Widerſpruchsfreiheit eines Axiomenſyſtems iſt alſo erbracht, wenn es gelingt zu zeigen, daß bei der Verwandlung der Beweisfigur in numeriſche Formeln die Axiome in richtige Formeln über-

---

allenfalls in der Schlußkette wiederholen würden), aber dann kann man ja dieſe Folgerungen einzeln durchgehen, um ihre Widerſpruchsfreiheit feſtzuſtellen, wodurch die Löſung des Problems trivial wird.

1) Math. Ann. 93, S. 4.

gehen.« (Dies zu zeigen, bietet aber bei der endlichen Anzahl der Axiome keine Schwierigkeiten.)

Iſt man ſoweit gelangt, ſo iſt die Fortſetzung des Beweiſes leicht: Aus der »Richtigkeit« der Axiome (die nach gewiſſen rein formalen Kriterien beurteilt wird) folgt Schritt für Schritt die »Richtigkeit« der Konſequenzen. Die »Richtigkeit« überträgt ſich alſo in der Vorwärtsrichtung bis zur Endformel des Beweiſes. Dieſe kann alſo nicht »$0 \neq 0$« ſein. (Denn dieſe Formel iſt formal »falſch«.) Damit iſt der gewünſchte Beweis erbracht.

Dieſer metamathematiſche Beweis iſt ſtichhaltig für jede vorgelegte konkrete »Beweisfigur«, die ja notwendig endlich iſt. Denn man braucht alsdann nur die »engere Form« der vollſtändigen Induktion. Aber daraus folgt keineswegs, daß er für alle Beweisfiguren, die überhaupt möglich ſind, gilt. Man muß ſorgfältig zwiſchen den beiden Fällen unterſcheiden. Wenn man ſich auch jedes einzelne Glied einer unendlichen Menge vorſtellen kann, ſo iſt damit noch keineswegs geſagt, daß man ſich die ganze Menge als aktual unendliche vorſtellen kann. So kann man ſich von jeder einzelnen natürlichen Zahl einen deutlichen Begriff machen (ſie in beſtimmter Weiſe auch kategorial anſchauen). Aber man kann ſich von der aktual unendlichen Menge aller Zahlen durchaus keinen Begriff machen, ſondern nur von dem ins Endloſe gehenden Zählprozeß, der dieſe Menge als ἄπειρον δυνάμει ὄν erzeugt.

In ähnlicher Weiſe kann man ſich ſämtliche auf Grund eines beſtimmten Axiomenſyſtems möglichen Beweiſe nicht »nebeneinander«, als aktual unendliche Menge denken. Sondern man kann ſich nur einen (verzweigten) unendlichen Prozeß vorſtellen, der von den Axiomen ausgehend zu immer neuen Folgerungen führt. Bezüglich dieſes Prozeſſes beſteht aber nicht einmal die vollſtändige Disjunktion: entweder kommt im Verlauf des Prozeſſes die Formel $0 \neq 0$ irgendwo vor oder ſie kommt niemals und nirgends vor. (Denn im analogen Fall der ſchrittweiſe werdenden Folge gilt eine derartige Disjunktion offenbar nicht.)

Die Sachlage erinnert an eine ähnliche, die eintritt, wenn man den Satz von der (weiteren) vollſtändigen Induktion auf folgende Weiſe zu »beweiſen« verſucht:

Man nehme an, ein Lehrſatz, in den eine ganze Zahl m eingeht, und der erſtens für $m = 1$ richtig iſt, zweitens ſtets richtig iſt für $m = n + 1$, wenn er für $m = n$ gilt, ſei nicht für alle Zahlen $m = 1, 2, 3, 4 \ldots$ wahr. Denn müßte es eine erſte Zahl ν geben,

für die der Satz nicht gilt. Er iſt dann aber ſicher für $\nu - 1$ richtig. Setzt man nun $\nu - 1 = n$, ſo iſt $\nu = n + 1$ und man kommt zu einem Widerſpruch[1]«.

Es ſcheint zunächſt, als ob dieſer »Beweis« die »weitere Form« der Induktion auf die »engere« zurückführt. Aber das iſt eine Täuſchung. Denn er ſetzt (nach Hölder, l. c.) »gewiſſermaßen als logiſches Axiom voraus, daß, wenn nicht alle Glieder einer nur nach einer Seite unendlich ausgedehnten Folge eine beſtimmte Eigenſchaft beſitzen, ein erſtes Glied da ſein muß, das die betreffende Eigenſchaft nicht beſitzt[2].

Dieſes logiſche »Axiom« iſt aber nichts anderes als das auf endloſe Folgen (indefinite Mengen) angewandte Prinzip des ausgeſchloſſenen Dritten. Denn offenbar iſt es gleichbedeutend mit folgendem Satz: »Entweder beſitzen alle Glieder der endloſen Folge F die Eigenſchaft E, oder es gibt ein Glied (und ſogar ein »erſtes« Glied), das die Eigenſchaft E nicht beſitzt. Tertium non datur[3].« Man kommt alſo nicht darum herum, ſich mit der endloſen Folge in »inhaltlicher« (metamathematiſcher) Weiſe zu befaſſen und das läuft dann auf das Induktionsprinzip in der »weiteren« Form hinaus. Denn jenes »tertium non datur« für endloſe Mengen gilt ja eben, wie ſowohl von intuitioniſtiſcher wie von formaliſtiſcher Seite zugeſtanden wird, nicht allgemein.

---

1) Vgl. H. Poincaré, Wiſſenſchaft und Hypotheſe (deutſch von F. u. L. Lindemann, Leipzig 1904), S. 12. – O. Hölder, Die mathematiſche Methode (Berlin 1924), § 120, S. 344.

2) Hölder fügt noch folgende Anmerkung hinzu (l. c. Anm. 3): »Da überhaupt ein Glied, das die Eigenſchaft nicht beſitzt, in der Reihe vorkommen ſoll, d. h. nach einer endlichen Zahl von Schritten in der Reihe auftreten muß, ſo gehen dieſem Glied nur Glieder in endlicher Zahl voran, und man kann, wenn man die vorangehenden, die Eigenſchaft nicht beſitzenden Glieder ins Auge faßt, die auf Erſchöpfung der Menge gegründete Betrachtungsweiſe durchführen«, d. h. man kann unter dieſen endlich vielen die Eigenſchaft nicht beſitzenden Gliedern ein erſtes finden. – Indeſſen iſt dies eben, wie im Text erläutert, ein Satz über endloſe Folgen; denn jenes zuerſt genannte Glied, »das nach einer endlichen Zahl von Schritten (ſagen wir s) auftreten muß», iſt keineswegs in finiter Weiſe vorgegeben; man kann keineswegs a priori eine feſte obere Schranke M angeben, unter der die Zahl s liegen muß. Vielmehr kann s jede beliebige vorgegebene feſte Zahl M überſteigen. – Etwas ganz ähnliches hatten wir oben für die Beweisfiguren gezeigt.

3) Vgl. Hilberts eigene, ſchon früher angeführte Formulierung, Math. Ann. 88, S. 155.

Nun verfährt der Hilbertsche Beweis für die Widerspruchsfreiheit offenbar ebenso, wie der soeben zergliederte angebliche Beweis des Induktionsprinzips. Hilbert nimmt an, die Formel $0 \neq 0$ komme irgendwo in der deduzierten Formelfolge vor. Dann muß sie an einer bestimmten Stelle zum ersten Mal vorkommen. Dann kommt sie sicher unmittelbar vor dieser Stelle nicht vor.

Damit hat man dann ein endliches Anfangsstück der an sich ins endlose laufenden Deduktionskette gewonnen und man kann dann mit Recht das vorhin im Anschluß an W. Ackermann geschilderte finite Verfahren anwenden. – Aber, das sei zum Schluß nochmals wiederholt, der Schluß, die Formel $0 \neq 0$ müsse an einer bestimmten, vorlegbaren Stelle vorkommen, – wenn sie überhaupt je vorkommen kann – ist falsch! –

Man sieht aus diesen Überlegungen, daß Hilbert im Irrtum ist, wenn er meint, für die Widerspruchsfreiheit des Axiomensystems der Arithmetik und Analysis einen finiten Beweis gegeben zu haben, d. h. einen Beweis, der nur die »primitiven Anschauungstatsachen« der endlichen Mengenbeziehungen verwendet. Er braucht wesentlich zu seiner Beweisführung das Endlose.

Das Schema seines Beweisverfahrens muß so umgestaltet werden, daß ersichtlich wird, daß das Verfahren unbegrenzt fortgesetzt werden kann. So allein ist es möglich, festzustellen, daß $0 \neq 0$ niemals (!) als Konsequenz auftreten kann.

Die Umformung des Hilbertschen Beweisverfahrens ist sehr einfach. Die endlose Folge der Konsequenzen aus einem bestimmten Axiomensystem ist zunächst eine vielfach verzweigte, in viele endlosen Folgen auslaufende offene Mannigfaltigkeit nach Art eines Stammbaumes. Schneidet man ein bestimmtes Anfangsstück ab, so kann man es als »vorgelegte« endliche Beweisfigur F_1 wie bei Hilbert behandeln. Das Resultat der Behandlung ist dann, daß die Endformel dieser Figur »richtig« (also nicht $0 \neq 0$) ist. Dann kann man um ein bestimmtes endliches Stück F_2 in dem endlosen »Stammbaum« der Deduktionen weitergehen und nunmehr die vorhin als richtig erwiesenen Endformeln als Prämissen benutzen. Auf diese Weise werden sämtliche Beweisfäden (nach der festgesetzten Zerfällung) verlängert, und damit kommt man zu einer »verlängerten Beweisfigur« $(F_1 \to F_2)$. Diese kann man wieder auf dieselbe Weise »verlängern« $(F_1 \to F_2 \to F_3)$ und diesen Prozeß der Verlängerung einer Beweisfigur kann man unbegrenzt oft anwenden. Man erhält dadurch die offene endlose Beweisfigur $F_1 \to F_2 \to F_3 \to F_4 \to \ldots \to F_n \to F_{n+1} \to \ldots$ in indefinitum, mit lauter »richtigen« Formeln;

alſo eine geſetzmäßige endloſe Folge von richtigen Formeln. Damit iſt dann ein korrekter Widerſpruchsloſigkeitsbeweis zuſtande gebracht, der jenes falſche Axiom über die vollſtändige Disjunktion nicht vorausſetzt, – aber an ſeiner Stelle das Prinzip der vollſtändigen Induktion (im weiteren Sinne). Das iſt auch ganz natürlich, denn jenes Axiom gilt eben nur, wo »geſetzmäßige«, der Induktion unterworfene Folgen vorliegen.

Was leiſtet nun der ſo umgeſtaltete Beweis der Widerſpruchsfreiheit? Sofern er ſich auf die Theorie der finiten und indefiniten Mengen (ohne Benutzung des tertium non datur) beſchränkt, offenbar inhaltlich nichts. Er zeigt ja nur, daß das, was »inhaltlich« in der metamathematiſchen Darlegung benutzt wird, auch in formal-mathematiſcher Hinſicht widerſpruchsfrei iſt. Aber der Beweis ſelbſt wäre offenbar unſicher, wenn man dieſe Widerſpruchsloſigkeit des materiell in der metamathematiſchen Überlegung verwandten Beziehungsmaterials nicht vorausſetzt. Der Beweis gilt alſo nur, – wenn das zu Beweiſende gilt, – ein immerhin etwas grotesker Sachverhalt.

Schließlich läuft die ganze Sache darauf hinaus, daß eine ſo offenſichtlich die Endloſigkeit begrifflich implizierende Frageſtellung wie die nach der Widerſpruchsfreiheit eben auch nur unter Verwendung dieſes Begriffs des Endloſen beantwortet werden kann; im Grunde eher eine Trivialität als eine Paradoxie. Auch iſt dieſer Sachverhalt von H. Poincaré[1] ſchon vor Jahren klar erkannt worden. Aber angeſichts des blendenden Scheins der Hilbertſchen Argumentation bedurfte es wohl dieſer langwierigen und pedantiſchen Widerlegung[2]. —

1) Vgl. die oben (S. 46) angeführten Stellen. – Ferner auch: A. Fraenkel (Einleitung in die Mengenlehre, 2. Aufl., Berlin 1923) S. 239/40: »Ein ernſteres Bedenken [gegenüber der Hilbertſchen Theorie] bezieht ſich darauf, ob überall bei den inhaltlichen Schlüſſen die Benutzung ſolcher logiſchen Prinzipien ſtreng vermieden wird und ſich vermeiden läßt, deren Begründung eben das Ziel jener Schlüſſe iſt, alſo ob z. B. in bezug auf das logiſche Schließen, das ſich in zwar endlichen, aber nicht beſchränkten Prozeſſen vollzieht, Geſetze wie die von der vollſtändigen Induktion [in der »weiteren Form«] oder vom ausgeſchloſſenen Dritten [in bezug auf endloſe Mengen] niemals verwendet zu werden brauchen, bevor ſie durch die neue Methode endgültig gerechtfertigt ſind.« – (Die Zuſätze in [] ſind von mir.)

2) Zur Ergänzung ſei noch die Kritik des der Hilbertſchen Argumentation analogen Schachbeiſpiels bei Weyl (Sympoſion I, S. 22–26; Math. Zeitſchr. 20, S. 147 f.) angeſchloſſen. Es heißt bei Weyl, zum Beweis dafür, »daß beim Schachſpiel 10 Damen einer Farbe in einer ſpielgerechten Stellung unmöglich ſind«: »Die Zugregeln lehren, daß ein Zug die Summe

Indeſſen iſt mit der Sicherſtellung der eben genannten Trivialität noch bei weitem nicht alles geſagt. Vor allem iſt damit doch nur ein Teil der Hilbertſchen Beweisführung getroffen: nämlich der, der ſich auf die (»intuitioniſtiſche«) Theorie der finiten und indefiniten abzählbar unendlichen Mengen bezieht, dagegen nicht derjenige, der vom allgemeinen tertium non datur und von der Theorie der eigentlich transfiniten (nicht abzählbar unendlichen) Mengen handelt. Dieſer letzte Beweis iſt weit davon entfernt, trivial zu ſein, wenn er die widerſpruchsloſe »Anſetzbarkeit« des Transfiniten zeigt, unter Verwendung lediglich finiter und indefiniter Begriffsbildungen. – Andrerſeits iſt das Endloſe als notwendiges Thema inhaltlicher (ſachlicher) Unterſuchung erwieſen. Der extreme Finitismus Hilberts iſt alſo abzulehnen und das gute Recht der intuitioniſtiſchen Forſchung anzuerkennen[1].

§ 4.

Logiſche Analyſe der intuitioniſtiſchen Theſen.

a) Die Leugnung des Satzes vom ausgeſchloſſenen Dritten.

Nachdem die im Vorigen gegebene immanente Kritik der Hilbertſchen Theorie die Unentbehrlichkeit der Theorie des

(𝔅 + 𝔇) der Anzahl der Bauern (𝔅) und Damen (𝔇) einer Farbe niemals vermehren kann. Im Anfang iſt dieſe Summe gleich 9, alſo kann ſie – hier vollziehen wir einen anſchaulich-finiten (?) Schluß durch vollſtändige Induktion — bei keiner Stellung in einer Partie dieſen Wert überſchreiten.« – Dieſer Beweis iſt nicht »anſchaulich-finit«, ſondern anſchaulich-indefinit (endlos). Zwar kann man (wenn man von gewiſſen Remis-Partien, die in der Beweistheorie kein rechtes Analogon haben, abſieht) ſagen, daß jede einzelne Partie aus endlich vielen Zügen beſteht. Aber man kann keine feſte obere Schranke M angeben, unter der auf jeden Fall die Zahl der Züge zu bleiben hat. Es gibt daher unendlich viele mögliche Schachpartien; d. h. man kann keine obere Schranke M für ihre Anzahl angeben. Will man alſo eine Überſicht über alle möglichen Partien gewinnen, ſo muß man dazu eine endloſe werdende Folge von Zügen aufſtellen (die dann im einzelnen für ein endliches Anfangsſtück der Folge, ſagen wir von s Gliedern, eine endliche Anzahl K_s Kombinationsmöglichkeiten von elementaren Zügen enthält). – Wenn alſo in dem Weylſchen Beweis von »keiner Stellung« die Rede iſt, ſo kann nur gemeint ſein, »keine aus der endloſen Folge von möglicherweiſe in irgend einer möglichen Partie noch zu ſpielenden Stellungen«. Der Beweis beruht dann darauf, daß ſich die Konſtanz der Summe 𝔅 + 𝔇 von der n^{ten} Stellung allgemein auf die $(n+1)^{\text{te}}$ überträgt. Hierbei iſt nach dem Geſagten aber weſentlich, daß dieſe Übertragung ins Endloſe (in die offene Unendlichkeit hinein), in indefinitum, ſtattfindet.

1) S. hierzu den »Mathematiſchen Anhang«, beſonders über neue Unterſuchungen von J. v. Neumann.

Endloſen innerhalb gewiſſer Grenzen dargetan hat, iſt die logiſche Klärung dieſer Theorie von ausſchlaggebender Bedeutung für die Grundlegung der Mathematik geworden. Brouwer hat bekanntlich dieſe Klärung in Angriff genommen mit ſeiner Theſe, daß der logiſche Satz vom ausgeſchloſſenen Dritten für unendliche Mengen keine Geltung mehr habe. Er ſagt:[1] »Meiner Überzeugung nach ſind das Lösbarkeitsaxiom[2] und der Satz vom ausgeſchloſſenen Dritten beide falſch, und iſt der Glaube an ſie hiſtoriſch dadurch verurſacht worden, daß man zunächſt aus der Mathematik der Teilmengen einer beſtimmten endlichen Menge die klaſſiſche Logik abſtrahiert, ſodann dieſer Logik eine von der Mathematik unabhängige Exiſtenz a priori zugeſchrieben und ſie ſchließlich auf Grund dieſer vermeintlichen Apriorität unberechtigterweiſe auf die Mathematik der unendlichen Mengen angewendet hat.« Der Tatbeſtand, auf den ſich dieſe Theſe ſtützt, iſt im Vorigen wiederholt dargeſtellt worden: In einer unendlichen Folge von Zahlen etwa beſteht nicht die Alternative, daß entweder alle Zahlen der Folge die Eigenſchaft E haben oder es (mindestens) eine Zahl der Folge gibt, welche die Eigenſchaft E nicht beſitzt.

Dieſer Tatbeſtand kann nun aber verſchieden interpretiert werden; man kann etwa folgende Auffaſſungen anführen:

1. Das genannte »entweder – oder« bezeichnet wirklich eine vollſtändige Disjunktion im formalen Sinn. Aber der Satz vom ausgeſchloſſenen Dritten gilt nicht. (Brouwer.)

2. Es bezeichnet nur ſcheinbar eine vollſtändige Disjunktion: in Wahrheit ſtehen die beiden disjunktiven Glieder ſich nicht wie Poſition und Negation gegenüber (Weyl), d. h. rein formell beſteht nur die Alternative »entweder alle Zahlen haben die Eigenſchaft E oder nicht«. Aber daß nicht alle Zahlen die Eigenſchaft E haben, und daß es eine Ausnahme poſitiv gibt, das iſt nicht dasſelbe!

3. Wenn es auch immer eine ſolche Ausnahme in abstracto »gibt«, ſo kann ſie doch nicht immer »vorgelegt« werden. (Hilberts Formulierung).

Vielleicht iſt die dritte Interpretation diejenige, die die tatſächlich ſtattfindenen Verhältniſſe am beſten zu charakteriſieren ſcheint. Denn es kommt doch vor allem auf folgenden Punkt an: Weiß man, daß in einer Zahlenfolge nicht alle Zahlen von Eins verſchieden ſind,

1) In ſeinem Aufſatz »Intuitioniſtiſche Mengenlehre«, Jahresber. d. D. Math. Ver., Bd. 28, S. 203 ff. (1919).

2) d. h. die Annahme, daß jedes mathematiſche Problem grundſätzlich lösbar ſei. (Vgl. Hilbert, Math. Ann. 78, S. 412; 95, S. 180.)

ſo iſt gewiß, daß nach einer endlichen Anzahl N von Wahlen die 1 auftritt, aber es kann a priori durchaus keine feſte Zahl M – ſei ſie auch noch ſo groß gewählt – angegeben werden, derart, daß N niemals größer als M iſt[1].

Immerhin kann man gerade gegen dieſe Auffaſſung der Sachlage Bedenken haben. Denn man erwäge die folgende Disjunktion und frage ſich, ob ſie notwendig entſcheidbar ſein muß: Von zwei Fällen muß einer ſtattfinden: »entweder muß die Ausnahmezahl niemals auftreten oder nach einer endlichen Anzahl N von Wahlen, wenn auch keineswegs für dieſe Anzahl N eine feſte obere Schranke M angegeben werden kann.«

Iſt dies wirklich eine ſinnvolle Alternative? Offenbar iſt doch der (in gewiſſem Sinn »dritte«) Fall denkbar, daß man, ſo lange man auch wartet, niemals zu einer Ausnahmezahl kommt. Da man aber offenbar nicht unbegrenzt lange warten kann, ſo läßt ſich in dieſem Fall durchaus nicht entſcheiden, ob in einer endlichen Zukunft die Ausnahmezahl erſcheinen wird oder nicht.

Dagegen läßt ſich ſehr wohl (im Prinzip) die Sache entſcheiden, wenn man eine – wenn auch noch ſo große — obere Schranke M für die Ordnungszahl der »entſcheidenden« Wahl kennt. Die Entſcheidungswahl kann dann konkret ins Auge gefaßt werden und ſie iſt dann offenbar der Alternative »ja-nein« unterworfen.

Man hätte alſo nur eine ſinnvolle vollſtändige Disjunktion: entweder erſcheint nach einer beſtimmten, unter einer feſten oberen Schranke M liegende Anzahl N von Wahlen die Ausnahmezahl oder ſie iſt auch nach der M^{ten}-Wahl nicht erſchienen. Tertium non datur. Innerhalb der zweiten Möglichkeit noch Unterſchiede zu machen, entbehrt des verifizierbaren Sinnes.

Indeſſen bei dieſer Auffaſſung iſt das »nicht alle Zahlen der Folge beſitzen die Eigenſchaft E« nicht eindeutig beſtimmt und die rein formal gebildete vollſtändige Disjunktion ohne rechten Sinn. Die Hilbertſche Unterſcheidung zwiſchen dem »es gibt eine Ausnahme, ſie iſt aber nicht vorlegbar« und »es gibt keine Ausnahme« iſt nicht verifizierbar.

Man muß verſuchen, die ganze Sache prinzipieller zu erwägen. Es ſei gegeben ein Satz p. Denkt man ſich ſein kontradiktoriſches Gegenteil, den Satz $\bar{p}$ (nicht-p) hinzu, ſo beſteht die vollſtän-

1) Wie ſich derartige Verhältniſſe u. U. bei konkreten mathematiſchen Problemen auswirken können, darüber hat Hilbert (Math. Ann. 78, S. 412–15) in ſeinem Aufſatz »Axiomatiſches Denken« ſehr lehrreiche Ausführungen gemacht.

dige Disjunktion p oder $\bar{p}$, tertium non datur. Das iſt der übliche logiſche Standpunkt.

Indeſſen, bei genauerer Erwägung erkennt man, daß die negative Ausſage $\bar{p}$ mehrteilig, nämlich zweiteilig iſt: Für p kann man auch ſagen »p gilt«. Oder wenn man einen prädikativen Satz nimmt: Für »A iſt b« kann man auch ſagen »Es gilt der Satz $\langle\langle A$ iſt $b\rangle\rangle$«.

Wie ſteht es aber mit dem $\bar{p}$? Man kann dafür offenbar in analoger Weiſe ſagen: »$\bar{p}$ gilt« oder in der ausführlichen Faſſung: »Der Satz $\langle\langle A$ iſt nicht $b\rangle\rangle$ gilt«. Aber das iſt nicht die einzige Möglichkeit, p zu negieren. Es gibt noch die zweite folgende: Man faßt als das kontradiktoriſche Gegenteil des Satzes p oder »p gilt« uſw. die Ausſage auf: »p gilt nicht« bzw. »der Satz $\langle\langle A$ iſt $b\rangle\rangle$ gilt nicht«.

Rein formal hat man alſo nach dem bisher Entwickelten folgende drei Möglichkeiten:

1. »p gilt« ſymboliſch etwa »$+p$« .... (1)
2. »$\bar{p}$ gilt« „ „ »$+(-p)$« .... (2)
3. »p gilt nicht« „ „ »$-(+p)$« .... (3)

bzw.:

1. »Der Satz $\langle\langle A$ iſt $b\rangle\rangle$ gilt« ſymboliſch: $A \varepsilon b$
2. »Der Satz $\langle\langle A$ iſt nicht $b\rangle\rangle$ gilt« „ $A \varepsilon \bar{b}$
3. »Der Satz $\langle\langle A$ iſt $b\rangle\rangle$ gilt nicht« „ $\overline{A \varepsilon b}$

oder allgemeiner:

1. $A(a)$ 2. $\bar{A}(a)$ 3. $\overline{A(a)}$

Welche logiſchen Beziehungen beſtehen zwiſchen dieſen 3 Ausſagen (1), (2), (3)? —

a) (1) ſchließt ſich mit (2) und auch mit (3) aus. Dagegen ſind (2) und (3) verträglich.

b) Aus (2) folgt (3), aber nicht umgekehrt aus (3) (2). (2) und (3) ſind daher i. A. nicht äquivalent. Doch kann dies in beſonderen Fällen eintreten.

c) Es gilt entweder (1) oder (2) oder (3); die 3 Möglichkeiten bilden eine vollſtändige Disjunktion; quartum non datur.

Zuſammenfaſſend kann man ſagen: es beſtehen folgende Möglichkeiten:

I. (1) gilt; (2) und (3) gelten nicht.

II. (1) gilt nicht; (2) und (3) gelten.

III. (1) und (2) gelten nicht; (3) gilt.

Die übrigen rein formal denkbaren Kombinationen des Geltens bzw. Nichtgeltens von (1), (2), (3) ſtellen keine ſinnvollen Möglichkeiten dar.

Um die Bedeutung dieſer formallogiſchen Beziehungen deutlich zu machen, unterſcheidet man am zweckmäßigſten zwei Fälle: einen normalen und einen abnormalen.

α) Der normale Fall findet ſtatt, wenn die mögliche aber nicht notwendige Äquivalenz zwiſchen (2) und (3) beſteht. (vgl. b). –

Dann hat man nur eine zweifache vollſtändige Disjunktion, (Dichotomie, tertium non datur).

β) Der abnormale Fall findet ſtatt, wenn (2) und (3) nicht äquivalent ſind. (Alsdann folgt, nach b, (3) aus (2), aber nicht umgekehrt.)

Hier findet eine dreifache vollſtändige Disjunktion ſtatt. (Trichotomie; quartum non datur.)

Der Fall (α) iſt verwirklicht für die Betrachtung von Eigenſchaften endlicher Mengen, genauer der Teilmengen einer endlichen Menge. Das iſt derjenige Fall, von dem nach Brouwers vorhin zitierten Worten »die klaſſiſche Logik abſtrahiert« iſt.

Der Fall (β) iſt dagegen realiſiert z. B. bei der Betrachtung von Eigenſchaften endloſer Zahlfolgen. Dieſer Fall iſt alſo noch näher zu klären. Bei ihm muß man, wie geſagt zwiſchen den beiden möglichen Negationen (2) und (3) des poſitiven Satzes (1) ſorgfältig unterſcheiden[1].

Die Notwendigkeit dieſer Unterſcheidung kann in konkreter Weiſe klar gemacht werden mittels der Huſſerlſchen Lehre vom Urteil[2].

Damit ein Urteil mit der den Forderungen logiſcher Vernunft entſprechenden Evidenz gefällt werden kann, muß ihm ein mittels der kategorialen erfüllten Anſchauung zur Evidenz gebrachter Sachverhalt zugrunde liegen[3]. Dieſer Sachverhalt kann ein poſitiver oder negativer ſein. Auch negative Sachverhalte ſind der Erfüllung in einer ganz beſtimmten Modifikation zugänglich. Es ſei an folgende Ausführungen der »Logiſchen Unterſuchungen« erinnert: (VI. Unterſuchung § 11; Bd. II, 2, S. 41): »In der weiteren Sphäre der Akte, welche überhaupt Unterſchiede der Intention und Erfüllung zulaſſen, reiht ſich der Erfüllung, als ihr ausſchließender Gegenſatz, die Enttäuſchung an. Der zumeiſt negative Ausdruck, der hierbei zu dienen pflegt, wie z. B. auch der Ausdruck Nichterfüllung,

1) Über den Formalismus der Brouwerſchen Logik ſ. den mathematiſchen Anhang.

2) In der VI. logiſchen Unterſuchung. (Bd. II, 1.)

3) Vgl. Huſſerl, l. c. § 39 (Log. Unterſuchungen II, 2, S. 122 ff.).

meint keine bloße Privation der Erfüllung, ſondern ein neues deſkriptives Faktum, eine ſo eigenartige Form der Syntheſis wie die Erfüllung. . . . . Die Syntheſis der Erkenntnis war Bewußtſein einer gewiſſen »Übereinſtimmung«. Der Übereinſtimmung entſpricht aber als korrelate Möglichkeit die »Nichtübereinſtimmung«, der »Widerſtreit«. Die Anſchauung »ſtimmt« zur Bedeutungsintention nicht, ſie »ſtreitet« mit ihr. Widerſtreit »trennt«, aber das Erlebnis des Widerſtreites ſetzt in Beziehung und Einheit, es iſt eine Form der Syntheſis. War die frühere Syntheſis von der Art der Identifizierung, ſo iſt die jetzige von der Art der Unterſcheidung. . . . . In der hier fraglichen »Unterſcheidung« erſcheint der Gegenſtand des enttäuſchenden Aktes als »nichtderſelbe«, als »anders« wie der Gegenſtand des intendierenden Aktes. . . . . Völlig gleichgeordnet ſind die beiden Syntheſen allerdings nicht. Jeder Widerſtreit ſetzt etwas voraus, was der Intention überhaupt die Richtung auf den Gegenſtand des widerſtreitenden Aktes gibt, und dieſe Richtung kann ihr letztlich nur eine Erfüllungsſyntheſis geben. . . . . Eine Intention enttäuſcht ſich in der Weiſe des Widerſtreites nur dadurch, daß ſie ein Teil einer umfaſſenderen Intention iſt, deren ergänzender Teil ſich erfüllt«. Die Lehre Huſſerls beſagt alſo zunächſt: Erfüllung und Enttäuſchung verhalten ſich wie Poſition und Negation: Enttäuſchung iſt Nichterfüllung; damit gleichbedeutend iſt das Bewußtſein der Nichtübereinſtimmung zwiſchen Intendiertem und Angeſchautem, des Widerſtreits. Um dies Bewußtſein entſtehen zu laſſen, iſt es aber offenbar notwendig, Intendiertes und Angeſchautes gleichermaßen gegenwärtig zu haben; deshalb iſt auch die Enttäuſchung eine »Syntheſis«, die »Syntheſis des Widerſtreits«. Damit aber feſtgeſtellt werden kann (was doch offenbar für das Zuſtandekommen der Syntheſis notwendig iſt), daß ein beſtimmter intendierter Gegenſtand einem beſtimmten angeſchauten »entſpricht«, mit welchem er nach der vorwegnehmenden Erwartung, die in jeder auf Erfüllung »ausſeienden« Intention liegt, übereinſtimmen ſollte, – dazu iſt erforderlich, daß die Intention wenigſtens in Etwas erfüllt wird[1].

1) Zur Erläuterung diene ein einfaches Beiſpiel: Wie kommt etwa das Urteil »Das Buch liegt nicht auf dem Tiſch« zuſtande? Erwartet wird, daß das fragliche Buch auf dem beſtimmten Tiſch liegt. Der Augenſchein (eine Weiſe der Anſchauung) zeigt: 1. den betreffenden gemeinten Tiſch, 2. den Sachverhalt, daß das gemeinte Buch nicht darauf liegt, d. h. das Leerſein des Tiſches. Zur evidenten Fällung des obigen Urteils iſt der erſte Punkt

Die Übereinſtimmung zwiſchen Intendiertem und Angeſchautem muß hinreichend ſein, um die Identität des angeſchauten Gegenſtandes mit dem in der Intention vermeinten zu ſichern; erſt auf Grund dieſer Identifizierung hebt ſich dann die unterſchiedliche wirkliche Beſchaffenheit des angeſchauten Gegenſtandes von der ihm vermeintlich zukommenden ab. Im Grunde iſt alſo jeder Widerſtreit ein partieller Widerſtreit[1].

Erwägt man dieſe ganze Hufſerlſche Lehre, ſo erſcheint die vorhin vollzogene Gleichſetzung der Termini »Enttäuſchung« und »Nichterfüllung«, »Widerſtreit« und »Nichtübereinſtimmung« nicht gerechtfertigt. Wenn die Enttäuſchung und der Widerſtreit poſitive Phänomene sui generis ſind, weshalb dann dieſe negativen Bezeichnungen? Dieſe ſind nur am Platze, wenn hinter der Gleichſetzung der Ausdrücke auch eine Gleichheit der damit bezeichneten Gegenſtände ſteht. Dies iſt aber gerade wegen des durchaus poſitiven Charakters jener Sachverhalte nicht der Fall.

Genauer geſagt: Eine einfache Nichterfüllung iſt durchaus noch keine poſitiv erlebte Enttäuſchung. Denn es kann doch ſein, daß es weder zu einer Erfüllung noch zu einer Enttäuſchung kommt. Das erhellt aufs klarſte daraus, daß jeder Enttäuſchung eine partielle Erfüllung zu Grunde liegen muß. Wie nun, wenn es zu gar keiner Erfüllung kommt? Analog ſetzt »Widerſtreit« eine teilweiſe Übereinſtimmung voraus. Wenn es nun aber zu gar keiner Übereinſtimmung kommt, – und das iſt doch wohl der ausgeprägteſte Fall der Nicht-Übereinſtimmung – wo iſt dann der Widerſtreit?

Alſo haben doch wohl »Nicht-Erfüllung« und »Nicht-Übereinſtimmung« ihren guten rein negativen (bzw. privativen) Sinn? Oder vielleicht doch nicht? Vielleicht iſt in dieſen ſcheinbar rein negativen Fällen das übereinſtimmende und ſich erfüllende Moment nur eine Stufe weiter zurückgedrängt?[2]

---

ebenſo nötig wie der zweite. Der erſte gibt die Erfüllungsſyntheſis (Identifizierung des gemeinten und geſehenen Tiſches), auf Grund deren allererſt das Nicht-Liegen gerade auf dieſem Tiſch zur Gegebenheit gebracht werden kann, indem es zu einer Syntheſis des Widerſtreits (der »Nichtübereinſtimmung« der Intention auf das auf dem Tiſch liegende Buch mit dem wahrgenommenen leeren Tiſch) kommt.

1) Dieſe Verhältniſſe ſind von Hufſerl genauer in § 12 der zitierten VI. Unterſuchung auseinandergeſetzt worden (l. c. S. 44 f.).

2) Auch nach Hufſerl (l. c. S. 44 f.) beſteht die »totale und reine« Enttäuſchung in dem pointierten Herausgehobenſein lediglich des unterſchiedlichen Teilmoments ϑ (bzw. $\bar{\vartheta}$) am Ganzen Θ. Aber das Ganze Θ ſteht doch mit ſeinen übereinſtimmenden Momenten $\mu, \iota \ldots$ im Hintergrund.

Man wird dieſe Fragen nur an der Hand einer konkreten Analyſe entſcheiden können.

Man nehme als Vorbereitung den einfachen Sachverhalt »das Buch liegt nicht auf dem Tiſch«. – 1. Enttäuſchung bedeutet hier: der Tiſch wird geſehen, aber das Buch iſt nicht darauf; alſo Erfüllung in Bezug auf das originäre Gegebenſein des vermeinten Tiſches; partielle Enttäuſchung hinſichtlich des ſupponierten Daraufliegen des Buches.[1]

2. Nicht-Erfüllung beſagt (oder kann doch beſagen): Weder der Tiſch noch das Buch werden geſehen. Der Sachverhalt iſt alſo ſicher nicht als mit der Intention übereinſtimmend gegeben. Aber er iſt auch nicht im Widerſtreit (im eigentlichen Sinne) mit ihr gegeben. Er iſt eben gar nicht gegeben.

Aber iſt dies ſtreng genommen richtig? Iſt denn wirklich gar kein Sachverhalt gegeben? Iſt gar nichts gegeben? Kann überhaupt gar nichts gegeben ſein?

Offenbar nicht. Es iſt vielleicht das Zimmer gegeben, worin der Tiſch und das Buch ſich gewöhnlich befanden, woraus ſie aber entfernt ſind. Oder das Haus iſt verſchloſſen und das Zimmer nicht betretbar und alſo auch nicht »originär gegeben« uſw. uſw. In allen ſolchen Fällen wird man auf die Frage: »Liegt das Buch auf dem Tiſch?« nicht etwa die Antwort geben: »Es liegt nicht auf dem Tiſch« ſondern etwa: »Der Tiſch iſt überhaupt nicht da« oder: »Ich weiß nicht, ich kann nicht in das Zimmer hinein.«

Aber eine gewiſſe, wenn auch »ſchwächere« Erfüllung der Intention iſt doch auch hier vorhanden; das Zimmer bzw. das Haus iſt »übereinſtimmend« mit dem vermeinten Zimmer und dem vermeinten Haus, die im Falle »totaler Erfüllung« fundierend geweſen wären für das Daſein des Tiſches und Buches, – nicht etwa nur »objektiv kauſal«, ſondern durchaus im phänomenologiſchen Sinn als »Hintergrund«, umſchließende phänomenale Örtlichkeit, als örtlicher Zugang im Sinne des praktiſchen Lebens uſw.

Man nehme ſelbſt einen extremen Fall: Für den in einem tiefen Kerker Eingeſchloſſenen iſt der größte Teil der Welt unzugänglich, nicht »originär gegeben.« Für ihn ſind alſo die Intentionen von Wahrnehmungsurteilen (auf ſolche beſchränken wir uns der Einfachheit halber) zumeiſt nicht erfüllbar. Indeſſen irgendwie beſteht doch auch ein denkbarer Zugang zu den Wahrnehmungs-

1) Dieſe Enttäuſchung kann natürlich noch auf verſchiedene Weiſe zuſtandekommen. Einmal etwa wird das Buch überhaupt nicht geſehen, das andere Mal ſieht man es z. B. auf dem Boden liegen uſw.

ſachverhalten, wenn er auch de facto verſperrt iſt. Und das »Anfangsſtück« dieſes Zugangsweges für den Gefangenen, etwa, um ganz konkret zu ſein, der Weg von ſeinem Lager bis zur freilich verſchloſſenen Kerkertüre, iſt originär gegeben und durchſchreitbar. Er repräſentiert alſo die partielle Erfüllung des im Urteil Vermeinten – in gewiſſem Sinne. Denn – daran muß man ſtreng feſthalten, dann wird auch der Schein des Paradoxen verſchwinden – ein konkret und originär gegebener Sachverhalt läßt ſich nicht von ſeinem phänomenalen Zugang trennen, der Zugang gehört mit zum Phänomen. Er fällt nur zumeiſt nicht ins Auge, wenn er leicht und »ſelbſtverſtändlich« iſt.[1]

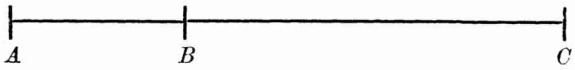
Man muß ſich davor hüten, dieſen »Zugangsſachverhalt« als »ſubjektiv« aufzufaſſen, etwa prinzipiell zu ſcheiden den »objektiven« Sachverhalt: »das Buch iſt nicht auf dem Tiſch« und den »ſubjektiven«: »Ich kann nicht in das Zimmer hinein«. Das wäre eine ganz ſchiefe Gegenüberſtellung. Man kann den erſten Sachverhalt auch ſubjektiv wenden: »Ich ſehe, daß auf dem Tiſch kein Buch liegt« und den zweiten (was für uns wichtiger iſt) objektiv: »das Zimmer iſt nicht gegeben«. Natürlich kann man einen Unterſchied der Fälle danach machen, ob die in der Ausgangsfrage: »Iſt $A\ b$?« oder: »Hat a die Beziehung R zu b?« explizit angeführten Gegenſtändlichkeiten zum Teil wenigſtens im originär gegebenen Sachverhalt vorhanden ſind oder nicht. Aber man darf über dieſer berechtigten Unterſcheidung nicht vergeſſen, daß der wirkliche Sachverhalt, dem nachgefragt wird, auch noch eine Fülle von impliziten, fundierenden Momenten enthält. Von den expliziten Momenten kann u. U. keines gegeben ſein. Aber von den impliziten Momenten, die ſchließlich ſtets bis zum faktiſchen

1) Es liegt der geſchilderten Analyſe ein allgemeines methodiſches Grundprinzip der Phänomenologie zugrunde, das in einer früheren Arbeit des Verfaſſers als »Prinzip des tranſzendentalen Idealismus« bezeichnet wurde. (S. Jahrb. f. Philoſ. u. phän. Forſch., Bd. 6, S. 387/88, S. 405, Anm. 2, S. 412, S. 413.) Man kann es kurz mit den Worten andeuten: »Zu jeder Gegenſtändlichkeit gibt es (im Prinzip, d. h. abgeſehen von »techniſchen« Schwierigkeiten) einen Zugang«. Damit erſt iſt jegliche Gegenſtändlichkeit als Phänomen charakteriſiert und dem ſchlechthin univerſalen Anſpruch der tranſzendentalen Phänomenologie (für die jedes Sein mit Konſtituiertſein gleichbedeutend iſt) Genüge geſchehen. – Dies iſt der zunächſt ſich darbietende Aſpekt des »phänomenologiſchen Zugangsprinzips« (dieſer Terminus ſoll im folgenden vorzugsweiſe verwandt werden). Über die nähere Explikation und Weiterbildung bzw. Umgeſtaltung dieſer Auffaſſung kann hier nicht geſprochen werden.

Leben (Daſein) des Urteilenden ſelbſt führen[1], müſſen immer irgendwelche gegeben ſein. – Im Schlafe kann man nicht einmal ſagen: »Von dem betreffenden Sachverhalt iſt nichts gegeben«.

Außer dieſem elementaren und vielleicht zu trivialen Beiſpiel ſei noch ein anderes, mathematiſches gebracht, bevor das eigentliche Brouwerſche Problem zur Sprache kommt. Wir entnehmen es der feinſinnigen Analyſe, die O. Hölder kürzlich[2] vom indirekten Beweisverfahren gegeben hat. Er braucht den (indirekten) Beweis des ſog. archimediſchen Hilfsſatzes aus dem Dedekindſchen Stetigkeitsaxiom als Beiſpiel.

Die Strecke AB ſei ein Teil von AC (ſ. Figur).



Angenommen, es würde AC von keinem Vielfachen von AB übertroffen (oder erreicht), ſo kann man die Punkte P rechts von A einteilen in ſolche, daß AP übertroffen und ſolche, daß AP nicht übertroffen wird von einem genügend vervielfachten AB. Die Einführung des Dedekindſchen »Schnittpunktes« X zwiſchen dieſen beiden Punktmengen ergibt einen Widerſpruch[3].

Folglich exiſtiert der Punkt X garnicht. – Wieſo kann man aber doch mit ihm operieren? Hier iſt ebenfalls nicht »nichts« gegeben! –

Man denkt ſich ſtatt des Vielfachen von AB gewiſſe wachſende Strecken AA_1, AA_2, AA_3, ..., die nicht gerade Vielfache von AB ſind. Dann kann es zwei Punktklaſſen, diejenigen Punkte, die von der Folge übertroffen werden und ſolche, die nicht übertroffen werden, geben und alſo auch den Punkt X. »Wir können nun dieſen Fall einmal an Stelle des urſprünglichen ſetzen und ihn als Abbild des früheren (unmöglichen) Falles betrachten, freilich mit der Einſchränkung, daß hier nicht zu jeder Relation des abzubildenden Sachverhalts eine entſprechende Relation im Abbild zu finden iſt.«

Man erhält dann, wenn X der Trennungspunkt der Klaſſen iſt und X_1 links und X_2 rechts von X in kleinerem Abſtand als AB liegt, die Figuren:

---

1) Hier tritt wieder das ſchon erwähnte phänomenologiſche Zugangsprinzip hervor.

2) S. »Die mathematiſche Methode« (Berlin 1924), § 118, S. 329–31.

3) Denn (vgl. l. c. § 30, S. 90) wählt man zwei Punkte X_2 und X_1 rechts und links gleichweit von X, in geringerem Abſtand als die Länge von AB, ſo wird X_1 nach Vorausſetzung von einem Vielfachen von AB übertroffen: $\mu \cdot AB > AX_1$, aber: $X_1X = XX_2 < AB$ . . . . . (1)

Alſo iſt: $(\mu + 1) \cdot AB = \mu \cdot AB + AB > AX_1 + X_1X = AX$.

Es wird alſo AX übertroffen.

Anderſeits iſt für X_2 nach Vorausſetzung für jede Zahl ν:

$$AX_2 > \nu \cdot AB \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Es iſt aber $AX + XX_2 = AX_2B_2$, folglich wegen (1) und (2)

$$AX + AB > \nu \cdot AB,$$

d. h. AX iſt größer als das $(\nu-1)$fache, ſomit größer als jedes Vielfache von AB. – Damit iſt ein Widerſpruch erreicht.



Nimmt man nun die vorhin fallengelaſſene Bedingung, daß

$$A_\mu A_{\mu+1} = A_{\nu-1} A_\nu = AB$$

ſein ſoll, wieder auf, ſo ergeben ſich (da doch $X_1 X = X X_2 < AB$ iſt), folgende Bilder:



Dieſe Figuren ſind jede für ſich möglich. Nimmt man aber hinzu, daß μ ein genügend hoher und ν ein beliebiger Index ſein ſoll, ſo kann man $\nu - 1 = \mu + 1$ ſetzen; alſo $A_{\nu-1} \equiv A_{\mu+1}$.

Dann iſt aber derſelbe Punkt bald rechts, bald links von X, was unmöglich iſt, ſobald man ſich die Figuren wieder zuſammengeſetzt, d. h. ſo aufeinander gelegt denkt, daß X mit X zuſammenfällt. »Mir ſcheint demnach der Beweis einer Unverträglichkeit ſtets darauf zu beruhen, daß der vorausgeſetzte, unmögliche Sachverhalt wenigſtens in Teilen real abgebildet werden kann, wobei wir dann im Grunde nur mit den darſtellenden Zeichen der Begriffe operieren und einen im darſtellenden Gebiet realen Verſuch machen.«

Dies entſpricht – abgeſehen von der Terminologie – durchaus unſerer Auffaſſung. Auch hier tritt an Stelle eines unmöglichen, d. h. leeren Sachverhalts ein »Rahmenverhalt«, in dem gewiſſe Momente des urſprünglich vermeinten Sachverhalts ſich wiederfinden[1]. So iſt der Sachverhalt mit der beliebigen wachſenden Streckenfolge AA_1, AA_2, AA_3 ... ein (i. a. möglicher) Rahmenſachverhalt des unmöglichen urſprünglich vermeinten Sachverhalts mit der Folge von Multiplen von AB.

Freilich würden wir nicht von darſtellenden Zeichen, ſondern genauer von vermeinenden Intentionen uſw. reden. Das »darſtellende Gebiet«, der »Oberbau«, iſt die leere Intention, der »Unterbau« der Erfüllung (l. c. §§ 114, 116).

Nach dieſen Vorbereitungen werde nunmehr wieder die Brouwerſche Frage nach dem Vorkommen einer beſtimmten Zahl in einer endlosen werdenden Wahlfolge ins Auge gefaßt:

Die Folge beginne etwa ſo: 2 4 25 3 6 6 7 .... ohne erkennbares Geſetz. Kommt die 1 in ihr vor? Darauf kann man weder einſichtig antworten: »die 1 kommt vor« (p) noch: »die 1 kommt nicht vor« ($\bar{p}$). Vielmehr nur: »ein Sachverhalt dieſer Stufe iſt nicht einſichtig gegeben«. Oder genauer: »weder der Sachverhalt ⟨⟨die 1 kommt vor⟩⟩ noch der Sachverhalt ⟨⟨die 1 kommt nicht vor⟩⟩ iſt (einſichtig) gegeben« (q). Dagegen iſt dieſer eben genannte Sachverhalt »q« ſehr wohl einſichtig gegeben. Er iſt aber gewiſſer-

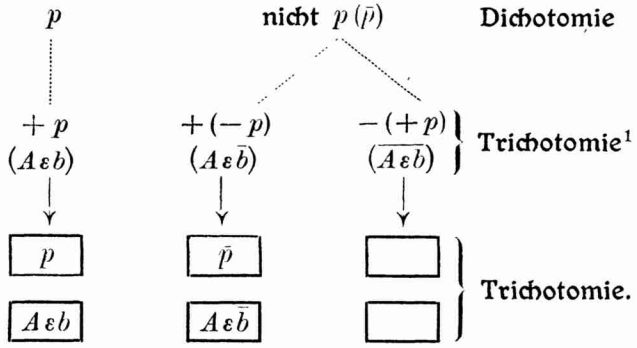
1) Im erſten Beiſpiel war das leere Zimmer, aus dem Tiſch und Buch entfernt ſind, der Rahmenſachverhalt, für die unmöglich für ſich vorſtellbare Leere, die im Gegenſatz ſteht zu den beiden konkreten entgegengeſetzten Sachverhalten: »Das Buch liegt auf dem Tiſch« – »Das Buch liegt nicht auf dem Tiſch« (ſondern etwa am Boden!)

maßen ein Sachverhalt höherer (zweiter) Stufe. (Denn ihm würde ja entſprechen: »der Sachverhalt ⟨⟨die 1 kommt vor⟩⟩ iſt einſichtig gegeben.« Die ineinander geſchachtelten Zeichen »....« und ⟨⟨....⟩⟩ deuten dies an.)

Zieht man nur die Sachverhalte 1. Stufe in Rückſicht, ſo muß man die trichotome Disjunktion ſo ſymboliſch darſtellen ([....] bezeichnet den angeſchauten Sachverhalt):

1. $\boxed{p}$ 2. $\boxed{\bar{p}}$ 3. $\boxed{}$

Man hat alſo, wenn man Urteile als Intentionen mit »freien«, die erfüllenden Sachverhalte mit umrahmten Buchſtaben bezeichnet, folgendes Schema:



Zieht man aber die Sachverhalte 2. Stufe mit hinzu, ſo hat man:

1. $\boxed{+p}$ 2. $\boxed{+\bar{p}}$ 3. $\boxed{-(p \vee \bar{p})}$

d. h. »1. Der Sachverhalt ⟨⟨p iſt (einſichtig gegeben)⟩⟩ beſteht«.
»2. Der Sachverhalt ⟨⟨$\bar{p}$ iſt (einſichtig gegeben)⟩⟩ beſteht«.
»3. Der Sachverhalt ⟨⟨weder p noch $\bar{p}$ iſt (einſichtig gegeben)⟩⟩ beſteht«.

Dabei ſind (1), (2), (3) ſelbſt als Sachverhalte (2. Stufe), nicht aber als Urteile gemeint.

Das eigentlich Weſentliche ſind die Sachverhalte erſter Stufe), alſo die Trichotomie (3 fache Disjunktion) mit zwei erfüllten und einem leeren Glied. Konkret im Falle der werdenden endloſen Folge ſind die beiden erfüllten möglichen Sachverhalte diejenigen, die eine Entſcheidung geſtatten, der (dritte) leere der, der dem Fall der Unentſcheidbarkeit entſpricht. In dieſem dritten Falle wird man (wie bei den anderen beiden Beſpielen) auf einen unerfüllbaren »Rahmenſachverhalt« zurückgeworfen, dem die wer-

1) Man müßte eigentlich ſchreiben $-(\pm p)$, denn aus $-(+p)$ ergibt ſich »ſachverhaltlich« $-(-p)$ und umgekehrt. (Anders dagegen S. 57!) — Vgl. zum Ganzen die Ergänzungen im Math. Anhang.

dende Folge zugrunde liegt, die irgendwie wird, deren Werden unbeſtimmt in der Zukunft liegt, die ſich aber gegen die Erwartung (Suppoſition) entſcheiden kann — oder die ſich auch vorläufig nicht entſcheiden kann.

Allerdings darf man den Parallelismus zwiſchen den drei Beiſpielen nicht übertreiben. Die Brouwerſche Sachlage hat noch ihre ſpezifiſche Eigenart. Schon die beiden erfüllbaren Möglichkeiten (1 kommt vor, 1 kommt nicht vor) ſtehen nämlich im Brouwerſchen Fall nicht auf einer Linie. Die erſte Möglichkeit, die poſitive (1 kommt vor) kann bei einer völlig frei werdenden Folge vorliegen[1]. Die zweite nicht: ſie iſt ſtets auf Grund einer — ſei es auch nur als Unterbedingung fungierenden — Geſetzmäßigkeit gegeben (etwa: 7 kommt nicht vor, bei einer Wurffolge mit nur einem Würfel uſw.). Andrerſeits kann die erſte Möglichkeit auch auf Grund eines Geſetzes ſicher realiſiert ſein. Trennen wir die Fälle noch genauer:

1. Im Falle einer frei werdenden Folge gibt es eigentlich nur eine erfüllbare Möglichkeit, nämlich das »empiriſche« Vorkommen von 1. Man müßte ſie konkreter formulieren: »die 1 iſt bereits erſchienen«; ihr Gegenteil: »die 1 iſt noch nicht erſchienen« bildet dazu den echten kontradiktoriſchen Gegenſatz. Es gibt daher — bei dieſer natürlichſten und ſachgemäßeſten Formulierung — nur dieſe beiden Möglichkeiten, gerade bei der freien Wahlfolge, ſodaß alſo das tertium non datur gilt und jede Paradoxie verſchwindet.

2. Nimmt man andererſeits eine völlig geſetzmäßige Folge, d. h. eine ſolche, durch deren Geſetz über das Vorkommen der 1 entſchieden wird, ſo hat man ebenfalls eine zweigliedrige vollſtändige Disjunktion: »1 kommt vor« — »1 kommt nicht vor«.

Bemerkenswert iſt, daß im 1. Falle die ſachgemäße Formulierung die Vergangenheits- und Zukunftsform des Verbums verwenden muß, alſo die Zeit eine weſentliche Rolle ſpielt, während das im 2. Fall nicht ſtattfindet. Dieſer Umſtand iſt in der Tat ein Hinweis darauf, in welcher Richtung eine weitere »ontologiſche« Klärung der Sachlage zu erwarten iſt. Zum 2. Fall iſt ferner zu ſagen, daß der Begriff »völlig geſetzmäßige« Folge eigentümlich ſchwankend iſt. Eine Folge kann nämlich »völlig geſetzmäßig« ſein in Bezug auf eine beſtimmte Eigenſchaft E_1 und nicht geſetzmäßig in Bezug auf eine zweite Eigenſchaft E_2. Z. B. kann

1) alſo quasi »empiriſch«; ſie iſt wirklich, alſo möglich.

man durch ein völlig beſtimmtes Geſetz die Folge der Zahlen von der allgemeinen Form $2^n + 1$ definieren. Ob aber dieſe Zahlenfolge für $n > 16$ eine Primzahl enthält, (wie für $n = 1, 2, 4, 8, 16$); ob etwa $2^{2^p} + 1$ für $p > 4$, ebenſo wie für $p = 1, 2, 3, 4$ Primzahl wird (Goldbachs Vermutung), iſt gänzlich unbekannt und mit der bekannten Geſetzmäßigkeit der Folge nicht gegeben. Dagegen ſind andere Eigenſchaften der Zahlenfolge, z. B. daß jede ihrer Zahlen kongruent 1 mod 4 iſt, offenbar beſtimmt. Damit iſt alſo, ſelbſt bei einer Folge, deren Zahlen man durch ein allgemeines Glied (alſo nicht bloß rekurrent) darſtellen kann, die »völlige Geſetzmäßigkeit« durchaus relativ auf beſtimmte Eigenſchaften. Das gilt a fortiori für rekurrent definierte Folgen, wie etwa die Ziffern der Dezimalbruchentwicklung von π, die Primzahlen, die algebraiſchen Zahlen, nach ihrem »Rang« geordnet uſw. uſw.

Daraus ergibt ſich nun eine merkwürdige Annäherung zwiſchen den beiden zunächſt ſcharf unterſchiedenen Fällen der freien und der geſetzmäßigen Folge – auch wenn man von den Zwiſchenfällen bei frei werdenden Folgen mit die Freiheit z. T. einſchränkenden Nebenbedingungen abſieht. Nennen wir die Folge determiniert bezüglich der Eigenſchaft E_1, wenn ſie zu entſcheiden geſtattet, welche ihrer Glieder dieſe Eigenſchaft beſitzen, bezüglich anderer Eigenſchaften E_2, E_3 wo dies nicht der Fall iſt, indeterminiert, ſo ergibt ſich, daß die völlig geſetzmäßigen Folgen den frei werdenden im weſentlichen gleichſtehen, ſobald man ſie bezüglich derjenigen Eigenſchaften betrachtet, relativ zu denen ſie indeterminiert ſind. Die freien Folgen ſind gewiſſermaßen dadurch gekennzeichnet, daß ſie allen Eigenſchaften gegenüber indeterminiert ſind. Man kann ſie daher als abſolut indeterminiert bezeichnen[1]. Bei Folgen mit gewiſſen Nebenbedingungen gibt es ſicher gewiſſe Eigenſchaften, gegenüber welchen ſie determiniert ſind. Folgen, die allen Eigenſchaften gegenüber, alſo gewiſſermaßen abſolut determiniert ſind, gibt es nicht. Denn nicht einmal die »Urfolge« der

1) Dieſe Formulierung könnte mißverſtanden werden. Es gibt auch bei völlig freien Wahlfolgen gewiſſe Eigenſchaften, über deren Zutreffen, nachdem eine endliche Anzahl von Wahlen vollzogen iſt, entſchieden iſt, wie z. B. die Eigenſchaft, daß eine beſtimmte Zahl n in der Folge vorkommt. Das ſind eben die oben genannten »empiriſchen« Eigenſchaften. Dieſe hängen eben gewiſſermaßen von der »Zeit«, genauer von der Entwicklungsphaſe, in der die Folge ſich gerade zur Zeit der Frageſtellung befindet, ab. – Die im Text gemeinten Eigenſchaften, hinſichtlich deren eine Folge »determiniert« oder »indeterminiert« iſt, ſind aber ſämtlich als zeitunabhängig gedacht.

natürlichen Zahlen 1, 2, 3, . . ist absolut determiniert z. B. nicht bezüglich der Eigenschaft Zwillingsprimzahlen zu enthalten und dgl.; ja, im Grunde kann man die teilweise Indeterminiertheit zum mindesten aller durch ein nicht-rekurrentes Gesetz bestimmten Folgen auf die Indeterminiertheit der Urfolge zurückführen.

Diese Eigenschaft der endlosen Folgen, immer (teilweise wenigstens) indeterminiert zu sein, macht die mathematische Problematik bezüglich des Endlosen überhaupt erst möglich. Denn es ergibt sich vermöge dieser partiellen Indeterminiertheit die Aufgabe, durch eine endliche Schlußkette das allgemeine Glied der gesetzmäßigen Folge so umzuformen, daß die Folge in der neuen Form bezüglich neuer Eigenschaften determiniert wird, hinsichtlich welcher sie bisher indeterminiert war. Von diesem Gesichtspunkt aus erscheint als eine Hauptaufgabe der Mathematik die fortschreitende Determinierung der Folgen. Das berühmte Fermatsche Problem kann man etwa so formulieren: Es ist die Folge der (in einer abzählbaren Reihe geordneten) Zahlenquadrupel x, y, z, n $(n > 2)$ so umzuformen, daß sie determiniert wird in bezug auf die Eigenschaft, die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ identisch zu befriedigen[1].

Die Tatsache der teilweisen Indeterminiertheit macht also die mathematische Forschung bezüglich dieses Problemtypus überhaupt erst sinnvoll. Die Möglichkeit der Indeterminiertheit hängt aber davon ab, daß die endlosen Folgen nicht bis ans Ende überblickt werden können. Wäre die Überblickung der endlosen Mengen möglich, so gäbe es keine Indetermination und damit keine sinnvolle arithmetische Problematik. Wer solche Fragen mit Sinn stellt, muß also ein endliches Wesen sein. In dieser Beleuchtung erscheint das dictum: „ὁ θεὸς ἀριθμητίζει" als geradezu widersinnig[2].

1) Die fortschreitende Determinierung mit dem Fortschreiten der Forschung hat eine eigentümliche Konsequenz, an der man nicht vorbeisehen darf. Sie macht unentscheidbare Alternativen entscheidbar. Da nun aber unentscheidbare Alternativen nach dem phänomenologischen Zugangsprinzip auch »an sich« nicht bestehen (als Sachverhalte, wie oben erläutert, nicht vorhanden sind), so ergibt sich mit Notwendigkeit die Folgerung, daß mathematische Sachverhalte mit dem Fortschritt des mathematischen Wissens der Menschheit sich verändern – was für die hergebrachte Auffassung den Gipfel der Absurdität darstellt. Trotzdem sind wir der Meinung, daß jene »Absurdität« die Wahrheit ist, womit allerdings die Pflicht der philosophischen Klärung dieser so paradox anmutenden Sachlage notwendig verbunden ist. Ihr werden wir in § 6 zu genügen suchen.

2) Schon Husserl hat sich in der »Philosophie der Arithmetik«, I. Bd., (Halle a. S. 1891), S. 214, Anm. 1, gegen diesen Gaußschen Ausspruch aus ganz ähnlichen Gründen gewandt.

Allein das führt geradewegs auf eine tiefer liegende philoſophiſche Frage, die hier noch nicht erörtert werden kann.

b) Konſequenz und Wahrheit.

Verſucht man ſich von der in den bisherigen Entwicklungen dargeſtellten logiſchen Sachlage zuſammenhängend Rechenſchaft zu geben, ſo wird man dazu getrieben zwei grundverſchiedene, den Gang der Unterſuchung jeweilig beſtimmende Ziele zu unterſcheiden, das der Konſequenz und das der Wahrheit. In einem ſolchen Sinne kann man geradezu von einer »Logik der Konſequenz« gegenüber einer »Logik der Wahrheit« ſprechen, wie das Huſſerl tut[1]. Durch dieſe Unterſcheidung wird man befähigt die grundlegenden Fragehaltungen des axiomatiſchen Formalismus (Hilbert) gegenüber der des Intuitionismus (Brouwer) in ihrem Gegenſatz kurz zu kennzeichnen: für Hilbert iſt die reine Mathematik eine Weiterbildung der Logik der Konſequenz, für Brouwer eine Logik der Wahrheit.

Der grundlegende Unterſchied beſteht darin, daß die Logik der Wahrheit ſich auf Sachverhalte formal-ontologiſcher Natur bezieht, dieſe Sachverhalte ſelbſt einſichtig (natürlich »kategorial«) anzuſchauen, d. h. in ihrer urſprünglichen (originären) Gegebenheit zu erfaſſen ſtrebt.

Sie geht ſomit aus auf Seins- und Weſensverhalte[2], die allerdings formaler Art ſind, nicht durch einen Prozeß der Generaliſierung aus dem konkreten Material (das, damit dieſer Prozeß möglich iſt, notwendig von einer beſtimmten eingeſchränkten Artung ſein muß, nämlich »dinglich« im verallgemeinerten Sinn) zu gewinnen, ſondern durch die eigentümliche »Operation« der »Formaliſierung«[3].

Dagegen richtet ſich die »Logik der Konſequenz« (und damit auch Hilberts Mathematik – nicht ſeine Metamathematik!) im ſtrengen Sinn gar nicht auf Gegenſtände (die doch irgendwie zugänglich, in irgendeiner Weiſe Phänomene ſein müſſen), ſondern auf bloße »Geſetztheiten«, die in ihrer inneren Struktur undurchdringlich ſind.

---

1) In einer (nicht veröffentlichten) Vorleſung über »Einleitung in die Philoſophie« im Winterſemeſter 1923/24.

2) Es kann hier noch nicht erläutert werden, ſondern wird erſt an ſpäterer Stelle zur Sprache kommen, daß nicht etwa nur »daſeinsfreie« Weſensverhalte in Frage kommen, ſondern gerade echte Daſeinsverhalte. Das bedeutet allerdings einen gewiſſen Bruch mit der hergebrachten phänomenologiſchen Theſe von der reinlichen Trennbarkeit von »Daſein« und »Weſen« (im Sinne von »Eidos«).

3) Vgl. Huſſerl, Ideen, § 13.

Sie gleichen darin in der Tat den Steinen im Spiel (Schach-Figuren und dgl.), daß ihr Dasein gewissermaßen ganz in ihrer Spielfunktion, in der Weise ihrer formalen Verknüpfung aufgeht. Es ist sogar möglich, daß diese »Gesetztheiten« in sich Widersprüche bergen, die in der formalen Argumentation gar nicht zutage treten, etwa wie bei dem sachgemäßen Hantieren mit einer Granate ihre Sprengwirkung nicht in Erscheinung tritt[1]. Es ist daher auch kein Wunder, daß man sie häufig mit den Zeichen verwechselt hat, sie für »Zeichen, die nichts bedeuten« bzw. bezeichnen, erklärt hat[2]. Diese Auffassung stellt jedoch einen Mißbrauch des Begriffs Zeichen dar. »Ein Zeichen ist doch offensichtlich bezogen auf etwas, wofür es Zeichen ist.« Aloys Müller hat diesen Einwand mit Recht gemacht und Bernays als Vertreter von Hilbert, hat darauf den Gebrauch des Terminus »Zeichen« aufgegeben, soweit es sich um »bedeutungslose Zeichen« handelte und ihn durch »Figur« ersetzt. Es ist dabei, wie auch in der gerade erwähnten Diskussion zwischen A. Müller und Bernays hervortritt, von Wichtigkeit, sich nicht an die Einzelheiten der Form und Ausführung der »Figuren« zu stoßen (ebenso wenig wie man dies bei Spielsteinen und Schachfiguren tut), sondern nur auf die für ihre formale (Spiel-) Verwendung relevanten Eigenschaften an ihnen zu achten. Faßt man sie so auf, so sind sie in gewissem Sinne doch wieder »Zeichen«, indem sie in ihrer anschaulichen Besonderheit auf etwas Gemeinsames, von ihnen als konkreten Figuren Verschiedenes hinweisen, — eben auf die nur der kategorialen Anschauung und auch dieser nur gewissermaßen von »außen«, als Elemente einer rein formalen Verknüpfung zugänglichen »Gesetztheiten«[3].

Bezüglich dieser »Gesetztheiten« formuliert die formale Mathematik bzw. Konsequenz-Logik keine Sätze mit dem Anspruch auf Wahrheit. Man kann von einem »Theorem« dieser Mathematik nur aussagen, daß es »beweisbar« (besser: »ableitbar«) ist oder nicht, nicht aber, daß es wahr ist oder unwahr. Die Sache liegt aber auch nicht einfach so, daß die formale Mathematik ein »hypo-

1) Darauf beruht z. B. u. a. die Folgerichtigkeit einer Argumentation in den Unmöglichkeitsbeweisen der Mathematik.

2) Hilbert, Abhandl. d. math. Sem. d. Hamburg. Univ., Bd. I, Heft 2, p. 157 ff. (1922). »Neubegründung der Mathematik« (Erste Mitteilung). — Bernays, Jahrb. d. D. Math. Ver., Bd. 31 (1922), S. 10 ff. Vgl. ferner die Diskussion zwischen Bernays und Aloys Müller im 90. Bd. d. Math. Ann., S. 153 ff. und S. 159 ff.

3) Vgl. Bernays, l. c. S. 160.

thetiſch-deduktives Syſtem« bildet (Pieri, B. Ruſſell u. a.), d. h. nur hypothetiſche Satzgefüge enthält von der Form: »Wenn die und die Axiome gelten, ſo gelten die und die Theoreme.« Denn auch die Hilbertſchen Axiome, wenigſtens die transfiniten, »gelten« gar nicht, d. h. können gar nicht gelten, ſie können gar nicht wahr oder falſch ſein. Lediglich ein rein formal definierter Begriff von »Richtigkeit« (was in dieſem Zuſammenhang ungefähr ſo viel wie »Spielgerechtheit« beſagt) mit einem ebenſo formalen Gegenſatz »Falſchheit« (was alſo mit »Unwahrheit« nicht zu verwechſeln iſt) macht ſie anwendbar. Hilbert hat dies klar geſehen, wie die folgende ſchon angeführte Stelle zeigt: »Die Axiome und beweisbaren Sätze ſind die Abbilder der Gedanken, die das übliche Verfahren der bisherigen Mathematik ausmachen, aber ſie ſind nicht ſelbſt die Wahrheiten im abſoluten Sinne. Als die abſoluten Wahrheiten ſind vielmehr die Einſichten anzuführen, die durch meine Beweistheorie hinſichtlich der Beweisbarkeit und der Widerſpruchsfreiheit jener Formelſyſteme geliefert werden«[1]. Trotzdem kann man an dieſer Äußerung vom philoſophiſchen Geſichtspunkt aus wenigſtens die Terminologie teilweiſe beanſtanden. G. Frege, der ſich bereits 1903 ähnlich geäußert hat, anläßlich der formalen Arithmetik Thomaes, formuliert die Sache ſo: »Wenn ſie (die formale Arithmetik) ein Spiel mit Figuren iſt, ſo gibt es in ihr ebenſowenig Lehrſätze und Beweiſe wie im Schachſpiel«[2]. Frege lehnt alſo im Gegenſatz zu Hilbert auch die Beweiſe in der formalen Mathematik ab, während doch gerade die Beweistheorie in der Hilbertſchen Metamathematik die entſcheidende Rolle ſpielt. Was aber ſind die Deduktionen der formalen Mathematik, wenn ſie nicht Beweiſe ſind?

Man muß terminologiſch reinlich ſcheiden zwiſchen ableiten und beweiſen, deduzieren und demonſtrieren. Die Mathematik der Alten kannte nur die ἀπόδειξις, die demonſtratio. Für deductio gibt es kein eigentlich entſprechendes griechiſches Wort: κατα γωγή wird nicht im logiſchen Sinn gebraucht, ἀπαγωγὴ εἰς ἄτοπον

1) Math. Ann. 88, S. 153.

2) Grundgeſetze der Arithmetik, II. Bd. (Jena 1903), S. 101. Die Stelle fährt fort: »Zwar kann es Lehrſätze in einer Theorie des Schachſpiels geben, aber nicht im Schachſpiele ſelbſt. Die formale Arithmetik kennt nur Regeln. Aber es iſt auch eine Theorie der formalen Arithmetik denkbar; und in ihr wird es Lehrſätze geben, die z. B. beſagen, daß man von einer gewiſſen Figurengruppe aus gemäß den Spielregeln zu einer anderen Figurengruppe gelangen könne.«

bedeutet reductio ad absurdum. Höchſtens die *ἀγωγή*[1] eines Sophismas (wie des »Lügners« u. a.) kann mit unſerer ſelbſtändig gewordenen Deduktion in Parallele geſetzt werden und dann das fachlich, aber nicht ſprachlich entſprechende *συλλογισμός*.

Ein Beweis (demonſtratio, *ἀπόδειξις*) geht auf Wahrheit (*ἀλήθεια*). Die Ausführungen des Ariſtoteles in den Analytiken[2] zeigen, daß wohl zwiſchen *συλλογισμός* und *ἀπόδειξις* unterſchieden wird, indem bei dem »Beweis« die Vorausſetzungen wahr ſein müſſen, während ſie beim *συλλογισμὸς διαλεκτικός* nur angenommen (d. h. aus der im Schwange befindlichen Meinung (*δόξα*) aufgenommen) werden. Aber daß man Vorausſetzungen macht, die einer Verifikation im Zuſammenhang der betrachteten Theorie (beim »hypothetiſch-deduk-

1) Vgl. den Wortgebrauch von »*ἀγωγή*« bei Plutarch, De commun. not. 2, p. 1059e = Stoic. vet. fragm. coll. Arnim, Vol. II, p. 84 = Chryſippus, fr. 250: . . *λόγους τὰς ἀγωγὰς ὑγιεῖς ἔχοντας;* vgl. fr. 298[a] (*Χρυσίππου λογικῶν ζητημάτων* A p. 99, 13: *ἡ (μ)ὲν (ἀγωγὴ) τ(οῦ) λόγου ὑγιής* (ergänzt von Arnim).

2) Es kommen hauptſächlich folgende Stellen in Frage: 1. Analytica priora I, c. 1. Die Unterſuchungsrichtung wird zu Beginn ſo gekennzeichnet: »*πρῶτον μὲν εἰπεῖν περὶ τί καὶ τίνος ἐστὶν ἡ σκέψις, ὅτι περὶ ἀπόδειξιν καὶ ἐπιστήμης ἀποδεικτικῆς*« (24a, 10–11). Der Unterſchied der »apodeiktiſchen« und »dialektiſchen« Ausſage wird beſtimmt: »*διαφέρει δὲ ἡ ἀποδεικτικὴ πρότασις τῆς διαλεκτικῆς, ὅτι ἡ μὲν ἀποδεικτικὴ λῆψις θατέρου μορίου τῆς ἀντιφάσεώς ἐστιν, . . . ἡ δὲ διαλεκτικὴ ἐρώτησις ἀντιφάσεώς ἐστιν*« (24a, 22–25). Aber dieſe Unterſcheidung iſt irrelevant für die Deduktion (den Syllogismus) als ſolchen: »*οὐδὲν δὲ διοίσει πρὸς τὸ γενέσθαι τὸν ἑκατέρου συλλογισμόν*« 24a, 25–26). »*ὥστε ἔσται συλλογιστικὴ μὲν πρότασις ἁπλῶς κατάφασις ἢ ἀπωφασίς τινος κατά τινος, ἀποδεικτικὴ δέ, ἐὰν ἀληθὴς ᾖ καὶ διὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς ὑποθέσεων εἰλημμένη*« (a 29–b 10). Endlich iſt wichtig die Definition des Syllogismus ſelbſt: »*συλλογισμὸς δέ ἐστι λόγος ᾧ τεθέντων τινῶν ἕτερόν τι τῶν κειμένων ἐξ ἀνάγκης συμβαίνει τῷ ταῦτα εἶναι* (24b 18–20). 2. Analyt. priora I, c. 4. – Über das Verhältnis von Apodeixis und Syllogismus: »*πρότερον δὲ περὶ συλλογισμοῦ λεκτέον ἢ περὶ ἀποδείξεως διὰ τὸ καθόλου μᾶλλον εἶναι τὸν συλλογισμόν· ἡ μὲν γὰρ ἀπόδειξις συλλογισμός τις, ὁ συλλογισμὸς δὲ οὐ πᾶς ἀπόδειξις*« (25b, 28–31). Danach ſcheint es alſo, als ob die Deduktion (*συλλογισμός*) allgemeiner iſt als der Beweis und im weſentlichen mit unſerem Begriff der Deduktion identiſch iſt. Dies iſt auch richtig, nur iſt *συλλογισμός* nicht genau dasſelbe wie die heutige rein formale Deduktion, indem ſelbſt im »dialektiſchen« Syllogismus wenigſtens nach dem »Inhalt« der Vorausſetzungen gefragt wird. Vgl. »*. . . κατὰ μὲν ἀλήθειαν ἐκ τῶν κατ' ἀλήθειαν διαγεγραμμένων ὑπάρχειν, εἰς δὲ τοὺς διαλεκτικοὺς συλλογισμοὺς ἐκ τῶν κατὰ δόξαν προτάσεων*« (46a, 8–10), d. h. bei den in der Unterredung (Streitgeſpräch) vorkommenden Schlüſſen muß man die Vorausſetzungen aus der (öffentlichen) Meinung nehmen. Immerhin beſtehen weitgehende Analogien. Auch der ariſtoteliſche Begriff der Schluß-Figur (*σχῆμα*) iſt dem der Hilbertſchen Beweisfigur analog. Vgl. z. B. (26a, 13–14): »*. . . δῆλον ἐν τούτῳ τῷ σχήματι πότε ἔσται καὶ πότε οὐκ ἔσται συλλογισμός . . .*«

tiven« Syſtem) oder gar grundſätzlich nicht (bei der formalen mathematiſchen Axiomatik Hilberts) auf ihre Wahrheit oder Unwahrheit geprüft werden können, davon iſt keine Rede. Ein Erkennen iſt jedenfalls ſtreng an wahre Axiome (Ausgangsſätze) gebunden (vgl. beſ. die Anfangskapitel der zweiten Analytik). Auch die Stoa hat ſich zu der Idee der »eigenſtändigen« Deduktion nicht hindurchgerungen, obwohl von ihr klar ausgeſprochen wird, daß ein Schluß auch dann noch gültig bleiben kann, wenn die Prämiſſen falſch ſind[1] (λόγος συνακτικός). In gewiſſem Sinne iſt dafür ja jeder indirekte Beweis (d. h. durch die ἀπαγωγὴ εἰς ἄτοπον, reductio ad absurdum) ein Beiſpiel (das ſchon in der Ariſtoteliſchen Syllogiſtik eine große Rolle ſpielt), aber hier iſt doch auch gerade bezweckt, die Unwahrheit der Hypotheſe darzutun. Somit iſt die antike Logik durchaus demonſtratio (ἀπόδειξις) oder eine unvollkommenere Erſatzform für die Demonſtration. Eine Ausnahme macht höchſtens die erwähnte ſtoiſche Betrachtung über den λόγος συνακτικός.

Im Gegenſatz dazu iſt es für das Verſtändnis der modernen uns beſchäftigenden Gedanken grundlegend, daß man die von der Geltung und der Möglichkeit der Geltung ihrer Vorausſetzungen unabhängige, reine, »freiſchwebende« Deduktion oder »Ableitung« (bezw. »Herleitung«) unterſcheidet von dem Beweis, der vor allem auf ſicheren Fundamenten ruhen muß, die aufweisbar ſein müſſen.

Man kann, wenn man dieſe ſtrenge Bezeichnungsweiſe gebraucht, nicht mehr von einer Hilbertſchen »Beweistheorie« ſprechen, ſondern nur von einer Ableitungs-(Herleitungs-)Theorie, die über die Herleitbarkeit beſtimmter Formeln aus beſtimmten Axiomen urteilt und dgl. Es iſt alſo eine Formel in der formalen Mathematik nicht mehr »beweisbar«, ſondern nur »herleit-

1) Vgl. zu dieſem Problem Hölder, Die mathematiſche Methode, § 103, S. 267/68; Sigwart, Logik, 2. Aufl., I. Bd., S. 285/86 und die folgenden ſtoiſchen Fragmente (aus der Arnimſchen Sammlung): Vol. II, p. 78 (Chryſippus fr. 239): κρίνασθαι δέ φασιν τὸν συνακτικὸν λόγον, ὅτι συνακτικός ἐστιν, ὅταν τῇ διὰ τῶν λημμάτων αὐτοῦ συμπλοκῇ ἕπηται τὸ συμέρασμα ... καίπερ μὴ ὄντα ἀληθῆ διὰ τὸ ἐπὶ ψεῦδος ἄγειν, συνακτικὸν εἶναί φαμέν ... ... τοῦτο γὰρ τὸ συνημμένον ἀληθές ἐστι, διὰ τὸ μηδέποτε ἀρχόμενον ἀπὸ τοῦ ἀληθοῦς λήγειν ἐπὶ ψεῦδος (p. 78, l. 15–16, 18–19, 22–24). — Vol. II, p. 81 (Chryſippus fr. 243): ἐπ' ἀληθεῖ δὲ ἀληθὲς ἕπεται, ... καὶ ψευδεῖ ψεῦδος, ... καὶ ψευδεῖ ἀληθές. ... ἀληθεῖ μέντοι ψεῦδος οὐκ ἀκολουθεῖ (p. 81, l. 36 – p. 82, l. 2).

Das letztere iſt genau unſere moderne »implizite Definition« der Implikation ($\mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$, $\mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{R}$, $\mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}$; aber nicht $\mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{F}$). Vgl. etwa Ackermann, Math. Ann. 93, S. 4.

bar«. Dagegen müſſen Sätze der Metamathematik, ſofern ſie nicht als unmittelbar einſichtig aufweisbar ſind, notwendig beweisbar ſein, wenn ſie als geſicherte Ergebniſſe der Wiſſenſchaft betrachtet werden ſollen.

Wahrheit (ἀ-λήθεια), wörtlich und in der eigentlichen Bedeutung »Entdecktheit«[1], kann nur apodiktiſch erkannt werden, auf Grund von wahren Prämiſſen; ſie iſt alſo aufweisbar oder beweisbar innerhalb einer apodiktiſchen Theorie. Sie eignet daher nur den metamathematiſchen Sätzen Hilberts, nicht den »eigentlich mathematiſchen«. Ein Unterſchied von »abſoluter« und »relativer« Wahrheit beſteht nicht. P. Bernays hat hierüber eine Reihe unſeres Erachtens durchaus irriger Anſichten geäußert[2]: »Unter dieſem Geſichtspunkt (der Verwendung nur der primitivſten anſchaulichen Erkenntnismittel) werden wir verſuchen, ob es nicht möglich iſt, jene tranſzendenten Annahmen in einer ſolchen Weiſe zu begründen (!), daß nur primitive anſchauliche Erkenntniſſe zur Anwendung kommen. In Anbetracht dieſer Beſchränkung der Erkenntnismittel werden wir andererſeits von dieſer Begründung (!) nicht verlangen können, daß ſie die zu begründenden Annahmen als Wahrheiten (im philoſophiſchen Sinn) erkennen läßt, ſondern wir werden zufrieden ſein, wenn es gelingt, die auf jenen Annahmen aufgebaute Arithmetik als ein mögliches, d. h. widerſpruchsfreies Gedankenſyſtem zu erweiſen.«

Die wichtigſten Begriffe, um die es ſich handelt, ſind hier: »begründen«, »Wahrheit im philoſophiſchen Sinn« (!) und »mögliches Gedankenſyſtem«.

Zunächſt: »begründen«. — Dies iſt offenbar doppelſinnig; es kann bedeuten »beweiſen« oder »herleiten«. Von einem Beweis der »transcendenten Annahmen« (d. h. der transfiniten Hilbertſchen Axiome und Theoreme) kann keine Rede ſein; ebenſowenig von einer »Herleitung« der Axiome, ſondern höchſtens der formalmathematiſchen »Theoreme«. Aber auch dieſes Wort iſt im Grunde analog wie der Ausdruck »Beweis« unſtatthaft[3] oder wenigſtens nur cum grano salis zu nehmen oder noch beſſer durch den Aus-

1) Nach M. Heidegger; in nicht veröffentlichten Vorleſungen, vgl. jetzt ſeine Abhandlung »Sein und Zeit« paſſim (in dieſem Jahrbuchband).

2) In dem ſchon oft zitierten Vortrag in Jena 1921: abgedruckt im Jahrb. d. D. Math. Ver. 31, S. 10 ff. (1922). — Wir wiſſen nicht, ob Bernays' Anſichten in dieſem Punkte denen Hilberts durchgängig entſprechen.

3) Hilberts formal-mathematiſche »Theoreme« ſind ariſtoteliſch geſprochen keine λόγοι ἀποφαντικοί, denn ſie ſind weder ἀληθεῖς noch ψευδεῖς. — Vgl. dazu auch die oben (S. 71, beſ. Anm. 2) zitierte Äußerung Freges.

druck »Formel« zu erſetzen. Gemeint ſind indeſſen mit dem Ausdruck »Annahmen« wohl ſicher gerade die transfiniten Axiome, und ihre »Begründung« wird wohl in indirekter Weiſe dadurch als geleiſtet angeſehen, daß ſie in ein mögliches, d. i. widerſpruchsfreies Gedankenſyſtem hineingeſtellt werden und dadurch gewiſſermaßen einen Halt bekommen.

Damit werden wir von ſelbſt auf den zweiten Begriff der »Möglichkeit« geführt, der in der »Widerſpruchsfreiheit« liegen ſoll. Wir wiſſen bereits, was es mit dieſer auf ſich hat; ſie gibt in der Tat eine Möglichkeit, nämlich die der unbeſchränkt fortſetzbaren Herleitung von Formeln und immer neuen Formeln, wobei aber dieſe Formeln eines eigentlichen Sinn-Gehaltes (»Inhalts«) völlig entbehren. Alſo nur die Möglichkeit des ſtändigen Klapperns der Formel-Mühle iſt gegeben, des ewig ungeſtörten Formelſpiels. Von einem »Gedankenſyſtem« darf man ſtreng genommen nicht ſprechen, denn man pflegt doch damit allgemein zu meinen, daß jeder Gedanke des Syſtems einen beſtimmten Sinn hat; aber hier handelt es ſich lediglich um Spiel-Gedanken im Gedanken-Spiel, genau analog dem »Gedanken«, der in einem geiſtreichen Schachzug ſteckt. Das hier allein vorliegende Gedankenſyſtem iſt in keinem anderen Sinn vorhanden, als das »Gedankenſyſtem« einer Schachpartie. Aber offenbar iſt das nicht von Bernays gemeint, oder wenigſtens iſt dieſe Bedeutung des Ausdrucks nicht ſtreng durchgehalten. Sondern ſie ſchwankt immer wieder hinüber nach der eines ſinnvollen Gedankenzuſammenhanges, der in dem Sinn »möglich« iſt, daß er eventuell auf Wirklichkeiten irgend welcher Art »angewandt« werden kann[1]. Das iſt eine offenſichtliche Erſchleichung[2]. Ebendaſſelbe muß man aber auch bezüglich ſeines Möglichkeitsbegriffs ſagen. Denn eben dieſe »Möglichkeit« ſoll »Wirklichkeit« werden können, d. h. ſoll denkbare Wirklichkeit ſein, – und das auf Grund ihrer Widerſpruchsfreiheit. Auch das iſt wiederum eine Erſchleichung. Denn die Gegenſtände der transfiniten Axiome, die transfiniten Mengen, ſind ja gerade nicht denkbar im Sinn der formal-ontologiſchen Möglichkeit; ſie ſind nicht kategorial erſchaubar, ſie ſind bloß leere Geſetztheiten. Sie können alſo keineswegs zu Wirklichkeiten werden. Ja ſelbſt die »Widerſpruchsfreiheit«

1) In der Tat iſt ja bekanntermaßen die Hauptaufgabe der klaſſiſchen wie auch der modernen Analyſis, auf phyſikaliſche Fragen anwendbar zu ſein.

2) Wenigſtens wird das in einer vielleicht denkbaren, wenn auch außerordentlich ſchwer begreiflichen »Anwendung« des leeren Formelſpiels auf ſachliche Fragen liegende ungeheure Problem gar nicht erwähnt! ſ. u. S. 77 ff.

hat gar keinen »inhaltlichen« Sinn, sie bedeutet nicht etwa die conditio sine qua non der formal-ontologischen dabilitas. Die dabilia der formalen Ontologie dürfen allerdings keine Widersprüche aufweisen, aber zunächst müssen sie überhaupt irgend etwas in formal-ontologischen Katagorien Faßbares enthalten, – und das tun die transfiniten Mengen nicht. Zwischen den »Formeln« Hilberts sind schon deshalb keine eigentlichen Widersprüche möglich, weil die Formeln gar keine Gedanken aussagen, also auch keine einander widersprechenden Gedanken enthalten können. Der Widerspruch tritt nur gewissermaßen als Selbstsperrung des Konsequenz-Mechanismus, als ein sozusagen mechanisches Hemmnis des Fortgangs der Folgerungen auf, gemäß der Spiel-Regel des Folgerungsspiels, nicht etwa gemäß eines einsichtigen Sinnzusammenhanges. Also ist auch mit dem rein formalen (»mechanischen«) Nachweis der Widerspruchsfreiheit gar nichts getan für die ontologische Möglichkeit der Gesetztheiten der Hilbertschen Mathematik; insbesondere macht er jene Gesetztheiten nicht zu Gegenständlichkeiten im Sinne der formalen Ontologie. — Über die »Wahrheiten im philosophischen Sinne« noch etwas zu sagen, erübrigt sich nun wohl; es gibt nur Wahrheiten in einem Sinn; die satzähnlichen Gefüge der formalen »Konsequenz-Mathematik« Hilberts sind weder der Wahrheit noch der Unwahrheit fähig.

Wenn man sich die geschilderte Sachlage vor Augen führt, so entsteht naturgemäß die Frage: Welchen Sinn hat dann überhaupt noch die Hilbertsche Mathematik? Welche Motive bestehen überhaupt noch dafür, sich gerade mit den von Hilbert betrachteten »Gesetztheiten« zu beschäftigen? Das Nächstliegende zur Beantwortung dieser Frage ist, weiter zu fragen: wie kam Hilbert gerade auf diese Gesetztheiten? Die Antwort lautet natürlich: er nahm sie aus der hergebrachten Mathematik auf, sein Ziel war ja ursprünglich die »Begründung« der überlieferten Mathematik. Nun war aber doch die klassische Mathematik sicherlich »inhaltlich« gemeint; sie vermeinte, sich des Unendlichen wirklich bemächtigen zu können. Sie tat dies auf Grund einer Art von Extrapolation nach dem Prinzip der »Permanenz der formalen Gesetze«, indem sie möglichst viele Eigenschaften endlicher Mengen auf die unendlichen übertrug. (Also vermittels der von Brouwer kritisierten Verallgemeinerung der Gesetze der Teilmengen einer endlichen Menge auf unendliche Mengen.) Diese mit dem Namen »Existentialabsolutismus« von Weyl[1] bezeichnete Auffassung ist in der Tat in gewissem Maße

1) Math. Zeitschr., Bd. 20, S. 150.

auch noch für Hilbert leitend. Zwar erkennt Hilbert den grundlegenden Fehlſchluß vom Endlichen auf das Unendliche, er verſchmäht aber doch nicht, eine ganz ähnliche Analogie zur Motivierung der Aufſtellung ſeiner transfiniten Axiome zu benutzen, die in dem ſchon kritiſierten »Ariſtides«-Beiſpiel hervortritt[1].

Dieſe Art »Begründung« haben wir nun in aller Ausführlichkeit als ungenügend nachgewieſen. Aber welche andere könnte man an ihre Stelle ſetzen? Oder wenn dies nicht möglich iſt, welches Verfahren ſoll man einſchlagen, um die Analyſis aufzubauen?

Die Antwort darauf iſt zunächſt, daß man »inhaltlich«, d. h. nach »intuitioniſtiſcher Methode« ſoviel von der Analyſis aufbauen ſoll, als man kann. In dieſer Richtung ſind immerhin recht bemerkenswerte Anfänge von Brouwer, Weyl u. a. gemacht worden. Allerdings ſind beide Forſcher nicht ganz derſelben Meinung über den Umfang des ſo Begründbaren. Weyl möchte ſich ganz ſtrikt auf das Endloſe beſchränken, während Brouwer einen erheblichen Teil der klaſſiſchen Mengenlehre »unabhängig vom logiſchen Satz vom ausgeſchloſſenen Dritten« begründet hat[2]. Es wird noch zu unterſuchen ſein, ob nicht etwa auch der Reihe der Cantorſchen transfiniten Zahlen ein »inhaltlicher« Sinn untergelegt werden kann (ſ. u. § 5a). Vorläufig könnte man jedenfalls die intuitioniſtiſche Mathematik (die alſo der Metamathematik Hilberts entſpricht) in zwei Stufen begründen: 1. unter ausſchließlicher Benutzung des Endloſen (der abzählbaren Mengen); 2. unter Benutzung des konſtruierbaren Transfiniten (nach Brouwer).

Was dann über dieſe Mathematik hinaus möglich iſt, bleibt allerdings, ſeiner eigentlichen Begründung nach, völlig im Dunkeln. Man kann wiederum die traditionelle Mathematik ſpalten in 1. einen »metamathematiſch fundierten Beſtandteil A, 2. in einen als Geſetztheit« darſtellbaren Beſtandteil B. Weyl[3] hat bemerkt, daß Theoreme des Beſtandteils A, wie wir kurz ſagen wollen »von der Art A«,

1) Vgl. auch ſeine neuen Ausführungen im Aufſatz »Über das Unendliche« (Math. Ann. 95).

2) Brouwer, Begründung der Mengenlehre bzw. Funktionenlehre unabhängig vom log. Satz vom ausgeſchloſſenen Dritten. Verhandl. d. k. Akad. van Wetenſchappen te Amſterdam (1918 u. 1919), I. Serie, Deel XII, Nr. 5 u. 7; Deel XIII, Nr. 2. – Weyl, Über die neue Grundlagenkriſe der Mathematik, Math. Zeitſchr. Bd. 10, S. 39 ff. (Die Bemerkung über Brouwer S. 170). – Randbemerkungen zu Hauptproblemen der Mathematik, II. »Fundamentalſatz der Algebra und Grundlagen der Mathematik«. Math. Zeitſchr. 20, S. 142 ff. – B. de Loor, Die hoofstelling van die algebra van intuïsionistiese standpunt. (Acad. proefschrift). Amsterdam 1925.

3) Weyl l. c. S. 148/49.

d. h. ſolche, die mit Hilfe von A-Begriffen allein ausſprechbar ſind, auch dann noch gelten, wenn ihre »Beweiſe« nur mit Hilfe von B-Begriffen geführt werden können. Es ſind alſo »Umwegbeweiſe« durch das Transfinite ebenſo möglich, wie in der klaſſiſchen Mathematik Beweiſe mittels des Imaginären. Die bekannteſten Beiſpiele ſind Dirichlets Beweiſe rein zahlentheoretiſcher Theoreme mittels der Methode der Infiniteſimal-Analyſe. Indeſſen iſt weſentlich, daß die Endtheoreme von der Art A ſind. – Man kann einen Schritt weiter gehen und ſagen: die Theoreme der Analyſis, ſoweit ſie für die phyſikaliſchen Anwendungen von Belang ſind, ſind derart, daß ſie Gruppen von nur approximativ beſtimmbaren Größen verknüpfen. In der Phyſik ſind dieſe Größen immer nur bis auf eine endliche Anzahl von Dezimalen beſtimmt, die der phyſikaliſchen Theorie zugrundeliegenden »rein mathematiſchen« Theoreme geben eine beliebige Anzahl Dezimalen, d. h. genauer, ſie ordnen der ſtets wachſenden Ziffernfolge der »gegebenen« Dezimalbrüche die ebenfalls unbeſchränkt fortſchreitende Ziffernfolge der »geſuchten« Dezimalbrüche zu[1]. Theoreme dieſes Typus (zu ihnen gehören z. B. alle Reihenentwicklungen und dgl.) ſind alſo indefinit, d. h. in der Brouwer-Weylſchen Analyſis ſinnvoll; und das auch dann noch, wenn ſie nur mit Hilfe des Transfiniten Hilberts bewieſen werden können. Man kann alſo ſagen: Soweit die Analyſis auf die phyſikaliſche Praxis direkt anwendbare Theoreme liefert, iſt ſie mittels intuitioniſtiſcher Begriffsbildung begründbar.

Leider iſt damit aber keineswegs etwa die geſamte »theoretiſche Phyſik« begründet. Denn dieſe hängt gerade in ihren neueſten Entwicklungen vielfach nur noch ſehr indirekt (durch Zwiſchenſchaltung ſtatiſtiſcher Überlegungen u. dgl.) mit der meſſenden Erfahrung zuſammen. Ein guter Teil der modernen phyſikaliſchen Theorie iſt vielleicht wirklich (genau läßt ſich das bei den heute noch unbekannten Grenzen der Brouwerſchen Analyſis noch nicht ſagen[2]) »transfinit«.

Weyl hat verſucht, – unter der eben genannten Annahme, – ſich darüber Rechenſchaft zu geben, welchen Sinn man dieſer »trans-

1) Es handelt ſich eigentlich um Schachtelfolgen von Intervallen (ſ. unſere Arbeit dieſes Jahrb. 6, S. 425 ff.). Im Text iſt nur wegen der leichteren Verſtändlichkeit von Dezimalbrüchen die Rede, die nicht ſo eindeutig die erreichte Genauigkeit anzeigen. Doch iſt dies eine im Grunde leicht zu erledigende, rein techniſche Frage.

2) Wenn das einmal genauer bekannt ſein wird, wird man auch die Wichtigkeit des Brouwerſchen »Transfiniten« im Vergleich zum Weylſchen »reinen Indefiniten« abſchätzen können.

finiten« Analyſis und Phyſik nun noch zuſchreiben kann[1]. Er hat dem phänomenologiſch (intuitioniſtiſch) begründbaren »Wiſſen« den »Glauben« gegenübergeſtellt, in dem es »dem Bewußtſein gelingt, 'über den eigenen Schatten zu ſpringen', den Stoff des Gegebenen hinter ſich zu laſſen, das Transcendente darzuſtellen; aber, wie ſich von ſelbſt verſteht, nur im Symbol«. Es handelt ſich dabei um eine der künſtleriſchen analoge »theoretiſche Geſtaltung«, deren »Organ« nicht »das Sehen«, ſondern das »Schöpferiſche« iſt. Weyl lehnt ſich dabei philoſophiſch an Fichte an[2], der die Poſtulatenlehre Kants auf Alles ausgedehnt habe, ſodaß »ohne den Glauben an die transcendente Vernunftthеſis .... alles Wiſſen tot und gleichgültig iſt«.

Nun iſt in der Tat nicht zu verkennen, daß es ſehr nahe liegt, die Grundbegriffe der Kantſchen Philoſophie auf die eigenartige »Transcendenz« des Transfiniten anzuwenden[3]. Von dem bekannten Wort von den Begriffen, die ohne Anſchauung leer ſind, bis zu gewiſſen Einzelheiten der transcendentalen Dialektik – dem regulativen, nicht konſtitutiven Gebrauch der Ideen, deren transcendentalem Schein, der Erſchleichung in den dialektiſchen Argumenten, endlich, nicht zuletzt: den auf die ſpezifiſche Natur des Menſchen, als geſchaffenem Weſen, bezüglichen Anſchauungsformen des Raumes und vor allem der Zeit, wobei noch die enge Beziehung von Zahl und Zeit in der Lehre vom transcendentalen Schematismus beſonders zu beachten iſt, – kann man in dem beſonderen Problem des mathematiſchen Transfiniten die großen Kantiſchen Frageſtellungen wiederfinden. (Vgl. unſere ſpäteren Ausführungen über Kant § 6b II und 6c III D.) Aber andererſeits iſt doch zu betonen, daß Kants Poſtulatenlehre erſtens der praktiſchen Vernunft angehört, zweitens ſich auf das einſichtige Verſtändnis des Sittengeſetzes gründet, – beides, wie es ſcheint, Momente, die für die Problematik der theoretiſchen Phyſik nicht exiſtieren.

Neuerdings hat Weyl (in ſeinem Beitrag »Philoſophie der Mathematik und Naturwiſſenſchaft« zum »Handbuch der Philoſophie« Abteilung II, A, herausgegeben von Bäumler und Schröter, München [Oldenbourg] 1926) ſeine Auffaſſung einer ſachlich bedeutſamen »ſymboliſchen« Mathematik näher auseinandergelegt. Eine

1) Math. Zeitſchr. Bd. 20, S. 149–150, Symposion I, S. 30–32.

2) l. c. S. 149, Anm. 20. Wir ziehen es vor, im folgenden die urſprünglicheren Kantiſchen Begriffe zu verwenden.

3) So ſagt auch Hilbert am Schluſſe ſeines neuesten Aufſatzes »Über das Unendliche« (Math. Ann. 95), das Unendliche ſei eine Idee im Sinne Kants.

Würdigung der dort entwickelten, sehr bemerkenswerten Gedanken überschreitet den Rahmen der gegenwärtigen Untersuchung schon deshalb, weil nach Weyl das »von dem Glauben getragene Jenseits, auf das sich die Symbole der Hilbertschen theoretischen (nicht intuitiven) Mathematik richten«, nur gefunden werden kann, wenn man »die Mathematik sich völlig mit der Physik verschmelzen läßt« und annimmt, »daß die mathematischen Begriffe von Zahl, Funktion usw. (oder die Hilbertschen Symbole) prinzipiell in der gleichen Art an der theoretischen Konstruktion der wirklichen Welt teilnehmen, wie die Begriffe Energie, Gravitation, Elektrizität usw.«[1] Unsere gegenwärtigen Betrachtungen beschränken sich aber auf das Gebiet der reinen Mathematik. Nur so viel sei bemerkt, daß Weyl sich in seinen neusten Untersuchungen vor allem Leibniz nähert[2] und unter den nachkantischen Philosophen eher Schelling als Fichte. Über die Frage der »symbolischen Mathematik« als einer Weise der Naturdeutung, welche ein Randproblem unserer Untersuchung darstellt, wird am Schluß der ganzen Abhandlung noch Einiges gesagt werden (§ 6 c IV).

Hier endet jedenfalls die logische Analyse. Sie erweist sich als unfähig, der Hilbertschen Analysis einen selbständigen Sinn zu erteilen und schiebt die Frage der tiefergehenden »ontologischen Analyse« zu. Vom »logischen« Gesichtspunkt aus bleibt nur die axiomatische Differenzierung der Mathematik A und B, derart, daß B als umfassenderes Gebiet A einschließt, so daß für zu B gehörige »Gegenständlichkeiten« und »Sätze« (welche Bezeichnungen, wie nunmehr feststeht, nur cum grano salis zu nehmen sind) die Möglichkeit besteht, vielleicht einmal zum Teil wenigstens zur Gruppe A zu gehören, wodurch sie vom bloßen »Gesetztsein« erst eigentlich zum »Sein« kommen würden. Diese Axiomatik höherer Ordnung ist auch ein positiv wissenschaftliches, von dem hier behandelten Grundlagenstreit unabhängiges Problem, vergleichbar mit dem der »reinen« Beweisführung in der projektiven Geometrie und der auf das archimedische Axiom, den Pascalschen und den Desarguesschen Satz bezüglichen axiomatischen Untersuchungen. Sie unterscheidet sich aber von jenen geometrischen Problemen durch ihre philosophische Bedeutung, obwohl sie für die philosophischen Fragen nur den Wert einer Voruntersuchung haben kann.

---

1) Vgl. Math. Zeitschr. 20, S. 150 und Symposion I, S. 31.

2) Vgl. unsere späteren Ausführungen über Leibniz in § 6 c III.

§ 5.

Ontologiſche Probleme des Intuitionismus.

Bei der Formulierung des Problems der mathematiſchen Exiſtenz als eines philoſophiſchen wurde von vornherein auf ſeinen ontologiſchen Charakter Gewicht gelegt. Die entſcheidende Frage ging auf den Seinsſinn der mathematichen Gegenſtände. Es wurde ausgeführt, daß die beiden in dieſer ganzen Unterſuchung fortgeſetzt betrachteten Grundauffaſſungen dieſen Seinsſinn von ihrem mathematiſchen Geſichtspunkt aus, die eine in der bloßen Eigenſchaft der widerſpruchsfreien Funktion im Syſtem der mathematiſchen Theorie, die andere in der eigentümlichen Zugangsmöglichkeit der Konſtruktion ſahen (§ 2). Indeſſen kann man mit dieſen aus der poſitiven mathematiſchen Wiſſenſchaft ſelbſt erwachſenen Begriffen und Kategorien die eigentlich ontologiſche, d. h. ſpezifiſch philoſophiſche Frageſtellung nicht in voller Sinnangemeſſenheit zum Ausdruck bringen.

Es iſt allerdings leicht zu ſehen, daß jene beiden in der poſitiven Mathematik zur Charakteriſtik der mathematiſchen Exiſtenz benutzten Begriffe der »widerſpruchsfreien Funktion« bzw. der »Konſtruierbarkeit« eine enge Beziehung zu den auch gegenwärtig in der »Erkenntnistheorie« einander gegenüberſtehenden Richtungen des »Realismus« und »Idealismus« haben. Das trat ja in unſerer eigenen Darſtellung dadurch hervor, daß wir das »Zugangsprinzip« im Anſchluß an die in unſerer früheren Arbeit (dieſes Jahrbuch Bd. 6) gebrauchten Bezeichnungsweiſe auch »das Prinzip des transzendentalen Idealismus« nannten. Auf der anderen Seite entſpricht die grundſätzlich »unerkennbare« (unzugängliche) aber doch widerſpruchslos in ein »ſyſtematiſches Weltbild» einzuordnende Gegenſtändlichkeit der »realiſtiſchen« metaphyſiſchen Grundhaltung. (Man denke etwa an N. Hartmann, Die Metaphyſik der Erkenntnis, Berlin 1921). – Trotzdem iſt auf dieſen Tatbeſtand kein entſcheidendes Gewicht zu legen, weil die Problematik der »Erkenntnistheorie« nicht für irgend ein philoſophiſches Problem als entſcheidend angeſehen werden kann. Entſcheidend iſt vielmehr die ontologiſche Problematik, in einem noch (in § 6a) zu erläuternden Sinn.

Ontologie geht danach auf die Seinsart jeglicher Gegenſtändlichkeit, letztlich bezogen auf das Daſein des Menſchen als ausgezeichnetes Sein. Es wird nun die Aufgabe der folgenden Unterſuchung ſein, die für die Charakteriſierung der mathematiſchen Gegenſtände ſinnangemeſſenen ontologiſchen Kategorien zu entwickeln.

Für dieſe Abſicht iſt ein Rückgang auf die Geſchichte der Mathematik wie auch der Philoſophie unvermeidlich. Denn nur in einem ſolchen Rückgang kann der Sinn-Urſprung der heute üblichen zur Kennzeichnung der »mathematiſchen Exiſtenz« dienenden Kategorien erfaßt werden. Indeſſen wird das Nötigſte in dieſer Richtung geleiſtet werden können, wenn auf die Anfänge der mathematiſchen Begriffsbildung in der Geiſtesgeſchichte bei den Griechen zurückgegangen wird, und dann noch die entſcheidendſten Übereinſtimmungen und Unterſchiede in der geiſtigen Grundhaltung unſerer »abendländiſchen« Mathematik gegenüber der antiken hervorgehoben werden[1].

Die eigentliche ontologiſche Problematik im ſtrengen Sinn wird erſt in § 6 entwickelt werden, die unmittelbar folgenden Ausführungen haben den Zweck, durch Betrachtung der entſcheidenden Einzelprobleme im Anſchluß an die hiſtoriſche Entwicklung das konkrete Material für die prinzipiellen Überlegungen zu liefern.

Der Abſchnitt (a) des Paragraphen wird ſich gleichwohl mit einer Begriffsbildung zu beſchäftigen haben, die erſt im 19. Jahrhundert, von G. Cantor geſchaffen worden iſt, nämlich mit der Reihe der transfiniten Ordnungszahlen. Denn ſie iſt zur Behandlung des an ſich uralten »Kontinuumproblems«, wie es heute liegt, die ſachliche Vorausſetzung. Die hiſtoriſchen Bemerkungen folgen daher erſt am Anfang des Abſchnitts (b).

a) Der transfinite Progressus und ſeine ontologiſche Deutung.

I. Die Reihe der Cantorſchen Transfiniten in der traditionellen Interpretation.

Betrachtet man die philoſophiſchen Bemerkungen, die Georg Cantor, der Begründer der Mengenlehre, zu ſeinen bahnbrechenden Entdeckungen gemacht hat[2], ſo fällt auf, daß ſie vor allem,

1) Die Rolle, die die arabiſche Mathematik und als ihre Quelle die indiſche bei der Entſtehung der abendländiſchen geſpielt hat, iſt in ihren näheren Umſtänden noch zu wenig geklärt, um berückſichtigt werden zu können. Für die hier verfolgten Zwecke genügt eine einfache Gegenüberſtellung der antiken und abendländiſchen Mathematik in ihrer Grundhaltung.

2) Über dieſen am Anfang der Entwicklung ſtehenden »ontologiſchen« Urſprung der Mengenlehre iſt die gegenwärtige Wiſſenſchaft hinweggeſchritten zu einer formalen Theorie, ſei es mehr konſtruktiven, ſei es mehr axiomatiſchen Gepräges. Es iſt aber, ſofern man auf die philoſophiſchen Grundlagen der »Mengenlehre« den Blick richten will, wichtig, die urſprüngliche in mathematiſch-theoretiſcher Hinſicht noch manche Mängel aufweiſende Faſſung

ja faſt ausſchließlich von den transfiniten Ordnungszahlen handeln, von jener berühmten »Fortſetzung der ganzen realen Zahlenreihe über das Unendliche hinaus« und ihrem Zuſammenhang mit der Stufenreihe der »Mächtigkeiten«.

Cantor hat bereits in der »Mannigfaltigkeitslehre« von 1883 ſich darüber geäußert, wie er ſich die philoſophiſche Bedeutung des von ihm entdeckten »beſtimmten Unendlichen« denkt.

Es heißt (Math. Ann. 21, S. 556) in § 5; daß »das wahre Unendliche oder Abſolute, welches Gott iſt, keinerlei Determination geſtattet«. »Der Satz 'omnis determinato est negatio' ſteht für mich ganz außer Frage« dagegen: »... was ich behaupte, ... iſt, daß es nach dem Endlichen ein Transfinitum (welches man auch Suprafinitum nennen könnte) d. i. eine unbegrenzte Stufenleiter von beſtimmten Modis gibt, die ihrer Natur nach nicht endlich, ſondern unendlich ſind, welche aber wie das Endliche durch beſtimmte wohl definierte von einander unterſcheidbare Zahlen determiniert werden können.«

Und ſpäter (1887)[1] noch klarer: »Es wurde das Aktual-Unendliche nach drei Beziehungen unterſchieden: erſtens ſofern es in der höchſten Vollkommenheit, im völlig unabhängigen außerweltlichen Sein, in Deo realiſiert iſt, wo ich es Abſolutunendliches oder kurzweg Abſolutes nenne; zweitens ſofern es in der abhängigen, kreatürlichen Welt vertreten iſt; drittens ſofern es als mathematiſche Größe, Zahl oder Ordnungstypus vom Denken in abſtracto aufgefaßt werden kann. In den beiden letzten Beziehungen, wo es offenbar als beſchränktes, noch weiterer Vermehrung fähiges und inſofern dem Endlichen verwandtes Aktual-Unendliches ſich darſtellt, nenne ich es Transfinitum und ſetze es dem Abſoluten ſtreng entgegen«.

Sehr merkwürdig iſt der Ausdruck »noch weiterer Vermehrung fähig und inſofern dem Endlichen verwandtes Aktual-Unendliches«. Man iſt geneigt dieſe »Verwandtſchaft mit dem Endlichen« in gewiſſem Sinne als eine Verwandtſchaft mit einem werdenden (potentiellen) Unendlichen auszulegen. In der Tat ſcheint das ein

---

der Cantorſchen Grundbegriffe wieder hervorzuheben. – Ich beziehe mich dabei auf die »Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre« [= Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten V. Math. Ann. Bd. 21, S. 545 ff. (1883)] und auf die Aufſätze »Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten«, Zeitſchrift für Philoſophie und philoſophiſche Kritik, Neue Folge, Bd. 88 (1884), 91 (1887), 92 (1888).

1) Zeitſchr. f. Phil. u. philoſ. Kritik, Bd. 91, p. 81 82.

mit Cantor korreſpondierender »großer Theologe«[1] auch gefühlt zu haben, wenn er (l. c. S. 91) ſagt: »aus Ihrem (Cantors) Aufſatz ... erſehe ich ..., wie Sie das Abſolut-Unendliche und das, was Sie das Aktual-Unendliche im Geſchaffenen nennen, ſehr wohl unterſcheiden. Da ſie das letztere für ein »noch Vermehrbares« (natürlich in indefinitum, d. h. ohne je ein nicht Vermehrbares werden zu können) ausdrücklich erklären und dem Abſoluten als »weſentlich Unvermehrbarem« entgegenſtellen ...., ſo ſind die beiden Begriffe des Abſolut-Unendlichen und des Aktual-Unendlichen im Geſchaffenen oder Transfiniten weſentlich verſchieden, ſodaß man im Vergleich beider nur das Eine als eigentlich Unendliches, das Andere als uneigentlich und aequivoce Unendliches bezeichnen muß.« Zu bemerken iſt hierzu, daß Cantor ſonſt mit »Uneigentlich-Unendlich« das gewöhnliche potentielle Unendliche bezeichnet. Da er ſich mit der Darſtellung des zitierten Briefes im weiteren völlig einverſtanden erklärt, ſo kann man vielleicht annehmen, daß auch Cantor ſelbſt ſeinem Transfiniten zum mindeſten einen »relativ« potentiellen Charakter zuſpricht. Allerdings widerſprechen dem viele Stellen bei Cantor ausdrücklich, an denen die Aktualität, das Sein, nicht Werden des Transfiniten mit aller Schärfe betont wird. Etwa l. c. S. 98 gegen Wundt: »Wundts Auseinanderſetzung zeigt, daß er ſich des fundamentalen Unterſchiedes von Uneigentlich-Unendlichem = veränderlichem Endlichen = syncategorematice infinitum (ἄπειρον) einerſeits und Eigentlich-Unendlichem = Transfinitem = Vollendetunendlichem = Unendlichſeiendem = categorematice infinitum (ἀφωρισμένον)[2] andererſeits nicht klar und deutlich bewußt iſt ...« Oder l. c. S. 108: »Unter einem Aktual-Unendlichen iſt ... ein Quantum zu verſtehen, das einerſeits nicht veränderlich, ſondern vielmehr in allen ſeinen Teilen feſt und beſtimmt eine richtige Konſtante iſt, zugleich aber andererſeits jede endliche Größe derſelben Art an Größe übertrifft. Als Beiſpiel führe ich die Geſamtheit, den Inbegriff aller endlichen ganzen poſitiven Zahlen an; dieſe Menge iſt ein Ding an ſich und bildet, ganz abgeſehen von der natürlichen Folge der dazugehörigen Zahlen, ein in allen Teilen feſtes beſtimmtes Quantum, ein ἀφωρισμένον, das offenbar größer zu nennen iſt, als jede endliche Anzahl«. – Man muß aber wohl unterſcheiden zwiſchen der einzelnen transfiniten Zahl, und

1) Nach einer Bemerkung von Gutberlet in einer Rezenſion von A. Fraenkels »Mengenlehre« im Philoſophiſchen Jahrbuch der Görres-Geſellſchaft Bd. 32 iſt es der Kardinal Franzelin geweſen.

2) Ariſtoteles, Phyſik III, c. 8 (p. 208 a 6): τὸ ἄπειρον οὐ μόνον δυνάμει ἀλλ' ὡς ἀφωρισμένον.

z. B. »dem Transfiniten« im Ganzen, das ſich zunächſt in der ſtets vermehrungsfähigen Folge der Ordnungszahlen in ganz analoger Weiſe darſtellt, wie das (als *δυνάμει ὄν* aufgefaßte) »Endloſe« (nach der intuitioniſtiſchen Anſchauung) in der ſtets verlängerungsfähigen Folge der endlichen Zahlen. – Es fragt ſich nun, ob derartige endloſen Prozeſſe, wie ſie ſich in den Folgen der endlichen wie der transfiniten Ordnungszahlen darſtellen, ſich nicht ſchließlich doch auf ein – allerdings im eigentlichſten Sinn »im Unendlichen liegendes« – Ziel hinbewegen können. Von der Reihe der transfiniten Zahlen ſagt Cantor (l. c. S. 109): »Das Transfinite mit ſeiner Fülle von Geſtaltungen und Geſtalten weiſt mit Notwendigkeit auf ein Abſolutes hin, auf das »wahrhaft Unendliche«, an dessen Größe keinerlei Hinzufügung oder Abnahme ſtatthaben kann und welches daher qualitativ als abſolutes Maximum anzuſehen iſt. Letzteres überſteigt gewiſſermaßen die menſchliche Faſſungskraft und entzieht ſich namentlich mathematiſcher Determination; wogegen das Transfinite nicht nur das weite Gebiet des Möglichen in Gottes Erkenntnis erfüllt, ſondern auch ein reiches, ſtets zunehmendes Feld idealer Forſchung darbietet und meiner Überzeugung nach auch in der Welt des Geſchaffenen bis zu einem gewiſſem Grade und in verſchiedenen Beziehungen zur Wirklichkeit und Exiſtenz gelangt, um die Herrlichkeit des Schöpfers, nach deſſen abſolut freiem Ratſchluß, ſtärker zum Ausdruck zu bringen, als es durch eine bloß »endliche Welt« hätte geſchehen können ....«

In einem beſtimmten Sinn kann man die erſte transfinite Ordnungszahl ω, den Ordnungstypus der Reihe aller endlichen Zahlen, als »Grenze« (Ziel) des endlichen Zählprozeſſes anſehen, als Ziel des transfiniten Zählprozeſſes aber den »Ordnungstypus der Reihe aller Ordnungszahlen«, die berüchtigte »maximale« Ordnungszahl W. Dieſe identifiziert alſo Cantor in der obigen Stelle mit dem abſoluten Unendlichen.[1] Es ſei kurz die Paradoxie, die ſich an dieſes W knüpft, erinnert: W ſoll einerſeits der Ordnungstypus aller Ordnungszahlen in ihrer natürlichen Reihenfolge genommen ſein, iſt alſo unvermehrbar. Andererſeits kann man doch grundſätzlich jede Ordnungszahl durch Anhängen eines Elementes (Addition der 1) vergrößern: $W + 1 > W$; ganz analog wie etwa $\omega + 1 > \omega$ oder ſogar $n + 1 > n$.

1) Die Antinomie, die ſich an die Menge W knüpft, wurde zwar erſt 1897 von Burali-Forti publiziert (Rend. Circ. Math. Palermo XI), aber von Cantor bereits 1896 brieflich Hilbert mitgeteilt. (Angabe von F. Bernſtein, Math. Ann. 60, S. 187.)

Dies iſt ein offenbarer Widerſpruch[1].

Es ſtimmt dieſer Umſtand gut zu Cantors Behauptung, daß das Abſolut-Unendliche (alſo W) die menſchliche Faſſungskraft überſtiege. Oder genauer geſagt: Der paradoxe Begriff der »maximalen« Ordnungszahl W kommt dadurch zuſtande, daß man der transfiniten Zahlenreihe ein Ziel ſetzt, das ſelbſt ſeinerſeits nur transfinit ſein ſoll, aber nicht – wie Cantor urſprünglich meinte – das Abſolut-Unendliche, das »infinitum aeternum increatum sive absolutum«[2].

Nun bietet ſich aber anſcheinend bereits dieſelbe Schwierigkeit auf einer viel früheren Stufe dar: nämlich bei der »Erzeugung« der erſten Transfiniten ω ſelbſt. Betrachtet man die werdende Zahlenreihe 1, 2, 3, 4, ..., ſo gilt, daß jede einzelne, noch ſo große Zahl in ſich konſtant, feſt beſtimmt, ſeiend, nicht werdend iſt; daß ſie aber vermehrbar iſt, etwa um 1, ſo daß alſo der Übergang $n \to n+1$ möglich iſt, wodurch die Zahlenreihe 1, 2, 3 . . . . $(n-1)$, n ſich um ein Glied weiter entwickelt. Aber es iſt anſcheinend ſinnlos von der Reihe aller ganzen Zahlen zu ſprechen. Denn einerſeits müßte, wenn dieſer Reihe die beſtimmte Zahl z entſpräche, z die »letzte« aller Zahlen ſein, andererſeits könnte man die auf ſie folgende $z+1 > z$ leicht bilden. (Man ſieht die genaue Analogie mit der Antinomie der Zahl W!)

Wie entzieht ſich Cantor dieſem Dilemma? Er führt tatſächlich eine »auf alle Zahlen folgende« Zahl ω ein, aber verlangt von ihr nicht, daß ſie die letzte iſt, ſondern läßt auf ſie beliebige weitere Zahlen $\omega+1$, $\omega+2$, $\omega+3$, ... folgen.

Man iſt heutzutage an dieſes Verfahren durch die langjährige Geſchichte der Mengenlehre ſo gewöhnt, daß man ſich das Außerordentliche dieſes erſten Schrittes ins transfinite Gebiet kaum noch zum Bewußtſein bringt. Dazu kommt, daß man mit Hilfe von axiomatiſch aufgebauten angeblich »exakten« Satz- und Beweisſyſtemen ſein Gewiſſen damit beruhigt, daß man ja vor Widerſprüchen geſichert ſei, – obwohl eine wirklich radikale Sicherung eigentlich erſt die Hilbertſche Beweistheorie (und die ihr verwandte von J. König)[3] in Ausſicht ſtellt. Indeſſen, im Grunde iſt es – ontologiſch, d. h. »inhaltlich« angeſehen – ein unerhörtes Vorgehen, auf alle Zahlen noch weitere »über das Unendliche hinaus« folgen zu laſſen.

1) Vgl. z. B. Heſſenberg, Grundbegriffe der Mengenlehre (Göttingen 1906), Kap. XXIV, insbeſ. §§ 98–99.

2) Cantor, Zeitſchr. f. Phil. u. philoſ. Kritik 91, S. 105.

3) Neue Grundlagen der Logik, Arithmetik u. Mengenlehre. Leipzig 1914.

Sieht man die Sachlage ontologiſch an, ſo muß man notwendig weiter fragen: iſt es möglich, dieſe Fortſetzbarkeit der Zahlenreihe über ω hinaus auf irgend einem Gebiet an irgend einem Beiſpiel konkret zu verfolgen?

Es ſcheint zunächſt, als ob man etwa die einfachen Umordnungen der Zahlenreihe:

$$\omega: 1\ 2\ 3\ 4\ \ldots;\quad \omega+1: 2\ 3\ 4\ \ldots\ 1;\quad \omega+2: 3\ 4\ 5\ \ldots\ 1\ 2;$$
$$\omega+\omega: 1\ 3\ 5\ 7\ \ldots\ 2\ 4\ 6\ 8\ \ldots;\ \text{uſw. uſw.}$$

verwenden könnte. Aber näheres Zuſehen zeigt doch ſofort, daß es ſich hier um eine ganz unorganiſche äußerliche Aneinanderſetzung von gänzlich verſchiedenen Reihen angehörigen Zahlen handelt. (1 2 3 . . .), (2 3 4 . . .), (1 3 5 . . .), (2 4 6 . . .) uſw. unterſcheiden ſich z. B. nur durch die willkürliche Bezeichnung.

Die 1 hinter alle Zahlen zu ſetzen: 1 2 3 . . . . 1; ſie einfach zu wiederholen, leiſtet ontologiſch gar nichts. Denn das Nebeneinanderſchreiben von 2 und 3, von 17 und 18, allgemein von n und $n+1$, hat einen Sinn; der durch $+1$ angedeutete Übergang von einer beſtimmten Zahl zur nächſtfolgenden $n \to n+1$ iſt das Grunderzeugungsprinzip der Zahlenreihe, des »Immer noch eins«. Aber etwas derartiges beſteht zwiſchen den Punkten » . . . « und der » 1 « am Schluß nicht.

Man iſt daher einigermaßen ratlos und ontologiſch ſcheinen die Zahlen ω, $\omega+1$ ebenſo wenig begreiflich, wie die Zahlen W, $W+1$.

Freilich zu Widerſprüchen kommt es bei ω nicht. Und Cantor ſtellt ſich (in den entſcheidenden Punkten, aber nicht durchaus) auf den Standpunkt: ſolange man Widerſprüche vermeidet (und die Unnahbarkeit des Abſoluten reſpektiert!), kann man auf alle Einwände mit der Bemerkung antworten: man dürfe eben nicht die im Endlichen »ſelbſtverſtändlichen« Eigenſchaften aufs Unendliche übertragen. Aber dieſer Standpunkt ſchlägt den Forderungen der ontologiſchen Frageſtellung ins Geſicht! Widerſpruchsfreiheit – das wurde ja früher eingehend erörtert – beſagt im ontologiſchen Sinn gar nichts Poſitives. Grundſätzlich unerfüllbare Intentionen können durchaus widerſpruchsfrei ſein. Eigentliche »Exiſtenz« – im ontologiſchen Sinn – erfordert phänomenale Gegebenheit, »Zugang«. Es »exiſtieren« eben letzten Endes nur Phänomene.

Stellt man demgemäß die Frage ſo: »Gibt es transfinite Phänomene? Gibt es das Transfinite als Phänomen? Inwieweit und in welcher Gegebenheitsweiſe?«, ſo iſt die ſo gefaßte »Exiſtenz«

von ω ebenſowenig von vornherein geſichert wie die von W. Die Widerſpruchsfreiheit von ω »erlaubt« zwar die phänomenale »Exiſtenz« von ω, aber ſie begründet ſie keineswegs, ſie iſt eine notwendige, aber keineswegs eine hinreichende Bedingung dieſer »Exiſtenz«.

Es iſt angeſichts dieſer Sachlage begreiflich, daß der radikale Intuitionismus Weyls, der ſich ja philoſophiſch auf phänomenologiſchen Grundlagen aufbaut, die Exiſtenz des aktual unendlichen ω ablehnt[1]. In dem Aufſatz über die Grundlagenkriſe heißt es:[2] »Kein Platz iſt da in unſerer Analyſis für eine allgemeine Mengenlehre . . .« »Die Mathematik iſt ganz und gar, ſogar den logiſchen Formen nach, in denen ſie ſich bewegt, abhängig vom Weſen der natürlichen Zahl.« »In den hier gezogenen radikalen Konſequenzen ſtimme ich, ſoviel ich verſtehe, nicht mehr ganz mit Brouwer überein. Beginnt er doch ſogleich mit einer allgemeinen Funktionenlehre, . . . betrachtet Eigenſchaften von Funktionen, Eigenſchaften von Eigenſchaften u. ſ. f. und wendet auf ſie das Identitätsprinzip an. (Mit vielen ſeiner Ausſagen gelingt es mir nicht, einen Sinn zu verbinden).« Poſitiv ſagt Weyl[3]: »Ausgangspunkt der Mathematik iſt die Reihe der natürlichen Zahlen, d. h. das Geſetz $\aleph$, das aus dem Nichts die erſte Zahl 1 erzeugt und aus jeder ſchon entſtandenen Zahl die nächſtfolgende erzeugt; ein Prozeß, der niemals zu einer ſchon dageweſenen Zahl zurückführt.«

Der eigentliche Ernſt der Frage nach der Exiſtenz des Aktual-Unendlichen im Sinne des Transfiniten tritt alſo ſchon bei ω zutage. Auf dieſe Frage muß ſchon bei ω und dann weiter bei jeder beſtimmten transfiniten Zahl:

$$\omega+1,\ \omega+\omega,\ \omega\cdot\omega,\ \omega^{\omega}\ldots,\ \omega^{\omega^{\omega}}\ldots,\ \omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}=\varepsilon,\ \ldots.\ \Omega_1$$

(Ω_1 iſt die 1. Zahl der 3. Zahlenklaſſe), uſw. uſw. eine beſtimmte

1) Vgl. etwa Math. Zeitſchr. 10, p. 57. Noch ſchärfer iſt die Kritik gegen die Cantorſchen »Mächtigkeiten«, die als mathematiſch völlig bedeutungslos angeſehen werden. Siehe l. c. S. 67 unten: »Der Zweifel an der Lückenloſigkeit der Cantorſchen $\aleph$ greift nach unſerer Auffaſſung nicht erſt bei $\aleph_1$, auch nicht erſt bei $\aleph_0$ Platz, ſondern ſchon am erſten Beginn der Zahlenreihe; die Behauptung, daß 1 die kleinſte auf 0 folgende Kardinalzahl iſt, muß als grundlos zurückgewieſen werden. Mir ſcheint daraus die mathematiſche Wertloſigkeit dieſes Mächtigkeitsbegriffes hervorzugehen. Natürlich behalten die endlichen Kardinalzahlen ihr altes gutes Recht, wo ſie nicht auf eine »definite Menge« bezogen werden, ſondern auf den Inbegriff einzelner gegebener Elemente (Zahlbegriff des täglichen Lebens).«

2) l. c. p. 70. 3) l. c. p. 57.

»inhaltliche« (in der Hilbertſchen Redeweiſe »metamathematiſche«) Antwort gegeben werden. Die üblichen gegen die »negativen Argumente« gewendeten Gegenargumente Cantors genügen hier nicht. Cantor macht den Verſuch, ſich der Beweislaſt für die phänomenale Aufweisbarkeit der transfiniten Zahlen mit der Bemerkung zu entziehen, auch die größeren endlichen Zahlen ſeien nicht »uno intuitu« aktuell zu denken. Er fährt fort: »Und trotzdem haben wir das Recht, die endlichen Zahlen, auch wenn ſie noch ſo groß ſind, als Gegenſtände der diskurſiven, menſchlichen Erkenntnis anzuſehen und ſie wiſſenſchaftlich nach ihrer Beſchaffenheit zu unterſuchen; dasſelbe Recht ſteht uns auch in bezug auf die transfiniten Zahlen zu«[1].

Bekannt ſind die Forſchungen über die primitiven Zahlauffaſſungen (der Naturvölker[2], des Kindes, des täglichen Lebens), die

---

1) Zeitſchr. f. Phil. u. philoſ. Kritik, Bd. 91, S. 261. – Cantor erwähnt kurz vorher (l. c. S. 260), daß Auguſtinus (De civitate Dei, l. XII, cap. 18) ſagt: »profecto et omnis infinitas quodam ineffabili modo Deo finita est, quia scientiae ipsius incomprehensibilis non est«, und fährt nun nach der oben zitierten Stelle fort: »... Nach unſerer Organiſation ſind wir nur ſelten im Beſitz eines Begriffes, von dem wir ſagen können, daß er ein »conceptus rei proprius ex propriis« wäre, indem wir durch ihn die Sache adäquat, ohne Hilfe einer Negation, eines Symbols oder Beiſpiels, ſo auffaſſen und erkennen, wie ſie an und für ſich iſt. Vielmehr ſind wir beim Erkennen zumeiſt auf einen »conceptus rei proprius ex communibus« angewieſen, welcher uns befähigt, ein Ding aus allgemeinen Prädikaten und mit Hilfe von Vergleichungen, Ausſchließungen, Symbolen oder Beiſpielen derartig zu beſtimmen, daß es von jedem anderen Ding wohl unterſchieden iſt.... Ich gehe nun ſo weit, unbedingt zu behaupten, daß dieſe zweite Art der Beſtimmung und Abgrenzung von Dingen für die kleineren transfiniten Zahlen (z. B. für ω oder $\omega + 1$ oder ω^{ν}, bei kleiner endlicher ganzer Zahl ν) eine unvergleichlich einfachere, bequemere und leichtere iſt, als für ſehr große endliche Zahlen, bei denen wir gleichwohl auch nur auf dasſelbe, unſerer unvollkommenen Natur entſprechende Hilfsmittel angewieſen ſind.«

Es liegt bezüglich der Erfaſſung der großen endlichen Zahlen in der Tat ein wichtiges Problem vor, dem wir noch einige Bemerkungen widmen werden. Vgl. dazu Huſſerl, Philoſophie der Arithmetik (Halle 1891) Bd. I, S. 211–216 (Rolle der ſymbol. Vorſtellung in der Arithmetik. Über Gauß' Ausſpruch ὁ θεὸς ἀριθμητίζει); S. 218 (Auffaſſung der erhebl ichen Mengen); S. 221–223 (Symboliſierung durch Vermittlung des vollen Prozeſſes der Einzelauffaſſung); S. 240–242, 244–245 (große endliche Mengen); S. 246–250 (unendliche Mengen). – Vgl. auch Math. Anh. zu § 3, Nr. III.

2) Vgl. z. B. Levy-Brühl, Das Denken der Naturvölker. Wien und Leipzig 1921; Wertheimer, Drei Abhandlungen zur Geſtalttheorie. Erlangen 1925. (»Über das Zahlendenken der Naturvölker«). – Bekanntlich haben ſelbſt die Griechen erſt durch Archimedes und Apollonius eine Zahlen-

feſtgeſtellt haben, daß urſprünglich nur ein kleines Stück der endloſen Zahlenreihe differenziert und deutlich gegeben iſt, daß aber von einer gewiſſen, von den jeweiligen Umſtänden abhängigen Stelle ab alle größeren Zahlen in eine unvorſtellbare »ungeheure« Zahl zuſammenfließen. Erſt allmählich erobern ſich die Völker im Verlauf ihrer Geiſtesgeſchichte (wie jetzt noch das Kind: man denke an das Rechnen in den begrenzten, ſich ſtufenweiſe vergrößernden »Zahlenräumen« auf der Volksſchule!) die Kenntnis der endloſen Folge der ganzen Zahlen, und es lag ſo für Cantor die Auffaſſung nahe, daß dieſer Eroberungsprozeß in ſeinen transfiniten Zahlen einen legitimen Fortgang fände. Aber durch die Tatſache der Eroberung der endloſen Zahlenreihe für die Erkenntnis, die etwa durch das dekadiſche Poſitionsſyſtem oder die Archimediſchen Oktaden in der »Sandrechnung«[1] geleiſtet wurde, iſt noch nichts ausgemacht über die Weiſe der Erfaſſung der großen Zahlen als Phänomene[2]. Ehe über dieſe Frage nicht Klarheit herrſcht, wird man auch nicht beurteilen können, inwiefern vielleicht Cantors Bezeichnungsweiſe der Transfiniten für dieſe hinſichtlich der Zugänglichmachung dasſelbe leiſtet, wie etwa das dekadiſche Poſitionsſyſtem für die endlichen Zahlen. Denn man wird zugeben müſſen, daß eine ſolche Zugänglichmachung, alſo in gewiſſem indirekten Sinn eine Erfaſſung des Zahlenphänomens, bei den gegebenen endlichen in der Wiſſenſchaft und Praxis verwendeten Zahlen wirklich geleiſtet iſt.

Nun iſt die Frage der Auffaſſung großer Mengen ſchon von Huſſerl in ſeiner »Philoſophie der Arithmetik« (II. Teil) eingehend erörtert worden. Es heißt dort (S. 212): »Die Vorausſetzung, von der wir zunächſt als wie von einer ſelbſtverſtändlichen ausgingen, nämlich, daß jedes arithmetiſche Operieren eine Betätigung mit und an den wirklichen Zahlen ſei, kann nicht der Wahrheit entſprechen. Allzu voreilig ließen wir uns von der gemeinüblichen und naiven

benennung und ſchriftliche Bezeichnung erhalten, die beliebig große Zahlen zu bezeichnen geſtattet. (Anders die Inder, die ſchon ſehr früh ſehr hoch hinaufreichende Zahlwörter und ſpäter das dekadiſche Poſitionsſyſtem beſaßen).

1) ψαμμίτης (arenarius). Archimedes, ed. Heiberg, Vol. II.

2) Man könnte daran denken, aus der Verwendung beliebiger hoher Zahlen in der Aſtronomie uſw. Schlüſſe auf ihre Gegebenheit zu ziehen. Aber wenn man etwa an die Weiſe denkt, wie in der Inflationszeit die großen Geldziffern im faktiſchen Leben in die Erſcheinung traten, ſo erkennt man, wie leicht ſich in ſolchen Fällen gewiſſe Erſatz-Phänomene vor die nominell gegebenen Ziffern z. B. der Geldſcheine (Milliarden, Billionen uſw.) ſchieben. So wirkte doch z. B. die Billion einfach wie eine neue Geldeinheit, etwa als ob man von der Mark zum Taler oder dgl. übergegangen wäre.

Anſicht leiten, die den Unterſchied zwiſchen ſymboliſchen und eigentlichen Zahlvorſtellungen nicht beachtet und der fundamentalen Tatſache nicht gerecht wird, daß alle Zahlvorſtellungen, die wir über die wenigen erſten hinaus in der Zahlenreihe beſitzen, ſymboliſche ſind und nur ſymboliſche ſein können; eine Tatſache, welche Charakter, Sinn und Zweck der Arithmetik ganz und gar beſtimmt«[1]. Weiterhin (S. 218): Bei der Erfaſſung ſinnlicher Mengen geht »unſere urſprüngliche Intention auf die Bildung einer Inbegriffsvorſtellung, welche jede der Teilanſchauungen (der Menge) für ſich auffaßt und mit den anderen einheitlich zuſammen begreift. Darauf geht unſere Intention, aber ihr vollauf zu genügen, fehlt es bei den erheblicheren Mengen an einer entſprechenden Leiſtungsfähigkeit unſeres Geiſtes. Wohl iſt noch die ſukzeſſive Einzelauffaſſung der Mengenglieder möglich, aber nicht mehr ihre zuſammenfaſſende Kollektion[2], und ſofern wir in derartigen Fällen doch von einer Menge oder Vielheit ſprechen, kann dies offenbar nur in ſymboliſchem Sinne geſchehen.« Auch dann, wenn wir noch eine eigentliche Mengenvorſtellung bilden könnten, unterlaſſen wir häufig »die wirkliche Auffaſſung aller einzelnen Glieder, vollführen nur ganz wenige, wenn überhaupt irgendwelche Schritte und begnügen uns mit einer noch viel uneigentlicheren Subſumption unter dem Vielheitsbegriff als ſonſt«[3].

1) Vgl. die weiteren Ausführungen Huſſerls, l. c. S. 213–215.

2) Man vgl. dazu, was Kant in der Kritik der Urteilskraft § 26, »Von der Größenſchätzung der Naturdinge« ſagt. (S. 104–105 Kehrbach): »Nun gibt es zwar für die mathematiſche Größenſchätzung kein Größtes (denn die Macht der Zahlen geht ins Unendliche); aber für die äſthetiſche Größenſchätzung gibt es allerdings ein Größtes ...« »Anſchaulich ein Quantum in die Einbildungskraft aufzunehmen, ... dazu gehören zwei Handlungen dieſes Vermögens: Auffaſſung (apprehensio) und Zuſammenfaſſung (comprehensio aesthetica). Mit der Auffaſſung hat es keine Not; denn damit kann es ins Unendliche gehen; aber die Zuſammenfaſſung wird immer ſchwerer, je weiter die Auffaſſung fortrückt und gelangt bald zu ihrem Maximum, nämlich dem äſthetiſch-größten Grundmaße der Größenſchätzung. Denn wenn die Auffaſſung ſo weit gelanget iſt, daß die zuerſt aufgefaßten Teilvorſtellungen der Sinnenanſchauung in der Einbildungskraft ſchon zu erlöſchen beginnen, indeß daß dieſe zur Auffaſſung mehrerer fortrückt, ſo verliert ſie auf einer Seite ebenſo viel als ſie auf der andern gewinnt, und in der Zuſammenfaſſung iſt ein Größtes, über welches ſie nicht hinauskommen kann.«

3) Huſſerl bemüht ſich auf den folgenden Seiten um die ſchwierige Analyſe der momentanen Mengenauffaſſung; eine gewiſſe Löſung wird ſchließlich erreicht durch Einführung der »figuralen Einheitsmomente«. Dieſes Problem kümmert uns hier nicht.

Es erhebt ſich allerdings angeſichts dieſer Sachlage die Frage »worin die Gewähr für die Vollſtändigkeit der durchlaufenden Einzelauffaſſung der Menge liegt« (S. 240) oder anders ausgedrückt, die Frage nach der »Möglichkeit einer vollſtändigen Durchzählung« (S. 241). Hier iſt entſcheidend der Aufweis der ſog. »figuralen Momente«[1] gewiſſer geſtalthafter Eigentümlichkeiten der Mengen, die der Succeſſion der Einzelauffaſſungen »einen geregelten und ſicheren Gang erteilen«.

Für den gegenwärtigen Zweck genügt es, den einfachſten Fall ins Auge zu faſſen, daß die Glieder der Menge in einer Reihe etwa räumlich oder auch in der Zeit vorliegen bzw. nacheinander ablaufen. Es ſind alsdann die »Verknüpfungen der elementaren Reihenrelationen, die uns anleiten.« Wir gehen vom erſten Glied zum zweiten, von da zum dritten, allgemeiner vom $(n-1)^{ten}$ zum n^{ten} und vom n^{ten} zum $(n+1)^{ten}$ über. »Indem uns ſo ſtets zwei aneinandergrenzende Verknüpfungen zugleich und zwar als wohlgeſonderte gegenwärtig ſind, kann die neue als ſolche erkannt werden, und der Fortſchritt wird zu einem eindeutig beſtimmten. Dieſe Eindeutigkeit gewährleiſtet aber die Vollſtändigkeit der durchlaufenden Einzelauffaſſung« (S. 241).

Wir ſind alſo auf die beſchriebene Weiſe in der Lage, auch große, als Ganzes unüberſehbare Mengen, bei genügender Zeitaufwendung vollſtändig zu durchlaufen bzw. uns vermöge der eigentümlichen Verkürzung, die Zeitſtrecken in der »uneigentlichen« Vorſtellung erleiden[2], auch noch ſo große Mengen derart »durchlaufen

---

1) Näheres bei Huſſerl, l. c. S. 227 ff. – Die dort gegebenen Deſkriptionen ſind allerdings keineswegs ſtreng phänomenologiſche, ſondern pſychologiſche. Es bietet aber dem Kenner der phänomenologiſchen Methode keine grundſätzlichen Schwierigkeiten, den phänomenologiſchen Kern jener Deſkriptionen rein herauszuſchälen. – Nur auf einen Punkt ſei hingewieſen: Der Gedanke, die uneigentliche Gegebenheit einer Menge, Zahl uſw. als »ſymboliſch« aufzufaſſen in dem Sinn, daß an Stelle des eigentlichen Gegenſtandes als »Repräſentant« ein »Zeichen« figuriere, iſt nach den ſpäteren Forſchungen Huſſerls unhaltbar. Es hat an ihre Stelle vielmehr die grundſätzliche Einführung der Begriffe der »leeren Intention« und ihrer »Erfüllung« zu treten. Siehe die bezüglichen Ausführungen der »Logiſchen Unterſuchungen«, beſonders in der I. und VI. Unterſuchung.

Ebenſo darf der fundamentale Unterſchied, der zwiſchen Kollektion (Menge) und ſinnlichem Einheitsmoment beſteht, nicht außer Acht gelaſſen werden: eine Kollektion iſt das Korrelat einer kategorialen Anſchauung, das ſinnliche Einheitsmoment (figurales Moment) der ſinnlichen Anſchauung. Vgl. VI. Log. Unterſ., 2. Abſchnitt, beſ. § 91, S. 161.

2) Die Rolle der Zeit bei der Erfaſſung mathematiſcher Gegenſtändlichkeiten wird in § 6 b erörtert.

zu denken«. Dieſe diskreten linearen Mengen können nun offenbar die Auffaſſung der Zahlen begründen; an ihnen kann der Zahlencharakter als abſtraktes Moment herausgehoben werden. Wie das geſchieht, iſt für die gegenwärtige Unterſuchung nicht von Belang.

So kann man alſo die Frage nach der phänomenalen Gegebenheit größerer Zahlen dahin beantworten, daß ſie auf Grund einer »gedachten« vollſtändigen Durchlaufung, deren Eindeutigkeit durch die Art der zählenden Bewegung geſichert iſt, in einer gewiſſen Weiſe »ſelbſt gegeben« ſind. Und aller Wahrſcheinlichkeit nach gibt es gar keine noch erfülltere Weiſe der Gegebenheit dieſer Zahlen oder wenigſtens genügend hoher Zahlen dieſer Art. Es würde dann alſo ſogar die einzige Weiſe der originären Gegebenheit vorliegen, deren ſie fähig ſind. – Wie ſteht es nun aber mit unendlichen Mengen? Hierüber ſtehen auch ſchon in der »Philoſophie der Arithmetik« (S. 246–60) erſtaunlich tiefgehende Bemerkungen, die ganz und gar der heutigen »intuitioniſtiſchen« Auffaſſung und zwar in ihrer radikalſten (Weylſchen) Form entſprechen.

Es wird zunächſt geſagt, daß die unendlichen Mengen ſich dadurch von allen noch ſo großen endlichen Mengen grundſätzlich unterſcheiden, daß ſie als wirkliche Kollektion auch für ein »idealiſiertes Erkenntnisvermögen« nicht anſchaubar ſind. »Der Gedanke, daß irgend eine Erweiterung unſeres Erkenntnisvermögens dieſes zu der wirklichen Vorſtellung oder auch nur der ſinnlichen Ausſchöpfung ſolcher Mengen befähigen könnte, iſt unausdenkbar. Hier hat ſelbſt unſere Kraft der Idealiſierung eine Schranke« (S. 247). Gegeben iſt lediglich »die ſymboliſche Vorſtellung eines unbeſchränkt fortſetzbaren Prozeſſes der Begriffsbildung«, mit Rückſicht auf deſſen Ergebniſſe ſukzeſſive (endliche) Mengenvorſtellungen gebildet werden, die ſich ſtets erweitern. Sofern dieſer Prozeß nun als eindeutig beſtimmt vorausgeſetzt wird[1], erhält auch der Begriff »ein mögliches Reſultat dieſes Prozeſſes« einen beſtimmten, faßbaren Sinn[2].

1) Bedenklich iſt es allerdings, wenn Huſſerl (S. 247) ſagt: »Es iſt a priori durch ſcharfe begriffliche Momente beſtimmt, was dieſe ſtetig auszudehnende Menge umfaßt oder umfaſſen kann, d. h. von einem jeden vorgegebenen Denkobjekt läßt es ſich unzweideutig entſcheiden, ob es Glied dieſes Prozeſſes bzw. dieſer Mengenbildung ſein könne, oder nicht.«

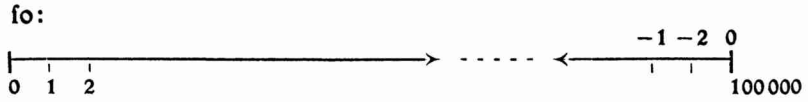
Dies gilt offenbar nur für geſetzmäßige Folgen und auch für die Urfolge $\aleph$ ſelbſt, nicht aber für »frei werdende Wahlfolgen«, die in gewiſſem Sinn doch auch unendliche Mengen ſind.

2) Man beachte, wie der Begriff des »Möglichen«, des Spielraumes der Variablen, erſt durch den Begriff des beſtimmten Prozeſſes ſeinen Sinn erhält, nicht umgekehrt!

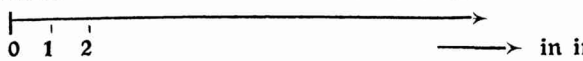
Das »begriffliche Prinzip«, das dem Prozeſſe ſeine Beſtimmtheit gibt, tritt an die Stelle des figuralen Momentes, das bei der ſukzeſſiven Durchlaufung der Glieder der endlichen Mengen den Leitfaden abgibt.

Soweit die Ausführungen Huſſerls. Man kann ihnen i. A. noch heute zuſtimmen, nur iſt der Unterſchied zwiſchen einem begrifflichen Moment und dem »figuralen« (alſo rein ſinnlichen) Moment einigermaßen irreführend. Es handelt ſich bei der endlichen Kollektion, wie Huſſerl ſpäter in den »Logiſchen Unterſuchungen« eingehend gezeigt hat, nicht um eine rein ſinnliche Erfüllung, ſondern das eigentliche Kolligieren iſt eine Leiſtung der ſog. »kategorialen Anſchauung«. Andererſeits iſt das »und ſo weiter« des endloſen Prozeſſes zwar wohl kategorial durchformt, aber doch auch fundiert auf das »ſinnliche Moment« des »offenen Horizonts«. Denn auch die Sinnlichkeit iſt ſchon durchaus von Intentionalitäten durchherrſcht, wie die Phänomenologie der Wahrnehmung zeigt.

Zieht man dieſe Bemerkungen in Erwägung, ſo ergibt ſich, daß auch die unendlichen (endloſen) Mengen in einem gewiſſem Sinne originär gegeben ſind, wenn man nur den Sinn von »originär« entſprechend geſchmeidig auffaßt. Die eigentümliche Anſchaulichkeit des »offenen Horizonts« kann wirklich dem »figuralen Moment«, das etwa in der Form einer linearen Anordnung die Auffaſſung großer Zahlen ermöglicht, zur Seite geſtellt werden. Im Grunde ſpielt ſogar dieſer »offene Horizont« bei der Auffaſſung ſehr großer endlicher Mengen eine Rolle: denkt man ſich etwa 100000 Pflaſterſteine in linearer Anordnung, ſo hat man doch eben nur den Beginn der Reihe, dann, geleitet vom figuralen Moment den offenen Horizont und dann das Ende der Reihe, alſo etwa ſo:

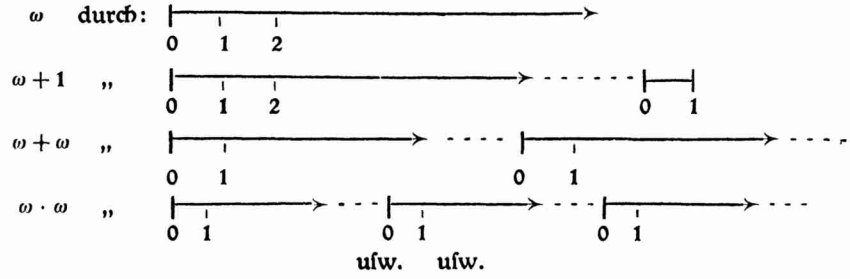


So angeſehen iſt die »Vorſtellung« der unendlichen Zahlenreihe ſogar in gewiſſem Sinne einfacher, indem ſie nur das Anfangsſtück und dann den »offenen Horizont« enthält:



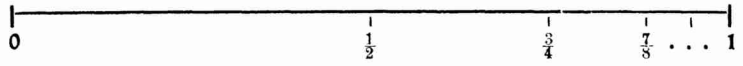
So kommen wir in gewiſſem Sinne zu Cantors Behauptung zurück, daß die einfachen transfiniten Zahlen leichter zu erfaſſen ſeien, als ſehr große endliche Zahlen. Und es könnte ſogar einen Augenblick lang ſcheinen, als ob von dem gewonnenen Standpunkt

aus nunmehr die quaſianſchauliche Darſtellung (gewiſſermaßen der Schematismus im Kantſchen Sinn) der Transfiniten leicht ſei; etwa könnte man verſinnbildlichen:



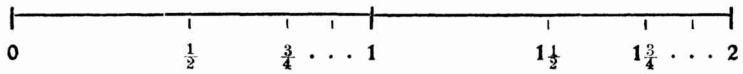
Aber es iſt klar, daß man damit nur auf eine verſchlechterte (weit weniger präziſe als die früher gegebene) Darſtellung durch Anordnungen von Zahlen zurückkäme, oder auch durch Punkte auf der Zahlgeraden, etwa in folgender Weiſe:

ω iſt darzuſtellen durch 1 2 3 ... oder $\frac{1}{2}\ \frac{3}{4}\ \frac{7}{8}\ \frac{15}{16}\ \ldots\ \frac{2^n-1}{2^n}\ \ldots$



$\omega+\omega$ durch: 1 3 5 7 ... 2 4 6 8 ..., oder

durch: $0\ \frac{1}{2}\ \frac{3}{4}\ \ldots\ \frac{2^n-1}{2^n}\ \ldots;\ 1\ 1\frac{1}{2}\ 1\frac{3}{4}\ \ldots\ 1+\frac{2^n-1}{2^n}\ \ldots$



uſw. uſw.

Es wurde ſchon früher geſagt und iſt auch jetzt zu wiederholen, daß auf dieſe Weiſe niemals die Fortſetzung des Prozeſſes über das Unendliche hinaus plauſibel gemacht werden kann. Man iſt alſo im Grunde noch auf dem alten Fleck.

Es muß eine grundſätzlich andere Möglichkeit der phänomenalen Unterbauung des Cantorſchen abſtrakten Schemas der »Erzeugungsprinzipien« gefunden werden.

Es mag auf den erſten Blick verwunderlich erſcheinen, daß man einen derartigen konkreten Unterbau überhaupt auffinden kann. Aber es iſt tatſächlich der Fall und, näher beſehen, auch nicht paradox. Denn man muß ſich doch überlegen, daß der »abſtrakte Prozeß« der Anwendung der Cantorſchen »Erzeugungsprinzipien« auch in concreto vollzogen wird, ſofern man etwa die Bezeichnung der höheren transfiniten Zahlen möglichſt weit hinauf verfolgen will. Allerdings kommt bei einem wirklichen »phänomenalen« Unterbau doch noch etwas hinzu – wie ſich ſogleich zeigen wird –,

nämlich die Herſtellung bzw. die Aufweiſung eines Motivationszuſammenhangs, der zur Fortſetzung des begonnenen Prozeſſes »ins Transfinite« antreibt.

II. Transfinite Strukturkomplikationen des Bewußtſeins.

An zwei im Typus in mancher Hinſicht unterſchiedenen Beiſpielen ſei nun die konkrete Möglichkeit der Unterbauung des Schemas der transfiniten Zahlen durch Phänomene gezeigt:

A. Die Stufen der Relativierung von Ausſagen.

Man kann aus irgendwelchen Motiven ſich gegen eine Ausſage, gegen viele Ausſagen – vielleicht gegen alle konkret erfolgten naiven Ausſagen ſkeptiſch verhalten. Man kann das etwa ausdrücken, indem man ſagt: »Die Wahrheit des Satzes p_0 iſt nur relativ.« (Dieſer Satz werde kurz mit p_1 bezeichnet.) Wenn man konkreter ſein will, kann man ſagen: relativ auf das urteilende Individuum, ſeine geiſtesgeſchichtliche Lage u. dgl. Dabei iſt impliziert, daß die Wahrheit des Satzes p_1 abſolut gelte[1].

Man kann nun aber weiter gehen und mit einer geſteigerten Skepſis auch dieſen Satz p_1 bezweifeln, ihn alſo irgendwie für relativ erklären. Alſo etwa: »Die Wahrheit von p_1 iſt relativ«. Analog kann man fortfahren: »Die Wahrheit von p_2 iſt relativ«. [p_3] uſw., wodurch man eine endloſe Folge von Sätzen $p_0\ p_1\ p_2\ \ldots\ p_n\ p_{n+1}\ \ldots$ erhält.

Man hat dann alſo etwa konkret die folgende Reihe: »Es läßt ſich bezweifeln, daß es ſich bezweifeln läßt, uſw. uſw. . . . . in endloſer Folge.« (Kurz zu bezeichnen mit p_ω).

Kann man für dieſen Satz rein in abſtracto die abſolute Wahrheit in Anſpruch nehmen? Aus den hier allein in Anſpruch zu nehmenden formalen Gründen gewiß nicht. Denn: Es läßt ſich wiederum bezweifeln, daß dieſe in indefinitum eingeſchachtelte Reihe einen letzten Standpunkt ausdrückt, d. h. man kann den Satz bilden: »Es läßt ſich p_ω bezweifeln« oder »die Wahrheit von p_ω iſt relativ«. Dieſe letzte Ausſage iſt nun offenbar in demſelben Sinn ihrem Range nach p_ω nachgeordnet[2], wie p_{n+1} dem p_n, d. h. ſie muß mit $p_{\omega+1}$

1) Dieſe Überlegung iſt diejenige, auf Grund welcher man vom circulus vitiosus im radikalen Skeptizismus zu ſprechen pflegt.

2) Hölder (Die mathematiſche Methode, Berlin 1924, S. 544) ſagt bei der Einführung der transfiniten Zahlen über die Ordnungsbeziehung des Vorangehens: »Da nun dieſes Vorangehen einen Rang und nicht notwendig das Fortſchreiten in einer Reihe bedeutet, auch keine Beziehung zum Zeitbegriff haben ſoll, ſo iſt es kein Widerſpruch, wenn

bezeichnet werden. Hier treten alſo die transfiniten Zahlen als Indizes auf. Die möglichen Stufen von Relativierung laſſen ſich formal darſtellen durch den Ausdruck p_α wo α eine transfinite Zahl iſt[1].

Dieſes Beiſpiel hat gewiſſe Nachteile. Man wird nämlich geneigt ſein zu verlangen, daß für die ſchrittweiſe Steigerung des Zweifels oder der Relativierung Motive aufgezeigt werden. Nun kann man allerdings ſagen, daß hier jenes berühmte Argument vom Widerſinn jedes radikalen Skeptizismus im Spiele ſei und alſo ein »erkenntnistheoretiſches« Intereſſe vorliege. Die Rückbezüglichkeit (περιτροπή) der Leugnung oder Bezweiflung aller Wahrheit auf dieſe einzelne, jene Leugnung oder Bezweiflung ausdrückende «Wahrheit« ſoll den radikalen Skeptiker in einen Widerſpruch mit ſich ſelbſt hineintreiben. Aber differenziert man die Ausſagen nach Stufen (Typen)[2], ſo ſchlägt dieſe Argumentation fehl. Die Ausſage: »Alle Ausſagen erſter Stufe ſind unwahr« iſt ſelbſt von zweiter Stufe, fällt alſo nicht unter ſich ſelbſt und kann deshalb wohl wahr ſein. Damit iſt einem gewiſſermaßen raffinierteren, aber eigentlich nicht minder radikalen Skeptizismus »2. Stufe« die Tür geöffnet, der ſeinerſeits die Ausſagen 2. Stufe bezweifelt. Indeſſen kann man dieſem Skeptizismus (oder negativen Dogmatismus) 2. Stufe den Einwand machen, das Urteil 3. Stufe: »Alle Ausſagen 2. Stufe ſind unwahr« ſei ſicher falſch, denn von den beiden kontradiktoriſch entgegengeſetzten Urteilen 2. Stufe »Alle Ausſagen 1. Stufe ſind falſch« und »Nicht alle Ausſagen erſter Stufe ſind falſch« muß eines wahr ſein.

---

wir zunächſt eine nicht abbrechende Reihe von Elementen, deren Rangordnung der Reihenfolge entſpricht, und dann noch ein einzelnes Element denken, das in ſeinem Rang nach den ſämtlichen in der Reihe enthaltenen Elementen kommen ſoll.«

Hier wird offenbar die Rangordnung ganz künſtlich definiert (Hölder ſagt ſelbſt, l. c. S. 544 oben, von dieſer Begriffsbildung, daß ſie »ſehr künſtlich iſt«), aber nicht irgendwie phänomenologiſch auf eine einheitliche konkrete Rangordnungsrelation begründet, wie bei uns auf die Relation der »Einſchachtelung« der Sätze. Denn in unſerer Bezeichnungsweiſe heißt p_{n+1}: »p_n iſt relativ wahr«.

1) Vgl. die von W. Ackermann für die mathematiſche Komplikation möglicher logiſchen Formen für »transfinite Axiome« eingeführten Rangordnungszahlen. (S. Math. Anh., zu § 3, Nr. II.)

2) Vgl. die »theory of logical types« von B. Ruſſell und die ähnliche Theorie von J. König. – Bei Ruſſell und Whitehead (Principia Mathematica, Vol. I, p. 65) eine dem Textbeiſpiel ähnliche Analyſe der Ausſage »I am lying«, die allerdings dann anders gewandt wird.

Alſo ſind nicht alle Ausſagen 2. Stufe falſch, denn jene kontradiktoriſchen entgegengeſetzten Urteile ſind doch alle beide ſolche 2. Stufe.

Man kann dieſe Art Argumentation noch weiter fortſetzen und wird ſich dann der Leere derartiger Spekulationen in peinlicher Weiſe bewußt. Es beſteht daher ein ſtarkes Motiv, Argumente dieſer Art ſo umzugeſtalten, daß ſie mehr Inhalt bekommen. Man könnte das etwa ſo verſuchen: Geht man von der bekannten Behauptung aus, alle konkreten in der Geiſtesgeſchichte der Menſchheit in der Form von Urteilen geäußerten Meinungen ſeien nicht »abſolut wahr«, ſondern abhängig von der jeweiligen hiſtoriſchen Situation, ſo kann man dieſe konkreten Urteile als »Ausſagen 1. Stufe« (A_1) auffaſſen und jene Behauptung als eine »Ausſage 2. Stufe« (A_2). Nun wird doch jene Ausſage A_2 auch im Verlauf der Geiſtesgeſchichte, alſo etwa jetzt, im Abendland, tatſächlich gefällt, ſie gehört alſo auch zu den geſchichtlich-konkreten Ausſagen im weiteren Sinn. (Das iſt nicht mehr eine bloße leere Spielerei: Die Entwicklung der Geſchichtsſchreibung, des hiſtoriſchen und »kulturphiloſophiſchen« Bewußtſeins ſind ſelbſt geiſtesgeſchichtliche Vorgänge). Die eben gemachte Betrachtung iſt eine über eine Ausſage 2. Stufe, alſo ſelbſt von 3. Stufe. (Kritik des hiſtoriſchen Bewußtſeins). Damit hört es aber nicht auf: man kann auf verſchiedene Weiſe zu Ausſagen 4. Stufe übergehen. (Etwa: Kritik der Kritik des hiſtoriſchen Bewußtſeins, oder Geſchichte der Geſchichte des hiſtoriſchen Bewußtſeins uſw.) Man hat alſo hier eine anſcheinend[1] inhaltsvolle Iterationsmöglichkeit. Die größere »Inhaltlichkeit« bei dieſem letzten Beiſpiel wird erreicht durch die Rückwendung auf das konkrete hiſtoriſche, d. h. letztlich das eigene Daſein, ſo wie es jeweilig iſt. Führt man dieſe Rückwendung auf das eigene faktiſche Daſein durch, ſo gelangt man zu der Betrachtung eines dem Beiſpiel der Relativierung nebengeordneten Beiſpiels der transfiniten Iteration der Reflexion auf ſich ſelbſt. – Zuvor ſei jedoch noch ein anderes beſonders anſchauliches Beiſpiel einer transfiniten Stufung angegeben.

B. Die Stufen der Bildgegebenheit.

Wie andere Modi des vorſtellenden (imaginativen) Bewußtſeins, läßt ſich auch die Bildvorſtellung iterieren. Ähnlich wie man von iterierten Vergegenwärtigungen (Erinnerung an Erinnerungen u. dgl.) ſprechen kann, kann man auch ineinandergeſchachtelte Bildintentionen

1) Das Wahre und das Scheinbare an jener »Inhaltlichkeit« der Iteration wird ſpäter noch genauer unterſucht werden.

betrachten: Man kann etwa ein Bild nochmals abbilden und hat dann ein Bild von einem Bild[1]. Man kann dieſe Komplikation der Intentionalität beliebig oft wiederholen und offenbar leicht endliche Stufenindices einführen. (Bild eines Bildes eines Bildes = Bild 3^{ter} Stufe uſw.) Es fragt ſich aber nun weiter, ob auch dieſe Art der intentionalen Iteration ſich bis zu einer Stufe mit transfinitem Index erheben kann. Und ferner liegt die weitere Frage nahe, ob man eine ſolche transfinite Iteration (wenn ſie möglich iſt) nicht in dem Falle des Bildes beſonders anſchaulich vor Augen führen kann, vielleicht ſogar durch geeignete Figuren.

In der Tat ſind beide Fragen zu bejahen, wie im folgenden gezeigt wird.

Man nehme ein konkretes Beiſpiel:

a) Auf dem Deckel eines Bilderbuches für Kinder ſei ein Kind abgebildet, das ein Exemplar eben des Bilderbuches, worauf die Abbildung ſich befindet, in der Hand hält, in der Weiſe, daß das Deckelbild ſichtbar iſt. Dann wird offenbar auf dieſem abgebildeten Deckelbild wiederum ein gleiches Kind mit Buch zu ſehen ſein, auf deſſen Umſchlag wiederum ein gleiches Kind mit dem gleichen Buch (in kleinerem Maßſtab natürlich) erſcheint; uſw. uſw. in indefinitum.

b) Oder: man denke an das alte Deutſche Reichswappen (1871 bis 1918), wie es auf Münzen uſw. abgebildet war. Das Wappen zeigte einen Adler mit Bruſtſchild, das ſeinerſeits einen (ſehr ähnlichen) Adler enthielt, der dann allerdings in ſeinem Bruſtſchild eine ſchachbrettartige Figur trug. Man kann ſich dieſe Darſtellung leicht ſo abgeändert denken, daß 1. die Adler eine genaue Verkleinerung von einander ſind und 2. jeder Adler im Schild wieder einen Adler trägt.

c) Oder: man denke an einfache geometriſche Figuren; etwa die folgenden[2] (Fig. 2 – 4):

---

1) Vgl. Hufſerl, Ideen zu einer reinen Phänomenologie, z. B. § 100, S. 211. – Hufſerl betont bereits »die ideale Möglichkeit beliebiger Fortführung der Ineinanderſchachtelungen«.

2) Andere Beiſpiele finden ſich für mengentheoretiſchen Zwecke z. B. bei W. H. und G. C. Young, The theory of sets of points (Cambridge 1906), p. 169, 230, 243ff. uſw. und (wo die Abbildung allerdings nicht geometriſch ähnlich iſt) bei F. Klein, (Autographierte) Vorleſungen über die Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie (Leipzig, 2. Abdruck, 1907) Seite 218, 225, 242 – 43, 281 – 307.

Dieſe Vorleſungen erſchienen jetzt auch im Druck in der Courantſchen Sammlung (Springer-Verlag, Berlin).

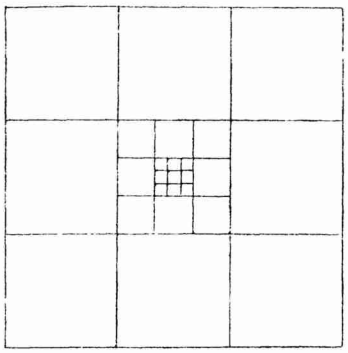


Fig. 2.

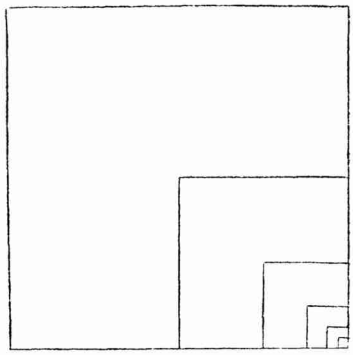


Fig. 3.

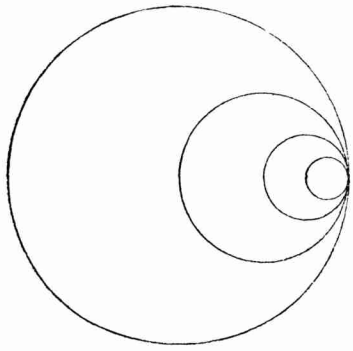


Fig. 4.

Alle dieſe Beiſpiele zeigen gewiſſe Geſtalten (Konfigurationen), die ſich unendlich oft in der Figur wiederholen. Man kann (wie im erſten Beiſpiel (a) evident iſt) dieſe ineinandergeſchachtelten Konfigurationen als Bilder von einander auffaſſen und kommt dabei auf Stufencharakteriſtiken von beliebiger endlicher Höhe.

Bisher iſt eine transfinite Stufung noch nicht erreicht. Aber, wenn man ſich ein Bild der Typen (a), (b), (c) nochmals abgebildet denkt und dieſe Abbildung nochmals uſw., ſo erhält man Bilder ω^{ter}, $(\omega+1)^{ter}$, uſw. Stufe[1]. Damit hat man alſo wirklich, wenigſtens für die erſten Transfiniten ω, $\omega+1$, $\omega+2$ . . . eine anſchau-

1) Um ein konkretes Beiſpiel zu haben, nehme man das Bild (a) und denke es ſich photographiert und dann dieſe Photographie etwa im Druck reproduziert. Man könnte dies durch ein- oder mehrmalige Umränderung des Bildes andeuten. Dabei iſt allerdings etwas ſtörend, daß der Fortſchritt der intentionalen Stufung beim inneren Bild nach innen zu geht, während er bei den Ränderungen nach außen zu ſtattfindet. Dieſer Richtungswechſel findet aber nur in der, natürlich ſymboliſchen, Figur ſtatt, die Bild-Intentionen bauen ſich ſtändig in ein und derſelben Richtung aufeinander.

liche, in gewiſſem Sinne ſogar durch eine Zeichnung wiederzugebende Darſtellung erreicht.

Noch eine Bemerkung ſei hinzugefügt: Es iſt klar, daß in einer wirklichen Zeichnung nur eine endliche (und zwar recht kleine) Anzahl Bilder ineinander geſchachtelt werden kann. Auch wenn man ſich ideale Zeichnungen denkt, die bei immer ſtärkerer Vergrößerung immer feinere Einzelheiten zeigen würden[1], könnte man doch dieſen Vergrößerungsprozeß de facto nicht unbegrenzte Zeit hindurch fortſetzen. Es iſt aber doch ſo, daß die erſten Einſchachtelungen den unendlichen Fortgang der reinen idealen Möglichkeit nach einſichtig werden laſſen. Dieſe »idealiter« unendliche Verwicklung der Einſchachtelung der Bilder bildet man ſymboliſch in einer der beſchriebenen Figuren ab. Und auf dieſe, in gewiſſem Sinn ſymboliſche Abbildung wird dann das weitere (ω^{te}, $[\omega+1]^{te}$ uſw.) Abbildungsverfahren angewandt. Dieſe »Symbolik« iſt aber keineswegs abſtrakt-gedanklich, ſondern anſchaulich; – vergleichbar etwa der maleriſchen Darſtellung der »unendlichen« Raumtiefe in gewiſſen Bildern Claude Lorrains oder der klaſſiſchen holländiſchen Landſchaftsmalerei.

In anderer Hinſicht muß aber zugeſtanden werden, daß nur eine endliche Komplikation im wörtlichen, unſymboliſchen Sinn im Bilde »vorhanden« iſt, – während die Verwicklung der Intentionalität transfinit iſt. Wir werden dieſer eigentümlichen Erſcheinung wieder begegnen (ſ. u. S. 106ff.) und ſie dann in ihrer Bedeutung würdigen[2].

C. Die Stufen der Reflexion auf ſich ſelbſt.

Der Gedanke der Iteration der Reflexion ſpielt wie der der Iteration überhaupt in Huſſerls »Ideen zu einer reinen Phänomenologie« eine nicht unwichtige Rolle[3]. Es findet ſich auch dort ſchon der Begriff der »Stufencharakteriſtik«, einer Art »Index, mit dem jedes Charakteriſierte ſich als zu ſeiner Stufe gehörig bekundet«.

---

1) Wir haben ſolche Gebilde bei der Betrachtung der verſchiedenen Arten von räumlichen Limiten (»Beharrungs«-, »Entfaltungs«-Limiten uſw.) in unſerer Arbeit im 6. Bd. dieſes Jahrbuches (§ 9, B u. C, § 10) beſchrieben.

2) Im Math. Anh., Erg. zu § 5, Nr. V iſt ein geometriſches Beiſpiel genauer durchgeführt.

3) Vgl. l. c. § 38 (S. 67); § 77 (S. 146 unten); § 78 (S. 148) über Iteration der Reflexion; § 107 (S. 119 ff.) über iterierte Modifikationen überhaupt; § 112 (S. 226ff.) Iterierbarkeit der Phantaſiemodifikation; § 100 (S. 210ff.) Stufenbildungen der Vorſtellungen in Noeſis und Noema; § 101 (S. 211 ff.) Stufencharakteriſtiken.

(S. 212)[1]. Ganz ähnlich wurde oben die Stufe mit dem Index an das p oder A bezeichnet.

Wenn von Husserl auch bereits alle abstrakten Möglichkeiten durchdacht und auch für beliebig hohe endliche Iterationen anschauliche Beispiele gegeben sind (s. bes. S. 211), so wird doch über die offen endlose Iteration niemals hinausgegangen und es ist auch für diesen Fortschritt ins Transfinite bei seiner Betrachtungsweise kein konkretes Motiv aufzuweisen.

Dagegen kann man einen derartigen transfiniten Progressus aus einem wirklich lebendigen Motiv herleiten, wenn man auf eine besondere Art der Iteration der Reflexion aufmerksam wird, die Karl Löwith in seiner Dissertation über Nietzsche[2] betrachtet und als »Parenthesen-Reflexion« bezeichnet hat. Im Anschlusse an Dostojewskijs Erzählung »Die Stimme aus dem Untergrund«[3] wird dort die Möglichkeit entwickelt, über das eigene Tun und letztlich die eigene Weise da zu sein in iterierender Weise zu reflektieren.

In dieser Erzählung wird eine Art Selbstgespräch eines mit sich zerfallenen Menschen gegeben, der über sich selbst nachdenkt und alle seine faktischen Lebensäußerungen. Auch dies, daß er in dieser unfruchtbaren Weise über sich nachdenkt, ist ein Gegenstand seines Nachdenkens. Ferner, daß er über diese seine Reflexion auch noch nachdenkt und nachdenken kann, wird zum Thema weiterer Reflexion. Aber auch die Iterationsmöglichkeit selbst wird nach einigen der-

1) Die wichtige Stelle lautet in extenso: »In allen derartigen Stufengebilden, die in ihren Gliederungen iterierte Vergegenwärtigungsmodifikationen enthalten, konstituieren sich offenbar Noemen entsprechender Stufenbildung. Im Abbildungsbewußtsein zweiter Stufe ist ein »Bild« an sich selbst als Bild zweiter Stufe, als Bild eines Bildes charakterisiert. .... Jeder noematischen Stufe gehört eine Stufencharakteristik zu, als eine Art Index, mit dem jedes Charakterisierte sich als zu seiner Stufe gehörig bekundet. .... Denn zu jeder Stufe gehören ja mögliche Reflexionen in ihr, so z. B. hinsichtlich der in der zweiten Erinnerungsstufe erinnerten Dinge Reflexionen auf die derselben Stufe angehörigen (also in 2. Stufe vergegenwärtigten) Wahrnehmungen von eben jenen Dingen«.

2) »Auslegung von Nietzsches Selbstinterpretationen und von Nietzsches Interpretationen« Münchener Philos. Dissert. 1923 (Maschinen-Schrift-Exemplar in der Münchener Universitäts-Bibliothek).

3) »Die Stimme aus dem Untergrund. Aus den Papieren des Untergrundmenschen.« Neu übersetzt von Konrad Praxmarer (Berlin, der weiße Ritter-Verlag 1923). – Dies ist die getreueste Übersetzung. In der Piperschen Gesamtausgabe Dostojewskijs heißt die Erzählung »Aus dem Dunkel der Großstadt«.

artigen Anfangsgliedern der wiederholten Reflexion erkannt und wird ſelbſt zum Gegenſtand der Reflexion[1].

Das Wichtige iſt nun, daß dieſe wiederholte (iterierte) Reflexion hier nicht nur ad hoc angeſtellt, zum Zwecke der Demonſtration gewiſſer komplizierter Strukturmöglichkeiten des Bewußtſeins erfunden iſt, ſondern dem lebendigen Motiv entſtammt, der Bodenloſigkeit und Leere des eigenen Daſeins zu entfliehen, einen inneren Halt durch aufrichtige, ſchonungsloſe Selbſtbeſinnung zu finden. Freilich ſchlägt gerade bei dieſer iterierten Parentheſen-Reflexion die Abſicht fehl und führt im Gegenteil nur zu dem immer troſtloſeren Bewußtſein der völligen Haltloſigkeit[2].

Dadurch unterſcheidet ſich das hier vorliegende konkrete Phänomen von den von Huſſerl beſchriebenen, die ihre Komplikation nur einer Art kombinatoriſcher Phantaſie verdanken. Man kann wohl in der Art, wie es Huſſerl beſchreibt, derartige Stufenbildungen gelegentlich ein Stück weit beobachten und dann, darüber theoretiſierend, ihr Bildungsgeſetz erfaſſen. Aber es beſteht kein konkretes, nicht rein erkenntnismäßiges Motiv, die Iteration ins Endloſe oder gar ins Transfinite weiter zu verfolgen. Dagegen iſt es im Falle der »Parentheſen-Reflexion« die gewaltige Macht des Fluchtimpulſes vor dem eigenen eigentlichen Daſein, vor der Notwendigkeit, ſich ſelbſt ins Angeſicht ſehen zu müſſen, die die Fortſetzung der Reflexion auf jeder bereits erreichten Stufe erzwingt[3].

1) Es heißt beiſpielsweiſe l. c. (Praxmarer) S. 67: [am Ende einer Wiedergabe eines Tagestraumes.]: ». . . Aber wenigſtens iſt doch alles am Comerſee geweſen. Übrigens, jedoch Sie haben ganz recht; es iſt wirklich abgeſchmackt und auch gemein. Das Gemeinſte iſt aber, daß ich nun vor Ihnen angefangen habe, mich zu rechtfertigen. Und noch gemeiner iſt, daß ich jetzt dieſe Bemerkung mache. Und genug übrigens jetzt, denn ſonſt höre ich überhaupt nimmer auf: es wird immer noch eins gemeiner als das andere ſein«. – [von mir geſperrt]. Hier hat man alſo wirklich eine Reflexion auf einen unendlichen Prozeß, alſo eine Reflexion ω^{ter} Stufe. Die $(\omega+1)^{\text{te}}$ Reflexion findet ſich allerdings nicht bei Doſtojewskij. –

2) K. Löwith ſtellt a. a. O. dieſe unfruchtbare »Parentheſen-Reflexion« (ſo von ihm genannt nach den im Text von Doſtojewskij in ſehr charakteriſtiſcher Weiſe auftretenden Parentheſen, in denen die Reflexionen höherer Stufen jeweils ihren Platz finden) der echten »exiſtentiellen« Reflexion gegenüber, bei der ſchon die erſte Stufe ernſtgenommen wird, und nicht die Intention der Selbſtbeſinnung ſich in der Betrachtung der pſychologiſchen Verwicklungsmöglichkeiten verliert und damit ſich auf der Flucht vor ihrem urſprünglichen Ziele befindet. Man vergleiche die ſpäter im Text im Anſchluß an Lask gemachte Bemerkung. (S. 105 f.)

3) Dieſer Gegenſatz des faktiſchen Lebens in der Alltäglichkeit der »Welt« und des eigentlichen Daſeins iſt von Heidegger einer eingehenden phäno-

Zugleich – und das ist ebenfalls wichtig – besteht eine vollendete Kontinuität zwischen dem Schritt von n auf $n+1$ und dem von irgend einem endlichen s zu ω, von da zu $\omega+1$ usw. Es ist jedes Mal genau derselbe Schritt – phänomenologisch gesehen –, der ausgeführt wird.

Man kann dies ganz klar einsehen, wenn man eine Überlegung heranzieht, die E. Lask in seiner »Logik der Philosophie« (Tübingen 1911, S. 112) angestellt hat. Lask macht bekanntlich den Unterschied zwischen einem bestimmten, gewissermaßen als Thema dienenden »Inhalt« und einer ihn »umgreifenden« kategorialen Form. »Alle unsinnliche Form ist Geltungsgehalt, d. h. geltendes, von der Kategorie »Gelten« umkleidbares Material.« Dieses Umkleiden des Materials mit Form ist offenbar etwas Ähnliches, wie die Reflexion auf ein bestimmtes Erlebnis»material«. Dieses Umkleiden kann nun ebenso wie die Reflexion iteriert werden. Wie alles Unsinnliche, so ist auch jede logische Form Geltungsgehalt, in der Kategorie »Gelten« stehendes Unsinnliche. Und wie jede logische Form, so steht auch die logische Form »Gelten« selbst in der Kategorie »Gelten«. Es liegt also hier eine Rückbezüglichkeit (*περιτροπή*) vor. Aber Lask fährt fort: »Das ist in keiner Hinsicht paradox. Im oberen Stockwerk sind Form wie Material beide unsinnlich, und es kann deshalb die Form dieser unsinnlichen Form der Form nicht anders lauten als die Form der untersten Form. Es ist in keiner Weise zirkelhaft, wenn die Kategorie des Geltens auf die Kategorie des Geltens wiederum angewandt und vom Gelten selbst behauptet wird, es sei ein kategorialer Geltungsgehalt, ein logisch Geltendes. Man ist hierbei lediglich gleichsam ein Stockwerk des theoretischen Sinnes höher gestiegen[1] und bemerkt dabei, daß es in diesem dritten Stockwerk keine neue Kategorie mehr gibt. Die Form der Form der Form kann ebenso wie die Form der Form nur »Gelten« heißen. Damit wird allerdings der regressus in infinitum zugestanden. Aber er besagt nichts anderes, als daß die Kategorie ins Unendliche Material der Kategorie zu werden vermag. . . . . Und es ist auch ganz in der Ordnung, daß die Kategorie des Geltens ins Unendliche in der Kategorie des Geltens steht, da ja die Form der Form ins Unendliche unsinnlich ist. Vom zweiten Stockwerk an gibt es eben in dieser Hinsicht

menologischen Analyse unterzogen worden (teilweise in Freiburger Vorlesungen mitgeteilt, vergl. jetzt die Abhandlung »Sein und Zeit«).

1) Was hier Lask »Stockwerk« nennt, entspricht genau dem von uns früher mit »Stufe« Bezeichneten.

nichts Neues mehr. Die Kluft zwiſchen Sinnlich und Unſinnlich liegt im unterſten Stockwerk, zwiſchen Urmaterial und unterſter Form. Das unterſte und das obere Stockwerk zeigen uns die letzten Gegenſätzlichkeiten in der Rolle des Kategorienmaterials. Mit dem Material des zweiten Stockwerks iſt die Kluft bereits überſchritten. Die übrigen Stockwerke dürfen deshalb von der Kategorienlehre vernachläſſigt werden. Ins Unendliche eine Logik der Logik zu fordern, iſt allerdings überflüſſig. . . . .«

Aus dieſen Laskſchen Darlegungen geht hervor, daß im Falle von Form-Inhalt die Iteration zwar möglich, aber belanglos iſt, ſchon die 4. Stufe »Form der Form der Form« bringt nichts Neues gegenüber der 3. Stufe »Form der Form«.

Wie verhält es ſich damit bei der Reflexion? Analog wie bei Lask zwiſchen »Urmaterial« und »unterſter Form« beſteht ein grundlegender Unterſchied (»eine Kluft«) zwiſchen dem naiven, unreflektierten, geraden Erleben und dem reflektierten. Geht man dann weiter, ſo iſt das Reflektieren auf die Reflexion (1. Stufe) ebenfalls vom Typus des reflektierten Erlebens überhaupt. D. h. die Reflexionserlebniſſe aller Stufen ſtehen gemeinſam in einem beſtimmten Gegenſatz zum urſprünglichen, naiven Erleben[1]. Nach der Erkenntnis dieſer Sachlage gibt es zwei Möglichkeiten, für die das Leben ſich entſcheiden kann. Entweder: Die Eitelkeit der iterierten Reflexion überhaupt wird erkannt: man bleibt bei der Reflexion erſter Stufe ſtehen und ſucht dieſe wirklich mit vollem Ernſt zu vollziehen, dem Anblick des eigenen Selbſt nicht auszuweichen. Man ſtellt ſich gewiſſermaßen der Selbſtprüfung. Oder: man ſcheut den Ernſt des echten Vollzugs der Reflexion und flüchtet ſich, dieſem Vollzug immerfort ausweichend, in immer neue Iterationen. – Im erſten Fall kommt es offenbar überhaupt zu keiner höheren Stufenbildung. Im zweiten aber tritt nun folgende eigentümliche Wendung ein: Bei wiederholter Iteration wird die Einförmigkeit der konkreten, aufeinanderfolgenden Iterationsſtufen erkannt. Dieſe führt zu dem Gedanken, die unbegrenzte Iterationsmöglichkeit ins Auge zu faſſen, Zahlbegriffe einzuführen,

1) Das iſt es ja auch, was die Umwendung von der unechten und unfruchtbaren »Parentheſen-Reflexion« zur eigentlichen und echten »exiſtentiellen« Reflexion ermöglicht. In dieſer Weſensgleichheit der Reflexionen aller Stufen zeigt ſich eben die Leere der Iteration der Reflexion. Die Aufmerkſamkeit, beſſer die Sorge oder die Bekümmerung muß ſich der urſprünglichen »Kluft« zwiſchen geradem und reflektiertem Erleben zuwenden.

von der Iteration n^{ter} Stufe zu reden usw. Indem man aber dies tut, wird die Gefahr drohend, daß man »ſtecken bleibt«, zu einem feſten Standort gelangt, daß die »Flucht vor der Faktizität« ein Ende hat. Der Fluchtimpuls treibt alſo weiter — »über das Unendliche hinaus«! Denn: Die Stufe der Reflexion auf die Möglichkeit der unbegrenzten Iteration der Reflexion iſt die ω^{te}, die von dem Fluchtimpuls vor der Stillegung auf jener eben genannten Stufe weitergetriebene Reflexion die $(\omega+1)^{te}$.

So kommt man alſo tatſächlich in dem Beiſpiel der Parentheſen-Reflexion aus konkreten, »hiſtoriſchen« Lebensmotiven zu einer transfiniten Iteration der Reflexion.

Man kann gegen die ſoeben dargelegte ontologiſche Interpretation des transfiniten Prozeſſes einen Einwand erheben, der auf den erſten Blick viel für ſich hat[1], der aber doch, wie wir meinen, widerlegt werden kann, wobei ſich ein tieferer Einblick in die phänomenologiſche Struktur des transfiniten Progreſſus ergibt.

Betrachten wir den Vorgang der Iteration der Reflexion auf ſich ſelbſt genau, d. h. ganz konkret, ſo beobachten wir folgendes:

Ich reflektiere auf meine ſoeben vollzogene Reflexion, dann wiederum auf dieſe ſoeben vollzogene Reflexion zweiter Stufe usw. usw. Nachdem ich ſo eine beſtimmte endliche Anzahl, ſagen wir n, ineinandergeſchachtelter Reflexionen vollzogen habe, erhebe ich mich – indem ich mit der Weiterverfolgung der ſich immer öfter ineinanderlegenden Reflexionsakte aufhöre – auf eine Stufe der Betrachtung, die über allen dieſen ins Endloſe ſich umſchließenden Akten liegt. Auf dieſer Stufe, der ω^{ten}, iſt das Objekt (das Thema oder die Materie) meines aktuellen Reflexionsaktes, in dem ich jetzt lebe, die geſamte endloſe Folge der früher vollzogenen Reflexionen. – Zähle ich nun die wirklich vollzogenen, ſoeben einzeln genannten Reflexionen ab, ſo habe ich erſtens die n erſten nacheinander vollzogenen und jeweils auf den unmittelbar vorhergehenden Akt bezogenen Akte und dann zweitens als $(n+1)^{ten}$ Akt die zuletzt genannte Reflexion von angeblich ω^{ter} Stufe. Ich habe alſo im ganzen keineswegs ω (oder $\aleph_0$), ſondern nur $n+1$ Reflexionen wirklich vollzogen. Das geht auch ganz klar aus der Bemerkung hervor, daß doch jeder Reflexionsakt eine gewiſſe Zeit braucht, alſo in endlicher Zeit auch nur endlich viele Akte nacheinander aktuell

1) Ich verdanke die Kenntnis dieſes Einwandes Herrn Dr. Fritz Kaufmann.

vollzogen werden können. — Daraus kann man ſchließen, daß der letzten Reflexion die Stufen-Charakteriſtik ω zu Unrecht zugeſchrieben wurde, es kommt ihr bloß der Index $n+1$ zu. Das heißt: Die geſamte geſchilderte Lebens-(oder Bewußtſeins-)ſtruktur iſt gar nicht transfinit, ſondern nur finit: unſere ontologiſche Unterbauung des transfiniten Progreſſus erweiſt ſich als eine Illuſion.

Man kann dieſen ſehr ernſt zu nehmenden Einwand nicht mit der billigen Bemerkung widerlegen, die Zeit gehöre nicht in die Phänomenologie, ſondern in die Pſychologie; hier handele es ſich um überzeitliche, rein intentionale Strukturen u. dgl. Derartige Lehren halten wir für grundfalſch. In unſerem Falle iſt es weſentlich, daß die Reflexionen nacheinander vollzogen werden, denn ſie beziehen ſich jeweils auf das ſoeben vom Bewußtſein Geleiſtete. Es iſt in der Tat richtig, daß nur endlich viele Reflexionen nacheinander in der endlichen Zeitſpanne, in der unſere Betrachtung vollzogen oder verſtanden (d. h. mitvollzogen) wird, wirklich »geſchehen« können. Und die Zählung ergibt ja auch einwandfrei, daß es gerade $n+1$ ſind. Alſo iſt es auch richtig, daß die ganze Betrachtung eine finite Struktur (vom Index $n+1$) beſitzt.

Sollte alſo der Einwand Recht behalten? Wir meinen nicht, trotz allem.

Denn es iſt im Vorhergehenden eine wichtige Unterſcheidung nicht beachtet worden: Man muß die Struktur der Betrachtung über die Ineinanderſchachtelung der Intentionalitäten ſorgfältig unterſcheiden von der Struktur dieſer Ineinanderſchachtelung ſelber. Die erſte Struktur iſt von finiter, die zweite von transfiniter Komplikation. Nicht jede einzelne Intentionalität, die »vorhanden iſt«, d. h. im Sinn des Phänomenzuſammenhanges notwendig liegt, muß auch einzeln betrachtet werden. Sind unendlich viele Intentionalitäten in einem Phänomenzuſammenhang »vorhanden«, — ſo können ſie gar nicht einzeln betrachtet werden.

Dies erſcheint vielleicht auf den erſten Blick erſtaunlich, aber die gleiche Sachlage liegt bei jedem Horizontphänomen vor. Nach einer grundlegenden Erkenntnis Huſſerls iſt es gerade das Weſen des endloſen »offenen Horizontes«, des »und ſo weiter«, daß unendlich viele Glieder »vorliegen«, die aber mit einem Blick überſchaut werden. Die Beherrſchung des Unendlichen durch einen endlichen »Gedanken«, das iſt der Sinn jedes »Horizonts«[1].

1) Mathematiſch entſpricht dieſem Horizontphänomen nicht die Wahlfolge, ſondern die geſetzmäßige Folge.

In unſerem Falle iſt nun in der Folge der zuerſt betrachteten n Reflexionen ein Horizontphänomen zugleich mitgegeben. Wir hatten ja ſchon vorhin (S. 105) dargelegt, daß gerade das Bewußtſein des gleichförmigen weiteren Fortgangs das Motiv für das Unterlaſſen der Weiterverfolgung dieſes Fortgangs iſt. Sobald die Anwendbarkeit der Kategorie »Und ſo weiter« geſichert iſt, iſt eine Weiterverfolgung in concreto in der Tat überflüſſig und langweilig. (Hegels »ſchlechtes Unendlich«.) Das heißt: Die in der »Betrachtung« $(n+1)^{te}$ Reflexion kommt nur zuſtande, inſofern die Endloſigkeit der Kette der früher vollzogenen und der in Fortſetzung der urſprünglichen Vollzugstendenz weiter vollziehbaren Reflexionen eingeſehen wird. Der Übergang von der in der »Betrachtung« n^{ten} Reflexion zur $(n+1)^{ten}$ iſt ein ſeinem intentionalem Sinn nach toto coelo anderer Schritt als der Übergang von der entſprechenden $(n-1)^{ten}$ zur n^{ten} Reflexion. Die transfinite Komplikation der intentionalen Strukturen bleibt durchaus beſtehen[1].

Aber trotzdem iſt die Erwägung des Einwands nicht ohne Nutzen. Denn ſie hat auf die neue, bisher nicht beachtete, phänomenologiſche »Schicht« (oder »Dimenſion«) der ſogenannten »Betrachtung der Reflexion« aufmerkſam gemacht. Dieſe neue Schicht hat die grundſätzliche Bedeutung, daß ſie den finiten Mechanismus ans Licht zieht, der die transfiniten Strukturen in ihrer eigentümlichen Bewegtheit gewiſſermaßen ſteuert, der dem endlichen Menſchengeiſt ihre Beherrſchung ermöglicht[2]. Das Geſetz, das den transfiniten Progreß regelt, iſt ſeinem Inhalt nach finit, wie jeder Inhalt des Bewußtſeins finit iſt. Das iſt gewiſſermaßen die Kehrſeite der anderen von uns immer wieder hervorgehobenen Tatſache, daß

1) Auf eine ganz ähnliche Sachlage ſtießen wir bei dem Beiſpiel der ineinandergeſchachtelten Bilder, das früher verwandt wurde (ſ. oben S. 98ff.). Wir wiederholen nochmals den entſcheidenden Punkt: Es iſt natürlich unmöglich, unendlich viele ineinandergeſchachtelten Bilder wirklich zu zeichnen. Aber der »Logik der Sache« nach müſſen unendlich viele Bilder vorhanden ſein. Wenn z. B. der kleine Junge auf dem Deckel des Bilderbuches ein genaues Bild eben dieſes Bilderbuchs in der Hand halten ſoll, ſo muß ſich dieſe Beziehung ihrem eigenen Sinn nach endlos fortpflanzen. Wir »ſehen« da deutlich die unendliche Stufung der Bilder ihrer Idee nach, dem Sinne ihrer Intention entſprechend. Aber ebenſo deutlich ſehen wir – mit den Augen –, daß nur eine ganz kleine Zahl von Stufen, vielleicht 4 oder 5, wirklich körperlich vorliegt. Beides widerſpricht ſich keineswegs.

2) Man könnte dieſen »Mechanismus« mit O. Hölder (Die mathematiſche Methode, Berlin 1924, §§ 116, 117) als »Überbauung« bezeichnen.

phänomenal das Unendliche immer ein offener Horizont, ein endloſer Prozeß iſt[1]. (Vgl. Math. Anh. zu § 5, IV. [über Brouwer.])

Nachdem der Einwand gegen unſere ontologiſche Interpretation des transfiniten Progreſſes nunmehr erledigt iſt, wollen wir die Tragweite und die Fruchtbarkeit dieſer Interpretation erörtern.

Zu dieſem Zwecke ſtellen wir folgende beiden Fragen:

Führt die geſchilderte Motivation nun wirklich zu allen Cantorſchen Transfiniten? Und wie verhält es ſich mit der paradoxen Ordnungszahl W?

I. Um die erſte dieſer Fragen zu beantworten, liegt es nahe, auf die beiden »Erzeugungsprinzipien« Cantors hinzuweiſen. Dieſe ſind gegeben darin, daß

1. zu einer vorhandenen ſchon gebildeten Zahl eine Einheit hinzugefügt wird,
2. »wenn irgend eine beſtimmte Sukzeſſion definierter ganzer realer Zahlen vorliegt, von denen keine größte exiſtiert, auf Grund dieſes zweiten Erzeugungsprinzips eine neue Zahl geſchaffen wird, welche als Grenze jener Zahlen gedacht, d. h. als die ihnen allen nächſtgrößte Zahl definiert wird«[2].

Dieſe beiden Erzeugungsprinzipien ſind nach Cantor derart, »daß durch ihre vereinigte Wirkung jede Schranke in der Begriffsbildung realer ganzer Zahlen durchbrochen werden kann.«[3])

Man ſieht nun leicht, daß dieſen beiden Erzeugungsprinzipien bei dem Vorgang der Reflexion im Grunde derſelbe Schritt der Zurückbiegung der Intention auf ſich ſelbſt (das iſt ja eben re-flexio!) entſpricht: einmal, beim Fortſchreiten von der β^{ten} zur $(\beta+1)^{\text{ten}}$ Stufe, durch Reflexion auf das ſoeben vorhergegangene »geradeaus gerichtete« Erlebnis, das andere Mal, beim Fortſchreiten von einer endloſen Reihe von ineinander geſchachtelten Reflexionen zur Grenze dieſer

1) Mathematiſch drückt ſich dieſer eigentümliche Sachverhalt in der bei der Kritik der Ackermannſchen Theorie beſprochenen Tatſache aus, daß die Reihe der transfiniten Ordinalzahlen gewiſſermaßen in der Richtung nach rückwärts finit iſt, d. h. man kann von jeder transfiniten Zahl rückwärts in endlich vielen Schritten zur Eins zurückgelangen, weil dabei eben alle Limesübergänge gewiſſermaßen »überſprungen« werden, während ſie nach vorwärts durch den Grenzprozeß »überklettert« werden müſſen. Dieſen Umſtand will Ackermann benutzen, um ſeine eigentlich transfiniten Betrachtungen als finit auszugeben. Aber finit daran iſt nur die »Überbauung«, nicht die betrachtete Materie ſelbſt. Vgl. Math. Anh. zu § 3, II.

2) G. Cantor, Math. Ann. XXI, S. 577. Weiteres über ſich hier anſchließende mathematiſchen Fragen ſ. § 5 a IV und Math. Anh. zu § 5, II u. VI.

3) l. c. S. 547.

Reihe, durch Reflexion auf den Vollzug der Erfaſſung der Geſetzlichkeit dieſes endloſen Prozeſſes. Man kann alſo mit Recht ſagen, daß das geſchilderte konkrete und konkret motivierte Phänomen der »Reflexion« als phänomenologiſcher Unterbau beider Cantorſcher Erzeugungsprinzipien dienen kann. (Vgl. Math. Anh. zu § 5, I).

Es iſt vielleicht noch ein weiterer Schritt möglich: Verſucht man ſich in die Cantorſchen Gedankengänge ſelbſt (wie ſie in der »Mannigfaltigkeitslehre« im XXI. Band der »Mathemat. Annalen« niedergelegt ſind) hineinzudenken, ſo erkennt man, daß das, was man eigentlich vollzieht, eine Art »Reflexion auf das ſoeben Getane« iſt — ſoweit wenigſtens das zweite Erzeugungsprinzip in Frage kommt. Denn um zur »Grenze« überzugehen, muß man ſich die Geſetzmäßigkeit des reihenbildenden Prozeſſes, der die Reihe konſtituiert, deren Limes man ſucht, vor Augen halten. Das iſt aber nur möglich durch Reflexion. Iſt dieſe Auffaſſung richtig, ſo iſt die phänomenologiſche Analyſe der Reflexion nichts anderes als ein analyſierendes Bewußtmachen deſſen, was in der mathematiſchen Limesbildung eigentlich ſchon latent vorhanden war.

II. Die zweite Frage war nach der Paradoxie der Menge W. In der Tat iſt dieſe Frage für die gegenwärtige Betrachtung von entſcheidender Bedeutung und keineswegs nur die ſpieleriſche Beſchäftigung mit einem ſpitzfindigen Sophisma. Denn, wenn es wirklich gelungen iſt, der Reihe der Cantorſchen Transfiniten ein konkretes Phänomen unterzulegen, müſſen Widerſprüche innerhalb dieſer Gegenſtändlichkeit unmöglich ſein. Ein abſtrakt durch beſtimmte Annahmen poſtuliertes bzw. konſtruiertes Gegenſtandsgebiet kann an Widerſprüchen leiden, ihm gegenüber hat daher der Nachweis ſeiner Widerſpruchsfreiheit einen guten Sinn, — aber eine phänomenologiſch aufweisbare Entität iſt eo ipſo widerſpruchsfrei. Wenn ſich alſo die Antinomie von Burali-Forti nicht aufklären und zum Verſchwinden bringen ließe durch einfache konkrete Verfolgung der phänomenalen Gegebenheiten, ſo wäre das ein ſehr triftiger Grund, die Richtigkeit der in Frage ſtehenden phänomenologiſchen Analyſe anzuzweifeln.

Die beiden Cantorſchen »Erzeugungsprinzipien« durchbrechen jede Schranke bei der Erzeugung der transfiniten Zahlen. Das 2. Prinzip ſcheint zur größten Ordnungszahl W (dem Ordnungstypus der Menge aller Ordnungszahlen) zwangsläufig zu führen. Hat man aber einmal W eingeführt, ſo ermöglicht das 1. Erzeugungsprinzip den Fortſchritt zu $W+1$, womit die angeblich »größte« Ord-

nungszahl W überſchritten iſt. Dies iſt, nochmals wiederholt, die Burali-Fortiſche Antinomie.

Geht man nun zurück auf die konkreten Phänomene der »Reflexion«, die den beiden abſtrakt-formalen Erzeugungsprinzipien Cantors untergelegt wurden, ſo iſt offenbar die entſcheidende Frage: Welches konkrete Reflexions-Phänomen entſpricht der Ordnungszahl W? Es müßte dies diejenige Reflexion $R(W)$ ſein, die auf alle möglichen Reflexionsſtufen zurückblickt, ſich auf ſie »zurückbiegt«. — Gibt es eine ſolche Reflexion d. h.: Iſt ſie als ein konkretes Phänomen aufweisbar?

Es muß daran erinnert werden, daß jede Reflexion ſich bezog auf den jeweils vollzogenen geraden Akt, das jeweils unmittelbar vorher vollzogene Erleben. Dieſes Erleben konnte von zweierlei Art ſein:

1) Entweder war es ein einfacher gerader Akt, ein einfaches ſchlicht vollzogenes Erlebnis. (Dem entſpricht formal die Anwendung des erſten Erzeugungsprinzips, der Übergang von α zu $\alpha + 1$).

2) Oder: es war die Erfaſſung einer beſtimmten geſetzmäßigen Reihe möglicher Einſchachtelungen von Erlebniſſen (nicht unmittelbar einander umſchließender Einſchachtelungen, ſondern einander irgendwie, in irgendwelchen »Abſtänden«, durch irgendwelche Vermittlungen einſchließender Einſchachtelungen.) Dieſe offene, in ihrem möglichen »Werden« erfaßte Reihe wurde durch die Reflexion zu einem Geſamterlebnis zuſammengefaßt. (Dem entſpricht formal die Anwendung des zweiten Erzeugungsprinzips, der Übergang von der Reihe $\alpha_\beta \dots \alpha_\gamma \dots \alpha_\delta \dots$ zu ihrem Limes.)

Auch im zweiten Fall bezieht ſich aber die Reflexion auf ein ins Auge gefaßtes beſtimmtes Reihengeſetz,[1] für das keine obere Schranke exiſtiert: in dem Sinn, daß keine ins Auge gefaßte Reihenentwicklung die letzte iſt, daß die fortgeſetzte und ſtets fortſetzbare Reflexion immer auf neue weiter reichende Reihengeſetze führt. (Dies äußert ſich in der Cantorſchen Symbolik in dem Auftreten immer neuer Verknüpfungsſymbole und der Einführung immer neuer Buchſtaben wie $\omega, \varepsilon, \Omega \dots$. uſw. uſw.)

Aber niemals kann die Reflexion ſich auf alle in dieſer Weiſe »möglichen« Reihengeſetze überhaupt beziehen. Dieſe fügen ſich nicht zu einem »Geſamt-Reihengeſetz« zuſammen. Oder vielmehr: genauer ausgedrückt verhält ſich die Sache ſo: die nacheinander

1) »Reihengeſetz« bedeutet hier und im folgenden nicht ohne weiteres dasſelbe wie »Funktionsgeſetz«. S. Math. Anh. zu § 5, II (Bem. zu Hilbert).

eingeführten Reihengeſetze verhalten ſich wie Anfangsſtück und Fortſetzung, die früher eingeführten Geſetze ſind in allen nachfolgenden aufgehoben, d. h. bewahrt (Hegel), ſie bilden das Geſetz des Anfangsſtücks der nach dem höheren Geſetz gebildeten Zahlenreihe. So fügen ſich allerdings alle nacheinander zu Tage tretenden Geſetze zu einem einzigen zuſammen, aber dieſes iſt niemals in ſeiner Vollendung gegeben, ſondern immer im Werden begriffen (*δυνάμει ὄν*).

Das iſt nun freilich auch bei den einzelnen konkreten Geſetzen der Fall, aber es beſteht folgender entſcheidende Unterſchied: das jeweils neu eingeführte Reihengeſetz, das durch eine neu eingeführte transfinite Zahl bezeichnet wird, iſt ſeinem Charakter nach eben durch dieſe Bezeichnung eindeutig gekennzeichnet (wobei natürlich dieſe Bezeichnung jeweils die Beziehung zu ſchon früher eingeführten Zahlen eindeutig feſtlegen muß). Der Fortſchritt zu immer neuen, erweiterten Reihengeſetzen iſt nur möglich durch die Einführung immer neuer Symbole und immer neuer (rekurrent definierter) Verknüpfungsprinzipien zwiſchen ihnen. Um einen ſolchen Fortſchritt zu erzielen, iſt es alſo notwendig, gewiſſermaßen immer neue Mannigfaltigkeitsformen einzuführen. (Wie das ſehr deutlich aus Veblens und Mahlos Arbeiten[1] über die Fortſetzung der Reihe der Transfiniten hervorgeht. Solche Arbeiten wären ja gar nicht ſinnvoll, wenn ein mechaniſch zu errechnendes Geſetz für alle möglichen derartigen Bezeichnungen exiſtierte[2].) Es gelingt alſo prinzipiell nicht, ein Univerſal-Geſetz aufzufinden, das die geſamte Reihe der transfiniten Zahlen, wie ſie durch die beiden »Erzeugungsprinzipien« zuſtande kommt, beherrſchte. In der Terminologie der Intuitioniſten ausgedrückt: Die Folge der ſukzeſſive einzuführenden formalen Reihengeſetze iſt eine werdende Folge, deren »Zukunft« nicht vorausſehbar iſt.

In Anbetracht dieſes Tatbeſtandes hat es keinen Sinn, von der Möglichkeit einer konkreten phänomenalen Unterbauung der Zahl W zu reden.

Dieſer Zahl W entſpricht nur der gänzlich unbeſtimmte »freie« Horizont des von den beiden Er-

1) Trans. Am. Math. Soc. 9; Lpz. Ber. (math. Kl.) 63, 64, 65. (Zu Veblen vgl. Math. Anhang zu § 5, VI B.)

2) Es liegt alſo auch hier wieder der ſchon früher (in § 4 a) beſprochene Fall vor, daß die Mathematik die Kunſt iſt, frei werdende Folgen geſetzlich zu beherrſchen oder das Unendliche mit endlichen Mitteln auszudenken.

zeugungsprinzipien ins Endloſe weitergetriebenen transfiniten Prozeſſes.

Man errät, daß die philoſophiſch (d. h. ontologiſch) letzte Bedeutung dieſes ſo zur Gegebenheit gebrachten transfiniten Prozeſſes darin beſtehen wird, daß in ihm das Phänomen des Endloſen, des Vorſtoßes in die unbekannte Zukunft zu ſeiner zugeſpitzteſten begrifflichen Geſtalt kommt, — daß in ihm das formal-anzeigende Schema des wahrhaft Unendlichen in Erſcheinung tritt, das niemals — wie Hegel ſo oft eindringlich auseinandergeſetzt hat — mit der durch die gewöhnliche Zahlenreihe ſchematiſierten »ſchlechten Unendlichkeit« verwechſelt werden darf. (Dies wird erſt ſpäter näher unterſucht werden.)

Es iſt offenbar widerſinnig, dieſen ſo verſtandenen »freien« transfiniten Prozeß »fortſetzen« zu wollen. Die Stufe der Reflexion über dieſen Prozeß, die man mit dem Index W zu bezeichnen verſucht iſt, ſteht nicht auf der gleichen Linie mit irgend einer anderen Reflexionsſtufe. Der W-Prozeß kann nicht vollzogen werden, wie ſonſt ein α-Prozeß oder β-Prozeß.

Es iſt daher fehlerhaft, dieſe Stufe durch einen Index W in Analogie mit dem Index α oder β zu bezeichnen. Wenn man dies doch tun wollte, ſo wäre es unvermeidlich, auch über dieſe Reflexion, über ihre Möglichkeit uſw. zu reflektieren und man käme unweigerlich zu einer »ſupra-transfiniten« (ultrafiniten) Reflexionsſtufe mit dem Index $W+1$. Aber damit hätte man eben den W-Prozeß zu einem endlich charakteriſierten α- oder β-Prozeß umgebogen, ſeinen »freien« Grundcharakter zu einem geſetzmäßigen denaturiert — d. h. den Grundſinn des durch W ſymboliſierten Phänomens mißverſtanden.

Bezieht man dieſe Betrachtung auf die konkrete Lebens-Bedeutſamkeit der »Parentheſen-Reflexion« zurück, ſo erſcheint das W als Symbol der vollendeten, radikalen »Bodenloſigkeit«[1] des ſo in »Parentheſen« reflektierenden Lebens. Das eigentümliche Gefühl des Schwindels, das den einſichtigen Betrachter hier ergreift, deſſen Ausdruck in gewiſſem Sinne die Antinomie von Burali-Forti iſt, iſt echt, es beweiſt die Unmöglichkeit, daß das Leben wahrhaft vor ſich ſelbſt entfliehen kann, — daß es auf dem Wege der iterierten Reflexion jemals zur Ruhe kommt.

1) Der Begriff der Bodenloſigkeit iſt vom Grafen Paul Yorck in die Philoſophie eingeführt worden; vgl. den Briefwechſel Dilthey-Yorck (Halle, Niemeyer, 1923) und die demnächſt in dieſem Jahrbuch erſcheinende Arbeit von F. Kaufmann: »Die Philoſophie des Grafen Yorck«.

Anmerkung.

Es iſt von hiſtoriſchem Intereſſe, auf zwei Äußerungen Schellings aus ſeiner erſten Periode aufmerkſam zu machen, die mit bewunderungswürdigem Scharfſinn den Grundgedanken der transfiniten Iteration der Reflexion auf ſich ſelbſt und zugleich damit die weſenhaft hier auftretende Antinomie, die wir heute mit dem Namen Burali-Fortis bezeichnen, vorausahnen.

1. Ideen zu einer Philoſophie der Natur, Einleitung zur 1. Auflage (1797) [Geſ. Werke, Abt. 1, Bd. II, S. 16]: »Indem ich frage: wie kommt es, daß ich vorſtelle, erhebe ich mich ſelbſt über die Vorſtellung; ich werde durch dieſe Frage ſelbſt zu einem Weſen, das in Anſehung alles Vorſtellens ſich urſprünglich frei fühlt, das die Vorſtellung ſelbſt und den ganzen Zuſammenhang ſeiner Vorſtellungen unter ſich erblickt. Durch dieſe ganze Frage ſelbſt werde ich ein Weſen, das, unabhängig von äußeren Dingen, ein Sein in ſich ſelbſt hat.«

2. Briefe über Dogmatismus und Kritizismus, [Werke, Abt. 1, Bd. I, S. 320, Anm. 1; S. 60 der Originalausgabe]: »Daß wir unſers eigenen Ichs nie los werden können, davon liegt der einzige Grund in der abſoluten Freiheit unſers Weſens, kraft welcher das Ich in uns kein Ding, keine Sache ſein kann, die einer objektiven Beſtimmung fähig iſt. Daher kommt es, daß unſer Ich niemals in einer Reihe von Vorſtellungen als Mittelglied begriffen ſein kann, ſondern jedesmal vor jede Reihe (!) wiederum als erſtes Glied tritt, das die ganze Reihe von Vorſtellungen feſthält: daß das handelnde Ich, obgleich in jedem einzelnen Falle beſtimmt, doch zugleich nicht beſtimmt iſt, weil es nämlich jeder objektiven Beſtimmung entflieht, und nur durch ſich ſelbſt beſtimmt ſein kann, alſo zugleich das beſtimmte und das beſtimmende iſt«. (Die ganze Sätze betreffenden Sperrungen ſind von mir, einzelne geſperrte Wörter ſtehen ſchon ſo im Original.)

Dieſe Stellen, von denen die zweite, zeitlich frühere (1795) die klarere iſt, zeigen, daß Schelling die Idee einer transfiniten Iteration der reflexiven Intentionalität bereits lange vor G. Cantor klar vor ſich ſah, natürlich ohne ſie mathematiſch zu erfaſſen. Denn, wenn das Ich »jedesmal vor jede Reihe wiederum als erſtes Glied tritt« bedeutet das (in ſpiegelbildlicher Verkehrung gewiſſermaßen, ſodaß alſo die Inverſen wohlgeordneter Typen $^*\omega$, $1+^*\omega$

uſw. erzeugt werden) offenbar nichts anderes, als den Fortſchritt von dem einer Transfiniten vorausliegenden Abſchnitt zu dieſer ſelbſt, ein Fortſchrittsprinzip, welches die beiden Cantorſchen Erzeugungsprinzipien in eins zuſammenfaßt[1].

Beſonders intereſſant iſt aber der im letzten Satz liegende Hinweis auf die Burali-Fortiſche Antinomie: das Ich iſt zwar »in jedem einzelnen Falle beſtimmt«, nämlich als unmittelbar »vor« der ganzen jeweiligen Reihe ſeiner Vorſtellungen unſichtbar (nach Hufferls Ausdruck »anomym«) ſtehend. D. h. jede Transfinite folgt ihrem Abſchnitt oder jedem Abſchnitt folgt unmittelbar eine eindeutig beſtimmte Transfinite. Trotzdem iſt es doch – vom einzelnen Falle abgeſehen – nicht ein für alle Mal »objektiv« beſtimmbar, es entflieht ſtändig, d. h. zu jeder Reihe von Ordnungszahlen gibt es eine größere, die Reihe aller Ordnungszahlen kann nicht als Objekt feſtgelegt werden. Vielmehr iſt das Ich letztlich »zugleich das beſtimmte und beſtimmende«, d. h. wollte man dem Ich abſolut genommen, die maximale Ordnungszahl W entſprechen laſſen, die allen übrigen Ordnungszahlen nachfolgt, es alſo rein »beſtimmend« ſein laſſen, ſo ergäbe ſich ſofort, daß es eben durch dieſe Gedankenwendung auch ſchon zum Gegenſtand der Betrachtung gemacht, alſo »beſtimmt« wäre, ſodaß das »anonyme«, es beſtimmende Ich bereits wieder »vor« es getreten wäre – entſprechend dem Fortſchritt von W zu $W + 1$.

Die Antinomie von Burali-Forti löſt ſich alſo ontologiſch dahin, daß ihre latente Vorausſetzung, es ließen ſich alle Ordnungszahlen überhaupt zu einem Abſchnitt zuſammenfaſſen, irrtümlich iſt; es läßt ſich nur jede beliebige Ordnungszahl zuſammen mit ſämtlichen ihr vorhergehenden in einem Abſchnitt zuſammennehmen. Die Transfiniten zählen eben nicht Reihen von Dingen (»Objekten«, »Sachen«) ab, ſondern Reihen reflektiver Ichakte und es iſt ontologiſch durchaus nicht paradox, ſondern geradezu evident, daß die Geſamtheit derartiger Ichakte nicht einen beſtimmten ſtarren Umfang hat. Denn die Annahme einer »umfangsdefiniten Mannigfaltigkeit« von Ich-Reflexionen würde die »Freiheit« des Ich aufheben.

Die Betrachtung Schellings geht natürlich auf Kants Begriff der transzendentalen Apperzeption zurück (»Das »Ich denke« muß alle meine Vorſtellungen begleiten können«), aber das eigentüm-

1) Vgl. dazu v. Neumann, auf deſſen Arbeit im Math. Anhang, zu § 5, Nr. I näher hingewieſen iſt.

liche Prinzip der Überſchreitung jeder (auch unendlichen) Vorſtellungsreihe findet ſich nur bei Schelling.

Das Vorſtehende zeigt, daß der Grundgedanke des transfiniten Prozeſſes in den Grundanſchauungen des deutſchen Idealismus tief verwurzelt iſt. (Es gibt allerdings ſchon in der antiken Philoſophie eine Iteration des Seinsbegriffs [am früheſten wohl bei Plato, Parmenides 142 B – 143 B], die zu einer transfiniten Wiederholung ausgeſtaltet werden könnte.)

III. Die mathematiſchen Theorien über die Menge *W*.

Nach dieſer Abſchweifung ins eigentlich philoſophiſche Gebiet kehren wir jetzt zu den mathematiſchen Theorien zurück. Es iſt nämlich offenbar von Wichtigkeit, die ſoeben gegebene »Erklärung« des Paradoxes der Zahl *W* mit den in der mathematiſchen Wiſſenſchaft hervorgetretenen »Auflöſungen« dieſer Antinomie in Beziehung zu ſetzen.

Da iſt nun zunächſt eine Äußerung anzuführen, die ſchon vor den eigentlichen »Löſungs-Theorien« der mengen-theoretiſchen Antinomien getan wurde: Heſſenberg (Grundbegriffe der Mengenlehre § 99) ſagt nämlich: »Das Paradoxon der Menge *W* erinnert an diejenigen Antinomien, die nach Kant entſtehen, wenn wir die Natur als abgeſchloſſenes Ganze betrachten. Nach Fries entſpringt ferner die Unendlichkeit des Raumes, der Zeit und der Zahlen auch daraus, daß ſie als formale Bedingungen der Erfahrung deren unvollendeten Charakter widerſpiegeln müſſen ..... Die Menge aller Dinge iſt kein abgeſchloſſenes Ganze, weil unſere Erkenntnis jederzeit unabgeſchloſſen iſt, und die Menge *W* iſt als formales »Gerippe« des unvollendbaren Prozeſſes der Bildung wohlgeordneter Mengen ſelbſt unvollendbar«[1]. Heſſenberg hat mit dem ſcharfen Blick des an Kant geſchulten Forſchers des Weſentliche bereits geſehen, wenn er auch nicht den Mut hatte, daraus die notwendigen Konſequenzen zu ziehen, vielmehr ausdrücklich ablehnt den eben angeführten Gedanken für eine »Löſung« des Paradoxes zu erklären.

Auch alle ſpäteren »Löſungen« der Antinomie von Burali-Forti haben das Gemeinſame, daß ſie die rechtmäßige Exiſtenz der Menge *W* leugnen. Zum Teil wird das erreicht durch eine axiomatiſche Begründung der Mengenlehre, bei der gleich bei der impliziten Definition des Mengenbegriffes durch die Axiome

1) l. c. S. 147/48 (633/34).

dafür geſorgt wird, daß W keine zuläſſige Menge darſtellt (Zermelo, Fraenkel, v. Neumann). Zum andern Teil ſtützt man ſich auf eine Theorie der logiſchen Typen (B. Ruſſell und in etwas abweichender Weiſe auch J. König). Dieſe zweite Art der »Löſung« (denn die erſte iſt ja nichts als eine Vermeidung des gefährlichen Gebiets überhaupt) hat viel Ähnlichkeit mit den im vorigen ausführlich betrachteten Ineinanderſchachtelungen von Ausſagen, mit den Stufencharakteriſtiken uſw. In der Tat iſt der Begriff der »Stufe« im weſentlichen derſelbe wie der des »logiſchen Typus« im Sinne Ruſſells. (Huſſerl bezieht ſich nicht auf Ruſſell, da er von ganz anderen, viel allgemeineren Motiven her, nämlich phänomenologiſchen, auf die »Stufencharakteriſtik« geführt wurde).

Ruſſells und Königs (frühere) Theorien unterſcheiden ſich dadurch, daß der erſtere nur endliche Ordnungszahlen (Indizes) der Typen zuläßt, der zweite auch transfinite (wie wir oben auch).

Die Formulierung Ruſſells iſt ſo eigenartig, daß ſie angeführt zu werden verdient[1]. Der Hauptpunkt iſt, daß es zwar »dieſelbe Behauptung« in allen Typen (auf allen Stufen) geben kann, aber daß keine Möglichkeit beſteht, dieſe Tatſache in Form einer Behauptung auszudrücken. So werden z. B. die logiſchen Grundaxiome(!) der Reihe nach, je nach Bedarf, in immer höhere »Typen« eingeführt: »Wir können von jedem neuen Funktionstypus (= Satzſtufe) handeln, ohne die Tatſache in Rückſicht zu ziehen, daß es ſpätere (höhere) Typen gibt. Durch die ſymboliſche Analogie »ſehen« wir, daß der Prozeß unbegrenzt oft wiederholt werden kann«. – »Wenn wir in irgend einem Stadium von einer Klaſſe zu handeln wünſchen, die definiert iſt durch eine Funktion vom 30000 ſten Typus, ſo werden wir unſere Schlußweiſen und Annahmen 30000 Mal zu wiederholen haben. Aber es beſteht immer noch keine Notwendigkeit, von der Hierarchie (der Typen) als von einem Ganzen zu ſprechen, oder vorauszuſetzen, daß Ausſagen gemacht werden können über 'alle Typen'«.

Beſonders merkwürdig iſt die (an verſchiedenen anderen Stellen ſich wiederholende) Ausdrucksweiſe: »wir ſehen«, wo doch dieſes »Sehen« nicht legitim ausgedrückt werden kann. Ruſſell zeigt zwar, daß man bei konkreten Beweiſen immer ſchrittweiſe vorgehen kann und alſo die Ausſagen über jenen »geſehenen« Sachverhalt nicht

1) B. Ruſſell und A. N. Whitehead, Principia Mathematica, Vol. II, p. XI, XII, XIII, XV; das Zitat ſteht auf p. XI (von mir überſetzt).

braucht, — aber wenn auch der mathematiſche Logiker auf dieſe Weiſe die »gefährliche« Zone vermeiden kann, ſo bleibt das in ihr liegende Problem doch beſtehen und ihm kann von dem tiefer Forſchenden nicht ausgewichen werden.

Die Löſung von Burali-Fortis Antinomie wird von Ruſſell folgendermaßen ausgedrückt[1]: » ..... eine Reihe iſt eine Relation und eine Ordinalzahl iſt eine Klaſſe von Reihen .... Daher iſt eine Reihe von Ordnungszahlen eine Relation zwiſchen Klaſſen von Relationen und iſt vom höherem Typus als irgend eine der Reihen, welche Glieder der fraglichen Ordnungszahl ſind (die ja eine Klaſſe iſt). B.-F.s »Ordnungszahlen aller Ordnungszahlen« muß die Ordnungszahl aller Ordnungszahlen eines beſtimmten Typus ſein, und muß daher von höherem Typus ſein, als irgend eine dieſer Ordnungszahlen und es liegt kein Widerſpruch darin, daß ſie größer als jede beliebige von ihnen iſt.« Obwohl unſere Stufenbildung auf einem anderen Prinzip als die Ruſſells beruht, ſo iſt doch dieſe Formulierung ganz analog der unſrigen: auch bei uns konnte der Ordnungszahl W kein Stufenindex zugeordnet werden. —

In ſeinem letzten Werk »Neue Grundlagen der Logik, Arithmetik und Mengenlehre«[2] (das eigentlich den Titel »Synthetiſche Logik« tragen ſollte!) hat J. König eine abweichende Löſung derſelben Antinomie gegeben (S. 254 ff.) Beſonders wichtig iſt Anmerkung 3 zu S. 254, wo es heißt: »Wenn wir »die Menge der Ordnungszahlen« W genau betrachten, ſehen wir, daß die Erlebniſſe, die dem die Menge W definierenden Denkbereich (W) angehören, durchweg Mengen- und Ordnungsrelationen ſind ..... In dieſen Erlebniſſen .... findet ſich aber keine Spur der Tatſache, daß die Menge alle Ordnungszahlen als Elemente enthält. Erſt wenn wir dieſen Denkbereich ſelbſt objektivieren, als Ding betrachten, deſſen Eigenſchaften in einem höheren Denkbereiche beſchrieben werden, kann dieſe Tatſache in Evidenz treten[3]. In dieſem Sinne iſt die Eigenſchaft der Menge, alle Ordnungszahlen zu enthalten, kein Erlebnis, das dem Denkbereiche (W) angehört, ſondern eine Anſchauung, die an dem »fertigen« Denkbereiche erlangt wird... Allerdings können wir dieſe Tatſache ſelbſt mit anderen für jene Anſchauung notwendigen zuſammen axiomatiſieren, gelangen

1) Principia mathematica, Vol. I, p. 66.
2) Leipzig 1914.
3) Von mir geſperrt!

aber dadurch zu einem höheren Denkbereiche $(W)'$, der von (W) weſentlich verſchieden iſt. . . . Die Verwechſelung der Denkbereiche (W) und $(W)'$, die offenbar nicht geſtattet iſt, führt zur ſogenannten Antinomie der W-Menge. Es ſoll ſogleich näher auseinandergeſetzt werden, wie das »Anhängen eines Elementes« an W als Erweiterung des Denkbereiches (W) ausgeführt wird und nachträglich dieſes »Anhängen« als Erweiterung des Denkbereichs $(W)'$ aufgefaßt wird. In dem einen Falle iſt dieſe Erweiterung ausführbar, in dem andern unmöglich. Die Verwechslung, eine quaternio terminorum, ergibt die Antinomie . . . .«

Dieſe Ausführungen ſtimmen mit unſeren entſprechenden durchaus überein; die Wendung »Objektivierung des Denkbereichs« iſt genau das, was in unſerer Darlegung das konkrete Erfaſſen der geſetzmäßigen Reihenbildung iſt. – Im Einzelnen ſind die Stufenbildungen bei uns anders (verwickelter, mit transfinitem Index), aber das Weſentliche iſt doch die Auffaſſung, daß der »transfinite Prozeß im ganzen« gar nicht verglichen werden kann mit ſeinen konkreten Teilprozeſſen (daß der Denkbereich $(W)'$ von (W) gänzlich verſchieden iſt).

Die Ausführungen Ruſſells und Königs beſtätigen alſo nur die im vorigen dargelegte Interpretation des transfiniten Prozeſſes.

Im ganzen kann man ſagen, daß die Betrachtung der iterierten Reflexion imſtande iſt, ſogar die am weiteſten vorgetriebene Bezeichnung der transfiniten Zahlen zu erfaſſen, alſo die Theorie der transfiniten Zahlen weit über das von Ruſſell z. B. zugelaſſene Maß hinaus ſichert. Dieſes Ergebnis iſt in Anbetracht des »intuitioniſtiſchen« Ausgangspunktes ſehr merkwürdig und unerwartet. Es hat ſeinen Grund darin, daß der Gedanke neu iſt, die Verwirklichung der »großen« Mengen nicht in irgendwelchen objektiven »Gegenſtänden« von beſtimmter Bauart, mit parataktiſch geordneten »Elementen« zu ſuchen, ſondern in der Komplikation der Struktur des Bewußtſeins ſelbſt, am konkreteſten in der Iteration der Reflexion auf ſich ſelbſt. Dieſe Gedankenwendung enthält aber ein ferneres Problem, zu deſſen Behandlung wir nunmehr übergehen.

IV. Die transfinite Komplikation des Bewußtſeins und die Mengenlehre.

A. Die transfinite Progreſſion und der überlieferte Mengenbegriff.

Die ontologiſche Unterbauung des transfiniten Progeſſus, wie ſie in Abſchnitt II vermittels der Analyſen der ſogenannten Bewußt-

ſeinsſtufen gelungen war, iſt in philoſophiſcher Hinſicht ſicherlich von einer erheblichen Tragweite. Insbeſondere war ja die letzte analyſierte Bewußtſeinsſtruktur, die iterierte Reflexion auf ſich ſelbſt, nicht nur eine in der relativ abſtrakten Weiſe der iſolierten Deſkription erfaßbares Phänomen, ſondern war einer hermeneutiſchen Explikation, einer Auslegung auf den Sinn des konkret lebendigen Daſeins, des Lebens (nicht des reinen abſtrakten Bewußtſeins) fähig und zu ihrem tieferen Verſtändnis auch bedürftig. Die transfinite Komplikation der Struktur der Reflexion erwies ſich als ein beſonders zugeſpitzter Ausdruck der radikalen Bodenloſigkeit des umweltlichen alltäglichen Daſeins. Damit iſt es gelungen den Cantorſchen transfiniten Progreſſus im eigentlichſten Sinn ontologiſch zu interpretieren, ihm eine ganz genau beſtimmte Bedeutung für den Sinn der Faktizität ſelbſt zu geben.

Es bleibt indeſſen bei aller dieſer gewonnenen Aufhellung der Natur des transfiniten Progreſſus doch noch die Frage nach ſeiner mathematiſchen Tragweite und Bedeutung ungelöſt. Insbeſondere erhebt ſich das Problem: Iſt mit der erwähnten ontologiſchen Interpretation des transfiniten Progeſſus (d. h. des Prozeſſes, der von einer transfiniten Zahl, ſtreng als Ordnungszahl genommen, nämlich als Indexbezeichnung der Stufencharakteriſtik gewiſſer Bewußtſeinskomplikationen, zur anderen führt) ſchon die mathematiſche Exiſtenz der entſprechenden wohlgeordneten transfiniten Mengen bewieſen? Iſt alſo der Teil der Cantorſchen Mengenlehre, der von den wohlgeordneten Mengen handelt, geſichert und kann man von dieſer Baſis aus vielleicht zu einem intuitiven Begreifen auch weiterer Cantorſcher transfiniter Mengen vorzudringen verſuchen?

Hier muß nun davor gewarnt werden, in den in Abſchnitt II gegebenen Darlegungen bereits eine intuitive Sicherſtellung der Exiſtenz der wohlgeordneten Mengen zu ſehen.

Denn, von anderen noch zu erwähnenden Schwierigkeiten abgeſehen, involviert der Begriff der Cantorſchen Mengen eine Nebenordnung (Parataxe) ſämtlicher formal gleichberechtigter Mengenelemente. Die Mengenelemente ſind zunächſt einmal da, dann erſt werden ſie »wohlgeordnet«; »dieſelben« Elemente können auch anders geordnet werden; umgekehrt kann (vielleicht) eine beliebige Menge wohlgeordnet werden.

Dagegen iſt es offenbar ſinnlos, die Komplikationsſtufen eben der iterierten Reflexion, deren Stufencharakteriſtiken (Indizes) transfinite Zahlen ſind, anders anordnen zu wollen, oder ſie

ſich erſt ungeordnet vorhanden zu denken, um ſie dann erſt »wohl-zuordnen«. Sofern alſo das ontologiſche Fundament der transfiniten Zahlen (nach der Betrachtung des Abſchnitt II) lediglich darin liegt, daß ſie als Stufencharakteriſtiken der Reflexionsſtufen fungieren können, iſt eine Freiheit der Anordnung der Elemente der »Menge« jener Stufen durchaus nicht gewährleiſtet. Oder, anders ausgedrückt: Sofern man in dem Begriff der Menge die Möglichkeit der verſchiedenartigen Anordnung der Mengenelemente gleich mit aufnimmt, bilden die »ſämtlichen« Stufen (bzw. ihre Indizes) gar keine Menge. Von allen Stufen *im Sinne einer Menge zu reden* iſt ſinnlos. Aber nicht nur das: es iſt auch ſchon unmöglich, von einer transfiniten Teilmenge von »einigen« Stufen zu reden, ſofern man ſich dieſe Stufen irgendwie abſtrakt und ungeordnet nebeneinandergelegt denkt, gewiſſermaßen in einem homogenen Medium ausgebreitet.

Dazu kommt noch ein zweites: Auch als von Hauſe aus geordnete Mengen kann man die transfiniten Indizes nicht ohne weiteres faſſen. Zwar kann man wohl unterſcheiden zwiſchen konkreten Fällen transfiniter Komplikation (etwa zwiſchen der iterierten Bildintention oder der iterierten Reflexion auf ſich ſelbſt) und dem dieſen Fällen gemeinſamen, von ihnen abſtrahierten Ordnungstypus der Folge der transfiniten Indizes; aber die eben genannten konkreten Fälle ſtellen doch keineswegs aktual-unendliche wohlgeordnete Mengen dar, ſondern *potentiell-unendliche Prozeſſe*. Man kommt zwar mit der Annahme aktualer wohlgeordneter Mengen nicht auf einen Widerſpruch, aber eine poſitiven, kategoriale Anſchauung iſt nicht mehr möglich. Die ontologiſche Fundierung des transfiniten Progressus qua pro-greſſus (genauer als das (verbale) progredi, procedere ſelbſt) iſt *nicht* übertragbar auf die entſprechenden transfiniten, wohlgeordneten Mengen. Der Progreſſus »exiſtiert« im ontologiſchen Sinn, die wohlgeordnete Menge *nicht*. (Jedenfalls exiſtiert ſie nicht auf Grund des Progreſſus). Wenn man alſo alle Sätze über transfinite wohlgeordnete *Mengen* als ſolche über pure transfinite *Ordnungszahlen* (denen gar nichts »Mengenhaftes« anhaftet und die auch nicht ſelbſt zu »Mengen« zuſammengefaßt werden können) deutet, dann kann man von einer ontologiſchen Fundierung der Lehre von den transfiniten *Zahlen* reden. Aber keineswegs iſt das berechtigt, wenn man – wie gerade in den neueren Darſtellungen der »*Mengenlehre*« allgemein üblich iſt – die Theorie der wohlgeordneten *Mengen* zur Grundlage der Lehre von den transfiniten *Zahlen* macht.

Wir kommen alſo gerade zur alten Cantorſchen Idee der »Fortſetzbarkeit der Zahlenreihe über das Unendliche hinaus« zurück, eine Idee, in der der dynamiſche Prozeß-Charakter im Vordergrund ſteht[1]. Es iſt alſo gerade diejenige (ältere) Betrachtung, der man heute im allgemeinen nur mehr einen heuriſtiſchen Wert beimißt, die ſich vom philoſophiſch-ontologiſchen Geſichtspunkt aus als die fundamentale und die Exiſtenz begründende erweiſt. Dagegen entbehren die axiomatiſch-formalen Betrachtungsweiſen durchaus des ontologiſch faßbaren Hintergrundes. Es iſt dies ein Beiſpiel von vielen für die (i. a. unbewußte) Abwendung der modernen Mathematik von ihrer philoſophiſch-ontologiſchen Baſis. (Vgl. dazu § 6a).

[Es iſt wichtig, ſich darüber klar zu werden, ob von dieſer Einſchränkung der Tragweite unſerer ontologiſchen Begründung des Transfiniten die Anwendung der transfiniten Induktion getroffen wird, die der Metamathematik W. Ackermanns zugrunde liegt. (Vergl. Math. Anh. z. § 3, II.) Man ſieht leicht, daß das nicht der Fall iſt. Die Anwendung, die Ackermann vom Transfiniten macht, benutzt nur den transfiniten Prozeß als ſolchen, nicht die ſtatiſche, ſimultane Menge der Komplikationsſtufen. D. h.: Es iſt notwendig und hinreichend für die Ackermannſche Theorie, die Reihe der transfiniten Zahlen als ein beſtimmtes Geſetz des Fortſchreitens aufzufaſſen, durch das die immer komplizierteren transfiniten Formeln eine nach der anderen formal konſtruiert werden können (was aber natürlich noch nicht beſagt, daß auch die in jenen Formeln gemeinten mathematiſchen Gegenſtändlichkeiten oder Pſeudogegenſtändlichkeiten konſtruiert werden können[2]).]

Die ſo gewonnene Aufklärung über das Transfinite Cantors macht auch verſtändlich, daß die ontologiſche Fundierung aller überhaupt irgendwie bezeichenbaren transfiniten Zahlen gelingt, d. h.

---

1) Man erinnere ſich der Darlegungen in Abſchnitt I; beſonders der Diskuſſion Cantors mit dem Kardinal Franzelin, wobei beſonders der Kardinal das *δυνάμει ὄν* der ganzen Reihe der Transfiniten mit großem Scharfſinn ſchon damals betont hat.

2) Eine weitere merkwürdige Beſtätigung des Geſagten bildet der letzte Hilbertſche Aufſatz »Über das Unendliche« (Math. Ann. 95, S. 161 ff.), der mir zur Zeit der Niederſchrift des Textes noch unbekannt war. — In dieſem Aufſatz wird (zum Zwecke der Löſung des Kontinuumproblems) der transfinite Prozeß als formales Abbild der möglichen Komplikationsſtufen der Funktionen einer Zahlenvariablen (d. h. der Zahlfolgen) aufgefaßt. (Näheres darüber in § 5 b). Es wird alſo das Transfinite de facto »inhaltlich« und ganz in unſerem Sinne gebraucht: als Index, nicht als Ordnungstypus einer aktuell unendlichen Menge.

ſoweit die Kraft der Erzeugungsgeſetze reicht; andrerſeits aber die intuitive Erfaſſung ſchon viel weniger »reicher« (»großer« im populären Sinn) Mengen mißlingt. Die Stufenreihe, die die Mengen nach ihrer »Größe« (alſo etwa ihrer Mächtigkeit und der Komplikation ihres Ordnungstypus) und nach der Möglichkeit ihres Exiſtenzbeweiſes auf Grund beſtimmter Exiſtenzialaxiome in der traditionellen Mengenlehre bilden[1], iſt nicht die maßgebende im Sinne unſerer Ontologie. Die formaliſtiſche Mathematik iſt hier nicht einfach das weitere »Gebiet B«, das das engere intuitiv erfaßbare »Gebiet A« umſchließt. Vielmehr bleibt die Merkwürdigkeit (die aber nunmehr wohl nicht mehr paradox erſcheinen dürfte) beſtehen, daß von der intuitiven Grundpoſition aus ein Vorſtoß in Gebiete vorgetrieben werden kann, die von den üblichen formalen Exiſtenzialaxiomen aus nicht erreicht werden könnten. Eine Paradoxie liegt aber deshalb nicht vor, weil das durch jenen »intuitioniſtiſchen« Vorſtoß Erreichte nicht eine Theorie der betreffenden »rieſigen« transfiniten Mengen iſt, ſondern nur gewiſſer rein ordinaler Indizes, die einer eigentlich mengentheoretiſchen Auffaſſung nicht ohne weiteres zugänglich ſind. Der vorliegende Tatbeſtand macht auch andererſeits den Gang der geſchichtlichen Entwicklung verſtändlich, im Verlauf welcher ja die Auffaſſung der transfiniten Zahlen als rein ordinaler Indizes zuerſt auftrat, als Erweiterung einer Beobachtung von nur durch ſolche Indizes charakteriſierbaren Strukturen an abſtrakten Mengen und der Reihe ihrer »Ableitungen«[2]. Alle derartigen »mengentheoretiſchen« Beiſpiele gaben aber immer nur den erſten Anfang der Reihe der Transfiniten, gingen jedenfalls nie über die »zweite Zahlenklaſſe« hinaus.

Als nach dieſem Vorſtadium dann (in der klaſſiſchen Abhandlung Cantors von 1883 im 21. Band der Math. Ann.) die beiden »Erzeugungsprinzipien« der transfiniten Zahlen gefunden wurden, durch die die Reihe der Transfiniten eine Unendlichkeit im echten Sinne gewann (nicht nur im Sinne von Hegels »ſchlechter Unendlichkeit«), war mit erſtaunlichem Scharfblick der ontologiſch entſcheidende Vor-

1) Für die Möglichkeit verſchiedener zugrunde zu legender Exiſtenzialaxiome vgl. man die Darſtellung A. Fraenkels, »Einleitung in die Mengenlehre«, § 13; ferner: v. Neumann, Journ. f. Math. 154, S. 219 ff.

2) Cantor, zuerſt Math. Ann. 17, S. 358 (1880); vgl. dazu Schönfließ-Hahn, Entwicklung der Mengenlehre I (Leipzig und Berlin 1913), S. 92, Anm. 1; ferner Schönfließ, Enzyklopädie der math. Wiſſ., Bd. I; I A 5 (»Mengenlehre«) Nr. 1; Young, The theory of sets of points (Cambridge 1906), § 12–14.

ſtoß ins Transfinite gemacht und zwar genau in der Weiſe, wie er ontologiſch haltbar iſt. Unglückſeligerweiſe verließ Cantor ſpäter[1] (1897) ſelbſt dieſe freiſchöpferiſche Begründungsweiſe und ging zur Theorie der wohlgeordneten Mengen über, und dadurch erſt wurde – indem nunmehr die aktual-unendliche Menge für alle Teile der Theorie des Unendlichen grundlegend wurde – die Möglichkeit der ontologiſchen Begründung preisgegeben.

Allerdings ſind doch auch poſitive mathematiſche Motive vorhanden, die zur Theorie der wohlgeordneten Mengen geführt haben, nämlich erſtens die großen Schwierigkeiten, die ſich einer »konſtruktiven«, nur auf die Cantorſchen Erzeugungsgeſetze geſtützten Theorie der transfiniten Zahlen in mathematiſcher Hinſicht entgegenſtellen. Darüber werden wir noch zu reden haben. Zweitens aber die nicht geringeren Schwierigkeiten des Übergangs von einer rein ordinalen Theorie der transfiniten Zahlen zur allgemeinen Lehre von den unendlichen, auch nicht-wohlgeordneten Mengen. Wir ſahen, daß eine Menge, auch eine geordnete, ontologiſch eine ganz andere Struktur hat als ein unendlicher Prozeß; nur durch eine Art nivellierender Reduktion gelangt man von dem »geſtuften« Aufbau des Prozeſſes zur »Menge«, in der alle Transfiniten ſtreng parataktiſch auftreten. Will man alſo den Vorſtoß auf ganz ſchmaler Front ins Gebiet des Unendlichen, den man auf Grund der transfiniten Komplikation der Bewußtſeinsſtrukturen wagen kann, verbreitern zu einer Okkupation eines ganzen abgerundeten Gebiets, ſo muß man vielleicht notgedrungen den ontologiſchen Unterbau zum mindeſten teilweiſe im Stich laſſen und nur noch mit rein formalen Analogien arbeiten.

Dieſes merkwürdige Verhängnis iſt tief verankert in dem Weſen des Formalen überhaupt. Und von dieſer Seite aus gewinnt die eigentümliche ſoeben geſchilderte Sachlage eine philoſophiſch, genauer geſagt logiſch grundſätzliche Bedeutung. Es handelt ſich nämlich um den Übergang von der von einem konkreten Lebensphänomen (das als ſolches der hermeneutiſchen »Auslegung« zugänglich iſt) in beinahe wörtlichem Sinne »abgezogenen« Form zu einer nivellierten, in gewiſſem Betracht »allgemeinen«, aber deshalb auch in ganz beſtimmter Hinſicht »verblaßten« Formalität. Sind bei dem erſten formalen Charakter die kategorialen Eigentümlichkeiten des konkreten Phänomens voll erhalten, – was man daran erkennen

1) Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre II, S. 208. (Math. Ann. 49.)

kann, daß ſie rückwärts wieder beinahe unmittelbar durch eine Art konkreter Deutung (»Entformaliſierung«) zum lebendigen Phänomen zurückführen[1] –, ſo iſt bei der zweiten Art des Formalen dieſe kategoriale Struktur »eingeebnet«. Das heißt: der Übergang von der erſten zur zweiten Weiſe des Formalen kann bezeichnet werden als die Nivellierung der ſpezifiſch kategorialen Differenziertheit des urſprünglichen formalen Charakters des Phänomens.

Das Mathematiſch-Formale der traditionellen Art iſt durch eben jene Nivelliertheit der kategorialen Differenzen gekennzeichnet gegenüber dem »Formal-Anzeigenden«[2] (Heidegger), das ſich wie ein dünnes Gewand der plaſtiſchen Eigentümlichkeit des Phänomen-Körpers anſchmiegt. Andrerſeits iſt auch dieſes Formale der »anzeigenden Art« unter gewiſſen Umſtänden einer gewiſſermaßen mathematiſchen Behandlung fähig. Dies iſt einigermaßen überraſchend, wenn man bedenkt, daß das Formale der anzeigenden Art eigentlich die methodiſche (»begriffliche«) Grundlage der interpretierenden Geiſteswiſſenſchaften (Philologie, Geſchichte uſw.) iſt. Allerdings iſt zu betonen, daß dieſe Möglichkeit der mathematiſchen Explikation formal-anzeigender Charaktere nicht allgemein beſteht, ſondern ihren Grund im vorliegenden Falle in der iterativen Struktur des Phänomens hat. Hier eröffnet ſich die Möglichkeit eines tiefen Einblicks in den Weſenscharakter des Mathematiſchen überhaupt, bei dem die Iteration, die »Wiederholung« des in irgend einem

1) Denn, genau beſehen, iſt das Verſtändnis jenes formalen Charakters nur möglich im Vollzug eines Lebensbezugs von der Art des entformaliſierten Bezugsſinns des konkreten Phänomens. Am »Beiſpiel« der transfiniten Reflexion auf ſich ſelbſt gezeigt: das Verſtändnis der Wirkungsweiſe der Cantorſchen Erzeugungsprinzipien involviert im Grunde ſtets den Vollzug von Reflexionen auf das eigene Tun, alſo – in einer beſtimmten Zuſpitzung auf das gerade jeweilig lebendige Tun – eben nichts anderes als die konkrete Reflexion auf ſich ſelbſt. (Vgl. oben S. 110.)

Daraus ergibt ſich allerdings, daß, genau beſehen, das angebliche »Beiſpiel« von der iterierten Reflexion auf ſich ſelbſt im Grunde gar kein beliebiges Beiſpiel iſt – ſondern die Sache ſelbſt. Keine andere transfinite Stufung des Bewußtſeins iſt jener letzten Konkretion fähig wie die Reflexion auf ſich ſelbſt. Etwa transfinite Iterationen von Erinnerungen, Phantaſien u. dgl. ſind doch immer nur künſtliche, abſtrakte, analogiſche Bildungen nach dem Muſter der iterierten Reflexion und ohne deren Hilfe in concreto gar nicht »auszudenken«, d. h. der phänomenologiſchen »Anſchauung« nicht zugänglich.

2) So genannt, weil es auf das jeweilig gemeinte konkrete Seiende gleichſam hinzeigt, es anzeigt, aber nicht wie eine leere Form »umgreift« (Lask).

Betracht Gleichen (bzw. Identiſchen) eine entſcheidende Rolle ſpielt. (Vgl. § 6 b u. c.)[1].

B. Phänomenologie und mathematiſche Theorie der Transfiniten.

Nach den vorangehenden ontologiſchen Bemerkungen muß nun das Verhältnis zur mathematiſchen Theorie noch genauer beleuchtet werden. Die phänomenologiſche Unterbauung des transfiniten Progreſſus mittels der iterierten Reflexion auf ſich ſelbſt und dergleichen beabſichtigt nicht, einen Erſatz für die mathematiſche Theorie der transfiniten wohlgeordneten Mengen bzw. Ordinalzahlen zu bieten. Sie iſt überhaupt nicht in der früher üblichen Weiſe auf die philoſophiſche Begründung einer als ſakroſankt angeſehenen mathematiſchen Theorie eingeſtellt. (Die Marburger neukantiſche Schule hatte bekanntlich die Philoſophie gewiſſermaßen zur ancilla scientiarum [praecipue mathematicarum] erniedrigt. Demgegenüber iſt es die unverkennbare philoſophiſche Tendenz der Huſſerlſchen Lehre von der phänomenologiſchen Reduktion, daß die phänomenologiſche Philoſophie nicht nur von den poſitiven Wiſſenſchaften unabhängig ſein ſoll, ſondern daß ſie auch die Grundlegung, die jene ſich ſelbſt gegeben haben, einer (vor allem ontologiſchen) Kritik zu unterwerfen hat). Was unſere phänomenologiſche Unterbauung beabſichtigt und auch leiſtet, iſt dies, daß ein »ſachlich exiſtierendes«, d. h. konkret aufweisbares Phänomengebiet aufgezeigt wird, zu deſſen Analyſe wirklich transfinite Prozeſſe benötigt werden.

Man könnte mit einem gewiſſen Recht ſagen, die in dieſem Sinne »ſachliche« Mathematik der transfiniten Ordnungszahlen ſei angewandte Mathematik. Die eigentümliche Struktur des Anwendungsgebiets, die jenes von Hauſe aus weſenhaft beſitze, ſei es, die die Einführung der transfiniten Ordnungszahlen zu ſeiner Beherrſchung erzwungen habe. Zu vergleichen wäre etwa die Art, wie die Faradayſche zunächſt ganz unmathematiſche Konzeption des elektriſchen Feldes die Vektoranalyſis (und ſpäter die Tenſoranalyſis) hätte entſtehen laſſen, die ja auch in ihren Anfängen durch die Phyſiker (Maxwell, Gibbs, Heaviſide uſw.) und nicht durch die Mathematiker geſchaffen worden ſei.

---

1) Hiſtoriſch iſt noch anzumerken, daß die Problematik der kategorialen Nivellierung zuerſt bei Ariſtoteles, im I. Buch der Phyſik auftritt, welche Erkenntnis uns durch die eindringende Interpretation dieſes Textes durch M. Heidegger (in ſeiner Freiburger Vorleſung im Sommer-Semeſter 1922) wiedergegeben wurde.

An dieſer Stelle kann darauf nicht näher eingegangen werden.

Aber freilich iſt doch noch ein weſentlicher Unterſchied zwiſchen jenen phyſikaliſchen »Anwendungen« einer mathematiſchen Theorie (mögen ſie auch mitunter hiſtoriſch der ſyſtematiſchen Entwicklung der reinen Theorien vorangegangen ſein) und jener in manchem Betracht analogen Beziehung der Theorie der transfiniten Ordinalzahlen zu der Iterationsmöglichkeit von Intentionalitäten im »reinen Bewußtſein«. Denn während jene »phyſikaliſchen« Entitäten tranſzendente Gegenſtändlichkeiten ſind, handelt es ſich hier um *tranſzendentale* Gegebenheiten, d. h. um ſolche Phänomene, in denen ſich Gegenſtände im eigentlichen Sinne überhaupt erſt *konſtituieren*. Dies äußert ſich in evidenter Weiſe vor allem darin, daß jene iterierten Intentionalitäten bei der konkreten Konſtitution des *rein mathematiſchen* Begriffs der transfiniten Ordinalzahlen ſelbſt die ſchlechthin entſcheidende Rolle ſpielen. G. *Cantors* geniale Konzeption der beiden Erzeugungsprinzipien für die transfiniten Zahlen iſt ja konkret genommen nichts anderes als die transfinite Iteration einer Intentionalität.

An dieſer Stelle entſteht aber eine entſcheidende Schwierigkeit, die eine weitere Betrachtung unbedingt erfordert. Die Begründung der Lehre von den Transfiniten mittels der Erzeugungsprinzipien, wie ſie *Cantor* in ſeiner »Mannigfaltigkeitslehre« (Math. Ann. 21) zuerſt andeutungsweiſe gab, iſt von ihm ſelbſt ſpäter (in den »Beiträgen zur Begründung der transfiniten Mengenlehre; Math. Ann. 46 u. 49) als undurchführbar angeſehen worden. Notgedrungen trat dafür die Begründung mittels des Begriffs der wohlgeordneten Menge ein, die, wie ſoeben gezeigt wurde, ontologiſch ſchweren Bedenken unterliegt.

Die Schwierigkeit liegt darin, daß der Zweifel berechtigt erſcheint, daß die *Cantor*ſchen Erzeugungsprinzipien, ſobald man ſie ſcharf zu formulieren verſucht, gar nicht zu *allen* transfiniten Zahlen führen, ja vielleicht nicht einmal zu allen Zahlen der II. Zahlenklaſſe! Was mit dieſer paradoxen Behauptung gemeint iſt, iſt folgendes: *Cantor* hat ſchon ſelbſt die »erſten« Transfiniten, von ω ab, konkret und lückenlos benannt, bis zur erſten »Epſilonzahl« $\varepsilon = \omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$ und darüber ein Stück hinaus. Man hat es früher als ſelbſtverſtändlich angeſehen, daß dieſe lückenloſe Benennung auf die ganze II. Zahlklaſſe ausgedehnt werden kann. Damit iſt gemeint, daß zwar nicht *alle* Transfiniten der II. Klaſſe durch ein beſtimmtes finites Bezeichnungsſyſtem benannt werden können (denn das iſt ja nach dem bekannten »Satz von der endlichen Bezeichnung« für jede nichtabzählbare Menge ausgeſchloſſen), daß aber nur eine endliche Anzahl neuer Zeichen

erforderlich ist, um zu jeder beliebigen Zahl der II. Klasse zu gelangen. »Es ist also jede Zahl der II. Klasse einer endlichen Bezeichnung fähig, die ganze Klasse selbst dagegen nicht« [1].

Für diese im allgemeinen stillschweigend gemachte Annahme gibt es bis jetzt keinen Beweis. Charakteristisch ist, daß Brouwer, dem wir die bisher einzige streng durchgeführte konstruktive Theorie der Transfiniten verdanken [2], keineswegs eine Angabe über die Grenze oder Unbegrenztheit seiner Konstruktionen macht. Er gibt eine systematische Theorie bis zur zweiten Epsilonzahl $\varepsilon_1 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^{\varepsilon^{\cdot^{\cdot^{\varepsilon}}}}$ (ν Buchstaben ε) und zeigt dann nur, daß man auch noch größere Zahlen bezeichnen kann. Keineswegs aber zeigt er, daß die so oder sonstwie bezeichenbaren Zahlen jede Zahl der II. Zahlenklasse übertreffen können. Es wäre also die Möglichkeit denkbar, daß der transfinite Prozeß sich schließlich an einer oberen Grenze festläuft, was zunächst verborgen bleibt und nur dann zu Tage kommt, wenn man ihn exakt zu fassen sucht [3].

Aber auch nach der üblichen Auffassung wird die Reihe der Transfiniten, sobald man über die II. Klasse hinauskommt, immer unbestimmter. So ist z. B. keinesfalls die lückenlose Bezeichnung aller Transfiniten bis zur Anfangszahl der III. Klasse Ω_1 möglich, selbst wenn jede Transfinite unter Ω_1 von einer geeigneten Bezeichnungsweise erreicht werden könnte. Vollends die Transfiniten, die Mahlo definiert hat [4] (die über Ω_ω weit hinausgehen) sind in ihrer Existenz von gewissen hypothetischen Postulaten abhängig.

Angesichts dieser unleugbaren Unsicherheiten und Schwierigkeiten innerhalb der mathematischen Theorie der Transfiniten fragt es sich, ob unserer ontologisch-phänomenologischen Deutung wirklich eine reale Bedeutung zukommt. Man könnte meinen: Wenn die transfiniten Zahlen wirklich formale Strukturen an kon-

---

1) Hessenberg, Grundbegriffe der Mengenlehre, § 94 (S. 138).

2) Verhandl. d. K. Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, I. Serie; Deel XII, Nr. 5, S. 22 ff., vgl. besonders den Schluß S. 41—43.

3) Auf diese ganze Schwierigkeit hat mich Herr Professor Weyl brieflich hingewiesen. Jede einzelne Definitionsweise, die auf Grund schon definierter Transfiniten größere Transfinite bestimmt, versage schließlich. (Phänomen des »Einholens« oder der »kritischen Zahlen« Beispiel: ε, wo $\omega^\varepsilon = \varepsilon$ ist.) Es sei möglich, daß nicht nur jede einzelne derartige Definitionsweise versage, sondern daß es sogar eine Grenze »innerhalb der II. Zahlenklasse« gäbe, unterhalb welcher bereits alle möglichen Definitionsweisen versagt hätten. — Dieses Problem wird im Math. Anh. zu § 5, VI B näher erörtert.

4) Leipziger Berichte, math.-phys. Klasse, Bd. 63, 64, 65.

kreten Phänomenen darſtellen, dann müſſen ſie auch ſelbſt durchaus beſtimmt und ohne jede Unklarheit und jeden Widerſpruch ſein. Aber dieſe Forderung iſt übertrieben: Gewiß müſſen die Unklarheiten der Theorie der Transfiniten beſeitigt werden, aber dieſes kann nicht durch einen phänomenologiſchen Machtſpruch geſchehen. Wir ſehen ja gerade, daß die phänomenologiiche Betrachtung nichts tut, als die (rein ordinale) mathematiſche Unterſuchung getreu nachzuzeichnen. Sie zeigt, daß die mathematiſche Theorie eine *ſachliche*, ontologiſch faßbare Bedeutung hat, – auch da, wo ſie noch problematiſch oder von Hypotheſen abhängig iſt. Die Probleme der mathematiſchen Theorie ſind *ſachliche* Probleme, ihre Hypotheſen ſolche über echte mögliche »*Sachverhalte*«, ihre Fortſchritte *ſachliche* Fortſchritte! Wir ſind imſtande jedes (auf »intuitioniſtiſcher« Grundlage, d. h. ohne ſchrankenloſe Anwendung des Satzes vom ausgeſchloſſenen Dritten gewonnene) Ergebnis der mathematiſchen Theorie ſachlich zu deuten, was noch ſehr deutlich bei der folgenden Betrachtung des Kontinuumproblems (§ 5b) ſich zeigen wird. Aber wir können natürlich nicht mathematiſche Schwierigkeiten und Unſicherheiten durch phänomenologiſche Betrachtungen umgehen oder wegdeuten.

Der Grundgedanke unſerer ſachlichen Deutung der Transfiniten bleibt von jenen Schwierigkeiten unberührt; ganz ſicher iſt die Theorie und ſachliche Deutung der »erſten« Transfiniten, bis in die erſten Epſilonzahlen hinein; dieſe genügen auch für alle praktiſch vorkommenden Bedürfniſſe der *Hilbert-Ackermann*ſchen Beweistheorie, alſo für die praktiſch notwendigen *metamathematiſchen* Verwendungen. Im Übrigen muß das Ergebnis der im Gange befindlichen mathematiſchen Unterſuchungen abgewartet werden. Aber, wie es auch ausfallen möge, es wird einer völlig beſtimmten phänomenologiſch-ontologiſchen, d. h. *ſachlichen* Interpretation fähig und bedürftig ſein.[1]

b) *Unterſuchungen zum Kontinuumproblem.*

Vorbemerkung.

Im folgenden wird unter der Bezeichnung »Kontinuumproblem« lediglich das *mathematiſche* Problem der Klaſſifikation aller »Zahlfolgen« (Irrationalitäten) und analog aller höheren Funktionen

1) Einige weiterführenden Bemerkungen zum jetzigen Stand der mathematiſchen Theorie der Transfiniten ſind im »Mathematiſchen Anhang« zu § 5 vereinigt (ſiehe beſonders Nr. VI).

(etwa der unſtetigen Funktionen einer Variablen) verſtanden. Es iſt alſo nicht gemeint das Problem der mathematiſchen Bemeiſterung des anſchaulichen Kontinuums, welches vom Verhältnis der Morphologie räumlicher Geſtalten und der eigentlichen Geometrie abhängt. Für die Behandlung dieſes Problems verweiſen wir auf den I. Teil unſerer Abhandlung »Beiträge zur phänomenologiſchen Begründung der Geometrie und ihrer phyſikaliſchen Anwendungen« (dieſes Jahrbuch Bd. VI., S. 398 ff.).

I. Die geſchichtlichen Wurzeln in der Antike.

A. Die antike Definition der mathematiſchen Exiſtenz durch Konſtruktion.

Es iſt das bleibende Verdienſt von H. G. Zeuthen die Prinzipien des Exiſtenzbeweiſes bei den Alten aufgeklärt zu haben[1]. Nach ſeinen Forſchungen dient als alleiniges und ſtets angewandtes Mittel für den Exiſtenzbeweis die Konſtruktion. Und zwar, da die antike Mathematik nur Geometrie iſt (auch die Arithmetik und Algebra erſcheint im geometriſchen Gewand), Konſtruktion von Figuren. Als Grundlage dienen dabei zwei Fundamentalkonſtruktionen: Die Verbindung zweier gegebener Punkte durch eine Gerade und das Schlagen eines Kreiſes um einen gegebenen Punkt mit gegebenem Radius. Daß dieſe Konſtruktionen möglich ſind oder, was dasſelbe bedeutet, daß die durch ſie gelieferten Figuren »exiſtieren«, iſt der Inhalt zweier Poſtulate (αἰτήματα) des Euklid. Es wird weiter gefordert die eindeutige Exiſtenz der Verlängerung einer begrenzten Geraden (unter der Form, daß alle rechten Winkel gleich ſind) und die Exiſtenz des Schnittpunktes zweier nicht-parallelen Geraden (das Parallelenaxiom). Die Schnittpunkte von Kreiſen werden nicht in einem beſonderen Poſtulate gefordert, ergeben ſich aber aus der Definition des Kreiſes als einer geſchloſſenen Figur. (Euklid, Elemente I, 15)[2].

---

1) Vgl. »Die geometriſche Konſtruktion als Exiſtenzbeweis in der antiken Geometrie«, Math. Annalen, Bd. 47, S. 222–28 (1896), und »Geſchichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter«, Kopenhagen 1896, [im folgenden zitiert als »Geſchichte«], beſ. S. 88–91; 118–126; 148–49; 175–76; 191–99 (beſ. S. 192); 212; 217.

2) Vgl. Zeuthen, Geſchichte uſw., S. 118–126. Nach S. 122 ſind die Schnittpoſtulate von Kreis und Geraden nicht aufgeführt; laſſen ſich aber aus den einfachſten Sätzen (I, 1, 12, 22) ableiten. S. 123 wird gezeigt, daß die Definition des Kreiſes als geſchloſſene Figur und Ähnliches bei anderen geſchloſſenen Figuren das ſog. Axiom von Paſch erſetzt, das nur vom Dreieck als einfachſter geſchloſſener Figur handelt. Indeſſen betrachtet Paſch krumme Linien überhaupt nicht. Für den Griechen aber war der Kreis

Zeuthen äußert ſich über die Bedeutung dieſer Poſtulate folgendermaßen[1]: »In Übereinſtimmung damit, daß die Probleme der Alten im weſentlichen Sätze über die Exiſtenz, und ihre Löſungen Beweiſe für die Exiſtenz des Behandelten oder Geſuchten ſind, ſind die Poſtulate Behauptungen über deſſen Exiſtenz, deren Anerkennung ohne Beweis oder Nachweis verlangt wird.« Die hierin ausgeſprochene Paralleliſierung von Poſtulat (αἴτημα) und Problem (πρόβλημα) einerſeits und Axiom (κοινὴ ἔννοια bei Euklid, ſpäter ἀξίωμα) und Theorem (θεώρημα) andrerſeits iſt ſchon in der Antike aufgeſtellt worden, wie wir von Proklos wiſſen[2].

Proklos berichtet von einem Streit zwiſchen der Akademie (vertreten durch Speusippos) und der Schule von Kyzikos (vertreten durch Menaichmos, den Schüler des Eudoxos) über die Auffaſſung des eigentlichen Weſens der geometriſchen Konſtruktion. Dieſer Streit iſt für die Kenntnis des ontologiſchen Charakters der mathematiſchen Gegenſtände in der Auffaſſung der Antike von Wichtigkeit und wird daher noch ſpäter (in § 6b) näher zu erörtern ſein.

Für die gegenwärtige Problematik genügen folgende Bemerkungen:

Die Notwendigkeit, die mathematiſchen Gebilde durch die Art ihrer Konſtruktion zu definieren und in ihrer Exiſtenz zu ſichern, wird zwar im Altertum allgemein anerkannt[3]. Aber bezüglich des näheren Charakters dieſer Konſtruktion gehen die Meinungen auseinander. Während die akademiſche Partei jedes eigentliche Werden und Entſtehen geometriſcher Gebilde ablehnt, rückt die kyzikeniſche Schule die konkrete Herſtellung in den Mittelpunkt der Betrachtung. (Dabei ſcheint die Frage des ontologiſchen (»metaphyſiſchen«) Charakters der mathematiſchen Gebilde für die »poſitiviſtiſchen« Eudoxos-Schüler keine entſcheidende Rolle zu ſpielen, ſondern

---

eine primitive Figur. – S. 124 über das Poſtulat der Gleichheit der rechten Winkel, wozu der Kommentar des Proklos zur Stelle (in Euclidem p. 188 Friedlein) zu vergleichen iſt. – Die Zeuthenſche Interpretation iſt allerdings, was dieſen Punkt betrifft, nicht allgemein anerkannt. Für das Ganze iſt dieſe Einzelheit aber nicht von großer Bedeutung.

1) Geſchichte uſw., S. 120.

2) Proclus in Euclidem, p. 178, 12 – 179, 8 (Friedlein).

3) Dieſe Auffaſſung hängt auch mit der allgemeingriechiſchen Anſchauung zuſammen, die alle Dinge von der Seite ihres Werdens, ſei es ihres Hergeſtelltwerdens (τέχνη), ſei es ihres Wachſens (φύσις), anſieht.

nur die eigentlich mathematiſchen Eigenſchaften werden in Betracht gezogen[1].)

Der Streit um die Benennung der mathematiſchen Sätze, – ob man ſie als Theoreme oder Probleme bezeichnen ſolle – rührt letzten Endes her von dieſer verſchiedenen Stellung zur Frage der Zeitlichkeit, der Geneſis der mathematiſchen Gebilde. Ob die Gebilde vom Denken (Geiſt, *διάνοια*) geſchaffen werden oder nur gefunden werden, das iſt die Streitfrage. Ob ſie an ſich von Ewigkeit her »da ſind« (man denke an Platos *ἀνάμνησις*-Lehre bezüglich des Mathematiſchen im »Meno«!), oder von der *διάνοια* »zuwege gebracht« werden (*πορίζεσθαι*), das iſt die Alternative.

Man ſieht, es iſt im Keime ſchon die heutige Alternative, ob die axiomatiſch-deſcriptive Haltung gegenüber dem tranſzendent ſeienden Mathematiſchen recht hat (der Exiſtenzbegriff Cantors, Dedekinds und Zermelos, in gewiſſem modifizierten Sinne auch Hilberts), oder ob der Zugang durch die Konſtruktion, nicht bloß die abſtrakt mögliche, ſondern die wirklich ausgeführte, das Entſcheidende iſt. [Man denke an Brouwers Ausſpruch: die Mathematik iſt vielmehr ein Tun als eine Lehre – d. h. ein *ποιεῖν* bzw. *πορίζειν*, nicht eine *θεωρία*!]

Freilich, der Streit um die Benennung der mathematiſchen Sätze blieb unentſchieden, keine der Parteien ſiegte: bei Euklid gibt es eine ſyſtematiſche Trennung beider Bezeichnungen Problem und Theorem [im weſentlichen allerdings gemäß der ſchon von

1) In dieſem Sinn iſt auch die Aſtronomie der kyzikeniſchen Schule rein mathematiſch, ohne ſich in Spekulationen über die Geſtirnſeelen, den unbewegten Beweger u. dgl. zu verlieren. Darin iſt ſie Vorläuferin der ſpäteren »exakten«, ontologiſch nicht mehr intereſſierten alexandriniſchen Aſtronomie (Eratoſthenes, Ariſtarch, Hipparch uſw.). Analog iſt in der reinen Mathematik Euklid durchaus nicht explizit ontologiſch intereſſiert, wenn auch gewiſſe ontologiſche Momente bei ihm latent mitſpielen (z. B. bei der Theorie der Irrationalitäten im X. Buch). Allerdings muß man ſagen, daß er darin in gewiſſem Sinne Platons eigener Anweiſung folgt, der es für die *διάνοια*, die mathematiſche Erkenntnisweiſe für charakteriſtiſch hält, daß ſie nicht über beſtimmte »Hypotheſen« hinausfragt. [Vgl. Staat, VI. Buch, p. 510B–511A.]

Über Eudoxos ſelbſt iſt noch zu bemerken, daß er in die innerakademiſche Diskuſſion über die Ideen eingriff [ſ. Ariſtot. Metaph. A 9 (991 a, 9–19); ſehr ähnlich (Dublette) M 5 (1079 b, 12–23)]; in der er einer »Immanenz« der Ideen in den Dingen das Wort redete (»ſie ſeien ſo, wie dem Weißen das Weiße beigemiſcht werden könnte«). Er ſcheint ſich alſo an dem Beiſpiel der »reinen« Farben, die aus den empiriſchen Farben als phänomenale Komponenten herauszuſehen ſind, das Innewohnen der Ideen in den Sinnendingen (alſo die »*μέθεξις*«) auf »poſitiviſtiſche« Art klargemacht zu haben.

Menaichmos behaupteten *δίττη προβολή*, erſtens des *πορίσασθαι τὸ ζητούμενον* und zweitens des *πεπορισμένον* (od. *περιωρισμένον*) *ἰδεῖν*. (Proclus in Eucl. p. 78, 10 – 11).] – Aber trotzdem iſt in dem ſtrengen Gefüge des Euklidiſchen ſyſtematiſchen Aufbaues der Mathematik durchgängig die Konſtruktion zur Grundlage eines jeden Exiſtenzſatzes gemacht. Dies iſt von Zeuthen bis ins einzelne gezeigt worden.

B. Die antike Lehre von den irrationalen Verhältniſſen.

Für den Griechen ſind Zahlen nur die natürlichen Zahlen und in zweiter Linie die Brüche, nicht aber die Irrationalen. Es gibt nach griechiſcher Auffaſſung keine Zahl (*ἀριθμός*) die mit ſich ſelbſt multipliziert 2 gibt[1].

Dagegen läßt ſich die »Exiſtenz« der Quadratdiagonale, die, wenn die Seite s iſt, nach dem pythagoräiſchen Lehrſatz $s\sqrt{2}$ beträgt, durch geometriſche Konſtruktion beweiſen. Die irrationalen Größen (*μεγέθη* oder häufiger *εὐθεῖαι ἄλογοι* genannt – in der Frühzeit ſagt man dafür *ἄρρητοι*) werden als Verhältniſſe einer Strecke zu einer gegebenen Ausgangsſtrecke gefaßt. Euklid gibt im V. Buch (Def. 4 u. 5) eine ganz allgemeine Definition des Verhältniſſes (*λόγος*) oder genauer geſagt, der Verhältnisgleichheit:

Def. 4: *λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύνανται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν.*

Def. 5: *ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγειαι εἶναι, πρῶτον πρὸς δεύτερον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκις πολλαπλασίων καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν ἑκατέρον ἑκατέρου ἢ ἅμα ὑπερέχῃ, ἢ ἅμα ἴσα ᾖ, ἢ ἅμα ἐλλείπῃ, ληφθέντα κατάλληλα.*

Zu deutſch:

Def. 4: Man ſagt: Größen haben zu einander ein Verhältnis, wenn ſie vervielfältigt einander übertreffen können.

(Dies iſt, in der Form einer Definition, das ſogenannte »archimediſche«, in Wahrheit von Eudoxos ſtammende Axiom.)

Def. 5. Man ſagt: »Größen ſtehen in demſelben Verhältnis, die 1. zur 2. und die 3. zur 4., wenn das gleich oft Vervielfachte der 1. und 3. das gleich oft Vervielfachte der 2. und 4. gemäß welcher Vervielfachung auch immer jeweilig entweder zugleich über-

1) Dafür geben ſchon die »Pythagoreer« einen ſehr alten Beweis »aus dem Geraden und Ungeraden«, den Euklid X, 117 aus hiſtoriſchen Gründen aufbewahrt hat.

trifft oder ihm zugleich gleicht oder es zugleich unterſchreitet, entſprechend genommen«.

(D. h. in modernen Zeichen: $a:b=c:d$, wenn für beliebige ganze Zahlen m und n, zugleich $ma>nb$ und $mc>nd$; bzw. $ma=nb$ und $mc=nd$; bzw. $ma<nb$ und $mc<nd$.)

Dieſe Definition iſt nicht »entſcheidungsdefinit« und daher im Sinne Kroneckers nicht zuläſſig[1].

Das zeigt ſich in der charakteriſtiſchen Nebenbemerkung καϑ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμόν. »gemäß was für einer Vervielfachung auch immer«. Die Definition geſtattet offenbar nicht, unmittelbar bei 4 vorgelegten Größen a, b, c, d feſtzuſtellen; ob $a:b=c:d$ iſt. Denn man kann nicht alle möglichen Paare ganzer Zahlen (m, n) durchprobieren, ob für jedes Paar ohne Ausnahme zugleich $ma>nb$ und $mc>nd$ iſt uſw. Denn es gibt unendlich viele voneinander verſchiedene Zahlenpaare (m, n).

Andrerſeits iſt es leicht, durch eine kleine Änderung der Bezeichnungsweiſe, dieſe Euklidiſche Definition der Gleichheit der Verhältniſſe in genauer Parallele zu ſetzen mit Dedekinds Definition der reellen Zahlen durch »Schnitte«[2]. Man kann in der Tat aus den drei charkteriſtiſchen Relationen:

$$ma \gtreqless nb \quad \text{zugleich mit} \quad mc \gtreqless nd \quad \text{erhalten:}$$

$$\frac{a}{b} \gtreqless \frac{n}{m} \quad \text{zugleich mit} \quad \frac{c}{d} \gtreqless \frac{n}{m},$$

wobei offenbar $\frac{a}{b}$ irgendeine reelle und $\frac{n}{m}$ eine rationale »Zahl« (im modernen Sinn) iſt. Bezeichnet man nun noch $\frac{a}{b}$ mit dem einen Buchſtaben α, $\frac{c}{d}$ mit β und $\frac{n}{m}$ mit ϱ, ſo erhält man die Definition 5 in der folgenden Form:

Es iſt $\alpha=\beta$ dann und nur dann, wenn zugleich α und β größer bzw. gleich bzw. kleiner als ϱ ſind, was für jede beliebige Rationalzahl ϱ gelten ſoll.

Denkt man ſich alſo ſämtliche Rationalzahlen gegeben, ſo rufen α und β dieſelben Einteilungen (»Schnitte«) in der Geſamtheit der Rationalzahlen hervor. Denkt man ſich durch α bzw. β die Rational-

1) Vgl. meine Arbeit, dieſes Jahrbuch, Bd. VI, S. 409, Anm. 3.

2) R. Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen, Braunſchweig 1878.

zahlen in 2 Klaſſen geteilt, je nachdem ſie größer oder kleiner (oder auch, wenn möglich, gleich) α bzw. β ſind, ſo erhält man nach der Definition dieſelben Klaſſen, wenn $\alpha = \beta$ iſt und nur dann[1].

Das iſt aber nichts anderes als die Dedekindſche Definition der reellen Zahlen durch »Schnitte« im »Gebiet« der rationalen Zahlen. –

Es iſt erſtaunlich, daß die Übereinſtimmung der alten und der modernen Definition der »allgemeinen« reellen Größe ſo vollkommen iſt. Für den gegenwärtigen Zuſammenhang iſt nun beſonders wichtig, daß dieſe Definition durchaus gegen die konſtruktive Definition der mathematiſchen Exiſtenz bei den Alten zu ſprechen ſcheint.

Aber bei tieferem Eindringen in die Sachlage erweiſt ſich dieſe Übereinſtimmung mit der modernen Dedekindſchen Theorie als ſehr oberflächlich. Während nämlich Dedekind die Exiſtenz der Geſamtheit der reellen (rationalen und irrationalen) Zahlen durch ſeine Definition mittels des Schnittes für geſichert hält, wird bei Euklid die Exiſtenz aller irrationalen Zahlen (Verhältniſſe) nirgends angenommen, ſondern jedes neue einzuführende Verhältnis wird konſtruiert und damit in ſeiner Exiſtenz geſichert. (Dies iſt von Zeuthen und anderen bis in alle Einzelheiten nachgewieſen worden.)

Auf dieſe Weiſe, durch die Konſtruktion mittels Lineal und Zirkel, gelangt man allerdings nur zu denjenigen Irrationalitäten, die wir heute durch eine Kombination von Quadratwurzelzeichen ausdrücken. Über dieſes Größenmaterial geht Euklid nirgends hinaus. Die Zahl π wird z. B. nicht von ihm eingeführt, nur der Satz, daß ſich zwei Kreiſe wie die Quadrate ihrer Radien verhalten, wird bewieſen (XII, 2).

Dieſe quadratiſchen Irrationalitäten werden bekanntlich im X. Buch von Euklid einer ſorgfältigen Klaſſifikation unterworfen. Man hat ſich in neuerer Zeit mitunter über die pedantiſche Sorgfalt Euklids gewundert und die moderne algebraiſche Bezeichnungsweiſe gelobt, die den geſamten Inhalt des X. Buches in ein paar Formeln faſſen könne.

Die Auffaſſung, als ob es ſich hier beim Übergang zur algebraiſchen Bezeichnungsweiſe und Darſtellung um einen bloßen techniſchen Fortſchritt handele, iſt jedoch verfehlt. Sie verkennt durchaus die Abſicht, die Euklid im X. Buch leitete[2].

1) Vgl. zum Ganzen etwa Zeuthen, Geſchichte uſw., S. 141.

2) Man muß ſich auch erinnern, daß durch Euklids X. Buch die Lehre zweier Mathematiker erſten Ranges aus der Zeit Platons, nämlich des

Für ihn war die Konſtruktion und Klaſſifikation der Irrationalitäten deshalb ſo wichtig, weil ſie die Seinsweiſe dieſer »Größen« herausſtellte, in der Abſtufung, in der ſie ſich ſchrittweiſe von den rationalen, durch »Zahlen« (ἀριθμοί) ausdrückbaren Verhältniſſen entfernen. Den unerhörten Eindruck, den die Entdeckung des Irrationalen (des ἄρρητον oder ἄλογον, des »Unſagbaren«, »Unanſprechbaren«) machte, iſt bekannt; – mag auch die Sage, die Hippaſos als Verräter dieſes Geheimniſſes der Pythagoreer durch göttliche Fügung im Meere umkommen läßt, eine ſpäte Erfindung ſein[1]. Daß etwas »exiſtieren« ſollte, was mittels Verhältniſſe ganzer Zahlen nicht ausdrückbar iſt, was ſich, wenn man es mittels ganzer Zahlen-Verhältniſſe auszudrücken verſucht, ſich als unendlich (ἄπειρον unbegrenzt) erweiſt, ſchien die durchgehende Herrſchaft der Form, des ordnenden Prinzips zu gefährden, und zwar nicht im Gebiet des ſinnlichen, fließenden Werdens, ſondern in dem des exakt konſtruierbaren (mittels den διάνοια erfaßbaren) Seienden. Die Schwierigkeit wurde überwunden eben durch die genaue Konſtruktion und Klaſſifikation der Irrationalitäten ſelbſt; ein neues Gebiet wurde dem Chaos entriſſen und dem Kosmos eingegliedert[1]. [Vgl. Plato, Philebos 16 C – 18 C[2]].

Theätet und des Eudoxos, zu einem ſyſtematiſchen (mindeſtens vorläufigen) Abſchluß gebracht wird; während andererſeits einer der berühmteſten nacheuklidiſchen Mathematiker, Apollonios von Perge, dieſe Lehre im Geiſte Euklids erweitert (ſ. u.). Die Größten haben ſich alſo um dieſe eigenartige Theorie der Irrationalitäten bemüht!

1) Vgl. hierzu Eva Sachs, die 5 platoniſchen Körper. Berlin 1917. (Philolog. Abhandl., her. v. Wilamowitz, Heft 24.) S. 38 u. 82 ff. Das Thema der »5 platoniſchen Körper« hängt mit dem gegenwärtigen aus folgendem Grunde zuſammen: Die Tatſache, daß im Gegenſatz zu den unendlich vielen konſtruierbaren regulären Polygonen der Ebene nur 5 reguläre Polyeder im Raum »exiſtieren«, iſt ein ſchlagendes Beiſpiel des konſtruktiven Sinnes der mathematiſchen Exiſtenz. Dieſes Beiſpiel hat daher auch bei den Griechen ein ſolches Anſehen genoſſen, daß das klaſſiſche Syſtem der griechiſchen Elementarmathematik, das Euklidiſche, in dem konſtruktiven Exiſtenz- und Einzigkeitsbeweis der 5 regulären Polyeder gipfelt (Buch XIII), wobei dann die Klaſſifikation der dazu notwendigen Irrationalitäten genau nach dem X. Buch durchgeführt wird.

2) Die Belege im Einzelnen würden zu weit führen und auch nur bei den Geſchichtsſchreibern der Mathematik (Hankel, Zeuthen, P. Tannery u. a.) Geſagtes wiederholen. – Hingewieſen ſei nur auf den »goldenen Schnitt«, bei dem ſich die Irrationalität durch das Nichtabbrechen des Euklidſchen Verfahrens zur Herſtellung des größten gemeinſamen Teilers ſofort konſtatieren läßt. Der goldene Schnitt iſt bekanntlich dadurch gekennzeichnet, daß eine Strecke durch ihn ſo zerteilt wird, daß der größere Teil zum Ganzen

Dies ſcheint nun ſo aufgefaßt worden zu ſein, daß gewiſſermaßen Stufen und Arten von Geformtheit, gewiſſermaßen von relativer

---

dasſelbe Verhältnis hat, wie der Reſt (der kleinere Teil) zum größeren Teil. Mißt man nun (gemäß dem Euklidiſchen Teilerverfahren) den Reſt am größeren Teil, dann den neuen Reſt am 1. Reſt, den 3. Reſt am 2. uſw. uſw., ſo erhält man nach Definition immer dasſelbe Verhältnis. Das Verfahren kommt alſo nicht von der Stelle und geht daher ins Unendliche. (Ganz analog, wie etwa die Diviſion 1,000 : 3 niemals abbricht. – In der Tat entſpricht auch in unſerer modernen Schreibweiſe dem »goldenen Schnitt« der Kettenbruch mit lauter Einſen als Teilnennern:

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ddots}}}}$$

In dieſem Fall führt alſo ein Verhältnis, das Figuren von höchſter Harmonie der Form entſtehen läßt (man denke an ſeine Rolle in der Kunſt und für die Konſtruktion des regulären 5- (Pentagramms!), 10-, 15-Ecks und der regulären 12- und 20-Flächner), wenn man es »ausſprechen« will, zu einem unendlichen Progreß.

Dies iſt für den Griechen etwas Unerhörtes. Denn es zeigt ſich ſchon in ihrer frühen Ornamentik, im Dipylonſtil, dem ſog. »geometriſchen« Stil, daß die Figuren häufig mit dem Zirkel – der Zirkel iſt nach Ovid, Metam. VIII, 247, eine Erfindung des Perdix, des Schwiegerſohnes des Dädalus (was ſtets auf die Kunſt des 7. und 8. Jahrh. zu deuten iſt) – konſtruiert ſind und jedenfalls immer ganz elementar konſtruierbar ſind. 5-Ecke oder 5teilige Roſetten u. dgl. kommen nicht vor, wohl aber 4-, 8-, 6-Ecke u. dgl. Dagegen kommen 5- und 7teilige Figuren ſowohl im kretiſch-mykeniſchen wie im »organiſcheren« Stil des 7. Jahrh. (dem ſog. »orientaliſierenden« Stil) vor; doch gibt es in dieſen Stilen keine Zirkelkonſtruktion mehr.

In dieſe Tendenz der frühen Ornamentik auf völlige Durchſichtigkeit der Verhältniſſe paßt die ſpätere Entwicklung in der Mathematik durchaus hinein. Daß hier zunächſt mit ganzen Zahlen alles zuſtande gebracht werden ſollte, iſt naheliegend. (Im Einzelnen kann man ſich das Problem der $\sqrt{2}$ verſchieden entſtanden denken: aus der Geometrie oder auch aus der Muſik. Vgl. Zeuthen in »Kultur der Gegenwart«, III, Abt. I, 1. Lieferung, S. 36–37.)

Es kommen natürlich de facto ſchon in den einfachſten Figuren der primitiven Ornamentik (Quadrat, Sechseck) Irrationalitäten vor; aber das konnte man nicht wiſſen.

Intereſſant und zu wenig bekannt iſt, daß die richtige mathematiſche Sechsteilung des Kreiſes als Ornament auf doriſchen geometriſchen Fibeln (die ſpäteſtens aus dem 8. Jahrh. ſtammen) vorkommt [Buſchor], alſo nicht aus dem Orient ſtammt, wie Zeuthen meint. Allerdings entſteht dieſe Figur durch Spielen mit dem Zirkel gewiſſermaßen von ſelbſt; immerhin iſt merkwürdig, daß gerade mit ſo ziemlich dieſer ſelben Konſtruktion (nämlich der des gleichſeitigen Dreiecks) noch Euklid ſeine Elementa beginnt. (I, 1).

»Ausſprechbarkeit« unterſchieden werden, die ſich mehr oder weniger von dem völlig zu Ende »Ausſprechbaren« entfernen. Man denke etwa an den eigentümlichen euklidiſchen Ausdruck »εὐθεῖαι δυνάμει σύμμετροι« (X, Def. 3) und entſprechend »δυνάμει ῥηταί« (X, Def. 6), der beſagt, daß wenigſtens die Quadrate der Strecken kommenſurabel ſind; ähnlich die ſog. »doppelt irrationalen« Strecken uſw.

Die Euklidiſche Klaſſifikation führte, wie ſchon geſagt, nur zu den quadratiſchen Irrationalitäten. In der ſpäteren Entwicklung gab es Erweiterungen in verſchiedener Richtung:

1. Durch die Betrachtung »körperlicher Örter« (Kegelſchnitte), die kubiſche Irrationalitäten mit ſich brachten (ausgehend von der Dreiteilung des Winkels und der Verdoppelung des Würfels) und bis zur allgemeinſten kubiſchen Gleichung führten. (Archimeds Kugelteilungsproblem).

Man kann an ſolchen Aufgaben, wie der Dreiteilung des Winkels ſich gut die Weiſe der Erweiterung der Sphären der mathematiſch exiſtierenden Gegenſtände vor Augen ſtellen:

Im Sinne Euklids ſind nur durch Kreiſe und Geraden konſtruierbare Gebilde exiſtent, dazu gehören (von einzelnen Ausnahmen abgeſehen) die einen gegebenen Kreisbogen drittelnden Teilungspunkte nicht. Indeſſen ſcheint andrerſeits durch den Augenſchein evident, daß es ein genaues Drittel jedes Winkels gibt, ebenſo wie etwa auch ein Siebentel (z. B. ein regelmäßiges Siebeneck uſw.). Man erweitert nun den Kreis der zugelaſſenen Elementarkonſtruktionen und führt als neue Konſtruktionsmittel etwa die Kegelſchnitte ein. Dabei gelingt es, dadurch, daß man ſie als »körperliche Örter« auffaßt (dies tut nach Zeuthen zuerst Menaichmos) die Kontinuität mit den urſprünglich eingeführten Konſtruktionsmitteln zu wahren. Es werden jetzt eben als Konſtruktionsmittel Kreiſe und Geraden im Raum, als ihr Produkt Kreiskegel und deren Schnitte mit Ebenen, eben die »Kegelſchnitte« verwendet. Dagegen tritt die praktiſch leicht durchführbare, aber theoretiſch nicht leicht (nur durch Konchoiden) zu beherrſchende »Einſchiebung« (νεῦσις) zurück[1].

Ähnlich liegt die Sache beim Problem der Würfelverdoppelung, wo ſich die Entwicklung von Archytas über Eudoxos zu Menaichmos durchaus im Sinne der ſchärferen Beſchränkung der Konſtruktionsmittel und damit der ſtrengeren Exiſtenzbeweiſe abſpielt[2].

---

1) Vgl. Zeuthen, Geſchichte uſw., § 8, S. 79ff.
2) Zeuthen, l. c., § 9, S. 82ff.

2. Durch Aufſteigen zu immer höheren Graden: a) durch Erforſchung höherer Kurven, der ſog. »linearen Örter«[1]. Doch gelangten die Griechen auf dieſe Weiſe wohl zu Kurven höheren Grades, aber doch nicht zur Geſamtheit aller algebraiſchen Kurven[2]. Es wäre aber wohl denkbar geweſen, daß ſie dazu gelangt, etwa mittels der Graßmannſchen »linealen Mechanismen«[3].

3. Durch eine Fortführung und Verallgemeinerung der Euklidiſchen Konſtruktionen im X. Buch, die in des Apollonios verloren gegangener Schrift *περὶ ἀτάκτων ἀλόγων* (de irrationalibus inordinatis) vorgenommen wurde, die durch F. Woepcke[4] aus einer arabiſchen (von Abu Othman herrührenden) Überſetzung eines Kommentars des Pappos[5] zum X. Buche Euklids in ihrem Gedankengang rekonſtruiert werden konnte. Danach beſtehen die Erweiterungen des Apollonios in zwei Hauptpunkten a) in der Verallgemeinerung der in Euklids Klaſſifikation auftretenden Binomen zu Polynomen (nach moderner Ausdrucksweiſe), b) in der Betrachtung zum wenigſtens μ^{ter} Wurzeln aus gewiſſen Potenzen, nämlich Ausdrücken von der Form:

$$\sqrt[\mu]{A^{\mu-\nu}\,B^{\nu}} \qquad \text{(Woepcke, l.c., p. 713/14).}$$

Alſo auch hier kam man nicht zu der allgemeinſten algebraiſchen Zahl, ja nicht einmal zu der allgemeinſten durch Wurzelzeichen darſtellbaren irrationalen Zahl. Man muß indeſſen bedenken, daß unſere von der algebraiſchen Zeichenſprache ausgehende Problemſtellung den Griechen notwendig ſchon als Frage fernliegen mußte, vielleicht ſogar unerreichbar war. Man muß bedenken, daß Apollonios dieſe

1) Vgl. Zeuthen, Die Lehre von den Kegelſchnitten im Altertum. Kopenh. 1886, S. 226ff.

2) Zeuthen, l.c., S. 489 – 90 (über den Irrtum Descartes' bezüglich des von Pappus, Coll. math., ed. Hultſch, p. 680 eingeführten »Orts zu $2n$ bzw. $2n-1$ Geraden); vgl. Geſchichte d. Math. im Altertum p. 237/38; Geſch. d. Math. im 16. u. 17. Jahrh., S. 208/9, 210.

3) Über dieſe vgl. z. B. F. Klein, Vorl. über Anwendung der Diff.- u. Integr.-Rechnung auf Geometrie (autograph., 2. Abdr. 1907), p. 266 – 69.

4) Darüber vgl. Apollonius ed. Heiberg, Vol. II, p. 119 – 124, und vor allem F. Woepcke, »Essai d'une restitution des travaux perdus d'Apollonius sur les quantités irrationelles d'après des indications tirées d'un manuscrit arabe«. Mémoires présentés par divers savants à l'académie des sciences de l'institut impérial de France, Sciences Mathématiques et physiques, Tome XIV. Paris 1856.

5) Woepcke ſelbſt ſchrieb den Kommentar einem gewiſſen Vettius Valens zu; Heiberg (Literaturgeſchichtliche Studien zu Euklid, Lpz. 1882) zeigte aber, daß Pappos der Verfaſſer iſt.

Irrationalitäten ohne Zweifel alle geometriſch konſtruiert hat[1], was einen ganz anderen Problemaſpekt hervorruft.

Merkwürdig iſt nun, daß ſich in dem Kommentar des Pappos Geſichtspunkte finden, die mit der vorhin gegebenen ontologiſchen Interpretation der Euklidiſchen Konſtruktionen im X. Buch übereinſtimmen. Darin möchten wir geradezu einen Beweis unſerer Auffaſſung erblicken, wie ſogleich näher erläutert werden wird.

Zunächſt findet ſich in der Inhaltsüberſicht des nicht überſetzten I. Buches des Kommentars Folgendes (Woepcke, l. c. § 19, p. 175):

Nr. 2. Du fini et de l'infini comme principes de la commensurabilité et de l'incommensurabilité.

Nr. 7. De l'existence réelle des quantités incommensurables dans les choses matérielles.

Nr. 8. Des principes métaphysiques (Dieu et la matière) de la commensurabilité et de l'incommensurabilité.

Nr. 9. Que les lignes rationelles existent par convention et non pas naturellement.

Dann kommen folgende wörtlich überſetzte Stellen in Betracht:

p. 693. (Über Euklid): »la droite des deux noms est la première des lignes formées par addition, parce qu'elle est la ligne qui a le plus d'affinité avec la ligne rationelle.

p. 701. (=Apollonius, ed. Heiberg, Vol. II, p. 124, fragm. 35):

»En premier lieu, Euclide nous a donné (la théorie de) celles d'entre elles qui sont ordonnées et homogènes aux fractionelles; car les irrationelles se divisent premièrement en inordonnées, c'est-à-dire celles qui tiennent de la matière qu'on appelle corruptible, et qui s'étendent à l'infini; et, secondement, en ordonnées, qui forment le sujet limité d'une science, et qui sont aux inordonnées comme les rationelles sont aux irrationelles ordonnées. Or Euclide s'occupa seulement des ordonnées qui sont homogènes aux rationelles, et qui ne s'en éloignent pas considérablement; ensuite Apollonius s'occupa des inordonées, entre lesquelles et les rationelles la distance est très-grande.«

Es iſt alſo von der »Verwandtſchaft mit den rationalen Linien« die Rede, davon, daß »die ἄταχτοι ἄλογοι an der ὕλη φθαρτή teil-

1) Vgl. Euklid-Scholien (Elementa Vol. V, ed. Heiberg), p. 414, 15–16 [τῶν ἁπλουστάτων εἰδῶν], ὧν συντιθεμένων γίνονται ἄπειροι ἄλογοι, ὧν τινας καὶ ὁ Ἀπολλώνιος ἀναγράφει (aufzeichnet, konſtruiert).

haben (*μετέχειν*)«, daß »die *τακταί* den Rationalen homogen ſind und ſich nicht beträchtlich von ihnen entfernen«, daß »die Entfernung (*διάστασις, διάστημα*) der *ἄτακτοι* und der *ῥηταί* ſehr groß iſt« uſw.

Wir haben alſo das deutliche Bewußtſein der verſchieden abgeſtuften Entfernung vom Rationalen (»nicht beträchtlich«, »ſehr weit«) der größeren oder geringeren Verwandtſchaft (*ὁμογενής, συγγενής?*) mit dem *ῥητόν*, endlich die Teilhabe am Vergänglichen ſeitens der *ἄτακτοι* (ſ. o. Nr. 7) und ebenfalls Beziehung zum Unendlichen, der *τακταί* zum Endlichen (vgl. Nr. 2).

Man könnte ſich denken, dies ſeien erſt neuplatoniſche Züge: Die Stufenreihe zwiſchen dem *ἀεὶ ὄν* und der *ὕλη φθαρτή* ſpricht dafür, und beſonders, daß ſie gemäß der Teilhabe am Vergänglichen beſtimmt wird. Auch in manchen Scholien zu Euklid finden ſich mit den Gedankengängen des Pappos-Kommentars verwandte Bemerkungen und zwar vorzugsweiſe an ſolchen Stellen, die einen neuplatoniſchen Eindruck machen[1] und z. T. ſehr enge Beziehungen zu Proklos' Euklid-Kommentar zeigen. Andrerſeits kann man nicht leugnen, daß eine ſolche Stufenreihe doch ſchon in Platos diairetiſcher Hierarchie, die Stenzel neuerdings behandelt hat, vorbereitet iſt[2]. Man kann auch die Lehre des Speusippos von den Stufen des Seienden gemäß der Folge der idealen Zahlen vergleichen, wie ſie von E. Frank auseinandergelegt worden iſt[3].

Endlich iſt zu ſagen, daß der in Rede ſtehende Kommentar des Pappos, wie Eva Sachs bemerkt, in ſeiner nüchternen Art ſich von dem Tone der Scholia Vaticana zu Euklid X, die deutliche Verwandtſchaft mit Proclus (in Euclidem I) zeigen, weſentlich unterſcheidet[4].

---

1) Vgl. Euclidis Elementa ed. Heiberg, Vol. V, in librum X, Nr. 1, 2, 133, 135, insbeſondere: p. 414, 16–415, 4; 415, 11–12; 417, 11–20; 417, 21–418, 6; 484, 23–485, 7 (Nr. 1, 2, 135 ſind aus den Scholia Vaticana); vgl. auch als Parallelſtelle zu p. 417, 11–20: Jamblichus, Vita Pyth. § 247, ferner: Eva Sachs, l. c. p. 38–39 zur Stelle, und p. 71–75.

2) J. Stenzel, Zahl und Geſtalt bei Plato und Ariſtoteles. (Leipzig u. Berlin 1924), p. 2–3, p. 7, p. 110ff., 119–120 und die bekannte Philebos-Stelle 16 D: »... *πρὶν ἂν τις τὸν ἀριθμὸν αὐτοῦ πάντα κατίδῃ τὸν μεταξὺ τοῦ ἀπείρου τε καὶ τοῦ ἑνός ...*« und 17 A: »*μετὰ δὲ τὸ ἓν ἄπειρα εὐθύς, τὰ δὲ μέσα αὐτοὺς ἐκφεύγει ...*«

3) Plato und die ſogenannten Pythagoreer, Halle a. S. 1923, Beilage XVIII, beſ. S. 244–251.

4) Eva Sachs (l. c., S. 71–75) ſagt, daß die Scholia Vaticana zu Euklid auf die (verlorene) Fortſetzung des Kommentars des Proklos zurückgehen.

Aus dieſen Erwägungen ergibt ſich, daß die Auffaſſung der Irrationalen verſchiedener Komplikationsſtufe als Weſenheiten verſchiedenen Seinscharakters, der ſich ſtufenweiſe vom Sein der rationalen Gebilde, die den Ideen von allen mathematiſchen Gegenſtändlichkeiten am nächſten ſtehen, entfernt und damit ſich der οὐσία der ὕλη φθαρτή entſprechend annähert, im Grunde ſchon bei Plato zum wenigſten vorbereitet iſt und in der frühen Akademie (Speusippos) wahrſcheinlich ſchon geherrſcht hat[1].

Man kann alſo die philoſophiſche Bedeutung der exakten Konſtruktion der Irrationalen, die durch den genauen Aufweis erſtens der mathematiſchen Exiſtenz überhaupt, zweitens des Grades an Komplikation der Syntheſe der Kreiſe und Geraden den Seinscharakter dieſer Gegenſtändlichkeiten feſtſtellt, ſchon für die frühe Akademie aufrechterhalten. –

4. Endlich gibt es in der Antike vereinzelte tranſzendente Zahlen (eigentlich nur π; e wird explizit nicht erwähnt). Sie treten bei Archimedes durch Flächen und Rauminhalte gegeben auf.

Die Einführung dieſer Größen erfolgt nicht im modernen Sinn als Limiten geradliniger oder ebenflächiger Figuren, ſondern nach dem Axiom: Das Ganze iſt größer als der Teil, vermittels deſſen die Inhalte uſw. zwiſchen gewiſſe Grenzen eingeſchloſſen werden, die beliebig wenig Spielraum haben.[2])

(Vgl. Heiberg, der die Übereinſtimmung mit Proklos auf die Benutzung einer gemeinſamen Quelle, nämlich eben des Pappos-Kommentars, zurückführt.) Das ſachliche Hauptargument iſt eben die Verſchiedenheit des Tones: ſachlich bei Pappos, neuplatoniſch-myſtiſch bei Proklos und den Scholien.

1) Es ſei noch auf die Bemerkungen von E. Sachs (l. c., S. 176–177) zur Stelle Geſetze, Buch VII, p. 820E, hingewieſen. E. S. verſteht die Stelle: τὰ τῶν μετρητῶν καὶ ἀμέτρων πρὸς ἄλληλα ἥτινι φύσει γέγονε (»Die Sache mit den meßbaren und unmeßbaren Größen, in welchem Wie-Sein (φύσις) ſie im Verhältnis zueinander geworden ſind.«) ſo: ». . . wie ſich rationale und irrationale Größen ihrer Natur nach zueinander verhalten« und leugnet, daß φύσις hier eine philoſophiſche (ontologiſche) Bedeutung hat. (Gegen die Meinung H. Vogts, Bibliotheca mathematica (3) X, S. 139.) Sie meint, der Vergleich mit dem Brettſpiel, der bei Plato dann folgt, gehe auf das kombinierende Verfahren bei der Klaſſifikation der Irrationalitäten durch Theätet und Euklid. Der dabei auftretende Ausdruck διαγνώσκειν (p. 850C) bedeute das »Herauserkennen und Unterſcheiden der verſchiedenen Klaſſen«. — Aber man muß eben gerade bei dieſer Klaſſifikation die dabei feſtgeſtellte »φύσις« jeglicher Irrationalität ontologiſch, als ihr ſpezifiſches Wie-Sein in der Stufenleiter zwiſchen ἕν (dem Rationalen) und dem ἄπειρον (modern etwa: der tranſzendenten Zahl) auffaſſen.

2) Es bedarf dazu bei krummen Längen und Oberflächen beſonderer Axiome, vgl. Zeuthen, Geſch. d. M. i. Altertum, S. 175–77.

Dieſe Inhalte werden aber nicht definiert als Limiten, ſondern, wohl auf Grund der anſchaulichen Geſtalt der einfachen Figuren wie Kreis und Kugel uſw., als exiſtent angenommen. Das Exhauſtionsverfahren beſtimmt bloß ihre Größe.

Darin liegt die Einführung des irrationalen Verhältniſſes π (etwa zwiſchen Kreisfläche und Quadrat des Radius) ohne Konſtruktion und daher ohne Beziehung zu der Klaſſifikation der anderen Irrationalitäten. π ſteht alſo ganz vereinzelt da und wird gewiſſermaßen »urſprünglich geſchöpft«. Dies iſt von der Antike aus geſehen nicht ſo erſtaunlich wie für uns. Denn für ſie war der Kreis eine einfache Figur, wie ja aus ſeiner Verwendung als elementares Konſtruktionsmittel, d. h. als Beweismittel für die mathematiſche Exiſtenz zuſammengeſetzter Figuren auf das klarſte einleuchtet. Andrerſeits würde es der antiken Grundanſchauung durchaus widerſprechen, eine ins Unendliche fortzuſetzende konvergente Näherungskonſtruktion als Exiſtenzbeweis gelten zu laſſen. Es handelt ſich bei antiken Exiſtenzbeweiſen ſtets um endliche Konſtruktionen![1]

Sachlich liegt hier eine erſte, allerdings nur »gefühlsmäßige« Erfaſſung der Tranſzendenz von π vor; π kann ja in der Tat auch heute nicht in die algebraiſchen Zahlen eingereiht werden.

C. Das Kontinuum in der Antike.

Aus den vorhergehenden Darlegungen läßt ſich nunmehr leicht entnehmen, daß das Kontinuum in der Antike ſämtliche $\mu\varepsilon\gamma\acute{\varepsilon}\vartheta\eta$ oder

1) Vgl. zur ganzen Frage H. Hankel, Zur Geſchichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter (Leipzig 1874), S. 123ff.; K. Laßwitz, Geſchichte der Atomiſtik (Hamburg und Leipzig 1896), Band I, S. 177f. — Hankel ſagt (l. c., S. 123): »Der Gedanke, daß man, wie weit man auch in der Reihe der Vielecke gehen möge, jene Kreisfläche nie erreicht, obgleich man ihr immer näher und ganz beliebig nahe kommt, ſpannt das vorſtellende Denken in dem Maße, daß es um jeden Preis dieſe Lücke, welche gleichſam zwiſchen der Wirklichkeit und dem Ideal liegt, auszufüllen ſtrebt, und pſychologiſch gezwungen iſt, den – unendlich kleinen oder unendlich großen? – Schritt zu machen und zu ſagen: der Kreis iſt ein Polygon mit unendlich vielen unendlich kleinen Seiten. Die Alten aber haben dieſen Schritt nicht getan; ſolange es griechiſche Geometer gab, ſind dieſelben immer vor jenem Abgrund des Unendlichen ſtehen geblieben . . .«. – Auf denſelben Sachverhalt ſpielt auch H. Weyl, Sympoſion I, S. 6–7 an. Indeſſen ſcheint für Weyl das antike Verfahren nicht legitim zu ſein. Dieſer Auffaſſung können wir nicht zuſtimmen. Es liegt eben nur eine andere, in gewiſſem Sinn primitivere Grundauffaſſung der mathematiſchen Exiſtenz vor, die an die reine Geſtalt (z. B. des Kreiſes) unmittelbar anknüpft.

λόγοι umfaßt haben muß, alſo die rationalen und irrationalen, ſoweit ſie bekannt waren (alſo gewiſſe algebraiſche Irrationalitäten und dann als iſolierte Größe noch π).

Trotzdem findet ſich dieſe Auffaſſung nirgends explizit ausgeſprochen. Dem ſtand ſchon der Unterſchied zwiſchen ἀριθμός und μέγεθος entgegen, die man keineswegs unter eine gemeinſame Gattung (etwa λόγοι oder εὐθεῖαι oder gar σημεῖα) explizit zuſammenfaßte.

Das abſtrakte Schema aller λόγοι, wie es ſich aus den Eudoxiſchen Definitionen (Euklid, Elemente, V, Df. 3 – 5) ergeben würde, wird vollends niemals als Mannigfaltigkeit oder dgl. gefaßt. Alle derartigen »Mengenbildungen« waren der klaſſiſchen griechiſchen Mathematik fremd.

Man hatte allerdings auch gute Gründe für dieſe Scheu. Sie entſprang der Furcht vor dem Widerſpruch oder zum wenigſten den hoffnungsloſen Paradoxien, die der Eleate Zenon – in ſkeptiſcher Abſicht – mittels des Aktual-Unendlichen zuſtande gebracht hatte. Das Paradoxon von Achilles und der Schildkröte läßt ſich (vgl. dazu P. Tannery[1] und B. Ruſſell[2]) auf eine mengentheoretiſche Form bringen. Die Paradoxie läuft, ſo aufgefaßt, darauf hinaus, daß im Falle des Einholens der Schildkröte durch Achilles, der von dieſem zurückgelegte, um ein Vielfaches längere Weg der von jener in derſelben Zeit durchmeſſenen, viel kürzeren Strecke punktweiſe umkehrbar eindeutig zugeordnet werden kann, indem die gleichzeitig von beiden Läufern innegehabten Punkte einander entſprechen. Dies iſt nichts andres als die bekannte mengentheoretiſche Tatſache, daß zwei aktual unendliche Mengen gleichmächtig ſein können, obwohl die eine ein echter Teil der andern iſt, ſo wie hier der Weg der Schildkröte ein echter Teil des Wegs des Achilles iſt.

Dabei handelt es ſich hier um zwei verſchieden lange kontinuierliche Strecken. Für das Paradoxon iſt es gleichgültig, wie man die »Kontinuität« dieſer Strecken ſich dachte. Tatſächlich meinte man in den Antike und weiterhin bis auf Cantor mit »Stetigkeit« einfach, daß zwiſchen je zwei Punkten noch unendlich viele andere liegen. Man dachte ſich dabei das Kontinuum durch fortgeſetzte Teilung entſtanden (etwa Ariſtoteles). Damit iſt aber

1) »Le concept scientifique du continu: Zenon d'Élée et Georg Cantor,« Revue philoſophique, XX, p. 385ff. (octobre 1885).

2) The Principles of Mathematics, Vol. I, § 331 (p. 350) und §§ 340–41 (p. 358–60). Cambridge 1903.

ein neues geometriſches Moment bereits geltend gemacht, was der Entwicklung vorgreift.

Tatſächlich war (vermutlich [1]) die Folge der Zenoniſchen Paradoxien eine Entwicklung in zweifacher Richtung: einmal zu einem atomiſtiſchen Finitismus und andrerſeits zur methodiſchen Vermeidung wenigſtens des Aktual-Unendlichen unter Zulaſſung des endloſen Prozeſſes (εἰς ἄπειρον ἰέναι [2]).

Der mathematiſche Atomismus denkt ſich nicht mehr die gerade Strecke aus aktual-unendlich vielen Punkten beſtehend, ſondern aus einer zwar großen, aber endlichen Zahl ſehr kleiner Linienſtückchen zuſammengeſetzt, die unteilbare Linien, «Linienatome» (ἄτομοι γραμμαί) heißen. Man braucht von dieſer finiten Mathematik nicht gering zu denken, es gelang ihr, vermutlich gerade deswegen, weil ſie eines Limesverfahrens entraten konnte, zum wenigſten eine große Entdeckung, die Volumenbeſtimmung der Pyramide und des Kegels [3].

Der Atomismus behält alſo von Zenos aktual-unendlichen Mengen die »Aktualität« bei, aber nicht die Unendlichkeit. Umgekehrt verfährt die pythagoreiſche Richtung, die in die große klaſſiſche Entwicklung der griechiſchen Mathematik durch den Archytas-Schüler Eudoxos einmündet. Sie bewahrt das Unendliche, gibt aber die Aktualität preis. Dies Ende dieſer Entwicklung läßt ſich mit Ariſtoteles (Phys. III, 7; p. 207b, 29–31) ſo

---

1) Die hiſtoriſchen Quellen ſind ſehr dürftig, und es läßt ſich keinerlei Entwicklung eindeutig konſtruieren. Genau wiſſen wir nur, 1. daß Zeno das Aktual-Unendliche durch ſeine Paradoxa ad absurdum führte; 2. daß es eine atomiſtiſche finite Mathematik gegeben hat, die bei Plato und Xenokrates noch vorhanden iſt. Die Vermutung, daß Demokrit (und vielleicht ſchon Leukipp) ſie ausgebildet hat, liegt ſehr nahe. (Sie wird beſtritten von Sir Thomas Heath, A history of Greek Mathematics, Oxford 1921, Vol. I, p. 181; wie mir ſcheint, nicht mit durchſchlagenden Gründen.) – Hingewieſen ſei auf Stenzel (Zahl und Geſtalt bei Plato und Ariſtoteles, S. 72 ff., der in Euklids beſchreibenden Definitionen von Punkt, Linie, Gerade uſw. atomiſtiſche Reſte erblickt (l. c. p. 75, Anm. 2). – Vgl. auch O. Toeplitz, »Mathematik und Antike« (die Antike, Bd. I, S. 199); 3. daß Anaxagoras die unendliche Teilbarkeit lehrte; 4. daß die Pythagoreer das Problem der Irrationalen (wenigſtens im Falle $\sqrt{2}$) aufwarfen. (Zu welcher Zeit iſt ſehr umſtritten.)

2) Zeno ſelbſt entwickelt als erſter den Gedanken eines ſolchen Prozeſſes, ſ. in § 6 b, I C.

3) Demokrit entdeckte dieſe Volumenbeſtimmungen, wie wir jetzt aus Archimedes, ad Eratoſth. Methodus, praefatio wiſſen. Eudoxos bewies ſie dann ſtreng, vgl. Archimedes, quadratura parabolae, praefatio.

charakterisieren: (*οἱ μαθηματικοὶ*) *οὐδὲ νῦν δέονται τοῦ ἀπείρου, οὐδὲ χρῶνται, ἀλλὰ μόνον εἶναι ὅσην βούλωνται πεπερασμένην.* »Die Mathematiker bedürfen weder jetzt [mehr?] des Unendlichen noch gebrauchen sie es, sondern (sie brauchen) nur (die Tatsache), daß es begrenzte Strecken gibt, so groß sie wollen« – d. h. die Mathematik braucht beliebig große (und auch kleine) Größen, aber keine aktual unendlichen. (Die außerordentlich tiefgehende Analyse des Unendlichkeitsbegriffs durch Aristoteles wird uns noch später (in § 6b I C) beschäftigen. Hier soll lediglich das auf das Kontinuum Bezügliche kurz dargestellt werden.)

Die Auseinandersetzung zwischen atomistischer und »stetiger« Mathematik spielt verschiedentlich eine Rolle bei Aristoteles und vor allem in der peripatetischen Schulschrift *περὶ ἀτόμων γραμμῶν* (Verfasser vermutlich Theophrast, gerichtet gegen Xenokrates.) Die mathematisch treffendsten Argumente gegen die »Linienatome« sind erstens, daß irrationale Verhältnisse in der atomistischen Mathematik unmöglich sind, da ja die unteilbare Strecke selbst als universelles Maß aller Strecken in ganzen Zahlen dienen kann, womit alle Verhältnisse rational werden. Zweitens, daß man mittels der bekannten geometrischen Konstruktion (Euklid I, 10) jede noch so kleine Strecke halbieren kann. Im Grunde gehen aber beide Argumente (was man zu wenig beachtet hat) auf eine Grundvoraussetzung zurück, die in der griechischen Grundvorstellung vom Mathematischen überhaupt tief verwurzelt ist.

Diese Grundvoraussetzung lautet: Es gibt absolut exakte einfache Figuren, wie den Kreis oder das Quadrat, – oder: es gibt reine elementare Grundgestalten. Der Elementaraufbau (die *στοιχείωσις*) der Mathematik zeigt, daß mit der Geraden und dem Kreis alle anderen reinen Gestalten gegeben sind. Sowohl der Nachweis der Existenz irrationaler Verhältnisse, wie auch die unbeschränkte Anwendbarkeit der Halbierungskonstruktion beruht offenbar auf diesen »reinen« absolut exakten Figuren. Diese sind für die Griechen auch durchaus nicht Ergebnisse eines Grenzprozesses, sondern endliche Gegebenheiten. Das bedeutet einen wesentlichen Unterschied zur modernen Mathematik, wo die Irrationalzahl durch einen unendlichen Prozeß definiert wird.

Sonst – von diesen Beweisen gegen den Atomismus abgesehen – wird das Irrationale in der aristotelischen Vorstellung des Kontinuums nicht berücksichtigt. Aristoteles macht sich keine Gedanken darüber, wie die irrationalen, durch Konstruktion gegebenen Punkte auf der Geraden sich »zwischen« die durch Teilung gegebenen ein-

ſchieben, wo doch ſchon dieſe für ſich ein »Kontinuum« ausmachen.[1] Alle derartigen »mengentheoretiſchen« Fragen ſtellte die Antike nicht. Sie verlieren auch für eine konſequent »potentielle«, genetiſche Auffaſſung des Kontinuums ſehr an Schärfe.

Das Kontinuum iſt alſo für Ariſtoteles nichts aktual Unendliches. Es wird, bei Gelegenheit der Erörterung des Unendlichkeitsbegriffs ſelbſt, oft betont, daß auch die endloſe Teilbarkeit des Kontinuums keineswegs eine aktuale Unendlichkeit impliziert[2]. Allerdings wird ein Unterſchied gemacht zwiſchen dem Unendlichen in der (endloſen) Zeit und dem in der endloſen Teilung des Kontinuierlichen[3].

Das Unendliche iſt zwar immer im Werden und Vergehen (ἐν γενέσει καὶ φθορᾷ), aber doch mitunter (bei der Zeit z. B.) in der Weiſe, daß das Gewordene oder das Erfaßte (τὸ λαμβανόμενον wieder vergeht, während ſtändig etwas Neues entſteht (ἄλλο καὶ ἄλλο); – mitunter aber auch ſo, daß das Entſtehende bleibt. (Dies iſt bei der unendlichen Teilung des Kontinuierlichen der Fall.) D. h.: die Teilpunkte der früheren Teilungen bleiben beſtehen; es kommen immer neue Zwiſchenpunkte hinzu, das Netz der Teilung wird immer dichter, die Teilpunkte häufen ſich immer mehr, wenn auch ihre Zahl und Dichte in jedem konkreten Stadium des Teilungsprozeſſes endlich bleibt.

---

1) Solche Fragen treten ſchon innerhalb des rationalen Bereichs auf. Iſt etwa durch fortgeſetzte Dichotomie eine überall dichte Menge gegeben, wie reiht ſich dann etwa der drittelnde Punkt ein? – Anderſeits iſt ja ſogar die Menge aller algebraiſchen Zahlen mit der der ganzen gleichmächtig. Die geſamten Definitionsmethoden der Antike führten überhaupt nicht über die abzählbare Menge hinaus. Auch inſofern war die mengentheoretiſche Unintereſſiertheit der Antike berechtigt. Nur, wenn man den ſämtlichen Eudoxiſchen λόγοι zugleich die mathematiſche Exiſtenz zugeſprochen hätte, wäre man zu einer nicht abzählbaren Menge gelangt, zu derſelben, die wir heute Kontinuum nennen. Freilich, was dieſe Exiſtenzſetzung en bloc eigentlich beſagt, darüber ſind wir uns heute noch nicht im klaren. Eine ſolche gewagte Exiſtenzſetzung widerſprach durchaus dem Geiſt der antiken Mathematik.

2) Phyſ. III, 6 (206 a 16–18): τὸ δὲ μέγεθος, ὅτι μὲν κατ' ἐνέργειαν οὐκ ἔστιν ἄπειρον, εἴρηται· διαιρέσει δ'ἐστίν· οὐ γὰρ χαλεπὸν ἀνελεῖν τὰς ἀτόμους γραμμάς.

3) Phyſ. III, 6 (206 a 25–29): ἄλλως δ' ἔν τὰ τῷ χρόνῳ δῆλον τὸ ἄπειρον... καὶ ἐπὶ τῆς διαιρέσεως τῶν μεγέθων. ὅλως μὲν γὰρ οὕτως ἐστὶ τὸ ἄπειρον, τῷ ἀεὶ ἄλλο καὶ ἄλλο λαμβάνεσθαι· καὶ τὸ λαμβανόμενον μὲν ἀεὶ εἶναι πεπερασμένον, ἀλλ' ἀεί γε ἕτερον καὶ ἕτερον. (206 a 33–b 3) ἀλλ' ἐν μὲν τοῖς μεγέθεσιν, ὑπομένοντος τοῦ ληφθέντος, τοῦτο συμβαίνει, ἐπὶ δὲ τῶν ἀνθρώπων καὶ τοῦ χρόνου φθειρομένων οὕτως ὥστε μὴ ἐπιλείπειν.

Damit ist der klassische antike Begriff des Kontinuums erreicht, in dem allerdings mathematisch keinerlei tiefere Probleme sichtbar werden.

Diese ergaben sich erst aus der neueren »abendländischen« Entwicklung.

II. Die weitere Entwicklung in der neueren Mathematik bis auf Hilbert.

A. Die »abendländische« Definition durch konvergente unendliche Prozesse.

Es ist hier nicht der Ort, die Geschichte des Kontinuumproblems darzustellen. Deshalb muß es genügen, nach den antiken Wurzeln des Problems die hauptsächlichen modernen, d. i. »abendländischen« Stellungnahmen dazu kurz zu erörtern.

Der grundlegende Unterschied der sog. modernen, d. h. abendländischen neueren Mathematik gegenüber der antiken (die arabische Mathematik möge außer Betracht bleiben) ist die Einführung der unendlichen Konstruktion als legitimer Definition einer mathematischen Entität. (Definition durch ein Grenzverfahren (limes), einen konvergenten unendlichen Prozeß)[1]. Es wurde schon gesagt und sei nochmals wiederholt: die antike Berechnung etwa des Kreisinhalts durch Archimedes gibt zwar eine (im Prinzip unbegrenzt genaue) Annäherung an die Zahl π, aber diese Zahl π wird keineswegs durch diesen approximativen Prozeß definiert. Vielmehr ist der Kreisinhalt als eine Grundeigenschaft der einfachen reinen Figur (Gestalt) Kreis a priori mathematisch existent. Dadurch ist das Verhältnis Kreisinhalt zum Inhalt des Quadrats über dem Radius eine legitime mathematische Entität, trotzdem es nicht im üblichen Sinne als konstruierbare Irrationalität in die Stufenfolge der Irrationalitäten nach Euklid und Apollonios eingegliedert werden kann. Es ist übrigens, wie schon erwähnt, die einzige solche »transszendente« Zahl, die in der antiken Mathematik verwendet wird. Alle antiken Quadraturen, Kubaturen, Rektifikationen usw. sind allein von π abhängig. Umsomehr sind alle antiken Definitionen algebraischer Zahlen (mittels übereinander gebauter

1) Der erste, der »die Grenze geradezu als eine durch Terme einer Folge (series) definierte neue Zahl auffaßte, deren Ermittlungsart eine neue Rechnungsart bedeuten sollte«, war vermutlich James Gregory in der Einleitung zu seiner »Vera circuli et hyperbolae quadratura«, Padua 1667 (Vgl. H. Wieleitner, Geschichte der Mathematik II, 1; Sammlung Schubert Nr. LXIII [Leipzig 1911] S. 116; Eneström, Bibliotheca mathematica X, 348f.). – Die Notwendigkeit der Konvergenz ist sehr spät, eigentlich erst im 19. Jahrhundert (Gauß, Abel, Cauchy) voll eingesehen worden.

Quadrat- und Kubikwurzeln uſw. uſw.) prinzipiell finit. Für uns ſind die Wurzelzeichen nur Abkürzungen für unendliche Prozeſſe (etwa Kettenbrüche u. dgl.); für die Antike ſtehen an ihrer Stelle endliche Konſtruktionen. Der Umfang der der Antike bekannten algebraiſchen Zahlen war de facto begrenzt. Grundſätzlich wäre es möglich geweſen, eine beliebige algebraiſche Zahl durch die endliche Konſtruktion einer beliebigen algebraiſchen Kurve mittels eines Graßmannſchen »linealen Mechanismus« zu definieren.

Über alle dieſe endlichen Konſtruktionen gehen die modernen konvergenten unendlichen Prozeſſe grundſätzlich hinaus. Immerhin bleibt es zunächſt bei einer beſchränkten Benutzung ſolcher Prozeſſe, indem dieſe als Konſtruktionen einzelner reeller Zahlen (entſprechend den antiken λόγοι) verwandt werden. Von einer exiſtentiellen Setzung aller reellen Zahlen iſt zunächſt keine Rede, – auch nicht etwa bei Descartes anläßlich ſeiner Einführung der Koordinaten. Denn auch Descartes ſucht doch nur das geometriſche Analogon zu den elementaren arithmetiſch-algebraiſchen Operationen (wobei er, wie ſchon bemerkt, die allgemeinſten algebraiſchen Operationen nicht einmal erreicht)[1]. Von transſzendenten Zahlen iſt außer π nur noch e bekannt, und zwar ebenſo wie π geometriſch definiert, mittels des Hyperbelinhalts. (Nicolaus Mercator, Logarithmotechnica 1667.) [Zeuthen S. 56, 314f.; vgl. F. Klein, Elem. Math. v. höh. Standpunkt, Bd. I, S. 336ff.]

Der Begriff einer völlig willkürlichen reellen Zahl und damit der Menge aller dieſer Zahlen entwickelt ſich erſt im 19. Jahrhundert, und nicht etwa direkt, ſondern auf Grund der Idee der allgemeinen Funktion. Die Entwicklung des Funktionsbegriffs iſt alſo der Weg, der zum modernen Kontinuumproblem führt.

B. Die Entwicklung des allgemeinen Funktionsbegriffs bis 1750.

Schon im ſpäten Mittelalter um 1370 hatte Nicole Oresme[2] eine anſchauliche Vorſtellung, wenn auch keinen mathematiſch klaren

---

1) Zeuthen, Geſchichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert, S. 204. Die im Text folgenden Seitenzahlen beziehen ſich alle auf dieſes Werk.

2) Über Nicole Oresme ſ. vor allem H. Wieleitner: I. »Der Tractatus de latitudinibus formarum«, Bibliotheca mathematica (3) XIII, S. 115–145 und II. »Über den Funktionsbegriff und die graphiſche Darſtellung bei Oresme«, Bibl. Math. (3) XIV, S. 193–243. – Das Werk Oresmes war bislang nur in einer verkürzten Bearbeitung bekannt, P. Duhem entdeckte drei Handſchriften des Originals in der Bibliothèque nationale in Paris und überſetzte Teile der einen: (fonds latins 7371, fol. 214^r–265^r); eine weitere

Begriff einer beliebigen Funktion. Er wurde darauf durch den ſcholaſtiſchen Begriff der intensio et remissio formarum (ſeit Hein-

---

Handſchrift iſt auch in Baſel (öffentl. Bibliothek, N° F III 31 [4°]; fol. 2^r bis fol. 29^r). – Duhem, Études sur Léonard de Vinci, III. Série (Paris 1913), gibt nur franzöſiſche Auszüge, Wieleitner (l. c. II) gibt Stücke des lateiniſchen Textes nach Duhems Abſchrift.

Oresme gibt keine Darſtellung von »empiriſchen« Funktionen, wie man häufig lieſt. Das würde ihm zu Unrecht moderne Ideen unterſchieben. Tatſächlich gibt er ſo etwas wie eine typiſche Darſtellung der Möglichkeit der Variation von Intenſitäten (Wärme z. B.) mit der Zeit oder entlang einer räumlichen Erſtreckung. Die Figuren ſchließen ſich keinesweg an die Wirklichkeit an, ſondern entſprechen beinahe den Zeichnungen im Skizzenbuch des Villars de Honnecourt. (Vgl. zur erſten Orientierung über dieſe etwa J. v. Schloſſer, Die Kunſt des Mittelalters [die ſechs Bücher der Kunſt, 3. Buch, Berlin-Neubabelsberg, Akad. Verlagsgeſ. Athenaion, o. J.], S. 83 u. 84. Man beachte beſonders die Zeichnung des Löwen [Fig. 94] »contrefait au vif«, die durchaus nicht naturaliſtiſch iſt.) Die »formae« [substantiales wie accidentales], deren »latitudo« [= Variationsweiſe, Schwankungsmöglichkeit] dargeſtellt wurde, waren zunächſt durchaus keine phyſikaliſchen Größen, ſondern etwa die »charitas in homine«, die zu- und abnimmt und »magis et minus per diversa tempora habetur« (Petrus Lombardus, Sententiarum libri IV., lib. I, Diſt. XVII. [ca. 1150], ſ. Wieleitner, l. c. XIV, 195, Anm. 3). Heinrich (Goethales) von Gent (1217–1293) ſpricht dann zuerſt von intensio et remissio und daß ratio et causa augmentationis zu unterſuchen ſei (l. c. XIV, 196). – Erwähnt ſei noch, daß Bradwardine († 1399) von den infiniti gradus in omni latitudine ſpricht und daß Gregor von Rimini (1344) eine latitudo als doppelt ſo groß wie eine andere bezeichnet, alſo ſie mißt (l. c. XIV, S. 196/97).

Wieleitner beſtreitet, daß Oresme die Koordinatendarſtellung erfunden habe und billigt ihm höchſtens eine »Ordinatengeometrie« (ohne den Begriff der Abſziſſe) zu. Ferner tadelt er ſeine ſchwankende und unſcharfe Begriffsbildung. Man muß aber bedenken, daß es ſich hier um eine frühe Stufe einer ſelbſtändigen (nur wenig von der Antike beeinflußten) Konzeption neuer, ſpezifiſch »abendländiſcher« (alſo wohl »nordiſch beſtimmter«) mathematiſcher Begriffe handelt.

Es liegt hier bei Oresme m. E. die Urſprungsſtätte der wichtigſten Begriffe der neueren Mathematik: Funktion, beſtimmtes Integral, Ableitungen aller Ordnungen (als Beſchleunigungen verſchiedener Ordnung auftretend), Prinzip der Permanenz der formalen Geſetze (gebrochene Exponenten), – dies letzte im »Algorismus proportionum«, vgl. H. Hankel, Zur Geſchichte d. Math. im Altertum u. Mittelalter, S. 350f.

Auch in der Frage des Einfluſſes dieſer Begriffsbildungen auf die ſpätere Zeit ſcheint mir Wieleitner zu abſprechend zu ſein. Es hat eben der übermächtige Einfluß der Antike ſeit der Renaiſſance vieles Mittelalterliche ſcheinbar verſchwinden laſſen. (Vgl. das von Wieleitner ſelbſt Beigebrachte: für Descartes, XIV, S. 241 l. c., Anm. 2, 4, 5; für Galilei, S. 242f.).

rich von Gent) geführt, d. h. die allgemeine Idee des Wachſens und Abnehmens einer »Qualität« oder »Intenſität«, wie wir heute ſagen würden, mit der Zeit. Dieſer Funktionszuſammenhang wurde durch eine (allerdings im einzelnen, von ganz einfachen Fällen abgeſehen, phantaſtiſch ausgeſtaltete) Kurve dargeſtellt. Für unſere gegenwärtige Frageſtellung iſt nun das Entſcheidende, daß hier bei Oresme der allgemeine Begriff der Funktion mit tiefblickender Anſchauungskraft entdeckt wird, wenn auch ſeine begriffliche Faſſung weit entfernt von letzter Schärfe iſt. Der allgemeine Funktionsbegriff findet ſich hier ſchon eigentlich nach den beiden Seiten, die ſpäter von ausſchlaggebender Bedeutung werden, konzipiert. Einmal ſkizziert Oresme einen ſyſtematiſchen Aufbau immer komplizierterer funktionaler Geſetzmäßigkeiten (uniformis, uniformiter difformis, difformiter difformis, uniformiter difformiter difformis, difformiter difformiter difformis uſw. uſw.). Es werden auch Zahlenreihen (arithmetiſche Reihen höherer Ordnung u. dgl.) zur Beſchreibung der Geſetzmäßigkeiten herangezogen. Und dann kommt zweitens bei ihm auch ſo etwas wie eine ganz willkürliche Funktion zur Geltung, in Geſtalt einer beliebigen, aus irgendwelchen Geſtalten zuſammengeſetzten Linie. Freilich wird der Anſatz nicht durchgeführt; Oresme kommt nur zu einer Kombination von endlich vielen elementaren Figuren (Kreisbögen und gebrochenen Linien)[1]. Immerhin iſt dazu zu bemerken, daß Oresmes Erörterung ſich ſtets nur auf eine »hora«, eine »Stunde« als begrenzten Zeitabſchnitt bezieht. (Die Zeit bezeichnet i. A. die unabhängige Variable.) Würde man immerfort Stunden bis ins Endloſe dazunehmen, dann käme man zu einer Mannigfaltigkeit von Kombinationen von der Mächtigkeit des Kontinuums. Denn man kann jede auftretende Elementarfigur mit einer Zahl bezeichnen und kommt dann auf eine Zahlfolge bzw. auf die Menge aller Zahlfolgen. Oresme hat dieſe Betrachtung nicht[2], aber er denkt ſich die Elementarfiguren ſelbſt »auf unendliche Weiſe variiert«[3].

Dieſe genialen Vorahnungen wurden von der ſyſtematiſch fortſchreitenden Mathematik, die allerdings ihre Begriffsbildung erſt wirklich ſtreng zu ſichern hatte, erſt ganz allmählich wieder erreicht. Der allgemeine Funktionsbegriff entwickelte ſich ſehr langſam.

1) ſ. Wieleitner, Bibl. Math. (3) XIII, S. 138, Fig. 9 u. 10.

2) l. c. XIV, 205, Anm. 2.

3) l. c. XIII, S. 139: »quas pono gratia exempli [figuras] possunt infinite variari semper repraesentando latitudinem de qua est intentio sive sermo«.

Cavalieri faßte (ebenfalls in genialer Intuition und mit ungenügender Schärfe) den Begriff des Integrals irgend einer Kurve (Zeuthen, l. c., S. 256ff.) Bei Pascal findet ſich ſodann (1659)[1] ein allgemeiner Satz über partielle Integration bewieſen, in dem zwei allgemeine Funktionen (Kurven) auftreten. Die allgemeinen kinematiſchen Methoden von Torricelli und Roberval (1668) zur Löſung des ſog. Tangentenproblems beziehen ſich auf eine beliebige Kurve (l. c., S. 321ff.). Barrow, Newtons Lehrer, formuliert und beweiſt einen allgemeinen Umkehrungsſatz bezüglich des Tangentenproblems und ſeiner Umkehrung, der für alle Kurven gelten ſoll, (l. c., S. 352ff., beſ. S. 354) – es handelt ſich tatſächlich natürlich nur um differenzierbare Kurven. Damit kommen wir ſchon bis an die Schwelle der Differential- und Integralrechnung (Newton und Leibniz), die ſich auf allgemeine Funktionen bezieht.

Leibniz hat im Gegenſatz zu Barrows und Newtons geometriſch-kinematiſcher Methode (die innerlich, über Napier (1550-1617) noch mit den alten Oresmeſchen Konzeptionen zuſammenzuhängen ſcheint), zuerſt den allgemeinen arithmetiſch-analytiſchen Funktionsbegriff gefaßt (Auguſt 1673, in der Handſchrift Catalogue critique Nr. 575, überſchrieben »Methodus tangentium inversa seu de functionibus«)[2]. Über die Descartesſche algebraiſche Gleichung hinausgehend, wird der allgemeine Begriff einer analytiſchen Relation eingeführt und dem geometriſchen Funktionsbegriff, der Kurve, wird das allgemeine Fortſchrittsgeſetz einer unendlichen Reihe gegenübergeſtellt. Außerdem aber beſchreibt er die funktionale Abhängigkeit bereits 1673 in abſtrakten Begriffen. Schritt für Schritt nähert ſich dann Leibniz dem allgemeinen analytiſchen Funktionsbegriff (in Aufſätzen in den Acta Eruditorum 1692 – 1694), den er ſpäteſtens 1696 endgültig erreicht. (September 1694: von einer Variablen v: »quantitas quomodocunque formata ex indeterminatis et constantibus«; Auguſt 1696: »quantitates utcunque datae per indeterminatam x et constantes« oder »algebraice vel transcendenter dependentes ab x et constantibus«, welche mit X^1, X^2, ... bereits ſyſtematiſch

1) Lettres de A. Dettonville sur quelquesunes de ses Inventions en Géometrie. – Zeuthen, l. c. S. 270ff.

2) Vgl. darüber und über das Folgende die grundlegende Arbeit von D. Mahnke »Neue Einblicke in die Entdeckungsgeſchichte der höheren Analyſis« (Abh. d. Preußiſchen Akad. d. Wiſſ., Jahrg. 1925, Math.-Phyſ. Kl. Nr. 1), § 12–15. Beſonders Seite 44–45; 47–52.

bezeichnet werden.)[1]. Damit iſt im weſentlichen ſchon der Begriff erreicht, den Euler ſpäter einen »analytiſchen Ausdruck« nennt.

Bei dieſen Unterſuchungen iſt allerdings nur jeweils eine (oder 2) beſtimmte Kurve bzw. Funktion Gegenſtand der Betrachtung. Die Mannigfaltigkeit aller möglichen Kurven beſtimmter Art ſpielt noch keine Rolle. Es iſt daher auch kein Anlaß, den Begriff der willkürlichen Kurve zu präziſieren.

Über die beſtimmte konſtante Kurve (Funktion) geht hinaus die Variationsrechnung. Sie entſteht, als in gewiſſem Maß allgemeines Verfahren, etwa um 1700 (Jakob Bernouilli 1697)[2], und wird um 1744 von Euler als ſyſtematiſche Disziplin begründet[3]. Hier treten zuerſt gewiſſermaßen variable Kurven auf oder es werden unendlich viele Kurven in Betracht gezogen, von denen eine ausgezeichnet werden ſoll[4]. Trotzdem genügt es zur Löſung der Aufgabe, neben der (als gefunden angenommenen) verlangten Kurve eine geeignete Vergleichskurve zu betrachten, ſodaß alſo — wenigſtens in den frühen Stadien der Variationsrechnung — ein explizites Eingehen auf die Geſamtheit der möglichen Kurven nicht nötig iſt[5]. Das Intereſſe richtet ſich eben nur auf das eine »extremale« Element, ähnlich wie auch bei den gewöhnlichen Maximalaufgaben.

C. Die Idee der »ganz willkürlichen« Funktion.

Dagegen wurde der Begriff der »ganz willkürlichen« Funktion bei einer anderen Aufgabe, die in der Mitte des 18. Jahrhunderts auftaucht, notwendig: bei dem berühmten Problem der ſchwingen-

---

1) Vgl. Mahnke, l. c. S. 51. An dieſer Stelle wird auch über die Entwicklung der Terminologie bis zu dem heutigen Gebrauch des Wortes functio ausführlich berichtet, die der gemeinſamen Arbeit Leibnizens und der Brüder Jakob und Johann Bernoulli in den Jahren 1694–98 verdankt wird.

2) Newton behandelt 1686 die erſte Variationsaufgabe (Rotationskörper kleinſten Widerſtandes), Johann Bernoulli ſtellt 1696 das Problem der Linie kürzeſten Falles und löſt es durch einen beſonderen Kunſtgriff. Aber erſt Jakob Bernoulli gibt ein allgemein verwendbares Prinzip.

3) Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes. Lauſanne u. Genf 1744. (Oſtwalds, Klaſſiker Nr. 46).

4) Johann Bernoulli: »Der Sinn der Aufgabe [der Brachiſtochrone] iſt der: unter den unendlich vielen Kurven, welche . . ., ſoll diejenige ausgewählt werden, längs welcher . . .« (Oſtw. Klaſſ. Nr. 45, § 5).

5) Vgl. Jakob Bernoulli (Oſtw. Klaſſ. Nr. 46 S. 15): »Iſt $ACEDB$ die verlangte Kurve . . . und ſind C und D zwei beliebig nahe Punkte auf ihr, ſo iſt das Kurvenſtück CED unter allen Kurvenſtücken, welche C und D zu Endpunkten haben, das, welches der ſchwere Punkt, der von A aus

den Saite[1]. d'Alembert (1747) kam auf eine Löſung, die zwei willkürliche Funktionen enthielt. Er dachte ſich darunter zwei analytiſch ausdrückbare Funktionen. Euler (1748) dagegen beſtimmte die beiden Funktionen geometriſch durch willkürlich gezogene Kurven[2], wogegen ſich d'Alembert verwahrte. Daniel Bernouilli gab nunmehr (1753) eine neue Löſung, die darauf hinauslief, die Euler'ſchen »ganz willkürlichen« Kurven durch trigonometriſche Reihen darzuſtellen. Die Möglichkeit einer ſolchen Darſtellung wurde aber nicht ſofort anerkannt, d. h. für nicht allgemein gehalten. Die Frage blieb ungelöſt (obwohl noch Lagrange ſich darum bemühte) und erſt 1807 ſprach Fourier den Satz aus, daß eine ganz willkürlich (graphiſch) gegebene Funktion ſich durch eine trigonometriſche Reihe darſtellen laſſe, deren Koeffizienten er durch Integrale beſtimmte. Die Konvergenz der Fourier'ſchen Entwicklung wurde allerdings, für eine weite Klaſſe von Fällen, erſt 1829 von Dirichlet erwieſen (für Funktionen, die durchgehend integrierbar ſind und nicht unendlich viele Maxima und Minima haben).

Prinzipiell und in der für unſere jetzige Problemſtellung wichtigen Hinſicht heißt das: die »ganz willkürliche«, graphiſch gegebene Funktion läßt ſich zwar nicht durch einen endlichen, geſchloſſenen

---

fällt, in kürzeſter Zeit durchmißt. Würde nämlich ein anderes Kurvenſtück *CFD* in kürzerer Zeit durchmeſſen werden, ſo würde . . .« – Vgl. Euler, l. c. Kap. 1, Lehrs. IV (p. 42); Kap. 2, Aufg. I (p. 46); Aufg. V (p. 77) uſw.

1) Vgl. darüber die ſchöne Darſtellung Riemanns in ſeiner Habilitationsſchrift »Über die Darſtellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometriſche Reihe« (1854) [Geſ. Werke[1] S. 213 ff.] §§ 1–3, und in den »Vorleſungen über partielle Differentialgleichungen«, hg. v. Hattendorff (Braunſchw. 1869): § 21, §§ 74–78, beſ. § 78.

2) Es gibt bei Euler zwei Funktionsbegriffe, die nicht in Beziehung geſetzt ſind. Erſtens: »functio quantitatis variabilis est expressio analytica quomodocunque composita ex illa quantitate variabili et numeris seu quantitatibus constantibus». (Introd. in an. inf. 1748 t. I, p. 4.) Dieſem Funktionstypus entſpricht die curva continua. Es gibt aber außerdem noch beliebig »libero manus ductu« gezeichnete Kurven: »curvae discontinuae seu mixtae seu irregulares«. Der Ausdruck continuae bzw. discontinuae bezieht ſich alſo darauf, daß die Kurven in ihrer ganzen Ausdehnung durch ein Geſetz darſtellbar ſind bzw. in disparate Stücke auseinanderfallen (etwa wie eine Parabel, die ſich in eine Hyperbel fortſetzt). Es handelt ſich alſo nicht um unſeren heutigen Stetigkeitsbegriff, der von Cauchy ſtammt. Die curvae discontinuae hielt Euler für analytiſch nicht darſtellbar. (Vgl. dazu die hiſtoriſche Einleitung in H. Hankels »Unterſuchungen über die unendlich oft oszillierenden und unſtetigen Funktionen« (1870), Oſtwalds Klaſſiker d. exakt. Wiſſ. Nr. 153.)

analytiſchen Ausdruck, aber durch eine unendliche Reihe mit geſetzmäßig gegebenen Koeffizienten ausdrücken — unter den Dirichletſchen Bedingungen.

Das erſcheint zunächſt paradox, aber man muß bedenken, daß natürlich die unendlich vielen Koeffizienten nur durch ſtändige Hinzunahme neuer gegebener Kurvenpunkte, die man ſich etwa immer dichter angeordnet denken kann, numeriſch berechnet werden können. Das Merkwürdige iſt alſo nur, daß die diskrete Menge der Koeffizienten die kontinuierliche Kurve beſtimmt. Aber dies iſt gerade wegen ihrer Kontinuität (im Cauchyſchen, alſo modernen Sinne) der Fall. Denn die Stetigkeit beſagt gerade, daß, wenn man etwa eine irrationale Argumentſtelle x durch rationale Zahlen approximiert, man dann gleichzeitig durch die entſprechenden Funktionswerte den Wert $f(x)$ in der erſtgenannten Stelle x als Limes erreicht, d. h. mit den Funktionswerten an den rationalen Argumentſtellen iſt ſchon die ganze Funktion gegeben und dieſe rationalen Stellen kann man bekanntlich leicht in eine abzählbare Reihe ordnen.

Die willkürliche ſtetige (oder, wie man zeigen kann, auch unſtetige, aber den Dirichletſchen Bedingungen unterworfene) Funktion iſt im weſentlichen darſtellbar durch eine willkürliche Zahlenreihe oder Folge – oder, wenn man will, eine »zahlentheoretiſche Funktion« (bei der Argumente und Werte ganze Zahlen ſind). Man ſieht alſo, daß der Begriff der willkürlichen Funktion den Begriff der willkürlichen Zahlenfolge – und damit der willkürlichen reellen Zahl, die durch eine Zahlfolge beſtimmbar iſt – einſchließt.

Wir kehren nun ſozuſagen die Betrachtung um: In der graphiſch gegebenen willkürlichen ſtetigen Funktion ſehen wir ein anſcheinend anſchauliches Bild einer willkürlichen reellen Zahl. Insbeſondere, wenn die Funktion periodiſch iſt, d. h. ſich nach einem endlichen Intervall identiſch wiederholt, erſcheint die gezeichnete Kurve als eine echte, endliche Geſtalt[1]. So wäre alſo die willkürliche periodiſche ſtetige Funktion und damit auch die willkürliche Zahlfolge ein anſchauliches endliches Phänomen!

Aber dies iſt ein offenbarer Irrtum! Schon daraus kann man dies entnehmen, daß die »entſprechende« zahlentheoretiſche Funktion offenbar, als völlig willkürliche, nicht endlich überſchaubar iſt. Eine nähere Überlegung lehrt, daß an jenen ſtetigen

1) Eine Figur ($\sigma\chi\tilde{\eta}\mu\alpha$) im antiken Sinn.

Kurven nicht ihre Gesamtgestalt in dem gegenwärtigen Problemzusammenhang das Wesentliche ist, sondern die Möglichkeit, aus ihr in einem unendlichen Teilungsprozeß eine immer dichter *werdende* Menge von Punkten mit rationalen (oder auch algebraischen) Abszissen herauszuheben. Nur infolge dieser Möglichkeit hat die graphisch gegebene Kurve die Fähigkeit die willkürliche stetige Funktion darzustellen.

Es verhält sich also mit jener graphisch gegebenen *Eulerschen* Funktion nicht anders als mit einer *echten werdenden* Folge, deren Glieder eines nach dem andern in der Zeit gegeben werden.

Es handelt sich also um jene Gegebenheitsweise eines anschaulichen Kontinuums, bei der die unbeschränkte Möglichkeit besteht, in den sog. »Innenhorizont« hineinzugehen. (Diese Dinge sind von mir in einer früheren Arbeit ausführlich erörtert worden[1] und können deshalb hier übergangen werden.)

Es ist also nur Schein, daß man eine gänzlich willkürliche stetige Funktion als geschlossenes Gebilde »geben« kann. Man kann sie eben in ihrer *unendlichen* (endlosen) Ausdehnung nicht anders geben als durch ein »Gesetz« – d. h. man kann sie als *willkürliche* **nicht** »geben«. Sie ist kein phaenomenon dabile.

Der Schein der dabilitas entsteht durch ein letztes antikes, »geometrisches« Element in Eulers Mathematik,[2] *wo doch der sonstige Sachzusammenhang ganz »modern« (abendländisch) ist.* Es ist in der Mathematik des 18. Jahrhunderts nicht mehr erlaubt, *Gestalten* als elementare Gebilde zu nehmen, wie die Antike den Kreis als elementare Gestalt auffaßte (s. o. S. 143, 146). Denn in der neueren Mathematik dienen allgemein endlose (konvergente) Prozesse als Definitionen. Es werden, seit dem Ende des 17. Jahrhunderts in immer steigendem Maße, mathematische Gebilde in dieser Weise eingeführt, während die geometrischen Definitionen verschwinden. Die »exakten« geometrischen Figuren sind selbst Limiten. Dieser geschichtliche Prozeß setzt sich im 19. Jahrhundert fort und führt schließlich zur vollständigen »Arithmetisierung« der Mathematik.[3]

---

1) Dieses Jahrbuch Bd. VI, S. 472—477.

2) Wie es ähnlich auch bei seiner Variationsrechnung hervortritt, wo es erst von *Lagrange* überwunden wird. – *In sachlicher* Hinsicht sei auf unsere Betrachtung im Math. Anh. zu § 3, III am Schlusse verwiesen!

3) Freilich geht es bei dieser Entwicklung nicht ohne Krisen ab. *Eine* solche kritische Periode begann gegen 1800, wo man die Konvergenz der benutzten Prozesse sorgfältig zu untersuchen begann, nachdem man sich

Auch die weitere Entwicklung des Funktionsbegriffs unterliegt dieſer Tendenz zur Arithmetiſierung. Anſtelle von Eulers graphiſch vorliegenden willkürlichen Kurven tritt Dirichlets abſtrakte Definition: »Eine Funktion heißt y von x, wenn jedem Werte der veränderlichen Größe x innerhalb eines gewiſſen Intervalls ein beſtimmter Wert von y entſpricht; – gleichviel ... ob die Abhängigkeit durch mathematiſche Operationen ausgedrückt werden kann oder nicht.« Dieſe Definition nennt H. Hankel[1] eine »reine Nominaldefinition«. Er ſagt von ihr, ſie reiche für die Bedürfniſſe der Analyſis nicht aus, da Funktionen dieſer Art allgemeine Eigenſchaften nicht beſitzen. Das letztere iſt nicht richtig;[2] aber es liegt in der Tat eine wahre Kluft zwiſchen dieſer allgemeinſten Definition und den konkreten Konſtruktionen der Analyſis.

Die allgemeine unſtetige Funktion Dirichlets[3] iſt noch viel weniger vorſtellbar als die allgemeine Zahlfolge. Denn die Menge ihrer Argumente läßt ſich nicht abzählen. Die Funktion hängt gewiſſermaßen von einer nichtabzählbaren Menge von Bedingungen ab, ſie iſt ein durch und durch transfiniter Begriff.[4]

---

bisher hauptſächlich auf ſeinen »mathematiſchen Takt« verlaſſen hatte. Die zweite kritiſche Periode wird vor allem durch Weierſtraſſens Tätigkeit gekennzeichnet, der die ineinander eingeſchachtelten Grenzverfahren zu behandeln lehrte und die reelle Zahl ſcharf definiert zur Grundlage der Infinitesimalrechnung machte, aus der das Unendlichkleine verſchwand. Die dritte kritiſche Periode iſt die gegenwärtige, in der der Begriff des Aktual-Unendlichen, der in der Mengenlehre ſo große Triumphe feierte, angegriffen wird. In dieſen Forſchungszuſammenhang gehören auch die gegenwärtigen Unterſuchungen.

1) Unterſuchungen über die unendlich oft oſzillierenden und unſtetigen Funktionen, 1870. (Oſtw.-Klaſſ. Nr. 153, S. 49. — Die Einleitung der Arbeit iſt wegen der feinſinnigen hiſtoriſchen Bemerkungen intereſſant; der ſachliche Gehalt iſt längſt überholt.)

2) Vgl. dazu E. Borel, Leçons sur la théorie des fonctions. 1. edit. Paris 1898 (2. edit. 1914), p. 126, Anm. 1.

3) Es iſt hier und im folgenden unter dem Ausdruck »D.ſche Funktion« immer die allgemeinſte unſtetige Funktion verſtanden, nicht etwa eine der »Dirichletſchen Bedingungen« für die Darſtellbarkeit durch eine trigonometriſche Reihe unterworfene Funktion.

4) Borel, l. c. p. 126: »une telle fonction est définie par une infinité non dénombrable de conditions; en pratique, cela revient à dire qu'il est impossible de la définir. Il y aurait lieu de distinguer parmi les fonctions discontinues les plus générales, qui paraissent devoir être exclues, ... des considérations mathématiques, des fonctions dont la discontinuité est assujettie à des restrictions. Ces restrictions

Der Dirichletſche Funktionsbegriff dient alſo nur als allgemeines Schema, analog dem Verhältnis (λόγος)-Begriff des Eudoxos; die konkret verwertbaren Funktionen müſſen in irgend einer Weiſe konſtruiert werden. Dabei iſt allerdings eine Grenze für die möglichen Konſtruktionsmittel nicht zu ſetzen. Der in dieſen Konſtruktionen beherrſchte Bereich erweitert ſich ſtändig[1] und ſein Wachſen iſt auch heute noch nicht zu Ende. Trotzdem erreichen die Konſtruktionen nicht die abſtrakte »Nominaldefinition«.

Es bleibt alſo – in veränderter Form – der doppelte Funktionsbegriff, der ſchon bei Euler auftrat (und, wenn man will, ſogar ſchon bei Oresme angelegt iſt)[2] beſtehen. Über den eigentlichen Sinn des abſtrakt-formalen Begriffs ſchwanken die Anſichten. Es iſt unſchwer zu ſehen, daß es ſich hier um die hiſtoriſch frühere Stufe des modernen Streites zwiſchen Intuitionismus (der den konſtruktiven Funktionsbegriff hat) und Formalismus (der die abſtrakt-ſchematiſche Definitionsweiſe wählt) handelt. (Vgl. für dieſes Stadium etwa P. du Bois-Reymonds »Allgemeine Funktionentheorie« (Tübingen 1882) und auch Hankels ſchon zitierte Schrift von 1870.)

G. Cantors Mengenlehre wird (von den 70er Jahren ab) der Mittelpunkt einer Gruppe von Unterſuchungen, die jede beliebige Dirichletſche Funktion, ebenſo wie jede »wohldefinierte« Menge, als exiſtent ſetzen.[3] Die Scheu vor dem Aktual-Unendlichen verſchwindet. Damit iſt aus der »Nominaldefinition« der unſtetigen Funktion ebenſo wie aus der »Nominaldefinition« der reellen Zahl

---

doivent être de nature telle que la fonction puisse être entièrement définie par une infinité dénombrable de conditions.

1) So will Hankel, l. c. S. 49 ff., der die allgemeine Erklärung, y ſolle ſich mit x »geſetzmäßig« ändern, mit Recht für dunkel hält, »die Mannigfaltigkeit der in dem reinen D.ſchen Funktionsbegriff enthaltenen, möglichen Größenbeziehungen zweier Veränderlichen auseinanderlegen«. – Später haben Weierſtraß, Cantor, Baire, Lebesgue dieſe Konſtruktion immer weiter getrieben. Lebesgue hat eine Funktion »benannt«, die nicht mehr analytiſch darſtellbar iſt. (Journ. d. Math. 1905.) (Vgl. Hausdorff, Grundzüge d. Mengenlehre[1], S. 429 f., Borel, Méthodes et Problèmes de théorie de fonctions, 1922, S. 20.) – In anderer Richtung verallgemeinert Weyl (»Das Kontinuum«, 1918) die analytiſche Darſtellung.

2) Letzten Endes kann man dieſelbe Doppeltheit ſchon in der Antike finden, wo Theätet die Irrationalzahlen nach konſtruktiven Prinzipien zuerſt klaſſifiziert und gleichzeitig Eudoxos die »Nominaldefinition« des λόγος gibt.

3) Die Dirichletſche Funktion kann offenbar als zweidimenſionale Punktmenge aufgefaßt werden.

(dem antiken Verhältnisbegriff [λόγος] nach Eudoxos) eine Exiſtenz ſetzende »Realdefinition« geworden. Eine derartige Definition kann in keiner Weiſe mehr als eine Erweiterung der antiken konſtruktiven Definition angeſehen werden. Denn es iſt abſolut weſentlich für den antiken Begriff des Elementaraufbaus (στοιχείωσις), daß er von einer endlichen Komplikation iſt. Zweitens kann ſie auch nicht ſo aufgefaßt werden, als ob ſie durch einen unendlichen Prozeß im modernen Sinne vollbracht würde. Sie fällt alſo aus der Richtung der bisherigen mathematiſchen Methodik ganz heraus.[1] Es bleibt vielleicht die Möglichkeit, die in gewiſſer Hinſicht ſo naive Auffaſſung der aktual unendlichen Mengen als »mit einem Schlage gegebener« als eine Rückkehr zum primitiven »Geſtalten-Sehen« der archaiſchen Mathematik (wie ſie war, ehe die στοιχείωσις-Methode ſich durchſetzte!) auszulegen. Manches ſpricht dafür[2]; eine wirklich ſtichhaltige Begründung des Verfahrens kann aus dieſer Auffaſſung keineswegs gewonnen werden. Denn es handelt ſich dabei im Grunde um eine Wiederaufnahme der alten, früher kritiſierten, Euler ſchen »geometriſchen« Methoden; – nur daß die Bedingungen für ihre Anwendung viel ungünſtiger geworden ſind. Tatſächlich bemerkt man auch, daß der Verſuch ge-

1) Man kann als hiſtoriſche Parallele höchſtens Leibniz anführen, der den Verſuch machte die Kombinatorik und den Begriff der definiten Mannigfaltigkeit ſo zu erweitern, daß auch eine (aktual) unendliche Konſtruktionsbaſis zugelaſſen wird. Vgl. darüber die Arbeiten H. Pichlers (Begriff der »Volldeutigkeit«) und D. Mahnkes; zuſammenfaſſend dargeſtellt von D. Mahnke in dieſem Jahrb. Bd. VII, S. 561 ff. (Leibnizens Syntheſe von Univerſalmathematik und Individualmetaphyſik § 20). – S. auch unten § 6 c III C.

2) a) Man vgl. etwa die häufigen Bemerkungen F. Kleins über derartige Anſchauungsmöglichkeiten. (Vorl. üb. d. Anwend. d. Diff.- u. Integr.-R. auf Geometrie, 1902). Klein ſchränkt einerſeits die Anſchauung ſehr eng auf das Endliche ein (Funktionsſtreifen uſw.) Andrerſeits erweckt ſeine lebendige Darſtellung doch immer wieder die Illuſion der Anſchaulichkeit des Transfiniten, – Vgl. auch Math. Anh. zu § 3, III.

b) Zermelos Beweis des Wohlordnungsſatzes erſetzt die als unmöglich erklärte »ſukzeſſive« Auswahl unendlich vieler Elemente durch ihre »gleichzeitige« Auswahl. Dazu bemerkt A. Fraenkel, Einleitung in die Mengenlehre (2. Aufl. Berlin 1924), S. 142–143: »Oben ſetzte jeder einzelne Auswahlakt die Geſamtheit aller vorangegangenen Auswahlakte voraus, . . .; es gewinnt ſo den Anſchein, als ſei ein ſukzeſſiv wachſender Zeitaufwand für die Auswahlakte erforderlich . . .; die Zugrundelegung einer gleichzeitigen Auswahl . . . iſt jenem Verfahren zwar nicht in der praktiſchen Durchführbarkeit überlegen, wohl aber pſychologiſch faßbarer und anſchaulicher« (!!)

nauerer Vorſtellung der Gebilde immer wieder an ihre Geneſis anknüpft, die aber eben nicht konſequent durchdacht iſt.

Von dieſer grundſätzlichen Stellung aus iſt nun natürlich der Begriff der willkürlichen reellen Zahl ohne weiteres zu faſſen. Denn er läßt ſich ja auf den einer abzählbaren Menge oder auch der zahlentheoretiſchen Funktion ſofort zurückführen. Ebenſo iſt jetzt die Menge aller reellen Zahlen und auch die Menge aller reellen (diskontinuierlichen) Funktionen ohne weiteres eine erlaubte Begriffsbildung.

Die Menge aller reellen Zahlen iſt nun das Kontinuum, und es gelingt Cantor, von ihm eine abſtrakte deſcriptive Definition zu geben; es iſt eine »perfekte, überall dichte Menge«.

Aber Cantors geniale Schöpfung enthält neben denjenigen Begriffen, die das Aktual-Unendliche als weſentlichen Beſtandteil enthalten, auch noch andere, die als zu der Idee eines unendlichen Prozeſſes gehörig interpretiert werden können. Dahin gehört das Verfahren der umkehrbar eindeutigen Zuordnung zum Beweis der Gleichmächtigkeit von Mengen, und – allerdings mit einer weſentlichen Einſchränkung, von der noch zu reden ſein wird – das ſogenannte »Diagonalverfahren« zum Beweis, daß eine Menge mächtiger iſt als eine andere. Vor Allem aber iſt hier die wunderbare Reihe der transfiniten Ordnungszahlen zu nennen, die berühmte »Fortſetzung der realen ganzen Zahlenreihe über das Unendliche hinaus«. (S. o. § 5a.)

D. Das moderne Kontinuumproblem.

1. Die Abzählbarkeit aller endlich definierbaren Zahlen (Cantor, Borel). – So entſteht das »Kontinuumproblem« im Sinne der Frage nach der Mächtigkeit des Kontinuums. Oder anders ausgedrückt: als Frage nach der (konſtruktiven) »Wohlordnung« des Kontinuums, nach ſeiner Abzählung mittels der transfiniten Zahlen.

D. h. Es ſollen alle möglichen reellen Zahlen in eine wohlgeordnete Reihe gebracht werden, nach Art der früher (§ 5a) betrachteten transfiniten Reihen.

Dieſes Problem iſt nicht ein Spezialproblem unter vielen andern, ſondern es iſt die legitime hiſtoriſche Fortſetzung einer fundamentalen, bis auf die Antike zurückgehenden Problementwicklung. Es iſt die moderne Form des alten Problems der Klaſſifikation der Irrationalitäten, das zuerſt von Theodorus aufgeſtellt von Theätet einer vorläufigen Löſung zugeführt wird, die dann

von Euklid weiter entwickelt und von Apollonius von Perge nochmals erweitert wird. Dieſe antike Klaſſifikationen umfaßten nur algebraiſche Irrationalitäten und auch dieſe nicht vollſtändig (ſ. o. S. 139). Cantor gibt (1873)[1] eine Ordnung ſämtlicher algebraiſcher Zahlen nach ihrem Rang, worunter er die Summe des Grades und der (abſolut genommenen) Koeffizienten der ſie definierenden algebraiſchen Gleichung verſteht, und beweiſt auf dieſer Grundlage die Abzählbarkeit dieſer Zahlmenge durch die Reihe der natürlichen Zahlen. Zugleich zeigt Cantor aber, mittels ſeines »Diagonalverfahrens«, daß eine ähnliche Abzählbarkeit der Menge aller reellen Zahlen nicht beſteht[2]. Borel hat ſpäter[3] (1910) das Cantorſche Verfahren verallgemeinert und eine Abzählung ſämtlicher an der mathematiſchen Forſchung einzeln ins Auge zu faſſenden reellen (i. a. transcendenten) Zahlen gegeben. Er entwickelt eine Methode, jeder dieſer Zahlen einen beſtimmten (endlichen) Rang (oder »Höhe«, hauteur) zuzuſchreiben und mit ſeiner Hilfe gelingt ihre Abzählung, die zugleich die Zahlen nach beſtimmten Rangſtufen klaſſifiziert.

Allerdings folgt gerade aus eben dieſen Betrachtungen, daß eine im Vergleich zu den abgezählten ungeheuer viel reichere Vielheit von Zahlen übrigbleibt, die von der ordnenden Klaſſifikation nicht erfaßt werden[4]. Von einem anderen Geſichtspunkt aus hat

1) Journ. f. Math. (Crelle), Bd. LXXVII, S. 259.

2) Das Diagonalverfahren zeigt, genau genommen, folgendes: Wenn man eine abgezählte (geſetzmäßige) Reihe von Zahlfolgen hat, ſo kann man eine von dieſen ſämtlichen verſchiedene Zahlfolge Stelle für Stelle berechnen. (Etwa die Folge: $\alpha_{11}+1$, $\alpha_{22}+1$, $\alpha_{33}+1$, . . ., $\alpha_{\nu\nu}+1$ . . ., wo α_{ik} die k^{te} Zahl der i^{ten} Folge bedeutet.) So beſtimmt eine konkret ausgeführte Abzählung aller algebraiſchen Zahlen eine tranſzendente Zahl. — Man kann alſo nie dazu gelangen, eine abgezählte Reihe von Folgen aufzuſtellen, die alle Folgen, die definierbar ſind, enthielte.

3) Leçons sur le Théorie de la Croissance (Paris 1910), Ch. V, p. 118 ff. Borel zieht Löſungen von Differentialgleichungen, Reihenſummen uſw. in in Betracht: »Admettons donc que chaque procédé de définition des nombres incommensurables, au moyen d'entiers, ou de nombres définis par des procédés antérieurs n'introduise qu'une infinité dénombrable de nouveaux nombres incommensurables. Les procédés successifs possibles sont eux-mêmes en infinité dénombrable. Donc, en tout, l'ensemble des nombres incommensurables qu'on aura défini à partir des entiers sera dénombrable.

4) Borel, l. c. p. 123: »Donc tous les nombres actuellement définis, et ultérieurement définissables, ont leur définition représentée dans le tableau illimité de suites d'entiers que nous avons construit. Il y a donc une infinité (beaucoup plus dense que l'infinité complémentaire) de nombres incommensurables qui n'ont été ni ne pourront jamais être définis.« —

Weyl (in einem früheren Stadium seiner Forschungen, 1918) eine »logische Konstruktion« der in der Mathematik vorkommenden reellen Zahlen gegeben. Auch diese führt nur auf eine abzählbare Menge von Zahlen. Diese Feststellungen sind freilich im Grunde trivial, denn sie sind eine unmittelbare Folge des sog. »Satzes von der endlichen Bezeichnung«, nach dem alle durch ein endliches Bezeichnungssystem zu beherrschenden Mannigfaltigkeiten abzählbar sind. Denn bei allen geschilderten Klassifikationen handelt es sich um solche endliche Bezeichnungssysteme, etwa mittels der (endlichen) Rangordnungsindizes. –

2. Transfinite Reihen von reellen Zahlen. (Du Bois-Reymond, Hardy). – Die soeben gegebene Übersicht über die Geschichte des Klassifikationsproblems der Zahlen zeigt, daß auch die moderne Erweiterung des antiken endlichen Konstruktionsverfahrens eine Erschöpfung der das Kontinuum bildenden reellen Zahlen nicht erreicht. Die Kluft zwischen der »allgemeinsten« reellen Zahl (dem λόγος des Eudoxos) und den noch so weit getriebenen Konstruktionen der Analysis bleibt unüberbrückbar.

Aber Cantors Konstruktion der transfiniten Ordinalzahlen eröffnet hier neue Möglichkeiten. Wir haben diese Konstruktion früher (in § 5 a) ontologisch unterbaut und als ontologisch ebenso legitim erwiesen als den gewöhnlichen unendlichen (konvergenten) Prozeß.[1] Wir halten daher das Mißtrauen, das z. B. Borel[2] in sie setzt, für nicht berechtigt.

Der erste, der eine transfinite Reihe von Zahlfolgen (d. h. auch von reellen Zahlen) aufstellte, scheint Hardy (1903) gewesen zu sein.[3] Er benutzt dazu wesentlich das Diagonalverfahren. Seine Methode ist von Hausdorff[4] und Schoenfließ vereinfacht worden. Sie hängt mit dem schon wesentlich älteren Satz von P. du Bois-Reymond (1872)[5] zusammen, der sich auf monotone

---

Die Richtigkeit dieser letzten Behauptung hängt von den präzisen Sinn von »Definition« ab. Siehe unten die Besprechung der letzten Hilbertschen Arbeit. (»Über das Unendliche«, Math. Ann. 95.)

1) Dabei ist natürlich die klare mathematische Faßbarkeit vorausgesetzt.

2) Vgl. Méthodes et Problèmes de théorie de fonctions (P. 1922) p. 19: »Les nombres incommensurables et l'illusion du transfini«, ferner: Leçons sur la théorie des fonctions. 2. edid. Note VI.

3) Hardy, Quart. Journ. of Math. 35 (1903) p. 87. – Darüber berichtet Schoenfließ, Entw. d. Lehre v. d. Punktmannigfaltigkeiten. Bd. II, S. 22ff.

4) Leipziger Berichte (Math.-phys. Kl.) 59 (1907), S. 217.

5) Journal f. Math. 74, S. 294; ferner Math. Ann. 8 (1875), S. 363 und 11 (1877), S. 149.

Funktionen bezieht und es ermöglicht eine Menge ſolcher Funktionen nach der Schnelligkeit ihres Wachstums mittels der Zahlen der II. Zahlklaſſe abzuzählen. Nimmt man für dieſe Funktionen im ſpeziellen ſolche mit ſtets ganzzahligen Werten für die ganzzahligen Argumente, ſo kommt man zu einer entſprechenden Abzählung gewöhnlicher Zahlfolgen.

Freilich erhebt ſich nun auch dieſen Konſtruktionen gegenüber die Frage, ob ſich mit ihrer Hilfe alle Zahlfolgen abzählen laſſen, – oder ob nicht auch hier die Kluft zwiſchen der noch ſo weit getriebenen Konſtruktion und der »willkürlichen« Zahlfolge unverändert beſtehen bleibt.

3. Der intuitioniſtiſche Geſichtspunkt (Brouwer). Der wahre Begriff der allgemeinen reellen Zahl. – Brouwers Kontinuumtheorie wirft dieſe Frage in der Tat auf und beantwortet ſie durch die Unterſcheidung von frei werdenden und geſetzmäßig bis ins Unendliche hinein beſtimmten Folgen. Dies wurde ſchon erörtert (§ 1a, § 4a)[1].

Das Kontinuum wird nach Brouwer repräſentiert durch die frei werdende Wahlfolge, die damit an die Stellen der willkürlichen reellen Zahl tritt; es wird zum »Medium freien Werdens«[2]. Damit wird entſchloſſen das Problem der Vorſtellbarkeit der willkürlichen Folge angegriffen. Es wird gezeigt, daß diese Rückſichtnahme auf das zeitliche Moment, – indem der frei werdenden Folge die geſetzmäßige ſeiende gegenübergeſtellt wird – die der Vorſtellung der ganz willkürlichen Folge anhaftende Unklarheit überwindet[3]. Es iſt eben gar nicht derſelbe Begriff der Folge, der einmal in willkürlicher Allgemeinheit und das andere Mal in eindeutig beſtimmter Geſetzlichkeit verwandt werden kann. Das erklärt mit

---

1) Für die Beziehung von anſchaulichem und mathematiſchem Kontinuum iſt unſere frühere Arbeit in dieſem Jahrbuch, Bd. VI, zu vergleichen. Hier wird lediglich das mathematiſche Kontinuumproblem, das allein von der Mannigfaltigkeit der möglichen Zahlfolgen handelt, betrachtet.

2) Eine Vorwegnahme dieſes Gedankens bedeuten in gewiſſem Sinn manche Überlegungen P. du Bois-Reymonds in ſeiner »Allgemeinen Funktionentheorie« (Bd. I, Tübingen 1882). So macht er z. B. den Vorſchlag, einen willkürlichen Dezimalbruch ſukzeſſiv durch Auswürfeln der Stellen zu beſtimmen. Das iſt im Grunde eine echte »Würfelfolge«.

3) Vgl. den Ausſpruch Weyls: »Das ‚es gibt' (sc.: eine Folge von der Eigenſchaft E) verhaftet uns dem Sein und dem Geſetz; das 'jede' (sc.: Folge hat die Eigenſchaft Nicht-E) ſtellt uns ins Werden und in die Freiheit.« (Math. Zeitſchr. 10, Symposion I, S. 21).

einem Schlage die überraſchende Tatſache der unüberbrückbaren Kluft zwiſchen der noch ſo weit getriebenen Konſtruktion und dem »willkürlichen« Gebilde.

Welche Folgerung ergibt ſich nun aus der Brouwer-Weyl-ſchen Auffaſſung für die Interpretation des Kontinuumproblems? Es ſcheint ſich der folgende Schluß unabweisbar aufzudrängen: Es heißt einem Scheinproblem nachjagen, wenn man das Kontinuum abzählen will. Denn es gibt offenbar keine noch ſo umfaſſende Mannigfaltigkeit von geſetzmäßigen Folgen — und ſolche könnten doch allein geordnet werden — die jemals die freie Wahlfolge enthalten könnte, oder genauer geſagt, dem Spielraum der freien Wahlfolge umfangsgleich werden könnte. Das Kontinuumproblem iſt alſo ſinnlos[1]. —

Dieſe Argumentation iſt wirklich ſehr plauſibel, aber wir möchten ihr trotzdem nicht in ihrem ganzen Umfange zuſtimmen. Sie beſteht ſoweit zu Recht, als ſie dartut, daß der Spielraum einer völlig freien Wahlfolge nicht durch Konſtruktion von Verlaufsgeſetzen unendlicher Folgen erſchöpft werden kann. Aber es entſteht ihr ſelbſt gegenüber die kritiſche Frage: Was iſt eigentlich der genaue Sinn des Begriffs »Spielraum einer Wahlfolge«? Die Wahlfolge iſt ihrem eigenen Phänomenſinn nach immer im Werden, niemals vollendet. Der Begriff des Spielraums aber ſchließt gerade das Vollendet-Sein ein. Ein »Raum« ruht in ſich. Man kommt ſofort zu einem unauflöslichen Dilemma, wenn man ſich die Frage vorlegt: Hat dieſer »Spielraum aller möglichen Wahlfolgen« eine endliche oder eine unendliche Erſtreckung? Hätte er bloß eine endliche Erſtreckung — ſagen wir von n »möglichen« Gliedern — ſo ergäbe ſich, bei Beſchränkung auf q Ziffern, daß es q^n mögliche Folgen gibt; bzw. wenn unbegrenzt viele Zahlen zugelaſſen werden, eine gewöhnliche abzählbare Menge von Folgen ($\aleph_0{}^n = \aleph_0$). Alſo enthielte dann der Spielraum nicht einmal genug Platz für die $\aleph_1$ Folgen (d. h. die mittels der Zahlen der II. Klaſſe abzuzählenden Folgen), die Hardy uſw. konſtruiert haben. Soll andrerſeits der »Spielraum« ſich ins Unendliche erſtrecken, ſo kommt man notwendig zum unhaltbaren Begriff des Aktual-Unendlichen; denn ein »Spielraum« »iſt« und »wird« nicht[2].

---

1) Vgl. Weyl, l. c. »Da die Brouwerſche Auffaſſung zwiſchen dem Kontinuum und einer Menge diskreter Elemente eine abſolute Kluft befeſtigt, die jeden Vergleich ausſchließt, kann in ihr die Frage, ob das Kontinuum abzählbar iſt, gar nicht auftauchen.«

2) Man hat hier wieder ein Beiſpiel für die Unmöglichkeit, kombinatoriſche Begriffe fruchtbar auf das Unendliche zu erweitern. Kombinatoriſche

Es kann alſo vernünftigerweiſe gar nicht der Sinn des Kontinuumproblems ſein, ein konſtruktives Verfahren zu finden, um den »Spielraum der möglichen Wahlfolgen« zu erſchöpfen. Iſt damit aber der Sinn des Problems überhaupt zerſtört? Doch wohl nicht. Denn man kann immer noch fragen: gibt es nicht eine Mannigfaltigkeit möglicher geſetzmäßiger Folgen oder, anders gewendet: gibt es nicht einen zuläſſigen Begriff eines allgemeinſten Geſetzes einer Folge? Und kann man nicht dieſen Begriff eines allgemeinſten Geſetzes für eine Zahlfolge (zahlentheoretiſche Funktion) durch eine ſukzeſſiv erweiterte Konſtruktion erfüllen? Wenn man alſo auch den Begriff einer »ganz willkürlichen« geſetzloſen Funktion (ſei ſie nun zahlentheoretiſch oder ganz unſtetig) aufgeben muß, – iſt deshalb nicht doch noch die Idee eines Leerſchemas für ein mögliches Funktions-Geſetz und der Geſamtheit ſeiner möglichen Erfüllungen zuläſſig?

Es iſt vielleicht zweckmäßig, noch eine weitere Erwägung hinzuzufügen: Zu der eigentümlichen Beziehung, die die freie Wahlfolge als Repräſentant des Kontinuums als eines Mediums freien Werdens zu den zahlentheoretiſchen Funktionen hat, gibt es keine Analogie bei den beliebig unſtetigen Funktionen. Es gibt kein »Kontinuum« aller unſtetigen Funktionen als Medium freien Werdens, in der ſich alle Funktionen einbetten und das durch eine »freie Wahlfunktion« repräſentiert werden könnte[1]. Man könnte den Unterſchied beider Fälle darin ſehen, daß bei der zahlentheoretiſchen Funktion die Argumente eine »wohlgeordnete« Menge bilden, d. h. in eine abzählbare Reihe geordnet ſind, während die Argumente der unſtetigen Funktion ein kontinuierliches Intervall (oder noch allgemeiner: irgend eine lineare Punktmenge) bilden, das nicht wohlgeordnet iſt, und deſſen Wohlordnung (Abzählung mittels der transfiniten Ordnungszahlen), ja gerade die Aufgabe des Kontinuumproblems iſt. Aber damit iſt nicht der Kern der Sachlage getroffen. Selbſt wenn man ſich die Wohlordnung des Kontinuums der Argu-

---

Operationen kann man eben nur an »ſtillhaltenden«, actu daſeienden Gegenſtändlichkeiten vollziehen, nicht an ἄπειρα δυνάμει ὄντα.

1) Vgl. Weyl, l. c.: »Wenn es heißt 'jede Folge', wandelt ſich der Begriff des Geſetzes (functio discreta) in den der werdenden Wahlfolge; hingegen ſteht uns für die functio mixta und continua [die eine Folge einer Zahl bzw. eine Folge einer Folge zuordnen] kein derartiges Kontinuum zur Verfügung, in das ſie ſich einbetten, wie die einzelne functio discreta in das Kontinuum der frei werdenden Wahlfolge.«

mentpunkte auf konſtruktive Weiſe aktuell vollzogen denkt, könnte man immer noch nicht von einer freien Wahlfolge ſprechen. Man hätte zwar eine »zahlentheoretiſche Funktion von Zahlen der II. oder N^{ten} Zahlklaſſe«[1] oder anders ausgedrückt eine »transfinite Zahlfolge«, – aber die Idee einer »transfiniten freien Wahlfolge«, die Schritt für Schritt wird, iſt offenbar abſurd. Denn ſie würde ja niemals bis zur ω^{ten} Argumentſtelle gelangen! Es beſteht alſo wirklich ein grundlegender Unterſchied zwiſchen indefiniten und transfiniten Folgen und deshalb auch zwiſchen gewöhnlichen zahlentheoretiſchen Funktionen und »transfiniten« Funktionen (oder a fortiori beliebig unſtetigen Funktionen), indem nur die erſten eine »Repräſentation ihres Spielraums« (wenn man dies für den Augenblick wieder als möglich annimmt) durch eine Wahlfolge zulaſſen. Trotzdem beſteht ja, wie wir ſahen, das hiſtoriſch überlieferte Problem der Erſchöpfung aller Möglichkeiten der »ganz willkürlichen« Funktionen durch Geſetzeskonſtruktionen in dem einen wie dem anderen Fall in derſelben Weiſe. Das überlieferte allgemeine Problem muß alſo ohne den Begriff der Wahlfolge angreifbar oder wenigſtens interpretierbar ſein, da dieſer ja nur in dem ganz ſpeziellen Fall der zahlentheoretiſchen Funktion möglich iſt.

Wir kommen alſo zu dem Ergebnis, daß die Brouwerſche Idee der Wahlfolge, ſo fruchtbar ſie auch für manche Frageſtellungen iſt, doch an dem Kern des Kontinuumproblems vorbeiführt. Die Brouwerſchen Gedanken ſind für die mathematiſche Erfaſſung des anſchaulichen Kontinuums ſehr wichtig. (Dieſe Seite des Problems wurde ja von uns in einer früheren Arbeit (dſ. Jahrb. VI) in genügender Ausführlichkeit behandelt.) Aber zur Löſung des mathematiſchen Kontinuumproblems, um die es ſich hier ausſchließlich handelt, tragen ſie im Grunde nichts bei.

Wir können uns hier nicht ganz mit Weyls Anſchauungen einverſtanden erklären. Weyl hat früher (1918) eine rein konſtruktive Kontinuumtheorie entworfen[2]. Es wurde darin ein »Weylſches Zahlenſyſtem« aufgeſtellt, das alle Zahlen (Funktionen) umfaßt, die mit gewiſſen, genau umſchriebenen Konſtruktionsprinzipien erreicht werden können. Eine einfache Überlegung zeigt, daß die Geſamtheit der jeweils de facto konſtruierten Gebilde durch die natürlichen Zahlen abzählbar ſein muß (vgl. die analoge Betrachtung Borels).

1) Man kann, ohne weſentliche Einſchränkung der Allgemeinheit, ſich die Funktionswerte auf 0 und 1 beſchränkt denken.

2) In ſeiner Schrift »Das Kontinuum« (1918) und in dem 1. Abſchnitt ſeines Aufſatzes »Über die neue Grundlagenkriſe uſw.« (Math. Zeitſchrift 10).

Dagegen ergibt ſich für die Menge aller durch unbegrenzt häufige Anwendung der Konſtruktionsprinzipien (Iteration) erreichbaren Zahlen die Mächtigkeit des Kontinuums[1]. Es werden hier alſo neben wirklich vorgelegten auch »mögliche Geſetze« und die Geſamtheit aller möglichen Geſetze in Betracht gezogen. Das entſcheidende Motiv, daß Weyl zur Aufgabe der früheren Theorie veranlaßte, iſt nun der Gedanke, daß der Begriff des »möglichen Geſetzes« eigentlich ſinnlos ſei. Weyl ſagt (Math. Zeitſchr. 10) »die Frage nach der »Möglichkeit« ſtellt uns ebenſowenig einem mit »Ja« oder »Nein« antwortenden Sachverhalt gegenüber, wenn ſie geſtellt wird mit Bezug auf die beliebig oft zu wiederholende Anwendung der Konſtruktionsprinzipien, wie mit Bezug auf die unendliche Zahlenreihe, das iſt der beliebig oft zu wiederholende Prozeß des Übergangs von einer Zahl zur nächſtfolgenden«. Und an einer anderen Stelle: »Hier iſt alſo von der Möglichkeit der Konſtruktion gar nicht die Rede, ſondern nur im Hinblick auf die gelungene Konſtruktion, den geführten Beweis, ſtellen wir eine derartige Exiſtenzialbehauptung auf [»Es gibt ein Geſetz von der Eigenſchaft E«]. Die negative Ausſage, daß es ein ſolches Geſetz nicht gibt, bleibt natürlich jeden Sinnes bar . . .«[2].

Hier möchten wir nun gewiſſe Zweifel äußern: Zwar müſſen wir Weyl zugeben, daß man nicht Gebilde, die von den beliebig oft wiederholten Elementar-Konſtruktionen gebildet werden, in ihrer Geſamtheit als »an ſich« vorliegende mathematiſche Gegenſtändlichkeiten betrachten kann. Aber trotzdem kann man fragen: Iſt wirklich der Begriff eines möglichen Funktionsgeſetzes und die Geſamtheit ſolcher möglichen Geſetze unter allen Umſtänden unvollziehbar?

Es laſſen ſich doch offenbar unter Umſtänden gewiſſe unendliche Mannigfaltigkeiten von Geſetzen bilden. Nämlich unter der Vorausſetzung, daß die Mannigfaltigkeit ſelbſt von einem Geſetze höherer Ordnung beherrſcht wird. Es handelt ſich dann offenbar um ein

---

1) Man kann die konſtruktiven Operationen etwa mit $O_1\ O_2 \ldots O_n$ bezeichnen. Irgend eine endliche Kombination $(O_{i_1}\ O_{i_2} \ldots O_{i_n})$ entſpricht eineindeutig einem endlichen Kettenbruch, eine unendliche Kombination einem unendlichen, alſo bzw. einer rationalen oder irrationalen Zahl. Die beiden im Text genannten Geſamtheiten ſind alſo der Menge der rationalen bzw. der irrationalen Zahlen äquivalent.

2) Dann folgt die Interpretation des Wortes »Folge« in dem Satze »jede Folge hat die Eigenſchaft nicht-E« als freie Wahlfolge. Der ſo interpretierte Satz tritt dann an die Stelle der »ſinnloſen« Ausſage: »Es gibt kein Geſetz von der Eigenſchaft E.«

wirklich vorliegendes Geſamtgeſetz, es fügt ſich eben die geſamte in dieſer Weiſe geordnete Mannigfaltigkeit zu einem Geſetz höherer Ordnung zuſammen. Dieſes Geſamtgeſetz kann ſich ins Unendliche hinein – nach einer ſtreng konſtruktiven Regel – entfalten, und zwar nicht nur in indefinitum, ſondern auch in transfinitum. Die Ordnung iſt ſelbſtverſtändlich immer »Wohlordnung« (wie ſie im Weſen des transfiniten Progreſſus liegt, um den es ſich hier natürlich wieder handelt) und die Menge der Einzel-Geſetze iſt mittels der Cantorſchen Transfiniten »abzählbar«[1].

Nun kann eine derartige Konſtruktion wirklich in einem gewiſſen Sinn die Mannigfaltigkeit aller möglichen Geſetze umfaſſen, indem ſie nämlich das Schema einer univerſellen Klaſſifikation bildet, in das jedes einzelne Geſetz, ſeinem formalen Charakter nach, an einer beſtimmten Stelle eingeordnet werden kann. Den Klaſſen können Indizes zugeordnet werden (die i. a. transfinit werden können), die den »Rang« der in der Klaſſe vereinigten Geſetze anzeigen. Ein elementares Beiſpiel iſt die Cantorſche Abzählung der algebraiſchen Gleichungen mit ganzen Koeffizienten (bzw. der algebraiſchen Zahlen). Hier enthält jede Klaſſe endlich viele Elemente. Ein verwickelteres Beiſpiel iſt die Klaſſifikation gewiſſer monotoner Funktionen nach der Schnelligkeit ihres »Wachstums« (du Bois-Reymond, Borel u. a.). Hier enthält jede Klaſſe unendlich viele Funktionen und die ganze Konſtruktion geht ins Transfinite[2].

Es iſt nun hier die Möglichkeit geboten, über den unfruchtbaren Begriff der ganz »willkürlichen« Zahl oder Funktion

1) Vgl. dazu meine frühere Arbeit, dſ. Jahrbuch VI, p. 413–14, beſ. die Anmerkungen 1 und 2 zu S. 414. — Es wurde dort für unmöglich erklärt, daß »unendliche Mengen von Konſtruktionsmöglichkeiten beſtehen, ohne daß ſie nach einer Regel aufgezählt würden«. »Kombinationen, bei denen die (unbegrenzte) Iteration zugelaſſen iſt, ſind nur durch konkrete vorgelegte Geſetze angebbar, nicht durch 'mögliche' Geſetze« (l. c. Anm. 1). — Dann wird weiter geſagt (l. c. Anm. 2): »Natürlich kann man auch unendliche Mengen von Geſetzen aufſtellen, nur müſſen ſie ihrerſeits geſetzmäßig beſtimmt ſein ... Derartige Mengen ſind ſtets abzählbar. Hat man ſie aber in eine abzählbare Reihe gebracht, ſo hat man aus der geordneten unendlichen Menge von Geſetzen ein einziges gemacht.«

Es war hier unter »abzählbar« abzählbar mittels der natürlichen Zahlen gemeint. In dieſem Punkte glaube ich heute über meine frühere Auffaſſung (die mit der Weyls genau übereinſtimmte) hinausgehen zu müſſen, indem ich jetzt auch Abzählbarkeit mittels der transfiniten Cantorſchen Ordnungszahlen zulaſſe. Mit dieſer Verallgemeinerung möchte ich aber obige Sätze wörtlich aufrecht erhalten.

2) Gerade bei dieſer Konſtruktion iſt übrigens vieles ungeklärt. Sie ſoll hier nur als allgemein illuſtrierendes Beiſpiel verwendet werden.

hinauszukommen. Indem man ſowohl von dem unmöglichen Allgemeinbegriff der ganz willkürlich zuſammengewürfelten Menge von Ziffern u. dgl. als auch von der hier nicht relevanten Vorſtellung der frei werdenden Wahlfolge abſieht, gelangt man zu dem äußerſt fruchtbaren Begriff des möglichen zahlentheoretiſchen Funktionsgeſetzes. Dieſer Begriff iſt deshalb ſo fruchtbar und wird vielleicht wirklich einmal zur Löſung des Kontinuumproblems führen, weil ein Geſetz in einem beſtimmten, früher präziſierten Sinne[1] ſeinem Weſen nach finit iſt. Denn der eigentliche Sinn eines mathematiſchen Geſetzes iſt ja gerade, mittels eines endlichen Gedankens das Unendliche zu beherrſchen. Dabei muß allerdings das Unendliche in der kategorialen Form des Prozeſſes auftreten; aber es braucht ſich nicht nur um einen gewöhnlichen »indefiniten«, ſondern es kann ſich auch um einen echten »transfiniten« Prozeß dabei handeln. Da aber das Geſetz ſelbſt, ſeinem Inhalt nach, finit iſt, iſt es auch möglich, auf ſolche Geſetze kombinatoriſche Verfahrungsweiſen anzuwenden, den Spielraum möglicher Geſetze abzuſtecken u. dgl.[2].

Die »allgemeine« reelle Zahl (oder unſtetige Funktion) iſt alſo nicht mehr ein Begriff, der dem einer beſtimmten vorlegbaren geſetzmäßig gebauten Zahl oder Funktion gänzlich fremd oder disparat gegenüberſteht. Sondern jener geſuchte Allgemeinbegriff iſt nichts anderes als der allgemeine Begriff des beſtimmten vorlegbaren Exemplars ſelbſt: er iſt das leere Schema, deſſen Umfang durch die konkreten Beiſpiele direkt ausfüllbar iſt. Damit iſt nun endlich, grundſätzlich und kategorial geſehen, die Kluft zwiſchen der allgemeinen »beliebigen« und der beſtimmten Funktion überbrückt. Die Ausſage: »y hängt vom x geſetzmäßig ab« iſt nicht mehr »dunkel« (wie Hankel meinte). Denn die Art und Weiſe, wie die Mannigfaltigkeit der einzelnen Beiſpiele von Funktionen den Allgemeinbegriff füllt, iſt durch die Konſtruktion der indefiniten bzw. transfiniten Folge von Stufen, nach der die Geſetze klaſſifiziert werden, prinzipiell beſtimmt. Die Aufgabe, dieſe ausfüllende Konſtruktion wirklich vorzunehmen, iſt nicht mehr ſinnlos.

---

1) Vgl. in der Darſtellung des transfiniten Prozeſſes § 5 a die Erörterung auf Seite 106–109.

2) Es handelt ſich allerdings, genau genommen, i. a. nicht um rein endliche Kombinatorik, nach dem Schema n^m, ſondern um ein endliches Schema $(\alpha_1\ \alpha_2 \dots \alpha_p)$, wo für die α_i jeweils unendlich viele »Ziffern« eingeſetzt werden können; die Mannigfaltigkeit der Möglichkeiten iſt dann $\aleph_0^{\aleph_0} = \aleph_0$. Man kommt ſo über $\aleph_0$ nicht hinaus.

Damit ist die Konstruktion natürlich noch nicht durchgeführt, aber die prinzipielle Möglichkeit ist eröffnet nach ihr zu suchen. Hilberts Lösungsversuch, dem wir uns nunmehr in unserer Darstellung zuwenden, läuft in der Tat darauf hinaus, die in Rede stehende Konstruktion wirklich auszuführen.

III. D. Hilberts Lösungsversuch des Kontinuumproblems[1].

A. Die angebliche Rolle der Beweistheorie bei der Hilbertschen Lösung.

Die vorhergehende Darstellung der geschichtlichen Entwicklung des Kontinuumproblems und der Möglichkeit, die sich prinzipiell für seine Lösung ergab, führt unmittelbar bis an die Schwelle der Hilbertschen Betrachtungen. Damit ist natürlich nicht gesagt, daß sich jene Betrachtungen aus der historischen Entwicklung mit Selbstverständlichkeit ergeben hätten. Sondern jene Entwickelungslinie tritt nur für den in der geschilderten Weise hervor, der Hilberts Arbeit kennt.

Hilbert hat selbst allerdings eine andere Auffassung von seiner neuen Theorie: er nimmt sie als Bestätigung seiner Lehre von den Grundlagen der Mathematik, seiner Beweistheorie und seiner symbolischen, auf den finiten metamathematischen Betrachtungen basierenden Mathematik in Anspruch. Seine Beweistheorie sei »nach ihren Früchten« zu beurteilen, und ihre schönste Frucht sei eben ein Beweis der Cantorschen Vermutung über die Mächtigkeit des Kontinuums.

Es muß von vornherein gesagt werden, daß wir diesen Anspruch Hilberts nicht für gerechtfertigt halten. Im Gegenteil scheint uns die große Bedeutung seines kühnen und eigenartigen Lösungsversuchs des berühmten Problems gerade in dem sachlichen, nichtsymbolischen Sinn seiner Betrachtungen zu liegen. Wir halten diese, in Hilberts eigener Terminologie gesprochen, für metamathematische.

Es sei an unsere früheren Erwägungen bezüglich der Hilbertschen Beweistheorie selbst erinnert (§ 3c), wo sich ergeben hatte, daß auch die Metamathematik ohne die unmittelbare sachlich-inhaltliche Anerkennung des indefiniten oder endlosen Prozesses (der vollständigen Induktion) nicht auskommt. Anderseits ist auch auf die Darlegung der Rolle hinzuweisen, die selbst im transfiniten Prozeß die als solche stets finite Gesetzlichkeit spielt. (§ 5a, S. 106ff.). Es lassen sich danach in einem bestimmten Sinne die beiden scheinbar sich wider-

1) Hilbert, Über das Unendliche, Math. Ann. 95, S. 161—190.

ſprechenden Behauptungen aufrecht erhalten, die Metamathematik enthalte das Transfinite (in Form des Progreſſes) und ſei trotzdem ihrer gedanklichen Struktur nach finit, denn der finite Geſetzesgedanke beherrſcht mit Hilfe des Begriffs des offenen Horizonts das Transfinite.

Damit entfällt die Notwendigkeit, den transfiniten Prozeß (als Prozeß!) »ſymboliſch« zu begründen, d. h. insbeſondere ſeine Widerſpruchsfreiheit nachzuweiſen[1]. Er kann unmittelbar als anſchauliches Phänomen verwendet werden. Und nun iſt das Entſcheidende: die Hilbertſchen Erwägungen zur Löſung des Kontinuumproblems benutzen außer dieſem Prozeß keine transfiniten Begriffe. Alſo können dieſe Erwägungen auch nicht die Notwendigkeit und Fruchtbarkeit der Hilbertſchen Beweistheorie erhärten. Dies iſt nun im einzelnen zu belegen.

B. Hilberts Hauptbetrachtung.

Die Hauptbetrachtung Hilberts beſteht in der Rangordnung aller möglichen zahlentheoretiſchen Funktionen. Dazu bedarf es eines geſetzlichen Rahmens, in den hinein ſie geordnet werden können (vgl. die vorangehenden Betrachtungen am Schluſſe von Abſchnitt II). Dieſer Rahmen wird gefunden durch Bezugnahme auf die Weiſe der Erzeugung der einzelnen Funktion. Die Erzeugung wird vollzogen durch zwei elementare Hilfsmittel: erſtens die Einſetzung (die Erſetzung eines Arguments durch eine neue Variable), zweitens die Rekurſion (nach dem Schema der Ableitung des Funktionswertes für $n + 1$ aus demjenigen für n). – Der Hilbertſche Grundgedanke iſt nun, dieſen beiden Erzeugungsmitteln der Funktionen die beiden Erzeugungsprinzipien, die zu den Zahlen der II. Cantorſchen Zahlklaſſe führen, nämlich der Addition von Eins und den Übergang zum Limes bei einer (gewöhnlichen) abzählbaren Folge parallel zu ſetzen. So wie die beiden Cantorſchen Erzeugungsprinzipien die Zahlen der II. Klaſſe erzeugen, ſo bringen Einſetzungen und (gewöhnliche in-

1) Wir ſahen, bei der Betrachtung der Paradoxie der Menge W (§ 5a, III), daß ſich die Widerſpruchsfreiheit des transfiniten Progreſſes bezüglich dieſer Paradoxie in voller phänomenologiſcher Evidenz ergibt, ohne irgendwelche »Argumentation«, aus der intuitiven Einſicht in den Sinn des Phänomens der iterierbaren Reflexion. Indeſſen ſind neuerdings noch gewiſſe andere, rein mathematiſche Schwierigkeiten aufgetaucht, bezüglich deren eine Entſcheidung z. Zt. noch nicht gefallen iſt. (Vgl. den mathematiſchen Anhang zu § 5, Nr. VI).

definite) Rekurſionen die zahlentheoretiſchen Funktionen hervor. Vermöge dieſes Parallelismus beſteht eine eindeutige Zuordnung zwiſchen den transfiniten Zahlen und den Funktionen.

Dies iſt, wie geſagt, der ſehr einfache Grundgedanke. Indeſſen ſtellen ſich der Ausführung noch mannigfache Hinderniſſe entgegen, die von Hilbert z. Z. auch nur zum Teil überwunden ſind.

Zunächſt ſetzt die Parallelität zwiſchen Zahlen und Funktionen eine lineare, eindimenſionale Ordnung der letzteren voraus. Aber das Verfahren der Rekurſion führt im allgemeinen durchaus nicht auf eine ſolche eindimenſionale Ordnung. Es beſtehen mannigfache Möglichkeiten des Übergangs von n auf $n+1$ und man braucht im allgemeinen eine »verſchränkte, nach verſchiedenen Variablen zugleich genommene (ſimultane) Rekurſion«. Die Auflöſung dieſer in gewöhnliche ſukzeſſive Rekurſionen gelingt erſt, wenn man »höhere Variablentypen« benutzt[1]). Mit Hilfe dieſer nach ihrer »Höhe« abgeſtuften Variablentypen gelingt dann die Zuordnung zu den Zahlen der II. Klaſſe. Hilbert gibt dazu zwei Verfahren an: 1. Legt man nur Variablentypen bis zu einer beſtimmten Höhe zugrunde, ſo erhält man durch Einſetzung abzählbar viele ($\aleph_0$) Funktionen. Man gewinnt alſo abzählbare Funktionsklaſſen, die man nach der Höhe der zugrunde liegenden Variablentypen ordnen kann. Dieſe Typen ſelbſt entſprechen aber umkehrbar eindeutig den Zahlen der II. Klaſſe.

---

1) Zur Erläuterung dieſes Begriffs ſei bemerkt: Hilbert unterſcheidet 1. Grundvariable (dieſe wieder nach Cantorſchen Zahlklaſſen) und 2. Variabletypen, die durch Anwendungen der logiſchen Verknüpfungen auf die Ausſagen der Grundvariablen entſtehen. Als Beiſpiele können dienen: Funktion (der Grundvariablen), Funktionen-funktion, Funktionen-funktionen-funktion . . . (dies kann dann transfinit iteriert werden!). – Dieſe Variablentypen werden nun nach ihrer »Höhe« klaſſifiziert: a) Höhe *0:* Zahlenkonſtante; b) Höhe *1:* Funktionen mit Grundvariablen als Argument; c) Allgemeine Regel: Eine Funktion, deren Argumente die (höchſte) Höhe α und deren Wert die Höhe β erreicht, beſitzt die Höhe $\alpha+1$ bzw. $\beta+1$, je nachdem $\alpha>\beta$ oder $\beta>\alpha$ iſt. (Für $\alpha=\beta$ iſt $\alpha+1=\beta+1$, alſo die Wahl unnötig.) Dabei können α, β transfinite Zahlen ſein.

Man ſieht hieraus, daß dieſe Höhen nichts anderes als die von uns früher eingeführten »Stufencharakteriſtiken« ſind, die die Komplikation eines intentionalen Gebildes anzeigen. – Da meine diesbezüglichen Betrachtungen noch ohne Kenntnis des Hilbertſchen Aufſatzes angeſtellt wurden, iſt mir das enge Zuſammentreffen mit Hilbert eine willkommene Beſtätigung für die Richtigkeit meines Gedankengangs. – Einiges Nähere über die Hilbertſche Theorie der Transfiniten, Variablentypen uſw. im »Mathematiſchen Anhang, Ergänzung zu § 5, Nr. II.

– 2. Man kann den Umſtand berückſichtigen, daß die Zahlen der II. Klaſſe ſelbſt zu ihrer Definition gewiſſe Einſchachtelungen, alſo Variablentypen benötigen. »Wir brauchen nun nicht der einen vorliegenden Zahl der II. Klaſſe die ſämtlichen Funktionen derſelben Höhe zuzuordnen, ſondern können die Zahlen der II. Klaſſe und die Funktionen ſich nach der Höhe der zu ihrer Definition nötigen Variablentypen einander entſprechen laſſen«. (l. c., S. 188). – Kurz geſagt und unſerer eigenen früheren Terminologie (§ 5a) entſprechender: Der Grad der Komplikation dient als Leitfaden der Zuordnung; daß die Stufung nach der intentionalen Struktur-Komplikation beide Male anwendbar iſt, das ermöglicht eigentlich die ganze Paralleliſierung von transfiniten Zahlen und Funktionen.

Damit iſt angedeutet, wie Hilbert die Schwierigkeit der »verſchränkten« Rekurſion überwindet und die Zuordnung wirklich vollzieht.

C. Das Lemma II.

Es ſind nun aber noch zwei ſehr weſentliche fernere Schwierigkeiten zu überwinden, ehe man von einer wirklichen Löſung des Kontinuumproblems ſprechen kann. Dieſe Probleme ſind von Hilbert z. Zt. noch nicht gelöſt, ſondern ihre Löſung wird in zwei Hilfsſätzen gefordert, die als Lemma I. und II. bezeichnet werden.

Das Lemma II, das wir zweckmäßig zuerſt beſprechen, lautet: »Zur Bildung von Funktionen einer Zahlvariablen ſind transfinite Rekurſionen entbehrlich und zwar reicht die gewöhnliche, d. h. nach einer Zahlvariablen fortſchreitende Rekurſion nicht nur für den eigentlichen Bildungsprozeß der Funktion aus, ſondern es genügt auch, bei der Einſetzung ſolche Variablentypen allein anzuwenden, deren Definition nur gewöhnliche Rekurſionen erfordert«[1].

Dieſes Lemma betrifft alſo die Möglichkeit des Vorkommens transfiniter Rekurſionen. In der Tat war ja in der ganzen Hauptbetrachtung ſtillſchweigend vorausgeſetzt, daß nur gewöhnliche Rekurſion angewandt wird. Denn nur der gewöhnlichen, indefiniten Rekurſion entſpricht der gewöhnliche ω-Limesprozeß, der nur bis zu den transfiniten Zahlen der II. Klaſſe führt. Einer höheren, transfiniten Rekurſion würden höhere Limesprozeſſe (Ω_1-,

1) l. c. S. 189. – Hilbert gibt dort auch noch eine »finite« Formulierung: »Wenn unter Heranziehung einer höheren Rekurſion oder aus den entſprechenden Variablentypen eine Funktion gebildet worden iſt, die nur eine gewöhnliche Zahl als Argument hat, ſo läßt ſich dieſe Funktion auch ſtets durch gewöhnliche Rekurſion und unter ausſchließlicher Anwendung der Z-Typen (gewöhnlichen Zahlvariablentypen) definieren«.

Ω_2 ... Prozeſſe, wo Ω_1 Ω_2 ... die Anfangszahlen der III., IV. uſw. Zahlklaſſe darſtellen) zuzuordnen ſein, und man käme mit der Abzählung in die III. oder eine noch höhere Zahlklaſſe hinein. Damit wäre aber der Beweis des Kontinuumſatzes $\mathfrak{c} = \aleph_1$ hinfällig. Man käme nur zu $\mathfrak{c} = \aleph_\alpha$, wo α ganz unbeſtimmt iſt und vielleicht ſogar transfinit. Das wäre aber nicht mehr als die allgemeine Behauptung, daß das Kontinuum irgendwie wohlgeordnet werden kann.

Der Beweis von Lemma II iſt alſo entſcheidend für das Gelingen der geſamten Hilbertſchen Abſicht. Dieſer Beweis ſteht noch aus. Es läßt ſich aber ſoviel ſagen, daß das Problem, das dieſer Beweis darſtellt, durchaus mit den begrifflichen Mitteln unſerer Metamathematik (wo das Transfinite nur in Form eines Prozesses auftreten darf), ausgedrückt werden kann. Die Frage iſt die, ob es möglich iſt, einer gewöhnlichen Zahlfolge ein echt transfinites Verlaufsgeſetz aufzuprägen, das alſo nicht auf ein indefinites Geſetz reduziert werden kann. Dieſe Frage verneint das Lemma II. Wie die Entſcheidung indeſſen auch ausfallen möge, ſoviel iſt ſicher, daß die Antwort auf die Frage in die Theorie der unendlichen Prozeſſe (im weiteſten) Sinn gehört. Der Beweis des Lemma wird ſich alſo in metamathematiſchen Erwägungen bewegen müſſen.

Zur näheren Erläuterung möge folgendes dienen:

Das Lemma II läuft doch darauf hinaus, daß eine einfache Zahlfolge nicht imſtande iſt, eine echt transfinite Geſetzlichkeit aufzuweiſen. Sie ſtellt gewiſſermaßen mit ihren $\aleph_0$ Gliedern zu wenig Stoff zur Verfügung, ſo daß man ihr keine Struktur von transfiniter Komplikation aufprägen kann. Denn ſie iſt ja ſchon durch eine gewöhnliche, von n auf $n+1$ gehende Regel reſtlos feſtzulegen. Anders verhält ſich eine transfinite Ω_1-Folge, oder ein Abſchnitt des Kontinuums, der ja ſicher Teilmengen enthält, die in eine Ω_1-Folge geordnet werden können (Hardy). Deshalb ſind auch bei allgemeinen unſtetigen Funktionen (mit einem kontinuierlichen Intervall als Argument) oder bei zahlentheoretiſchen Funktionen höherer (transfiniter) Klaſſe transfinite Komplikationen möglich, worauf auch Hilbert hinweiſt (l. c. S. 189: »An ſich iſt es gewiß, daß transfinite Rekurſionen und dementſprechend höhere Variablentypen in mathematiſchen Unterſuchungen, z. B. für die Bildung von Funktionen reeller Variablen mit gewiſſen Eigenſchaften notwendig gebraucht werden«).

Nun zeigt andererſeits das Cantorſche Diagonalverfahren, daß die Menge f der unſtetigen Funktionen mächtiger iſt als

die Menge c der zahlentheoretiſchen Funktionen der I. Klaſſe. Allerdings iſt das Diagonalverfahren nach den ſtrengen Anforderungen unſerer »intuitiven« Mathematik (oder »Metamathematik«) nur auf wirklich vorliegende unendliche Reihen von Folgen anwendbar, aber offenbar ebenſogut auf eine transfinite Ω_1-Reihe von transfiniten Ω_1-Folgen, als auf eine ω-Reihe von ω-Folgen. (Dagegen erſcheint ein Diagonalſchema, wie es bei Heſſenberg, Grundbegriffe der Mengenlehre, § 25, S. 44 auftritt, mit der rein ſchematiſchen »Abzählung« nach a, b, c ..., nicht zuläſſig in der Metamathematik.) In Anbetracht deſſen, daß man (nach Hilberts Hauptbetrachtung) in jedem Falle das Kontinuum in eine Ω_α-Reihe (von der Mächtigkeit $\aleph_\alpha$) ordnen kann, genügt auch das beſchränkte Diagonalverfahren, um zu zeigen, daß, wenn $\mathfrak{c} = \aleph_\alpha$, $\mathfrak{f} > \aleph_\alpha$ iſt. – Alſo übertrifft die Menge der »höheren« Funktionen die »gewöhnlichen« und dem entſpricht, daß der Spielraum der »höheren« Geſetzlichkeiten, der Umfang ihrer Möglichkeit, größer iſt. Von hier aus geſehen, erſcheint das Lemma II plauſibel[1]. Nun bleibt noch das Lemma I zur Erörterung übrig. Dieſes betrifft eine tiefliegende und grund-

1) Eine über das Wohlordnungsproblems des Kontinuums verbreitete Meinung, die ſich auf eine Betrachtung von Lebesgue (Contributions à l'étude des correspondances de M. Zermelo, Bull. Soc. Math. 35 [1907]) ſtützt, die von Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre[1] (Leipzig 1914) S. 429f., wiedergegeben wird, ſcheint auf den erſten Blick dem Lemma II. zu widerſprechen. Es handelt ſich um die Tatſache, daß die Zermeloſche Auswahl ausgezeichneter Elemente aus jeder Teilmenge der wohlzuordnenden Menge, die für das allgemeine Zermeloſche Wohlordnungsverfahren notwendig wird, beim Kontinuum auf »unmeßbare«, alſo jedenfalls Nicht-Baireſche Funktionen führt, die demnach »analytiſch nicht darſtellbar« ſind. Es laſſen ſich alſo »geſetzmäßige Regeln« (im Sinne der Funktionen der »normalen« Mathematik) für die Auswahl ... überhaupt nicht angeben« (Fraenkel, Mengenlehre, S. 203). D. h. offenbar in unſerer Sprache, daß jene »auswählenden Funktionen« unreduzierbar transfinit ſind. Lemma II behauptet aber doch gerade, daß zur Wohlordnung der Zahlfolgen nur gewöhnliche Rekurſionen verwendet zu werden brauchten. – Dies iſt indeſſen nur ſcheinbar ein Widerſpruch. Denn man braucht zur Wohlordnung des Kontinuums eben keineswegs nach dem Zermeloſchen Syſtem vorzugehen. Es handelt ſich doch darum, die Zahlfolgen ſelbſt, alſo nicht die ſämtlichen Teilmengen des Kontinuums zu ordnen. Die Ordnung und die Überblickung der Menge ſämtlicher Teilmengen $M = \mathfrak{U}(N)$ einer Menge N iſt aber grundſätzlich eine ſchwierigere Aufgabe als die Ordnung der Elemente der Menge N ſelbſt. In unſerem Fall iſt $M = \mathfrak{U}(N)$ weſentlich dasſelbe wie die Menge aller (unſtetigen) Funktionen einer (kontinuierlichen) Variablen. [Man kann etwa den Punkten jeder Teilmenge des Kontinuums den Wert 1, der jeweiligen Reſtmenge den Wert 0 geben und erhält dann die entſprechende

legende Frage und hier iſt der Punkt, wo Hilbert wohl auf die Relevanz ſeiner Beweisführung beſtehen wird.

D. Das Lemma I.

Bevor wir auf den Wortlaut des Lemma eingehen, iſt es zweckmäßig, noch einige Vorbemerkungen zu machen: Wir hatten früher (in § 1a und § 4a) Zahlfolgen kennen gelernt, die mit beſtimmten zurzeit noch ungelöſten mathematiſchen (beſ. zahlentheoretiſchen) Problemen verknüpft waren, ſo z. B. mit dem Fermatſchen Problem, dem Problem der Zwillingsprimzahlen und dgl. Oder man nehme, um ein beſtimmtes Beiſpiel zu haben, die Hilbertſche Funktion der Folge $1^{\sqrt{1}}\ 2^{\sqrt{2}}\ 3^{\sqrt{3}} \ldots n^{\sqrt{n}} \ldots$, wo für ein Glied 1 zu ſetzen iſt, wenn es rational, 2, wenn es irrational iſt. Solche Folgen wollen wir der Kürze halber problematiſche Folgen nennen. Sie können verſchiedener Art ſein: manche ſind Schritt für Schritt berechenbar, alſo den Wahlfolgen analog; bei anderen ſind endlich oder unendlich viele oder auch alle Glieder mit einer endlichen Anzahl von Ausnahmen oder endlich auch alle Glieder überhaupt unbekannt. Gemeinſam iſt ihnen allen, daß kein die Struktur der Glieder beherrſchendes Geſetz bekannt iſt.

Was hat man nun von ſolchen »problematiſchen« Folgen zu halten? Müſſen ſie nicht auch bei der Abzählung aller Folgen mit in Rückſicht gezogen werden? Und wenn dies der Fall iſt, wie ſoll man ſie abzählen?

Hilbert antwortet darauf mit dem in Rede ſtehenden Lemma I, das ſelbſt ein beſonderer Fall eines allgemeinen Lemma iſt, das die Lösbarkeit eines jeden mathematiſchem Problems behauptet. Dieſer Behauptung hat bekanntlich Brouwer energiſch widerſprochen (ſ. o. S. 55). Indeſſen verſteht er wohl unter Löſung eines Problems eine wirkliche konſtruktive Löſung und weigert ſich an das Beſtehen einer ſolchen a priori für alle Fälle zu glauben.

Hilbert dagegen meint nur, daß »die Annahme der Lösbarkeit eines jeden mathematiſchen Problems widerſpruchsfrei iſt[1].« Daß die Behauptung der Lösbarkeit widerſpruchsvoll iſt, hat aber Brouwer nicht geſagt; er meint

---

unſtetige Funktion.] Dieſe iſt allerdings nur mittels transfiniter Rekurſion geſetzlich beherrſchbar. Aber ihre Mächtigkeit f iſt auch größer als die des Kontinuums c. — Vgl. zum Ganzen: Math. Anh. z. § 5, Nr. VI C.

1) Er bemerkt (l. c. S. 180) ausdrücklich: »Nun kann zwar meine Beweistheorie nicht allgemein den Weg angeben, auf dem jedes mathematiſche

nur, wenn ſie auch widerſpruchsfrei iſt, ſo braucht ſie deshalb doch noch nicht wahr zu ſein. Man erkennt hier wiederum den tiefen Gegenſatz zwiſchen der intuitiven Grundanſchauung Brouwers, die Wahrheit und der formaliſtiſchen Anſicht Hilberts, die bloß Konſequenz (Widerſpruchsfreiheit) verlangt und für die Wahrheit in der formalen Mathematik ein ſinnleerer Begriff iſt. (Vgl. § 4b u. 6a.) Hier kommt alſo Hilberts eigentümlicher Standpunkt wirklich zur Geltung.

Das Lemma I im beſonderen hat nun folgenden Wortlaut: »Wenn unter Beiziehung von Funktionen, die mittels des transfiniten Symbols ε definiert ſind, ein Beweis eines Widerſpruchs gegen den Kontinuumſatz vorliegt, ſo laſſen ſich in dieſem Beweiſe jene Funktionen durch ſolche erſetzen, die ohne Verwendung des Symbols ε allein durch gewöhnliche und transfinite Rekurſion definiert ſind, derart, daß das Transfinite nur in Geſtalt des Allzeichens auftritt«. Dabei iſt das transfinite Symbol ε die Bezeichnung der logiſchen Auswahlfunktion.[1] D. h.

$$A(a) \rightarrow A(\varepsilon A)$$

bedeutet: Die Ausſage A trifft ſicher für den Gegenſtand (z. B. die Zahl) εA zu, wenn ſie überhaupt für irgend etwas zutrifft. (Illuſtrierendes Beiſpiel: A = unbeſtechlich ſein, εA = Ariſtides. »Wenn überhaupt jemand unbeſtechlich iſt, ſo iſt ſicher Ariſtides unbeſtechlich«). —

Der Sinn, in dem das Symbol ε das Transfinite bezeichnet, iſt alſo ſtreng zu ſcheiden von unſerem bisherigen Gebrauch des Wortes in unſerer Betrachtung, wo nur von einem transfiniten Prozeß (bzw. einer Rekurſion der Funktion) die Rede war. Das durch ε bezeichnete Transfinite iſt recht eigentlich der Intution transſzendent; ihm gegenüber kann das Transfinite im Prozeß als immanent, der Intuition zugänglich bezeichnet werden.

Das Lemma I hat alſo die Aufgabe, den transſcendenten Gebrauch des Transfiniten auf den immanenten zu reduzieren. Es tut dies in einer eigentümlich negativen Form, indem es die Reduktion nur für den Fall eines Beweiſes eines Widerſpruchs gegen den Kontinuumſatz fordert.

Der Gedanke liegt nun nahe, ſich von dieſer eigentümlich verklauſulierten Faſſung freizumachen. Was würde es bedeuten, wenn

---

Problem ſich löſen läßt, – einen ſolchen gibt es ja auch nicht (!!)«. — Vgl. auch die kürzlich veröffentlichte Äußerung von Weyl (Handbuch d. Philoſ., Abt. II, A, S. 20 f.).

1) Früher gebrauchte Hilbert den Buchſtaben τ ſtatt des ε; ſ. o. § 1, S. 17ff.

man direkt die Reduktion in allen vorkommenden Fällen bei transzendent-transfinit definierten Zahlfolgen verlangte? Das würde nichts anderes sein, als die konstruktive Lösung des mit der jeweiligen Folge verknüpften Problems oder die Ersetzung jeder »problematischen« Folge durch eine normale, gesetzmäßige. Das wäre dann wirklich ein »allgemeines Lösbarkeitsaxiom«. Aber das würde eine Zerhauung des Knotens bedeuten! Hilbert fordert weniger: nur wenn das Bestehen eines solchen Problems zu einem Widerspruch mit dem Kontinuumsatz führt, wenn es also den Hauptbeweis stört, dann soll der Formelzusammenhang, der den Widerspruch beweist, nur immanent-transfinite Bildungen enthalten.

In dieser Fassung ist das Lemma sehr wenig verständlich; es erscheint ad hoc gemacht und enthält keinen natürlichen Tatbestand.

Aber man kann die ganze Frage unabhängig von den Besonderheiten, die Hilberts Beweistheorie hineinbringt, rein »sachlich« zu erörtern versuchen.

Man kann da zwei Wege einschlagen: einen weniger radikalen, aber gangbareren, und einen weniger leicht zu beschreitenden, aber dafür radikaleren.

I. Denkt man sich für das mit einer bestimmten Folge verknüpfte Problem die Lösung gefunden, so ist damit, wie schon bemerkt, die bisher »problematische« Folge in eine unproblematische, gesetzmäßige verwandelt. Auch bevor die Lösung gefunden ist, besteht offenbar eine eineindeutige Zuordnung von Problem und Lösung. (Höchstens könnten mehrere Probleme dieselbe Lösung haben, aber dann müßten zwischen ihnen selbst Zuordnungen bestehen, sie wären verschiedene Ausdrücke eines Problems, und die entsprechenden problematischen Folgen könnten nicht als wesentlich verschieden angesehen werden). Also vermehren die lösbaren problematischen Folgen gar nicht wesentlich die Menge der gesetzmäßigen Folgen um neue Elemente. (Verdoppelung ist ja bei unendlichen Mengen nicht von Belang!) Man braucht sich also um die problematischen Folgen gar nicht zu bekümmern, soweit sie lösbar sind. – Aber es könnte doch – sofern man nicht das »allgemeine Lösbarkeitsaxiom« fordert – grundsätzlich unlösbare Probleme und damit verknüpfte Folgen geben! (Mit dieser Möglichkeit rechnet ja z. B. Brouwer ausdrücklich!) Was soll man mit diesen unlösbaren problematischen Folgen anfangen?

Zunächst muß man sich darüber klar werden, Phänomene welcher Art solche Folgen denn sind. Sind es überhaupt unendliche Folgen? Ihre Glieder sind doch entweder unbestimmt oder,

beſten Falls, Schritt für Schritt (in der Zeit) beſtimmbar, ähnlich wie bei einer frei werdenden Wahlfolge.[1] In beiden Fällen haben wir in ihnen kein ἄπειρον δυνάμει ὄν, kein progreßhaftes Phänomen, deſſen Werden ins Unendliche hinein beſtimmt iſt. Es liegen alſo, »kategorial« angeſehen, gar keine echten endloſen Folgen vor! Dieſe unlösbaren problematiſchen »Folgen« tragen ihren Namen zu Unrecht! Alſo brauchen ſie auch nicht bei der Abzählung »aller« (natürlich nur der echten) Folgen berückſichtigt zu werden. Es taucht gewiſſermaßen das Geſpenſt der »ganz willkürlichen« Folge noch einmal in einer neuen Maske auf, aber wir haben es entlarvt, wie damals, als es im Gewande der »Wahlfolge« uns entgegentrat. — Dies iſt der weniger radikale Weg zur Klärung der Sachlage.

II. Man kann nun in folgender Weiſe radikal vorgehen. Man lehnt die problematiſchen unlösbaren Folgen nicht (auf Grund kategorialer Erwägungen) ab[2], ſondern ſucht ſie, als Folgen, ſo wie ſie ſich zunächſt geben, bei der Abzählung mit zu erfaſſen. Außer den lösbaren Problemen, die durch ihre Löſung erſetzt gedacht und ſo gezählt werden können, muß man alſo die unlösbaren Probleme als Probleme berückſichtigen.

Die Abzählbarkeit der geſetzmäßigen Folgen durch die Zahlen der II. Klaſſe beruht, wie wir ſahen, darauf, daß — laut Lemma II — einer gewöhnlichen Zahlenfolge kein wirklich transfinites Geſetz aufgeprägt werden kann. Der Gedanke liegt nun nahe, zu vermuten, daß auch kein mit einer ſolchen Zahlfolge verknüpfbares, ſie definierendes Problem eine unreduzierbar transfinite Komplikation in ſeiner intentionalen Struktur aufweiſen kann. D. h. die Probleme ſelbſt enthalten in ihrer eigenen logiſchen Struktur nur Rekurſionen in indefinitum, nicht in transfinitum. Wendet man auf ſie einen analog gebildeten Begriff der »Höhe«, des Index der ſtrukturalen Komplikation (Stufungscharakteriſtik) an, wie auf die geſetz-

1) Die früher genannte problematiſche Folge, die von der Irrationalität der Zahlen $1^{\sqrt{1}}\ 2^{\sqrt{2}}\ 3^{\sqrt{3}} \ldots n^{\sqrt{n}} \ldots$ uſw. abhängt, erweckt den Anſchein, als ob ſie bis ins Unendliche beſtimmt iſt. Allein die Entſcheidung über die Irrationalität der Glieder der obigen Reihe kann doch entweder nur Schritt für Schritt durch lauter ganz unabhängige Erwägungen beſtimmt werden, — dann haben wir eine der Wahlfolge analoge Bildung; oder ſie wird durch Geſetz beſtimmt, — dann haben wir überhaupt keine problematiſche Folge mehr. Im erſten Fall kommt die »Folge« nicht in Frage, weil ſie überhaupt keine echte Folge iſt; im zweiten iſt ſie unter den geſetzmäßigen Folgen ſchon mitgezählt.

2) Das zweite Verfahren iſt alſo inſofern radikaler, als es nicht vor den unlösbaren Folgen zurückſcheut, ſie nicht durch begriffliche Analyſe umgeht.

mäßigen Funktionen, ſo kommt man – bei Problemen für Zahlfolgen – in Analogie zum Lemma II nur auf Indexzahlen II. Zahlklaſſe. Alſo wird auch durch die unlösbaren problematiſchen Folgen keine weſentliche Erhöhung der Geſamtzahl der Folgen (über $\aleph_1$ bzw. Ω_1 hinaus) bewirkt.

E. Die ſachliche Bedeutſamkeit der Hilbertſchen Löſung.

Um Mißverſtändniſſe zu vermeiden, ſei ausdrücklich bemerkt, daß die vorangehenden Betrachtungen zu den beiden Hilbertſchen Lemmata keineswegs beanſpruchen, dieſe Hilfsſätze zu beweiſen (auch nicht etwa Lemma I unter Vorausſetzung von Lemma II zu beweiſen). Dazu ſind unſere Überlegungen viel zu unbeſtimmt. Auch wagen wir nicht zu hoffen, daß ſie den Weg zu einem wirklichen Beweiſe in einigermaßen ins Gewicht fallender Stärke erhellen. Unſere einzige Abſicht bei dieſen Bemerkungen iſt vielmehr, darzutun, daß Erwägungen über die Lemmata angeſtellt werden können, die ſich durchaus in der intuitiven »metamathematiſchen« Sphäre bewegen. Und wir glauben zum mindeſten ſehr wahrſcheinlich gemacht zu haben, daß ein künftiger Beweis ſich in eben dieſer Sphäre bewegen wird, der das ganze Problem ohne Zweifel angehört.[1]

Wir können daher Hilbert nicht beiſtimmen, wenn er ſeinen Anſatz zur Löſung des Kontinuumproblems von ſeiner ſpezifiſchen Beweistheorie und ſeiner Lehre von der ſymboliſchen »formalen Mathematik« ohne ſachlichen Sinn abhängen läßt. Es fällt übrigens immer wieder dem unbefangenen Leſer der Hilbertſchen Abhandlungen auf, daß die eigentlich mathematiſchen Betrachtungen darin ein durchaus ſachlich gerichtetes Intereſſe an den Problemen, an der rätſelhaften aufzuklärenden Sachlage merken laſſen. In Parentheſe wird dann, etwas unwillig, von »unſerer finiten Einſtellung« geredet. Und der kühne Anſturm Hilberts auf das alte berühmte Problem wird um ſein geſchichtliches Recht und ſeine eigentliche Bedeutung gebracht, wenn man die ganze Sache auf willkürliche, wenn auch widerſpruchsfreie Spielereien hinauslaufen läßt. Im Intereſſe der großen geiſtesgeſchichtlichen Bedeutung der Gedanken Cantors und Hilberts ſelbſt proteſtieren wir deshalb gegen ihre formaliſtiſche Umdeutung, die wir für eine Mißdeutung halten. Die große Sache möge der Forſchung erhalten bleiben! – Daß dies grundſätzlich nicht unmöglich iſt, glauben wir gezeigt zu haben.

---

1) Einige weitere Schritte zu einem ſolchen künftigen Beweis ſind im Math. Anh. zu § 5, Nr. VI B, C zu ſkizzieren verſucht worden.

§ 6.

Das philoſophiſche Problem der mathematiſchen Exiſtenz.

a) Hermeneutiſche Analyſe der demonſtrativen und der deduktiven Mathematik.

Das eigentliche philoſophiſche Problem, das durch die Exiſtenz einer mathematiſchen Wiſſenſchaft geſtellt wird, wurde ſchon im vorhergehenden als ein ontologiſches bezeichnet. Es iſt von grundlegender Wichtigkeit für das Weitere, zu präziſieren, was dieſer Terminus »ontologiſch« beſagt.

Unter »Ontologie« iſt hier erſtens nicht gemeint die allgemeine Wiſſenſchaft vom Sein und ſeinen Möglichkeiten im Sinne der rationaliſtiſchen Philoſophie des 17. und 18. Jahrhunderts.

Zweitens iſt darunter auch nicht zu verſtehen die »eidetiſche« Wiſſenſchaft der »tranſzendenten« Gegenſtände im Sinne des bisherigen phänomenologiſchen Sprachgebrauchs, – mag dieſe »Ontologie« nun aufgefaßt werden als eine von den Modi des erkennenden und ſonſtigen Bewußtſeins unabhängige Weſenswiſſenſchaft »Realontologie« (H. Conrad-Martius), wie ſie von den »realiſtiſch« gerichteten Phänomenologen (Reinach, Pfänder, z. T. auch Scheler, Geiger, H. Conrad-Martius uſw.) ausſchließlich getrieben wird, oder mag es ſich zugleich um eine für die eigentliche eidetiſche Phänomenologie des reinen Bewußtſeins vorbereitende, die »Leitfäden« dafür bereitſtellende Wiſſenſchaft handeln (wie es Huſſerls Wortgebrauch entſpricht)[1].

Sondern es ſoll »Ontologie« hier ſoviel bedeuten wie »Hermeneutik der Faktizität« (Heidegger)[2]. Damit iſt gemeint die Auslegung (interpretierende Explikation) des tatſächlichen geſchichtlichen Lebens als eines faktiſchen, hiſtoriſch da ſeienden, auf die Weiſe ſeines Da-ſeins hin.

Dieſe Explikation geht auf den Seins-ſinn dieſes Daſeins, ſie zergliedert den Sinn des »Da« im Da-ſein; d. h. ſie legt aus und auseinander, wie das jeweils in Frage ſtehende Leben in ſeinem konkreten Seinsmodus da iſt.

Man kann dieſen hier gemeinten »Seinsſinn« auch als »Weſen« bezeichnen. In dieſer Bedeutung würde »Weſen« dem griechiſchen Ausdruck »οὐσία« (ſo wie ihn Platon und beſonders Ariſtoteles gebrauchen) etymologiſch und bedeutungs-

1) Vgl. »Ideen« §§ 148–150.

2) Dieſer betitelte eine im Sommerſemeſter 1923 in Freiburg gehaltene Vorleſung »Ontologie oder Hermeneutik der Faktizität«.

mäßig einigermaßen entſprechen[1], nicht aber dem Worte εἶδος oder ἰδέα, obwohl für Platon die εἴδη das wahrhaft Seiende (τὸ ὄντως ὄν) ſind. Denn εἶδος heißt urſprünglich, in der griechiſchen Umgangsſprache, ſoviel wie »Ausſehen« und behält die »optiſche« oder »okulare«[2] Bedeutungskomponente auch in der metaphoriſchen Verwendung bei. Es iſt daher »Weſen = οὐσία« zu trennen von dem üblichen auf Huſſerl zurückgehenden phänomenologiſchen Gebrauch vom »Weſen = εἶδος« (u. U. auch = μορφή) und nur in dem erſten Sinn ſoll das Wort hier gebraucht werden.

Es iſt deshalb auch die folgende Unterſuchung nicht ſchlechthin als eine »eidetiſche« zu bezeichnen, obwohl Beziehungen zu möglichen »eidetiſchen Unterſuchungen« beſtehen. Denn es wird lediglich verſucht, den Sinn gewiſſer geiſtesgeſchichtlichen Erſcheinungen (die in der Geſchichte der Mathematik aufgetreten ſind) auslegend zu erörtern. Nicht aber wird betrachtet, ob und welche ſonſtigen »reinen Möglichkeiten« neben dem faktiſchen Verlauf der Geiſtesgeſchichte vorhanden ſein könnten.

Es iſt in dieſer auf ein beſonderes Thema gerichteten Arbeit nicht der Ort, im Vorbeigehen phänomenologiſche Prinzipienfragen zu erörtern. Nur ſoviel ſei geſagt: man pflegt für gewöhnlich in der Phänomenologie jede Analyſe von Sinnzuſammenhängen nach Vollzug der »eidetiſchen Reduktion« anzuſtellen, d. h. man ſpricht dem Faktiſchen als ſolchem, der bloßen Tatſächlichkeit jeden Sinngehalt ab. Ein Sinnzuſammenhang bleibt nach dieſer Auffaſſung völlig ungeändert, wenn er »in die Idee geſetzt wird«; denn es wird ihm dabei nur die als ſolche ſinnleere Faktizität (Wirklichkeit, Realiſiertheit) genommen, wodurch der geſamte Zuſammenhang zum »Weſenszuſammenhang« geworden iſt und nur mehr eine »reine Möglichkeit« darſtellt, die unter anderen Umſtänden als den tatſächlich vorliegenden »verwirklicht« ſein kann[3].

Demgegenüber iſt es hier auf den Sinn der Faktizität ſelbſt und als ſolcher abgeſehen; es iſt daher nicht möglich, ein Phänomen »in die Idee zu ſetzen«.

---

1) Heidegger, von dem der Terminus »Seins-Sinn« ſtammt, benutzt ihn zur Wiedergabe des ariſtoteliſchen »οὐσία«, was in entſtellender Weiſe ſeit dem Mittelalter mit »substantia« überſetzt zu werden pflegt.

2) Nach einem Ausdruck des Grafen Paul Yorck, des Freundes Diltheys; vgl. »Briefwechſel Dilthey-Yorck«, (Halle, Niemeyer, 1923). S. 60, 113 u. ö.

3) Dieſe Auffaſſung iſt z. B. kürzlich von A. Metzger, »Der Gegenſtand der Erkenntnis« (ds. Jahrbuch Bd. VII, S. 613 ff.) ausführlich dargelegt worden.

Man könnte hiergegen einwenden, es könne und müſſe eben auch das Eidos (nicht bloß das »Weſen«) der Faktizität betrachtet werden. Dieſe Formulierung erſcheint uns unmöglich, denn ſie würde doch beſagen, daß man die Faktizität betrachten ſolle, indem man von ihrem Faktiſch-Sein abſtrahiert, d. h. man ſtellt die doch wohl widerſinnige Aufgabe, die ihrer Faktizität beraubte Faktizität zu unterſuchen!

Aber es ſcheint ſich hinter jener, ſo wie ſie daſteht unhaltbaren Formulierung doch der zutreffende Gedanke zu verbergen, daß die Sinnanalyſe (hermeneutiſche Analyſe) der Faktizität dieſe nur in ihrer Jeweiligkeit treffen kann. Das jeweils ſo und ſo ſeiende Leben hat die und die charakteriſtiſchen Züge, die in einer gewiſſen Allgemeinheit herausgeſtellt werden können und müſſen. Aber es handelt ſich hier um eine beſondere Art von Begriffen, nämlich um formal-anzeigende (Heidegger), deren »Allgemeinheit« in ihrer Bezogenheit auf das »Jeweilige« liegt. Man kann dieſen »formal-angezeigten« Seinsſinn auch »Weſen« nennen, – aber dann iſt dieſes »Weſen« grundverſchieden von jedem »Eidos« (ganz beſonders jedem materialen Eidos!)[1].

Es handelt ſich alſo für uns um Auslegung faktiſchen Seins. Was beſagt dies aber, genauer betrachtet? Man kann ein Phänomen nur »auf etwas hin« auslegen, nicht ſchlechtweg. Es gibt aber eine ſozuſagen ausgezeichnete Richtung der Auslegung der faktiſchen Lebensphänomen: nämlich eine Auslegung auf den Sinn der in ihnen ſich äußernden Weiſe des Daſeins (des menſchlichen Lebens) ſelbſt.

* * *

In dieſer Weiſe kann man nun die Geſchichte der Mathematik, bzw. gewiſſe in ihrem Verlaufe erſcheinende geiſtesgeſchichtliche Phäno-

1) Man könnte mit Recht vom tranſzendentalen (d. h. das Eidos tranſzendierenden) Weſen ſprechen, wobei das Wort »tranſzendental« mehr im mittelalterlichen als im kantiſchen Sinn gebraucht wird. Vgl. Heidegger, »Sein und Zeit« S. 38: »Sein und Seinsſtruktur liegt über jedes Seiende und jede mögliche ſeiende Beſtimmtheit eines Seienden hinaus. Sein iſt das transcendens ſchlechthin. Die Tranſzendenz des Seins des Daſeins iſt eine ausgezeichnete, ſofern in ihr die Möglichkeit und Notwendigkeit der radikalſten Individuation liegt. Jede Erſchließung von Sein als des transcendens iſt tranſzendentale Erkenntnis. Phänomenologiſche Wahrheit (Erſchloſſenheit von Sein) iſt veritas transcendentalis.«

men anſehen. Damit kehren wir zu unſerem konkreten Problem zurück.

Man kann fragen: Welchen Sinn hat die mathematiſche Wiſſenſchaft, aufgefaßt als eine Weiſe des faktiſchen Lebens? Welche Tendenz – Lebenstendenz, faktiſche Daſeinstendenz – liegt ihr zugrunde? Welches faktiſche, im Sinn der Faktizität ſelbſt verwurzelte Motiv beſteht für das Auftreten und die Entwicklung der mathematiſchen Forſchung?

Das hierdurch angedeutete Problem iſt freilich außerordentlich umfangreich und ſchwierig. Es überſchreitet bei weitem den Rahmen der in dieſer Arbeit behandelten Fragen. Aber man kann, von jenem Geſamtproblem ausgehend, die Frageſtellung beſchränken und dadurch zu einer im hier abgeſteckten Rahmen angreifbaren Aufgabe gelangen.

Man kann nämlich fragen: Welche Bedeutung für die faktiſchen Lebenstendenzen und -motive hat der im Vorigen ſo viel behandelte Streit um den Begriff der »mathematiſchen Exiſtenz«? Welchen Lebens-Sinn hat der Gegenſatz der beiden ſtreitenden Grundtendenzen der gegenwärtigen Mathematik, der formaliſtiſchen und der intuitiven?

Um dieſe Frage weiter zu behandeln, wird es gut ſein, von der grundſätzlichen Kennzeichnung auszugehen, die in den vorangehenden Analyſen von dieſem Gegenſatz gegeben wurde: wir unterſchieden Logik der Wahrheit – Logik der Konſequenz, Mathematik als Demonſtration – und als »freiſchwebende« Deduktion. In dieſen Gegenſätzen wurzelt die Gegenüberſtellung von Intuitionismus und Formalismus, um dieſe Gegenſätze geht der Streit zwiſchen Brouwer und Hilbert.

Es iſt in der Tat leicht zu ſehen, daß, je nachdem man ſich für eine demonſtrative oder für eine deduktive Mathematik entſcheidet, man ſofort auch eine jeweils andere Hauptfrage bei der Grundlegung der Mathematik ins Auge faſſen muß.

Das Grundproblem der Widerſpruchsfreiheit des Axiomenſyſtems entſpricht der deduktiven Grundauffaſſung, das Problem der Entſcheidbarkeit der demonſtrativen.

Für die »demonſtrative« Auffaſſung beſteht die Frage der Widerſpruchsloſigkeit ja nicht als primäre und urſprüngliche: wenn man die mathematiſchen Entitäten durch Konſtruktion oder ſonſt ein konſtituierendes Verfahren als Phänomene in ihrer »phänomenologiſchen Exiſtenz« ſichergeſtellt hat, – dann iſt ihre Widerſpruchsfreiheit ſelbſtverſtändlich. – Andererſeits: für eine

rein »deduktiv« orientierte Mathematik iſt das Entſcheidbarkeitsproblem nicht von primärem Belang. Die mathematiſchen Entitäten brauchen nicht vorgelegt zu werden, um als exiſtent zu gelten. Die Möglichkeit der »Vorlegung« iſt abhängig von den Unvollkommenheiten des »endlichen« menſchlichen Intellekts. Von ſachlichem Belang iſt ſie nicht. —

Damit iſt nun ſchon ein Gedanke angedeutet, der geeignet iſt, zu der tieferen philoſophiſchen Bedeutung des in Frage ſtehenden Gegenſatzes der mathematiſchen Grundauffaſſungen hin zu führen:

Der Gegenſatz: Intuitionismus — Formalismus iſt verwurzelt in dem philoſophiſchen Grundgegenſatz der anthropologischen und der »absoluten« Auffaſſung der Erkenntnis (Wiſſenſchaft) und letztlich des Lebens ſelbſt (als der eigentlichſten Wirklichkeit). Dies iſt nunmehr näher zu erläutern:

Für die »anthropologiſche« Grundanſchauung ſteht der Menſch, beſſer das faktiſche menſchliche Daſein im Mittelpunkt der philoſophiſchen Problematik. Nicht der Menſch als Weſen »in der Welt«, nach Typen zu ordnen, nach pſychologiſchen Geſetzmäßigkeiten zu durchforſchen. Sondern als auslegbar auf den Sinn ſeines faktiſchen Daſeins, ſeiner Faktizität, von der aus alle andere Faktizität in der Welt allererſt ihre Bedeutung gewinnt.

Für die »abſolute« Auffaſſung iſt die Welt, das Univerſum des Seins »an ſich« da, mit beſtimmten Ordnungsſtrukturen ausgeſtattet, die gewiſſen formalen allgemeinſten Geſetzen »weſensmäßig« gehorchen. Darin iſt der Menſch nur ein unbedeutendes Weſen in der gewaltigen Stufenreihe der Weſen überhaupt, mit manchen Zufälligkeiten behaftet; obwohl vielleicht in ſich ein Mikrokosmos.

Der Gegenſatz beider Grundauffaſſungen iſt analog dem bekannten Gegenſatz zwiſchen Idealismus und Realismus, aber er geht philoſophiſch weſentlich tiefer.

Denn es iſt zwar richtig, daß der »Idealismus« einen Schritt auf dem Wege nach der »anthropologiſchen« Auffaſſung hin bedeutet; aber auch nicht mehr. Die »anthropologiſche« Auffaſſung iſt weſentlich hiſtoriſch, d. h. der Menſch als erfahrender[1] (freilich

1) ἱστορεῖν heißt »erfahren« (von ἵστωρ, der Augenzeuge). – Die im folgenden geſchilderte hiſtoriſch-anthropologiſche Betrachtungsweiſe iſt — wenn auch nicht unter dieſem Namen — in die Phänomenologie im weſentlichen von Heidegger eingeführt worden.

nicht im Sinne naturwiſſenſchaftlicher »Empirie« (empiriſcher Beobachtung), ſondern im Sinne der vollen Lebenserfahrung) hat ſeine Welt, die ihm nicht als ein gleichgültiges Objekt gegenüberſteht (nicht eigentlich »Gegen-ſtand« iſt), ſondern die als Um-Welt im lebendigen Umgang mit ihr »erſcheint«, zum »Phänomen« wird.

Von hier aus, von der Konzeption der vollen »hiſtoriſchen« Lebenserfahrung aus geſehen, erſcheint wenigſtens der übliche transſzendentale Idealismus als eine abſtrahierende Modifikation des urſprünglichen hiſtoriſchen Standpunkts. Denn bei ihm »hat« das Leben, das in der verblaßten Form des »reinen Bewußtſeins« nur mehr erſcheint (auch da und vielleicht gerade da in beſonders extremer Weiſe, wo es »vernünftig« wertet und praktiſch wird), die Welt (die nur noch in ſehr metaphoriſchem Sinne die »ſeine« iſt) in der Weiſe des bloßen »Gerichtet ſein auf«, des reinen intentionalen Bezugs.

Allerdings heißt in-tentio eigentlich »Geſpannt ſein auf«, die geſpannte Haltung[1] und drückt damit aus, daß die Weiſe des Vollzugs dieſer intentio nicht gleichgültig iſt; – daß der Menſch, als ſolcher, in ſeiner Faktizität mit dabei iſt, wo immer intendiert wird. Aber freilich ſieht der transſzendentale Idealismus von dieſem Moment gerade gefliſſentlich ab; das »reine Ich«, der »Ich-Pol«, die »Subjektivität« iſt in ſich nichts als ein ideales Zentrum; es kann nicht konkret, als ſo und ſo da-ſeiend, die Intention vollziehen. Die Intention iſt nicht »lebendig«, ſondern nur verwirklicht: zu ihr als »Weſen«, als reine Möglichkeit, tritt lediglich der überall gleiche, in ſich gänzlich farbloſe »Akzent« der »Realiſierung« hinzu: das allein ſoll ihr Faktiſch-Sein ausmachen[2].

1) intentio geht auch als Terminus hiſtoriſch letzten Endes auf den ſtoiſchen Ausdruck τόνος zurück. Vgl. Stoicorum veterum fragmenta, coll. J. v. Arnim, Vol. I, p. 129, 4 (Cleanthes, de virtute) »... ἡ τῆς ψυχῆς ἰσχὺς τόνος ἐστὶν ἱκανὸς ἐν τῷ χρίνειν καὶ πράττειν ἢ μή.« (= Vol. III, p. 68, 30: Chrysippus de virtute).

2) Indeſſen muß dazu bemerkt werden, daß die tranſzendentalidealiſtiſche Phänomenologie (Huſſerl), wenn auch nachträglich, den konkreten ganzen Menſchen als lebendige Perſönlichkeit wiedergewinnt, indem die »habituellen« Eigentümlichkeiten, die den konkreten, individuellen Charakter eines Menſchen ausmachen, als eine beſondere Art (nicht im üblichen Sinne »konſtituierte«) Tranſzendenz aufgefaßt werden. Noch weitergehend ſagt Huſſerl (»Ideen« § 57, S. 109/10): »Verbleibt uns als Reſiduum der phänomenologiſchen Ausſchaltung der Welt und der ihr zugehörigen empiriſchen Subjektivität ein reines Ich (und dann für jeden Erlebnisſtrom ein prinzipiell verſchiedenes), dann bietet ſich mit ihm eine eigenartige – nicht konſtituierte – Tranſzendenz, eine Tranſzendenz in der Immanenz

Dagegen iſt der Grundbezugſinn des hiſtoriſchen Daſeins die Sorge (Heidegger). Der entſcheidende Gewinn, der durch die Einführung dieſes Begriffes über den der »Intentionalität« hinaus erzielt wird, liegt gerade darin, daß in der »Sorge« der Vollzug durch das faktiſche Daſein von vornherein unzweideutig enthalten iſt und aus ihm nicht wieder entfernt werden kann. Nur ein anderer Ausdruck dieſes Umſtandes iſt es, daß in dieſer – »hermeneutiſchen« (Heidegger) – Auffaſſung des philoſophiſchen Fragens der Begriff des reinen Ich oder des reinen Bewußtſeins für die konkrete, volle, eigentlich ontologiſche Fragehaltung ſofort verſchwindet. Das »reine Ich« erſcheint, vom hermeneutiſchen Geſichtspunkt aus geſehen, als eine Abſtraktion, als ein ideales Zentrum, worauf gewiſſe abſtrakte Typen von Bewußtſeinsweiſen bezogen werden, lediglich zu theoretiſcher Analyſe, nicht zum Zwecke der konkreten Auslegung des Lebens.

Dagegen iſt das Sorgen die Grundhaltung des konkreten faktiſchen menſchlichen Daſeins ſelbſt, – wenigſtens ſoweit es hiſtoriſch iſt (und, hermeneutiſch angeſehen, iſt es hiſtoriſch)[1]. Mit dem Sorgen iſt das eigentümliche Hineingeſtelltſein des Menſchen in »ſeine« Welt bereits mitgegeben. Die ganze Frage, wie denn etwa die menſchliche »Subjektivität« zu einer ihr transſzendenten (transſubjektiven) Welt kommen könne, iſt von vornherein als widerſinnig nachgewieſen[2]. Das »Konſtitutionsproblem« der eidetiſch-transſzendentalen Phänomenologie erſcheint in einer verwandelten Form, indem die Gegenſtände der Welt als Gegenſtände der Sorge (in verſchiedener Weiſe: als bereits vorhandenes Material, als Verfügbarkeiten, Aufgaben, Hinderniſſe uſw. uſw. – allgemein zu reden: als »Bedeutſamkeiten«) auftreten. Das »Wie« ihrer Bedeutſamkeit für das Leben (das natürlich nicht eine einfache »Qualität« iſt, ſondern ein verwickelt aufgebautes Phänomen) iſt das, was die eigentliche Weiſe der »Konſtitution« des Gegenſtandes ausmacht. – –

Dieſe grundſätzlichen Dinge können hier nicht weiter ausgeführt werden. Es iſt vielmehr nun zu fragen, inwiefern die Exiſtenz

---

dar.« Aber es bleibt doch noch unentſchieden, ob dieſes individuelle »reine« Ich als konkretes volles Leben zu denken iſt, das im letzten Sinne des Seins des »Bewußtſeins« ſelbſt verankert iſt.

1) Über die Frage der »Grenzen des Hiſtoriſchen« und darüber, was dann etwa das »Nicht-Hiſtoriſche« jenſeits dieſer Grenze ſein könnte, iſt einiges am Schluß der Abhandlung geſagt (§ 6 c IV).

2) Vgl. darüber Heideggers Darſtellung in »Sein und Zeit«. (Über das ſog. »In-Sein«), § 12, Seite 52 ff. dieſes Bandes.

der mathematiſchen Gegenſtändlichkeiten in einer beſtimmten Weiſe der Sorge und der Bedeutſamkeit ſich äußert.

Insbeſondere: wie iſt der im vorigen immer wieder hervorgetretene Gegenſatz »Formalismus – Intuitionismus« (mathematiſche Exiſtenz als Widerſpruchsfreiheit – oder als Konſtruierbarkeit) zu interpretieren? Welche Weiſe des Sorgens und der Bedeutſamkeit verbirgt ſich hinter jenem Gegenſatz der wiſſenſchaftlichen Haltung?

Blicken wir auf die Geſchichte der Mathematik zurück, ſo zeigt ſich, daß die demonſtrative (intuitive) Mathematik in jeder Hinſicht das Urſprüngliche iſt. Die rein deduktive (formaliſtiſche) Mathematik wurde eigentlich erſt am Ende des 19. Jahrhunderts (ſeit 1870 etwa) ausgebildet, obſchon ſie in manchen früheren Strömungen vorbereitet iſt (ſeit Leibniz.) So erſcheint ſie als eine merkwürdige Spätblüte; vielleicht iſt ſie als eine Entartung aufzufaſſen. (Vgl. § 6c III C).

In den Sinn dieſer merkwürdigen geiſtesgeſchichtlichen Erſcheinung der rein deduktiven Mathematik kann man tiefer eindringen, wenn man von dem dieſer Form der Wiſſenſchaft entſprechenden Begriff der mathematiſchen Exiſtenz ausgeht. Dieſe war beſtimmt vom Kriterium der Widerſpruchsfreiheit.

Nun war in einer früheren Betrachtung (in § 3a) dieſe Forderung der Widerſpruchsfreiheit bereits auf ihren Sinn hin unterſucht worden. Es war gezeigt worden, daß ſie nicht ſelbſtverſtändlich iſt, denn die ſog. Ausſagen der formalen Mathematik beziehen ſich nicht auf Sachverhalte, die phänomenologiſch faßbar ſind, und daher als Phänomene widerſpruchsfrei definiert ſein müſſen. Es hatte ſich aber auch herausgeſtellt, daß ſie nicht ſinnlos iſt, ſondern auch innerhalb des puren Formelſpiels eine entſcheidende Bedeutung hat. Sie war nämlich die conditio sine qua non für die unbegrenzte Fortſetzbarkeit der rein formalen Deduktion. Sie ſicherte die Grenzenloſigkeit im Fortgang von einer Formel zu einer ſtreng beſtimmten (nicht beliebigen) anderen; genauer geſagt: ſie ſchloß die fatale Möglichkeit aus, daß die formale Beziehung des »Folgens« einer Formel aus anderen unendlich vieldeutig wird, indem etwa aus einer beſtimmten »widerſpruchsvollen« Formel alle möglichen Folgerungen entſpringen können.

Hält man ſich dieſe Bedeutung der Forderung der Widerſpruchsfreiheit vor Augen und fragt man daraufhin, welche Sorge oder genauer welche Weiſe des Sorgens hinter einer ſolchen Forderung ſteht, ſo ergibt ſich unmittelbar die Antwort: die Sorge um den unbe-

grenzten Fortgang des Deduzierens ſelbſt. Das heißt alſo: die Sorge um die Erhaltung der im formal-mathematiſchen Forſcher lebendigen ſpezifiſchen Sorgensweiſe. Anders ausgedrückt: der Betrieb der Deduktion ſoll geſichert werden, unbekümmert um die Sachen und die ſachlichen Probleme, um die es ſich handelt oder wenigſtens handeln könnte. Dadurch, daß man den Sinn der mathematiſchen Exiſtenz in die Widerſpruchsfreiheit des »exiſtierenden« Gebildes verlegt, – wendet man alſo den Blick von dem Seinsſinn des Gebildes geradewegs ab. Man verſperrt ſich abſichtlich die Möglichkeit und den Weg, nach der Weiſe des Seins des Gebildes überhaupt noch zu fragen. Daß es widerſpruchsfrei iſt, beſagt für ſeinen Seinsſinn gar nichts, es beſagt im Gegenteil gerade: man kann von dieſem Seinsſinn abſehen, die Frage dieſes Seinsſinns iſt gänzlich belanglos für den Fortſchritt der mathematiſchen Wiſſenſchaft. Die Sorge fragt alſo nicht die mathematiſche Gegenſtändlichkeit nach dem Wie ihres Seins, ſie iſt nicht um Sein beſorgt, ſondern nur um ihr eigenes Erhalten-Werden.

Das Kriterium der mathematiſchen Exiſtenz wird damit gerade darein geſetzt, daß die Möglichkeit beſtehen ſoll, von der Frage nach dem Seinsſinn der mathematiſchen Gegenſtände abzuſehen. Die mathematiſche Exiſtenz wird ſo definiert, daß der Sinn ihrer eigenen Definition das Eindringen in den Seinsſinn der mathematiſchen Gegenſtändlichkeiten gerade verbietet. Man kann alſo, in Analogie zu einem bekannten Scherzwort, geradezu ſagen: »existentia a non existendo«: die Idee der Exiſtenz in ſich ſelbſt enthält ſchon die Abwehr dagegen, die »exiſtente« Gegenſtändlichkeit auf ihr Sein, ihre eigentliche Exiſtenz hin zu befragen.

Dieſe ſo paradoxe Sachlage wird verſtändlich, wenn man ſie aus dem Geſichtspunkt der hermeneutiſchen Phänomenologie (Heidegger) betrachtet. Denn da erſcheint ſie nur als eine beſonders prägnante Ausformung einer eigentümlichen Lebensbewegtheit, die ſich des Sorgens in mannigfacher Weiſe bemächtigen kann. Die Sorge, urſprünglich in den Vollzug des vollen Lebens eingeſpannt, erlangt eine gewiſſe »Eigenſtändigkeit« (Heidegger), ſie tritt in die Modifikation des »Sich-Verſorgens«, wobei der Doppelſinn dieſes »dialektiſchen Wortes« bedeutſam iſt: einerſeits beſagt es das Sich-Verlieren der Sorge in ſich ſelbſt, andrerſeits klingt der triviale Sinn des ſich (etwa in wirtſchaftlicher Hinſicht) Verſorgens an, und bedeutet ſich ſelbſt Nahrung geben, ſich ſelbſt erhalten, autarkiſch werden. In dieſem Wandel der ſorgenden Lebensbewegtheit äußert

ſich die allgemeine Tendenz des »umweltlichen Daſeins« nach Selbſtgenugſamkeit, die der Scheu entſpringt, auf den Sinn des eigentlichen Seins des Daſeins (die »Exiſtenz« im zugeſpitzten Sinn) zurückzugehen, kurz ausgedrückt, die »Abriegelung des Lebens gegen ſich ſelbſt« (Heidegger)[1].

* * *

In gewiſſem Sinn kommt damit in der formaliſtiſchen Mathematik eine Tendenz zur Vollendung, die ſchon früh als eine ſpezifiſch mathematiſche erkannt wurde, nämlich die »aphairetiſche« Tendenz. Bereits Ariſtoteles ſpricht von dieſer ἀφαίρεσις, die die mathematiſche Betrachtung an ihren Gegenſtänden übt, an einer bemerkenswerten Stelle der Nikomachiſchen Ethik. Die Dinge als mathematiſche Gegenſtände faſſen, heißt von ihrem eigentlichen Sein wegſehen, nicht in ſie eindringen, bedeutet eine Abſperrung des ſchlichten und unmittelbaren Lebensbezugs zu ihnen. Deshalb, ſagt Ariſtoteles, kann auch ein junger Mann Mathematik ſelbſtändig forſchend treiben, weil es dazu keiner Lebenserfahrung bedarf, während die konkreten Wiſſenſchaften von jungen Menſchen nur auf Grund autoritativer Mitteilungen, alſo im weſentlichen ſchülerhaft, betrieben werden können[2].

Sachlich angeſehen, bedeutet dieſe ἀφαίρεσις (abstractio), daß die Gegenſtände der Mathematik keinerlei Lebensbezug mehr als ſolche haben. Und dies zwar, näher betrachtet, in noch viel radikalerer Weiſe als die Gegenſtände der naturwiſſenſchaftlichen Beobachtung (etwa die »Pflanzen« – nicht die Umweltdinge »Blumen« und dgl.). Denn bei jenen Objekten der naturwiſſenſchaftlichen Beobachtung iſt doch immerhin etwas Konkretes im Blick, ein Phänomen, das durch einen beſtimmten Motivationszuſammenhang verbunden bleibt mit dem bedeutſamen Umweltding, als das es urſprünglich dem »alltäglichen« Leben erſchien. In gewiſſem Sinn iſt die botaniſch beſchriebene

---

1) Vgl. »Sein und Zeit«, I. Teil, I. Abſchnitt, 5. Kapitel B. (§§ 35–38). (Nachträglicher Hinweis; die Terminologie iſt teilweiſe von unſerer verſchieden.)

2) Eth. Nic. 6, 9 (p. 1142 a 12–20): »... γεωμετρικοὶ μὲν νέοι καὶ μαθηματικοὶ γίνονται καὶ σοφοὶ τὰ τοιαῦτα, φρόνιμος δ' οὐ δοκεῖ γίνεσθαι. αἴτιον δ' ὅτι τῶν καθ' ἕκαστά ἐστιν ἡ φρόνησις, ἃ γίνεται γνώριμα ἐξ ἐμπειρίας, νέος δ' ἔμπειρος οὐκ ἔστιν· πλῆθος γὰρ χρόνου ποιεῖ τὴν ἐμπειρίαν· ἐπεὶ καὶ τοῦτ' ἄν τις σκέψαιτο, διὰ τί δὴ μαθηματικὸς μὲν παῖς γένοιτ' ἄν, σοφὸς δ' ἢ φυσικὸς οὔ. ἢ ὅτι τὰ μὲν δι' ἀφαιρέσεώς ἐστιν, τῶν δ' αἱ ἀρχαὶ ἐξ ἐμπειρίας· καὶ τὰ μὲν οὐ πιστεύουσιν οἱ νέοι ἀλλὰ λέγουσιν, τῶν δὲ τὸ τί ἐστιν οὐκ ἄδηλον.«

Blüte doch noch »dieſelbe« Blume, die wir auf der Wieſe pflückten, iſt der Planet Venus »derſelbe« Gegenſtand als der Abendſtern oder der Morgenſtern.

Bei mathematiſchen Gegenſtändlichkeiten iſt es indeſſen anders. Ich bilde z. B. aus fünf Gegenſtänden, d. h. zunächſt Umweltdingen, etwa Äpfeln, verſchiedene Figuren: eine lineare, eine zykliſche Anordnung, eine ebene oder eine körperliche Quincunx und dgl. und betrachte dieſe Anordnungen mit den Augen des Mathematikers, etwa intereſſiert an ihnen als topologiſchen Kombinationen. Dann abſtrahiere ich (*ἀφαιρέω!*) von dem ſachlichen Gehalt der Gegenſtände, nicht nur von ihrem Umweltscharakter, ſondern auch von ihrem anſchaulichen konkreten Gehalt überhaupt. Einzig die Weiſe der gegenſeitigen Bezogenheit der Gegenſtände, ihre Ordnung iſt noch von Belang. Es genügt, an Stelle der konkreten Gegenſtände ſymboliſche, in ſich leere Zeichen zu ſetzen, um dieſe Anordnung zu ſtudieren, Namen treten gewiſſermaßen (und auch die nur in der äußerlichſten Form als Zeichen, etwa als Buchſtaben *a*, *b*, *c* uſw.) an die Stelle der Dinge ſelbſt.

Nun iſt das Nennen (*ὀνομάζειν*) an ſich eine Weiſe den Gegenſtand zu haben, die ihn nicht eigentlich erfaßt (anſpricht, *λέγει*) ſondern von ſich wegſtößt, in Entfernung hält. Mit der »Etikettierung« iſt der Gegenſtand erledigt, – im primitiven Seelenleben iſt er durch den geeigneten, ihm zukommenden, Namen gebannt[1]. (Vgl. Ariſtoteles, Metaphyſik Z, c. 4 (1030a 7–17)). Das Nennen (und a fortiori das Bezeichnen) hellt den Gegenſtand nicht auf (wie der *λόγος ἀποφαντικός*, das aufzeigende Anſprechen, das in der Möglichkeit des *ἀληθεύειν*, des »Entdeckens« ſteht), ſondern läßt ihn, ſeine nähere Beſchaffenheit, d. h. vor allem ſeinen Seinsſinn, ſeine *οὐσία*, gefliſſentlich im Dunkeln.

Relativ zum eigentlichen ſachhaltigen Anſprechen, im Leben und in der beſchreibenden Wiſſenſchaft, iſt jedes mathematiſche Auffaſſen eines Dinges, das eng verbunden mit dem mathematiſchen Bezeichnen (z. B. durch Buchſtaben)[2] iſt, ein Sich-vom-Leibe-Halten

1) Der Abſtand zwiſchen der modernen Erledigung durch Bezeichnung und dem alten, frühmenſchlichen »Namenszauber« iſt gewaltig; aber trotzdem laſſen ſich gewiſſe Gemeinſamkeiten aufweiſen. Der ganze Sachverhalt iſt ſehr wichtig für die Frage der Sinngeneſis der Mathematik aus der magiſchen frühmenſchlichen Technik. Vgl. dazu H. Ammann, Die menſchliche Rede (Lahr 1925), Bd. I, S. 89f. und ungedruckte Ariſtoteles-Interpretationen Heideggers.

2) Man vergleiche etwa den ſprachlichen Ausdruck der Bezeichnung geometriſcher Punkte bei Eudemos (im Simplicius-Fragment über die Qua-

des Gegenſtands, ein Sich-Wegrücken ſeines eigentlichen Seins. Das Ding wird gewiſſermaßen zum bloßen Haltepunkt, nach dem der Faden einer (im übrigen eigentümlich leeren) Intentionalität geſpannt iſt. Im Blick iſt eigentlich nur der »Gegenſtand höherer Ordnung«, der ſich auf den (unter ſich gleichartigen, alſo »nivellierten«) Intentionalitäten erſter Ordnung aufbaut. Dieſe Intentionalitäten erſter Ordnung bilden vermöge ihrer Gleichartigkeit eine Mannigfaltigkeit nebeneinander zu ordnender Bezüge (»Bezugsmannigfaltigkeit«, Heidegger). Die Möglichkeit, die Bezüge in eine derartige Mannigfaltigkeit »einzuebnen«, unterſcheidet das Mathematiſch-Formale in ontologiſcher Hinſicht vom Formal-Angezeigten[1]. Denn bei der »formalen Anzeige« (Heidegger) bleibt der Bezugsſinn in der Schwebe, er iſt nicht erfüllt, aber auch nicht abgerückt, d. i. »abſtrakt« (durch ἀφαίρεσις), ſondern ſtändig in Bereitſchaft, auf dem Sprunge, gewiſſermaßen auf der Suche nach Erfüllung. Die Zeige-Funktion, das Indizieren der formalen Anzeige iſt eine beſtimmte Bewegtheit, iſt von dynamiſcher Art. Dagegen iſt die mathematiſche Form in ſich ruhend, autarkiſch, ſtatiſch; der Erfüllung wohl fähig, aber keineswegs bedürftig.

Dieſer letzte Tatbeſtand drückt ſich, von einer anderen Seite aus geſehen, darin aus, daß die »Gegenſtände höherer Ordnung« in einer beſtimmten, wenn auch nicht ſinnlichen Weiſe angeſchaut werden können, nämlich mittels der »kategorialen Anſchauung« (eine grundlegende Entdeckung von Huſſerls »Logiſchen Unterſuchungen«)[2] Obwohl die mathematiſchen Objekte (etwa das Kollek-

draturen des Hippokrates) und bei Euklid. Eudemos ſagt z. B. »τὸ ἐφ' ᾧ (οὗ) K«, d. h. »der Punkt, bei dem K ſteht«, und »ἡ ἐφ' ἧ AB«, d. h. die Gerade, bei der AB ſtehen«; Euklid hat dafür ſtets »τὸ K« (sc. σημεῖον) bzw. »ἡ AB« (sc. εὐθεῖα). Siehe darüber: »Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates«, griechiſch und deutſch von F. Rudio (Leipzig 1907), S. 147 (Wörterverzeichnis unter ἐπί). — Die mathematiſche Bezeichnung iſt danach urſprünglich nur bloße Markierung einer beſtimmten Stelle der Figur (»dort, wo A ſteht«), ſpäter wird ſie mit dem mathematiſchen Gegenſtand ſelbſt ſprachlich identifiziert »das A« uſw. Dieſe Tendenz gipfelt ſchließlich in der modernen formaliſtiſchen Mathematik: »Wo Begriffe fehlen, da ſtellt ein Zeichen zur rechten Zeit ſich ein« (Bernays)

1) Über die Beziehung der Mannigfaltigkeit (Menge) zur »Einebnung« wurde ſchon in § 5 a, IV, A. geſprochen.

2) Man darf dieſe Gegenſtände der kategorialen Anſchauung nicht mit den der ſinnlichen Anſchauung (Wahrnehmung, anſchaulichen Phantaſie uſw.) zugänglichen »Geſtalten« verwechſeln. (v. Ehrenbergs »Geſtaltqualität« entſpricht Huſſerls »figuralem Moment« [Phil. d. Arithmetik] bzw. »ſinnlichem Einheitsmoment« [Log. Unterſ.].) Während die »Geſtalten«, beſon-

tivum, die geordnete Menge, die Zahl, Funktion uſw. uſw.) nicht ſachhaltig (material) ſind, ſo ſind ſie doch, im übertragenen Sinn zum mindeſten, Sachen mit ſachlichen, in vollerfüllter, orginär gebender Anſchauung (die allerdings eben »kategorial« und keineswegs »ſinnliche« Wahrnehmung iſt) erfaßbaren Eigenſchaften und Beziehungen. Keineswegs ſind ſie leere, obſchon vielleicht widerſpruchsfreie Gegenſtände.

Der von Hilbert gelegentlich (für die metamathematiſchen Urgegenſtände) gebrauchte Ausdruck »Zeichen, die nichts bedeuten« trifft daher nicht das Richtige, obwohl in ihm anſcheinend etwas Richtiges, wenn auch verworren, gemeint iſt. Denn freilich ſind die mathematiſchen Objekte keineswegs »ſignitiv« (in leerer Intention) gegeben. Aber das bringt auch mit ſich, daß die Spannung zwiſchen Leerintendiertem und Erfüllendem, zwiſchen »Zeichen« (signum) und »Bedeutung« (significatum) wegfällt. »Zeichen, die nichts bedeuten« ſind eben ihrer Zeige-Funktion entkleidete Zeichen, d. h. gar keine Zeichen. — Aber trotzdem verbirgt ſich hinter Hilberts verfehltem Ausdruck etwas Treffendes: Es iſt nämlich nicht ſo, wie man nach dem durchgängigen Parallelismus zwiſchen Noeſis und Noema meinen ſollte, daß die mathematiſchen Objekte (Gehalte) und die auf ſie gerichteten Intentionalitäten (Bezüge), in ontologiſcher Hinſicht äquivalent, nebeneinander lägen. Vielmehr iſt – ähnlich, wie ſich das Zeichen-Sein in dem indizierenden Bezug erſchöpft — bei dem Geſamtphänomen des Mathematiſchen der Bezugsſinn »archontiſch« (Heidegger), der

---

ders nach den Ergebniſſen neuerer pſychologiſcher Forſchung, als primäre, den ſinnlichen »Elementarphänomen« (Empfindungen, »hyletiſchen Daten« uſw.) vorausgehende Erſcheinungen – wenigſtens in den meiſten Fällen – aufzufaſſen ſind, ſind die kategorialen Gegenſtändlichkeiten (wie Menge oder Kollektion, Reihe bzw. Folge uſw.) wirklich von höherer Ordnung als ihre »Elemente«. Und das bleibt beſtehen, obwohl gewiſſe ſinnliche Geſtalten Motive abgeben können für die Bildung »entſprechender« kategorialer Gebilde. Die kategorialen Strukturen erweiſen ſich eben als Späterſcheinungen des alternden Lebens. Sie ſetzen eine gewiſſe Auflöſung des urſprünglichen »apeiromorphen« (Natorp), unendlich durchformten, primitiven »Chaos« (Koffka) in Elemente bereits voraus und vollziehen nunmehr eine Synthеſis dieſer Elemente, die zwar eine gewiſſe Analogie zu den primitiven Geſtalten zeigt, auch höchſtwahrſcheinlich für das Leben eine Art Erſatz der verloren gegangenen Geſtalten bietet, aber trotzdem von grundſätzlich anderer Art als die primitive Geſtalt iſt und keineswegs zu dieſer zurückführt. — Man kann eine derartige Entwicklung z. B. am Phänomen der Zahl aufzeigen. Im Grunde erwächſt ſo überhaupt erſt das klaſſiſche mathematiſche Problem der στοιχείωσις, des Elementaraufbaues einer definiten Mannigfaltigkeit. – (Vgl. das über Platos στοιχείωσις in § 6 c II D Geſagte.)

ontiſche Akzent liegt ſozuſagen auf dem Bezug. Ontiſch primär iſt die Noeſe, ſekundär das Noema. (Gerade umgekehrt iſt es z. B. bei der ſinnlichen Wahrnehmung. – Man könnte die Kantiſche Rede von der Rezeptivität der Sinnlichkeit und der Spontaneität des Verſtandes auf dieſen Umſtand beziehen). Die ſynthetiſche Tätigkeit »erzeugt« in gewiſſem Sinn die mathematiſchen »Gegenſtände höherer Ordnung«; ſie werden nicht einfach als »ideale Gegenſtände« in der Welt der Idee »vorgefunden«. Der Grund und der Beleg für dieſen Sachverhalt liegt in der im Vorigen beſchriebenen »Abſtraktion« (ἀφαίρεσις). Die in ihr getätigte Abſperrung der Hingabe an den Seinsſinn der Subſtrate, die der mathematiſchen Syntaxe zugrunde liegen, verſchließt zugleich die Möglichkeit des rezeptiven Hinnehmens der Gehalte als ſo und ſo ſeiender. Was alſo übrigbleibt und gewiſſermaßen von der »Abſperrung« »freigelaſſen« wird, iſt der »Bezugsſinn« und auch dieſer nicht konkret, nicht in dem »Sinn« des einzelnen Bezugs zum einzelnen »Objekt«. Sondern infolge der durch die Neutraliſierung, Nivellierung, »Entlebung« (Heidegger) ermöglichten Gleichartigkeit der Elemente kommt es zu einer – ontiſch homogenen – Mannigfaltigkeit von Bezügen, auf deren kombinatoriſcher Struktur der Akzent des Phänomens ruht. Dieſe – ontiſch das Phänomen beherrſchende – Struktur iſt eine Bezüglichkeit von »zweiter Ordnung«, eine Bezüglichkeit zwiſchen Bezügen, eine Syntaxe monothetiſcher Elementarakte. (Etwa beim Zählen: der Bezugſinn jeder gezählten »Einheit« iſt »einſtrahlig«, die einſtrahligen pointierenden Noeſen werden im Actus des Zählens in beſtimmter Weiſe ſyntaktiſch vereinigt.) Nun haben die »Elementarakte« freilich ebenſowenig ein ſelbſtändiges, »autochthones« (aus ſich ſelbſt ſtammendes) ontiſches Gewicht, – aber inſofern ſie die höhere Syntaxe ermöglichen, kommt ihnen indirekt ein ſolches zu. Dagegen liegt der ontiſche Schwerpunkt des geſamten Phänomens ganz in der höheren Syntaxe ſelbſt und dieſe iſt – ſchon als Syntaxe von Elementarbezügen, nicht Elementargehalten – eben σύνταξις, nicht σύνταγμα (oder gar συνταττόμενον)[1].

Es iſt wohl wahr, daß man nach dem Schema des noetiſch-noematiſchen Parallelismus der Syntaxe das Syntagma, den zuſammengeſetzten Gegenſtand »höherer Ordnung« entſprechen laſſen kann. Aber ontologiſch angeſehen (d. h. nach einer Dimenſion, die in der

1) Die griechiſchen Bildungen auf μα gehören eher zum Verb als zum Nomen (»Verbalſubſtantiva«). Vgl. W. Porzig, Indogerm. Forſch. 42, S. 223 ff.

ſtreng eidetiſchen phänomenologiſchen Forſchung nicht zutage treten kann, weil von ihr gefliſſentlich, in der ſog. »eidetiſchen Reduktion«, abgeſehen wird), iſt dieſes σύνταγμα nicht in ſich feſt gegründet; es iſt gewiſſermaßen auf Sand gebaut: den elementaren Noemen, auf denen es ſich aufbaut, iſt durch die ἀφαίρεσις bei ihrer Erfaſſung ihr ontiſches Gewicht gefliſſentlich entzogen worden[1].

* * *

Der geſchilderte Tatbeſtand mag gleichgültig und die geſamte Erörterung ausgeklügelt und ſpitzfindig ſcheinen, – aber man bedenke die weittragenden Folgen der ſoeben gemachten Feſtſtellung, daß das ontiſche Gewicht der mathematiſchen Phänomene auf dem Bezugsſinn ruht.

Der Bezug iſt als ſolcher niemals ontiſch ſelbſtändig: Was ihm zur Faktizität verhilft, iſt ſtets der Vollzug. Alſo liegt auch der Quell der ontiſchen »vis« (der Seins-Kraft) der mathematiſchen Phänomene im Vollzug der mathematiſchen Syntheſen (Syntaxen).

Dieſe einfache Bemerkung geſtattet eine überraſchende Anwendung auf den ontologiſchen Streitpunkt zwiſchen der formaliſtiſchen und der intuitioniſtiſchen Definition der mathematiſchen Exiſtenz: Soll nämlich die ontiſche vis des Mathematiſchen im Vollzug der Syntaxen liegen, ſo müſſen dieſe Syntaxen im ſtrengen Sinne faktiſch ſein, d. h. wirklich vollzogen werden können. Aber die »transfiniten« Syntaxen[2] können das offenbar nicht. Hilberts transfinite Axiome drücken die Forderung von de facto unvollziehbaren Syntheſen aus. Ebenſo iſt z. B. das Cantorſche Kontinuum eine unvollziehbare Syntheſe[3].

---

1) Es ſei nochmals darauf hingewieſen, daß die ganze Analyſe ſich nicht auf primitive »Geſtalten«, ſo wie ſie »ſinnlich« erfaßt werden, durch Wahrnehmung und die vielleicht noch urſprünglichere »produktive« Phantaſie (vgl. Scheler, Die Wiſſensformen und die Geſellſchaft [Leipzig 1926], S. 435–455) oder die »eidetiſche Anſchauung« nach E. R. Jaenſch (Der Aufbau der Wahrnehmungswelt, Leipzig 1925) bezieht. Sondern es iſt ausſchließlich abgeſehen auf die ſich auf »Elementen« aufbauenden, in der »Sinngeneſis« (Heidegger) ſpäten, in gewiſſer Hinſicht ſekundären kategorialen ſynthetiſchen Gebilde. Dieſe ſind es, die ausſchließlich die Gegenſtände einer entwickelten Mathematik bilden.

2) Im Sinne Hilberts, nicht im Sinne des in § 5a geſchilderten transfiniten Prozeſſes.

3) Wenigſtens, wenn es, in Cantors eigenem Sinne, als aktualunendliche Punktmenge aufgefaßt wird. Anders verhält es ſich damit (wie in § 5b III gezeigt wurde), wenn man die Grundanſchauung in Betracht

Damit entſcheidet die phänomenologiſche Analyſe als hermeneutiſche, d. h. als auslegende auf das Daſein hin, die Streitfrage der Definition der mathematiſchen Exiſtenz zugunſten des Intuitionismus. Denn die intuitioniſtiſche Forderung, jeder mathematiſch exiſtente Gegenſtand müſſe durch eine in concreto und de facto vollziehbare Konſtruktion »dargeſtellt« werden können (beinahe im Sinne der »Darſtellung« eines reinen Stoffes in der Chemie) enthält nichts anderes als das Poſtulat: alle mathematiſchen Gegenſtände ſollen durch faktiſch vollziehbare Syntheſen erreicht werden können. Und das beſagt, eigentlicher ausgedrückt: Echte (»exiſtente«), mathematiſche Phänomene »ſind« nur in faktiſch vollziehbaren Syntaxen.

Es gelingt alſo auf dieſe Weiſe, den in der eidetiſchen Phänomenologie aufgewieſenen Sachverhalt, daß die mathematiſchen Gegenſtände (zum mindeſten der »klaſſiſchen« Art) kategorial angeſchaut werden können, aus einem tieferen, »ontologiſchen« Geſichtspunkt zu begreifen [es ſei nochmals darin erinnert, daß »Ontologie« hier ſo viel beſagt wie »Hermeneutik der Faktizität« (Heidegger), nicht im traditionellen Sinn Eidetik transſzendenter Gegenſtände]: die Anſchaubarkeit der mathematiſchen Gegenſtände rührt letztlich her von der faktiſchen Vollziehbarkeit der entſprechenden ſyntaktiſchen Noeſen.

Damit iſt nun ſchließlich auch eine beſtimmte Poſition gewonnen gegenüber der vorhin aufgeſtellten Alternative zwiſchen der »anthropologiſchen« und der »abſoluten« Auffaſſung der Erkenntnis. Dadurch, daß ſich aus der Eigenart der mathematiſchen Phänomene die Notwendigkeit ergibt, den Vollzug in den Mittelpunkt zu ſtellen, iſt das eigene (hiſtoriſche) menſchliche Daſein als ausſchlaggebend hingeſtellt. Die Mathematik erhält damit eine »anthropologiſche« Fundierung[1]. Nicht ein ordnungsmäßig gegliedertes, »objektives«, im traditionellen Sinn »an ſich« ſeiendes Univerſum (wie es in irgendwelcher Form auch die neueſte Metaphyſik annimmt), ſondern das faktiſche Leben des Menſchen, das jeweils eigene Leben des Einzelnen (oder wenigſtens der jeweiligen »Generation«) iſt das ontiſche Fundament, auch für das Mathematiſche.

---

zieht, die dem Verſuch Hilberts, das Kontinuum mittels der transfiniten Zahlen abzuzählen, zugrunde liegt.

1) Man beachte, wie ſich die phänomenologiſche Forſchung in dieſem Punkte ſeit dem Kampfe Huſſerls (im I. Band der »Logiſchen Unterſuchungen«) gegen den »Pſychologismus« gewandelt hat; — aus inneren Gründen, ohne die damaligen Argumentationen Huſſerls irgendwie preiszugeben!

In beſonders zugeſpitzter Form drückt ſich dies im »Entſcheidbarkeitsproblem« aus, das nicht zufällig im Mittelpunkt der mathematiſchen Logik des Intuitionismus ſteht. Denn dieſes Problem iſt ſpezifiſch menſchlich oder wenigſtens ein Problem eines »endlichen« Weſens (einer »Kreatur«). Für Kants »intuitiven Verſtand« (intellectus archetypus) würde es nicht exiſtieren. Gott braucht nicht zu zählen. (Gegen Gauß' Meinung.) Das Zählen iſt vielmehr bedingt durch die weſentliche Zeitgebundenheit des Menſchen (genauer ſeine »hiſtoriſche« Befangenheit), wie ja auch ſchon Kant die Zahl auf die Zeit zurückgefürt hat, d. h. auf eine nach ihm ſpezifiſch menſchliche Anſchauungsform[1]. Daß etwa eine Wahlfolge Schritt für Schritt in der Zeit wird und nicht mit einem Blick in ihrer ganzen unendlichen Ausdehnung überſehen werden kann, iſt eine unmittelbare Folge unſerer Zeitgebundenheit.

Es entſteht alſo die Aufgabe, die Stellung der mathematiſchen Gegenſtände zur Zeitlichkeit, dieſem exquiſit menſchlichen Moment des Daſeins, zu unterſuchen.

b) Die entſcheidende Rolle der Zeitlichkeit für den Seinscharakter der mathematiſchen Gegenſtände.

I. Die grundlegenden antiken Theorien.

A. Geometriſche Figuren.

Es iſt eine noch aus antiker Zeit überkommene Meinung, die ziemlich unangegriffen bis jetzt geherrſcht hat, wo immer man den mathematiſchen Gegenſtänden überhaupt einen eigenen Seinsſinn zuerkannte, daß ihr Verhältnis zur Zeitlichkeit ein weſentlich negatives ſei. Das Mathematiſche iſt gekennzeichnet durch ſeine ſog. »Überzeitlichkeit« (mitunter wird dafür auch »Unzeitlichkeit« oder »Zeitloſigkeit« geſagt). Dies ſtammt offenbar noch aus platoniſcher Tradition. Denn Plato ſah in den mathematiſchen Gegenſtänden ein Zwiſchenreich zwiſchen der Welt der Ideen und der Welt des Werdens. Man muß hierbei freilich zunächſt an die geometriſchen Figuren denken, die ja einerſeits in der ſinnlichen Welt niemals exakt verwirklicht ſind (an denen alſo die wirklichen Formen nur »teilhaben«), die andrerſeits aber doch in beliebig vielen Exemplaren auch in der geometriſchen Betrachtung ſelbſt auftreten (ſo daß alſo z. B. die beiden Kreiſe, die man zur Konſtruktion des gleichſeitigen

1) Über Kant ſ. § 6c III D.

Dreiecks benutzt (Euklid I, 1), ihrerseits an der Idee des Kreises überhaupt teilhaben)[1].

Um die Frage der »Beweglichkeit« der geometrischen Figuren (die mit der Beziehung des geometrischen Gebildes zur Zeit eng zusammenhängt) erhob sich der (schon in § 5b erwähnte) Streit zwischen Speusippos und Menaichmos: die platonische Auffassung, die schon im Staat (VII, 527 AB) dargelegt ist, war und blieb (bis zu Proklos hinunter) die, daß »wir die Vorgänge bei der Entstehung der Figuren nicht in der Weise eines wirklichen Herstellens, sondern nur erkenntnismäßig verstehen« (*τὰς δὲ γενέσεις αὐτῶν οὐ ποιητικῶς ἀλλὰ γνωστικῶς ὁρῶμεν*) —: »gleich als ob wir das Ewig Seiende als Gewordenes nehmen« (*ὡσανεὶ γιγνόμενα λαμβάνοντες τὰ ἀεὶ ὄντα*)[2].

Das »Werden« (*κίνησις* im allgemeinen Sinn), das wir bei der »Entstehung« der Figuren durch Konstruktion (oder im elementarsten Fall bei dem »Ziehen« der Geraden und dem »Beschreiben« des Kreises) beobachten, ist für den Akademiker nur das sinnliche Abbild einer inneren Bewegung des »diskursiven Denkens« (*διάνοια*)[3] (genauer eines »Vermeinens«, das in einem bestimmten Prozeß fortschreitet). Dieses »macht Jagd (auf die mathematischen Gebilde), einmal, indem es keinen mannigfaltigen Weg nimmt, . . . und mit einsichtigem Ergreifen (sie) ergreift, als das Erblicken des Sichtbaren, — anderes aber kann es nicht sogleich ergreifen und geht auf es los in der Weise der Vermittlung, und ergreift das damit in Zusammenhang Stehende und vollbringt so die Jagd« (Speusippos).

(*ἡ διάνοια τὴν θήραν ποιεῖται τὰ μὲν οὐδεμίαν ποικίλην ποιησαμένη διέξοδον . . . ἔχει τούτων ἐναργεστέραν ἐπαφὴν μᾶλλον ἢ τῶν ὁρατῶν*

1) Vgl. Aristoteles, Metaphysik A, 6 (p. 987 b, 14—18): »*ἔτι δὲ παρὰ τὰ αἰσθητὰ καὶ τὰ εἴδη τὰ μαθηματικὰ τῶν πραγμάτων εἶναί φησι* (sc. *Πλάτων*) *μεταξύ, διαφέροντα τῶν μὲν αἰσθητῶν τῷ ἀΐδια καὶ ἀκίνητα εἶναι, τῶν δ' εἰδῶν τῷ τὰ μὲν πολλ' ἄττα ὅμοια εἶναι τὸ δ' εἶδος αὐτὸ ἓν ἕκαστον μόνον*« (und zwischen den Dingen der sinnlich wahrnehmbaren Wirklichkeit und den Ideen habe Platon die mathematischen Gegenstände angesetzt, als eine dritte Art von Dingen, die sich von den sinnlich wahrnehmbaren durch ihre Ewigkeit und Unbeweglichkeit, von den Ideen aber dadurch unterscheiden, daß die mathematischen Dinge viele gleichartige sind, das Eidos aber jegliches nur eins, es selbst ist. — Übers. v. Stenzel).

2) Proclus, in Eucl. p. 78, 4—6 (Friedlein).

3) Es ist eigentlich das gemeint, was neuerdings Hölder (die mathematische Methode § 111ff.) als »synthetische« Begriffsbildung bezeichnet hat, zum Teil in Übereinstimmung, zum Teil aber auch in Abweichung von Kant. (Vgl. l. c. § 127.) Sigwart sagt treffend: »konstruierende Begriffsbildung«. (Vgl. die Zitate bei Hölder, l. c. S. 292, Anm. 2.)

ἡ ὄψις, τὰ δὲ ἐκ τοῦ εὐθέως αἴρειν ἀδυνατοῦσα κατὰ μετάβασιν ἐπ' ἐκεῖνα διαβαίνουσα κατὰ τὸ ἀκόλουθον αὐτῶν ἐπιχειρεῖ ποιεῖσθαι τὴν θήραν. — Proclus, in Eucl. 179, 15 – 22).

Oder noch deutlicher (Proklos): »Wenn die Gedanken (λόγοι, eigentlich die Reden, als Anſprechen und als damit in eins gehendes Vermeinen; alſo im weſentlichen eben die διάνοια) nur auf die gedachte Stofflichkeit (νοητὴ ὕλη, die vom νοῦς erfaßte Materie) losgehen und ſie in paſſender Weiſe geſtalten, ſo ſagt man, ſie gleichen den Werdens-Vorgängen. Denn die Bewegung unſeres »diskurſiven« Denkens und das Vortreiben der Gedanken in ſeinem Vollzug nennen wir die Entſtehung der Geſtalten in der (ſchöpferiſchen) Phantaſie[1] und der ſie betreffenden Geſchehniſſe[2].«

(εἰς ἐκείνην [sc. τὴν νοητὴν ὕλην] οὖν οἱ λόγοι προϊόντες καὶ μορφοῦντες αὐτὴν εἰκότως δήπου ταῖς γενέσεσιν ἐοικέναι λέγονται. τὴν γὰρ τῆς διανοίας ἡμῶν κίνησιν καὶ τὴν προβολὴν τῶν ἐν αὐτῇ λόγων γένεσιν τῶν ἐν φαντασίᾳ σχημάτων εἶναί φαμεν καὶ τῶν περὶ αὐτὰ παθημάτων. — Proclus, in Eucl. p. 78, 20 – 25).

Es iſt alſo nur das Denken (die »Subjektivität«, wie wir heute ſagen würden, obwohl dieſer Ausdruck, auf antike Philoſophie angewandt, nicht unbedenklich iſt), das ſich bewegt, die mathematiſchen Gegenſtände ſelbſt ſind unveränderlich[3].

B. Zahlen (die Entwicklung von der Geſtalt zur Reihe).

Bis hierher ſind unter »mathematiſchen Gegenſtänden« die geometriſchen Figuren verſtanden. Dieſe haben ja auch in der griechiſchen Mathematik überall die entſcheidende Rolle geſpielt, indem auch die rein arithmetiſchen (zahlentheoretiſchen) Sätze in geometriſchem Gewande auftreten (bis der ſpätantike, wohl bereits orientaliſch beeinflußte Diophant einen gewiſſen Wandel hierin eintreten

1) »Einbildungskraft« (Kant).

2) Zu der »inneren Bewegung« des Gedankens vgl. die ſpäter (S. 209, Anm. 1) zitierte Ariſtoteles-Stelle. Phyſik IV, 11 (219a 4–6).

3) Dies iſt die akademiſch-peripatetiſche Anſicht, die des antiken »Rationalismus«. Ihm gegenüber zeigt die Schule von Kyzikos (Eudoxos, Menaichmos uſw.) deutlich »poſitiviſtiſche« Neigungen, wie Eudoxos in bezug auf die platoniſchen Ideen und die μέθεξις (vgl. oben S. 132, Anm. 1), ſo auch Menaichmos bei ſeiner naiven Auffaſſung der mathematiſchen Konſtruktion als einer wirklichen Hervorbringung der Figuren, allerdings nicht der materiellen in Zeichnungen und am Bauwerk. Dieſe Tendenz ſcheint von dem poſitiviſtiſchen Pythagoreer Archytas, dem Lehrer des Eudoxos, herzuſtammen, über deſſen Gegenſatz zu gewiſſen Spekulationen der frühen Akademie E. Frank (Plato und die ſogenannten Pythagoreer (Halle 1923), z. B. S. 12ff., 130f., 161ff.) ſich ausführlich geäußert hat.

läßt). Indeſſen ſind doch nicht, wenigſtens nicht bei den Philoſophen, die ſich mit Mathematik befaſſen, die Zahlen jeder eigentümlichen, alſo nicht-geometriſchen Bedeutung beraubt geweſen.

Zwar iſt anzuerkennen, was neuerdings von J. Stenzel in ſeinem bemerkenswerten Buch »Zahl und Geſtalt bei Platon und Ariſtoteles« (Lpz.-Berl. 1924) ausgeführt worden iſt, daß die griechiſche Zahl viel geſtalthafter war, als die abendländiſche. Aber es zeigt ſich auch, daß die Geſtalthaftigkeit ihre größte Bedeutung in der frühen (archaiſchen) Mathematik hat und dann – ſofern nicht archaiſierende Wendungen, wie im Neupythagoreismus, vorliegen, ſich allmählich verliert. Insbeſondere iſt der Übergang von der platoniſchen zur ariſtoteliſchen Auffaſſung der Zahl charakteriſtiſch. Denn er bedeutet zugleich, kurz geſagt, den Übergang von der Zahl als Geſtalt zur Zahl als Reihenglied (Stellenzeichen). Dies iſt wahrſcheinlich der entſcheidende Punkt bei der Unterſcheidung der *ἀριθμοὶ ἀσύμβλητοι* (Geſtalt-Zahlen) und *σύμβλητοι* (Reihen-Zahlen).

Wenn man dieſen Bedeutungswandel der Zahl in der platoniſch-ariſtoteliſchen Epoche in einen größeren Zuſammenhang hineinzuſtellen verſucht, kommt man zu dem Ergebnis, daß dieſe ganze Entwicklung, weiter nach rückwärts verfolgt, ins frühmenſchliche Zahlenvorſtellen hineinführt[1].

In der Frühzeit ſind die Zahlen Individuen geſtalthafter Art, mit myſtiſchen Kräften begabt. Levy-Brühl ſagt (l. c. S. 179): »Jede Zahl hat ſo ihre eigene individuelle Phyſiognomie, eine Art myſtiſcher Atmoſphäre, ein »Kraftfeld», das ſie beſonders auszeichnet. Jede Zahl wird ſo ſpeziell für ſich ſelbſt und ohne Vergleich mit den anderen vorgeſtellt[2] – man könnte auch ſagen gefühlt. Von dieſem Geſichtspunkt aus bilden die Zahlen nicht eine homogene Reihe und ſind infolgedeſſen für die einfachſten logiſchen oder mathematiſchen Operationen ganz ungeeignet. Die myſtiſche Individualität einer jeden von ihnen bewirkt, daß ſich ſich weder addieren noch ſubtrahieren noch multiplizieren noch dividieren laſſen.«

---

1) Dieſes Problem iſt ſchon vor längerer Zeit von Wertheimer (vgl. 3 Abhandlungen zur Geſtalttheorie, Verlag der Erlanger philoſoph. Akademie 1925) und dann auch in dem zuſammenfaſſenden ethnologiſch-pſychologiſchen Werk von Levy-Brühl »Das Denken der Naturvölker« (Leipzig und Wien 1921) und endlich neuerdings von E. Caſſirer in ſeiner »Philoſophie der ſymboliſchen Formen« II. Teil: »Das mythiſche Denken« (Berlin 1925), Kap. II, 5 (S. 174 ff.) behandelt worden.

2) D. h. ſie iſt *ἀριθμὸς ἀσύμβλητος*.

Man vergleiche damit die folgende Äußerung Stenzels über die ariſtoteliſche Polemik gegen die ſpätplatoniſche Zahlenlehre (l. c. S. 7): »Mit unermüdlicher Hartnäckigkeit verteidigt Ariſtoteles die uns natürliche Auffaſſung der Zahlen als gleicher, in den arithmetiſchen Operationen grundſätzlich gleichartiger und vereinbarer (σύμβλητοι) Einheiten gegen einen ganz anderen Zahlbegriff, der gerade durch die Unvereinbarkeit der Zahlen im Sinne irgendwelcher rechneriſchen Verwendung ausgezeichnet ſein muß: wenn die Vierheit die Idee von etwas iſt, z. B. des Pferdes oder des Weißen, ſo iſt der Menſch 'ein Teil des Pferdes, wenn die Zweiheit der Menſch iſt'« (Met. M 8, 1084 a 23).

Mit dieſem Übergang von der »unvereinbaren« zur »vereinbaren«, den arithmetiſchen Operationen unterwerfbaren Zahl iſt zwar der Fortſchritt von der geſtalthaften zur Reihenzahl vollzogen, aber noch nicht in völlig durchgreifender Weiſe.

Denn die Zahl als Geſtalt iſt auch in der ſpäteſten Form des Zahlphänomens, etwa bei uns, noch nicht völlig geſchwunden. Wenn wir heute noch einerſeits von Zahlen als Anzahlen und andrerſeits von Zahlen als Ordnungszahlen (Hölder ſagt ſehr bezeichnend »Stellenzeichen«) reden, ſo drückt ſich auch hierin noch ein gewiſſer Gegenſatz von Geſtalt (bei der Anzahl) und Reihenhaftigkeit (beim Stellenzeichen) aus. Es iſt auch leicht vom heutigen rein ſachlich-mathematiſchen Geſichtspunkt aus zu zeigen, daß die Relationen, die das Stellenzeichen kennzeichnen, nicht hinreichen, um das Rechnen mit Anzahlen zu begründen. Es muß das ſog. »Grundprinzip der Anzahl« hinzutreten, daß die »Anzahl« einer vorgelegten endlichen Menge unabhängig von der Reihenfolge iſt, in der die Elemente der Menge gezählt werden[1]. Es beſteht alſo eine gewiſſe Invarianz der »Zahlgeſtalt« gegenüber den verſchiedenen Möglichkeiten des Zählens.

C. Das Unendliche.

Es iſt nach dem Bisherigen durchaus noch nicht verſtändlich, welches das Motiv iſt, von der geſtaltlichen Anzahl zur reinen Reihenzahl überzugehen. Was wird dabei gewonnen?

Die Antwort lautet, daß nur ſo das Unbegrenzte, das ἄπειρον oder das Endloſe, das ἀτελεύτητον[2], durch die Zahl faßbar wird.

Eine endloſe Geſtalt iſt ein Widerſinn, Geſtalt iſt πέρας, Grenze; die Reihe oder ſchärfer Folge hingegen kann

1) Hölder, l. c. §§ 67, 68.

2) Vgl. Ariſtoteles, Phyſ. III, 4 (p. 204a, 2–7).

ſich ins Unbegrenzte erſtrecken; genauer geſagt, ſie kann endlos fortgehen, ſo daß ſie niemals bis zum Ende (vollſtändig) durchlaufen werden kann (*ἀδιεξίτητον*).

In dem Phänomen der Folge, des endloſen Fortganges, des niemals Aufhörens u. dgl. ſteckt aber in entſcheidender Weiſe das Urphänomen der Zeit. Hier, an dieſer Stelle, wird die Rückſichtnahme auf die Zeitlichkeit in der Mathematik unvermeidlich.

Dieſe grundlegende Einſicht iſt ſchon in den bewunderungswürdigen Abſchnitten der ariſtoteliſchen »Phyſik« über das Unendliche (III, c. 4 – 8) und die Zeit (IV, c. 10 – 14) enthalten. Weitere wertvolle Aufſchlüſſe bietet auch der Kommentar des Simplicius zu den genannten Kapiteln.

An dieſer Stelle, wo rein hiſtoriſche Intereſſen fernliegen, kann nur das Allerwichtigſte kurz angedeutet werden.

Zunächſt: Wo kommt das *ἄπειρον* vor? In erſter Linie bei der Zeit und dann bei der Zahl. Dann allerdings auch bei der Zerlegung der ſtetigen Raumgröße (*μέγεθος*) in Teile[1]. Indeſſen kann von dem Kontinuumproblem hier abgeſehen werden, da es ſchon in § 5 b behandelt worden iſt.

Als das Gemeinſame und Hauptſächliche wird aber bezeichnet *τὸ ἐν τῇ νοήσει μὴ ὑπολείπειν* (203 b 24), das »nicht Darunterwegbleiben in dem Vermeinen«, was Simplicius ſo näher erläutert: »*ἡ τῆς νοήσεως ἤτοι φαντασίας τῆς ἡμετέρας δύναμις ἀεί τι καὶ προστιθέναι καὶ ἀφαιρεῖν ἰσχύουσα καὶ μηδέποτε ἡττωμένη καὶ ὑπολείπουσα*« (p. 467, 6 – 8 Diels), d. h. »die Kraft unſeres Vermeinens in unſerer Phantaſie (unſeres anſchaulichen Vorſtellens), die immer noch etwas hinzufügen oder wegnehmen kann und niemals geringer wird oder verſagt (wegbleibt).«

An entſcheidender Stelle ſtehen hier wiederum die zeitlichen Kategorien »immer« (*ἀεί*) und »niemals« (*μεδέποτε*).

---

1) Die Betrachtungen über die ſinnlichen Körper, das Werden in der Natur und auch über den Raum können außer Betracht bleiben.

Auch Simplicius iſt der Meinung, daß in erſter Linie Zahl und Zeit das Unendliche fordern, und dann auch die Geometrie die unendliche Teilbarkeit. (Vgl. in Ariſt. phyſ. comm. ed. Diels, p. 468, 27 – 469, 3.)

Beſonders kennzeichnend: »*ἀνειρεῖται δὲ καὶ ἡ ἐπ' ἄπειρον τῶν ἀριθμῶν αὔξησις ἐναργῶς φαινομένη*«: (Mit dem Unendlichen) wird aufgehoben auch die Vermehrung der Zahlen ins Unbegrenzte, die doch ſo deutlich ſichtbar iſt (als ein ſo durchſichtiges Phänomen auftritt) und weiter: *ἡ ἐπ' ἄπειρον πρόοδος τοῦ χρόνον, ταύτῃ δὲ ἡ τοῦ παντὸς ἀιδιότης συναναιρεῖται.* –

Noch klarer wird das an derjenigen Stelle, wo die entſcheidende kategoriale Charakteriſierung des Unendlichen vorgenommen wird: Das ἄπειρον iſt δυνάμει ὄν. Aber man darf das δυνάμει ὄν nicht ſo auffaſſen, wie beim Erz, das in der Möglichkeit ſteht, eine Bildſäule zu werden, ſo daß es eine Bildſäule ſein wird, alſo etwas, ὃ ἔσται ἐνεργείᾳ, das wirklich ſein wird. Sondern – da der Sinn des Seins vielfach iſt, iſt das »δυνάμει« beim ἄπειρον zu nehmen: ὥσπερ ἡ ἡμέρα ἐστὶ καὶ ὁ ἀγών, τῷ ἀεὶ ἄλλο καὶ ἄλλο γίνεσθαι (206 a 21 – 22), »wie der Tag und das olympiſche Spiel iſt, durch das immer anders und anders Werden«. Das Unbegrenzte darf alſo nicht als ein τόδε τι, ein »dies da« gefaßt werden, wie ein Menſch oder ein Haus, ſondern eben wie der Tag und das Spiel: οἷς τὸ εἶναι οὐχ ὡς οὐσία τὶς γέγονεν, ἀλλ' ἀεὶ ἐν γενέσει ἢ φθορᾷ (206 a 31 – 32), »denen das Sein nicht wie ein ‚Vorhanden-Sein'[1] geworden iſt, ſondern immer im Werden und Vergehen«.

Auch hier gibt Simplicius einige explizitere Formulierungen: (S. 493, 6) τὸ γὰρ τοιοῦτον ἐνεργείᾳ τὸ ἐν τῷ γίνεσθαι τὸ εἶναι ἔχον σύνεστιν ἀεὶ τῷ δυνάμει καὶ διὰ τοῦτο ἔχει ἀεὶ τὴν ἐν τῷ γίνεσθαι παράτασιν, ὅτι οὐδαμοῦ τοῦ δυνάμει ἀπολύεται· ἀπολυθὲν γάρ ἐστιν ὅπερ ἐστὶν καὶ πέρας ἔχει καὶ οὐδὲν ἄπειρον.

(Denn das ſo Beſchaffene, in actu das Sein im Werden Habende iſt immer zuſammen mit dem in der Möglichkeit Seienden und hat deswegen immer die Erſtreckung im Werden, weil es nirgends von dem »in der Möglichkeit« abgelöſt wird; denn das Abgelöſte iſt, was es iſt, und hat ſeine Grenze und iſt nichts Unbegrenztes.)

S. 493, 19 – 27: καὶ ἔοικεν ἐπὶ τοῦ ἀπείρου ταὐτὸν εἶναι τὸ δυνάμει καὶ τὸ ἐνεργείᾳ. ἡ γὰρ τοῦ ἀπείρου ἐνέργεια ὡς ἀπείρου τὸ δύνασθαι ἀεί τι πλέον, ἐπεὶ εἴ τις ἐντελέχειαν ἐπιζητοίη ἐπὶ τοῦ ἀπείρου οἷον στάσιν τινὰ καὶ εἶδος, οὗτος οὐδὲν ἄλλο ἢ πέρας ἐπιζητεῖ τοῦ ἀπείρου, ταὐτὸν δὲ εἰπεῖν φθοράν. τοῦτο δὲ ἀδύνατον. πᾶσα γὰρ ἐντελέχεια σῴζειν ὀφείλει τὸ ὑποκείμενον. καὶ ὥσπερ ἡ τοῦ κινητοῦ ἐντελέχεια φυλάττουσα τὸ δυνάμει κίνησις ἦν, οὕτως καὶ ἡ τοῦ ἀπείρου. ὥσπερ γὰρ τὰ ἐν τῷ γίνεσθαι τὸ εἶναι ἔχοντα ἀπολέσαντα τὸ γίνεσθαι ἀπόλλυσι καὶ τὸ εἶναι, οὕτως καὶ τὰ ἐν τῷ δύνασθαι ἕως τότε ἐστίν, ἕως ὅτε ἐστὶ τὸ δύνασθαι.

1) Es ſcheint hier ſehr nahezuliegen, οὐσία einfach mit »Subſtanz« zu überſetzen, d. h. »dasjenige, was in der Zeit beharrt, alſo nicht wird oder vergeht«. Das iſt indeſſen nach dem ſonſtigen Wortgebrauch bei Ariſtoteles nicht möglich (wie Heidegger zeigte); zur Not könnte man (mit Stenzel) »Weſen« ſagen, doch iſt dieſer Ausdruck im Deutſchen ſehr vieldeutig.

Dagegen kann das »Zur-Verfügung-Sein« (»Vorhanden«-Sein) als ein »Gegenwärtigkeit-Sein« (An-Weſenheit = παρ-ουσία) gedeutet werden. (Vgl. Heidegger, »Sein und Zeit«, Seite 25.)

»Und es ſcheint beim Unbegrenzten das »in der Möglichkeit« dasſelbe zu ſein, wie das »in der Wirklichkeit«. Denn das Wirklichſein des Unbegrenzten als ſolchen iſt das »Immer noch etwas mehr können«[1], da, wenn jemand das vollendete Sein (ἐντελέχεια) beim Unbegrenzten ſuchen würde, in etwas gleich wie einem Zuſtand oder einer Geſtalt, ſo würde er nichts anderes ſuchen, als die Grenze des Unbegrenzten oder, was dasſelbe beſagt, ſeine Vernichtung. Das aber iſt unmöglich. Denn jedes Vollendetſein muß das Zugrundeliegende bewahren. Und wie das vollendete Sein des Bewegten, welches das »in der Möglichkeit« bewahrt, ⟨die⟩ Bewegtheit ⟨ſelbſt⟩ iſt, ſo auch das des Unbegrenzten. Denn gleichwie das in dem Werden das Sein Habende, wenn es das Werden verliert, damit auch das Sein ⟨ſelbſt⟩ verliert, ſo iſt (beſteht) auch das in dem »Können« ⟨ſein Sein Habende⟩ ſo lange, als das »Können« beſteht.«

Damit iſt die Explikation aus den Kategorien Dynamis und Energie (Entelechie) in aller Schärfe gegeben. (Man muß ſich hier der bekannten ariſtoteliſchen Definition der Bewegtheit ſelbſt erinnern: ἡ τοῦ δυνάμει ὄντος ἐντελέχεια, ᾗ τοιοῦτον, κίνησίς ἐστιν. (201 a, 10 – 12) »das vollendete Sein des in der Möglichkeit Seienden als ſolchen iſt Bewegtheit«[2].)

Ariſtoteles ſah alſo in dem Endloſen, Unbegrenzten etwas weſentlich Werdendes (Simplicius: τὸ ἐν τῷ γίνεσθαι τὸ εἶναι ἔχον), etwas, das niemals als Ganzes präſent (gegenwärtig: παρόν) iſt, zur Verfügung ſteht (das deshalb nicht οὐσία iſt), endlich etwas, das nicht Geſtalt (εἶδος) ſein kann, ſondern ſich analog wie die nach Form begierige Materie verhält (ὡς ὕλη αἴτιον) und deſſen Seinſinn ſomit in einer eigentümlichen »Beraubtheit« (Privation) beſteht. (τὸ εἶναι αὐτῷ στέρησίς ἐστι).

---

1) Vgl. Ariſtoteles, Phyſik III, c. 6 (p. 206 b 33 – 267 a 2).

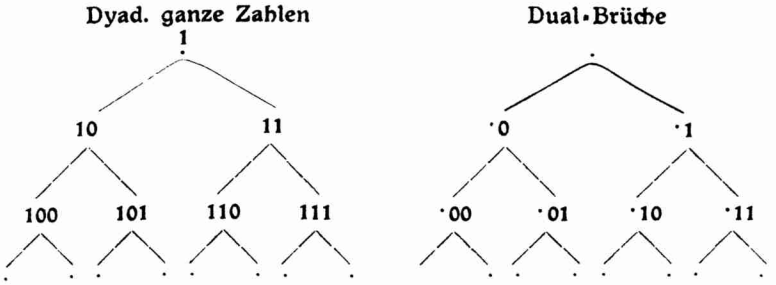
2) Hieran ſchließt ſich dann noch eine letzte begriffliche Beſtimmung des Unbegrenzten von der Stofflichkeit aus: »ὡς ὕλη τὸ ἄπειρον αἴτιόν ἐστι· καὶ . τὸ . . . εἶναι αὐτοῦ στέρησίς ἐστι« (207 b 35 – 208 a 1). »Wie der Stoff iſt das Unbegrenzte Grund (Urſache), und ſein ihm zugehöriges Sein iſt Beraubung (privatio)«. – Vgl. dazu die längere, hier nicht wiederzugebende Erläuterung des Simplicius p. 513, 3 – 514, 3. Wichtig an dieſer Erläuterung iſt der breit vorgetragene Gedanke, daß das ἄπειρον Stoff iſt, nicht als ὑποκείμενον, ſondern ὅτι συμβέβηκεν αὐτῷ πρὸ τοῦ δέξασθαι τὸ εἶδος ἡ στέρησις, ἥτις ἐστὶν ἡ ἀπειρία (weil ihm zukommt an Stelle (?) des Aufnehmens des εἶδος die Beraubung, welche die Unbegrenztheit iſt). Das εἶδος iſt die Grenze (πέρας), alſo das dem εἶδος Entgegenſtehende (die στέρησις) auch das der Grenze Entgegenſtehende, alſo das ἄπειρον. (ὑπάρχει τῇ στερήσει τὸ ἄπειρον, ὥσπερ τῷ εἴδει τὸ πέρας: »es liegt der Beraubung das Unbegrenzte zugrunde wie der Geſtalt die Begrenzung«.)

Die entſcheidenden Beiſpiele des Unbegrenzten, d. h. die konkreten Phänomene, wo es uns entgegentritt, ſind Zahl und Zeit. Dazu iſt allerdings auch noch die Zerlegung der Größe in Teile zu nehmen, allein das gehört als analoges Phänomen zur Zahl (*σύνθεσις* parallel der *διαίρεσις*). –

In dieſem Sinne hatte ſchon der ſpäte Plato etwa die Verdoppelung und die Halbierung parallel betrachtet. Ganze Zahlen wie Brüche entſtanden durch das genetiſche Vermögen der *ἀόριστος δυάς* (der unbegrenzten Zweiheit). Stenzel hat (in ſeinem ſchon zitierten Buch) ſehr wahrſcheinlich gemacht, daß die diäretiſchen Zahlenerzeugung ſowohl die ganzen natürlichen Zahlen wie die (dyadiſchen) Brüche nach demſelben Prinzip hervorbringt[1].

Die Belegſtellen Stenzels ſind vor allem aus Alexander Aphrodisienſis zu Metaphyſ. A, und weiterhin, was in unſerem Zuſammenhang wichtig iſt, aus Simplicius zu den über das *ἄπειρον* handelnden Stellen der Phyſik (III, 4; 203 a 15: *Πλάτων δὲ δύο τὰ ἄπειρα, τὸ μέγα καὶ τὸ μικρόν*). Dazu ſagt Simplicius, unter Berufung auf den Philebos-Kommentar des Porphyrios z. B. »*τὴν δὲ ἀόριστον δύαδα καὶ ἐν τοῖς νοητοῖς τιθεὶς ἄπειρον εἶναι ἔλεγε* (sc. Plato)« (p. 453, 26). Und in dem von Simplicius wiedergegebenen Bericht des Porphyr über die platon. Vorträge über das Gute heißt es: »*αὐτὸς δὲ τὸ μᾶλλον καὶ τὸ ἧττον . . . τῆς ἀπείρου φύσεως εἶναι τίθεται. ὅπου γὰρ ἂν ταῦτα ἐνῇ κατὰ τὴν ἐπίτασιν καὶ*

1) Nimmt man an Stelle des dekadiſchen Zahlſyſtems, wie es Stenzel (l. c. S. 31) benutzt, das dyadiſche (das von Wallis und Leibniz, von dem letzten auch für philoſophiſche Zwecke, eingeführt wurde), ſo erhält man für die Entwicklung der ganzen Zahlen und der ſyſtematiſchen Dual- (nicht Dezimal-) Brüche folgende beiden, wie man ſieht, ganz analogen Schemata:



Erſt ſo gewinnt das Stenzelſche diäretiſche Schema ſeine ganze Überzeugungskraft. (Vgl. dazu jetzt auch Weyl, Handbuch d. Philoſ. II A, S. 43 u. 50.) In gewiſſem Sinne iſt alſo Plato der eigentliche Entdecker des dyadiſchen Zahlenſyſtems.

ἄνεσιν προϊόντα, οὐχ ἵσταται οὐδὲ περαίνει τὸ μετέχον αὐτῶν, ἀλλὰ πρόεισιν εἰς τὸ τῆς ἀπειρίας ἀόριστον. . . . (453, 31 – 36). . . . τὸ μὲν ἐπὶ τὸ ἔλαττον προϊόν, τὸ δὲ ἐπὶ τὸ μεῖζον, ἀτελευτήτως (454, 3). . . . ἡ δὴ τοιαύτη ἀδιάλειπτος τομὴ δηλοῖ τινα φύσιν ἀπείρον κατακεκλεισμένην ἐν τῷ πήχει . . . ἐν τούτοις δὲ καὶ ἡ ἀόριστος δυὰς ὁρᾶται . . . [ταῦτα ὁ Πορφύριος εἶπεν αὐτῇ σχεδὸν τῇ λέξει.] (454, 5 – 6, 8, 17.)

Man vgl. den darauf zitierten Bericht des Alexander, wo es heißt: »κατὰ γὰρ ἐπίτασιν καὶ ἄνεσιν προϊόντα ταῦτα οὐχ ἵσταται, ἀλλ' ἐπὶ τὸ τῆς ἀπειρίας ἀόριστον προχωρεῖ (455, 1 – 2). . . . τὴν δὲ δυάδα τοῦ ἀπείρου φύσιν ἔλεγεν . . . (455, 9 – 10).

Das Merkwürdige an dieſen Berichten iſt, daß ſie zeigen, daß weſentliche Beſtimmungen des ariſtoteliſchen Unendlichkeitsbegriffes bereits der »unbegrenzten Zweiheit« zukommen, wie das ἀτελευτήτως (unvollendbar, endlos) προϊέναι, προχωρεῖν εἰς τὸ τῆς ἀπειρίας ἀόριστον, . . . das ἀδιάλειπτον uſw.

Man kann daraus ſchließen, daß ſich bereits beim ſpäten Platon der Übergang von der Zahl als Geſtalt zur Zahl als Reihenglied ausbildet, im engen Zuſammenhang mit dem Begriff des ἄπειρον als eines Werdenden. Die unbegrenzte Zweiheit iſt bei ihm die zahlenerzeugende Potenz (δυόποιος).

Aber auch Platon iſt nicht der erſte. Wir müſſen noch weſentlich weiter zurückgehen, um den eigentlichen Urſprung des potentiellen Unendlich zu finden.

Zunächſt ſtoßen wir auf Archytas. Dieſer zeigt bereits an dem Beiſpiel des Raumes (nach des Eudemos' Bericht)[1] das weſentliche Moment des »immer« auf (ἀεὶ οὖν βαδιεῖται τὸν αὐτὸν τρόπον ἐπὶ τὸ ἀεὶ λαμβανόμενον πέρας κτλ.). – Weſentlich früher iſt noch das bekannte Fragment des Anaxagoras († nach 432): (fr. 3 Diels) »οὔτε γὰρ τοῦ σμικροῦ ἐστι τὸ γε ἐλάχιστον, ἀλλ' ἔλασσον ἀεί. τὸ γὰρ ἐὸν οὐκ ἔστι τὸ μὴ οὐκ εἶναι (denn es iſt unmöglich, daß das Seiende zu ſein aufhöre), ἀλλὰ καὶ τοῦ μεγάλου ἀεί ἐστι μεῖζον.

---

1) Diels, Fragmente der Vorſokratiker 35, A 24: »Ἀρχύτας . . . οὕτως ἠρώτα τὸν λόγον· 'ἐν τῷ ἐσχάτῳ οἷον τῷ ἁπλανεῖ οὐρανῷ γενόμενος, πότερον ἐκτείναιμι ἂν τὴν χεῖρα ἢ τὴν ῥάβδον εἰς τὸ ἔξω ἢ οὔ;' καὶ τὸ μὲν οὖν μὴ ἐκτείνειν ἄτοπον. εἰ δὲ ἐκτείνω, ἤτοι σῶμα ἢ τόπος τὸ ἐκτὸς ἔσται. (διοίσει δὲ οὐδὲν ὡς μαθησόμεθα.) ἀεὶ οὖν βαδιεῖται τὸν αὐτὸν τρόπον ἐπὶ τὸ ἀεὶ λαμβανόμενον πέρας, καὶ ταὐτὸν ἐρωτήσει, καὶ εἰ ἀεὶ ἕτερον ἔσται ἐφ' ὃ ἡ ῥάβδος, δῆλον ὅτι καὶ ἄπειρον.«

Wohl noch etwas vor Anaxagoras (etwa um 460) muß man endlich das nachſtehende Fragment des Zenon von Elea anſetzen (fr. 1 Diels). Es ſtammt aus einem Beweis für das Daſein der unendlichen Größe.

»εἰ δὲ ἔστιν, ἀνάγκη ἕκαστον μέγεθός τι ἐχειν ... καὶ περὶ τοῦ προύχοντος ὁ αὐτὸς λόγος. καὶ γὰρ ἐκεῖνο ἕξει μέγεθος καὶ προέξει αὐτοῦ τι. ὅμοιον δὴ τοῦτο ἅπαξ τε εἰπεῖν καὶ ἀεὶ λέγειν· οὐδὲν γὰρ αὐτοῦ τοιοῦτον ἔσχατον ἔσται οὔτε ἕτερον πρὸς ἕτερον οὐκ ἔσται. οὕτως εἰ πολλά ἐστιν, ἀνάγκη αὐτὰ μικρὰ τε εἶναι καὶ μεγάλα· μικρὰ μὲν ὥστε μὴ ἔχειν μέγεθος, μεγάλα δὲ ὥστε ἄπειρα εἶναι.«

fr. 3: »εἰ πολλά ἐστιν, ἀνάγκη τοσαῦτα εἶναι ὅσα ἐστὶ καὶ οὔτε πλείονα αὐτῶν οὔτε ἐλάττονα εἰ δὲ τοσαῦτά ἐστιν ὅσα ἐστί, πεπερασμένα ἂν εἴη.

εἰ πολλά ἐστιν, ἄπειρα τὰ ὄντα ἐστίν· ἀεὶ γὰρ ἕτερα μεταξὺ τῶν ὄντων ἐστί, καὶ πάλιν ἐκείνων ἕτερα μεταξύ. καὶ οὕτως ἄπειρα τὰ ὄντα ἐστί.«

In dieſen Sätzen beſtimmt Zeno als erſter den Begriff des Unendlichen ſcharf. Er ſagt in fragm. 1: »καὶ περὶ τοῦ προύχοντος ὁ αὐτὸς λόγος« (Und von dem Vorangehenden gilt dieſelbe Rede) »ὅμοῖον δὴ τοῦτο ἅπαξ τε εἰπεῖν καὶ ἀεὶ λέγειν« (Es iſt das gleiche, dies einmal auszuſprechen und immer zu ſagen. – D. h. »Das gleiche gilt alſo ein für allemal« [Diels].)

Hier iſt alſo das »immer« zur Charakteriſtik des Unendlichen benutzt und die Wiederkehr des Gleichen. Man kann denselben Logos immer wieder anwenden in der gleichen Weiſe: das kennzeichnet das Apeiron.

In fragm. 3 wird der Gegenſatz dieſes ſo definierten Apeiron zu dem ruhenden Sein ſcharf herausgeſtellt: Eine beſtimmte Vielheit iſt, was ſie iſt, nicht mehr und nicht weniger; alſo ſie iſt begrenzt. Andererſeits iſt es immer (ἀεί) möglich, zwiſchen die vorhandenen Dinge andere zu ſetzen und wiederum (πάλιν) zwiſchen jene andere. – Alſo auch hier die immerwährende Wiederholung. Vgl. die ariſtoteliſchen Wendungen: ἀεὶ ἄλλο καὶ ἄλλο (ἕτερον καὶ ἕτερον), πάλιν καὶ πάλιν. –

Aber als Archeget gleichſam aller derer, die über das Unendliche philoſophiert haben, tritt uns in grauer Vorzeit endlich Anaximander entgegen.

Folgende Fragmente ſind von ihm überliefert:

a) Diels, Vorſokratiker², fr. 9, S. 13, 4, 6–9: Ἀναξιμάνδρος ... ἀρχὴν εἴρηκε τῶν ὄντων τὸ ἄπειρον [πρῶτον τοῦτο τούνομα κομίσας τῆς ἀρχῆς] ἐξ ὧν δὲ ἡ γένεσίς ἐστι τοῖς οὖσι, καὶ τὴν φθορὰν εἰς ταῦτα

γίνεσθαι κατὰ τὸ χρεών. διδόναι γὰρ αὐτὰ δίκην καὶ τίσιν ἀλλήλοις τῆς ἀδικίας κατὰ τὴν τοῦ χρόνον τάξιν.

»Anaximander nannte den Urſprung der Dinge das Unbegrenzte, indem er als erſter dieſen Namen »Urſprung« [ἀρχή] gebrauchte.

Anfang der Dinge iſt das Unendliche. Woraus aber ihre Geburt iſt, dahin geht auch ihr Streben, nach der Notwendigkeit. Denn ſie zahlen einander Strafe und Buße nach der Zeit Ordnung«. (Diels.)

b) Diels, l. c. fr. 15, S. 14, 42: folgende Prädikate des ἄπειρον werden genannt: ἀθάνατον und ἀνώλεθρον. — Vgl. dazu auch Diogenes von Apollonia (Diels, l. c. 51 B, fr. 7 u. 8, S. 339, 16–18, 19–21): »καὶ αὐτὸ μὲν τοῦτο καὶ ἀίδιον καὶ ἀθάνατον σῶμα, τῶν δὲ τὰ μὲν γίνεται, τὰ δὲ ἀπολείπει.« — »ἀλλὰ τοῦτο μοι δῆλον δοκεῖ εἶναι, ὅτι καὶ μέγα καὶ ἰσχυρὸν καὶ ἀίδιόν τε καὶ ἀθάνατον καὶ πολλά εἰδός ἐστι.« (Das »αὐτό« interpretiert Diels als »Urſtoff«, alſo wohl ἀρχή oder στοιχεῖον nach ſpäterer Terminologie.)

Wir ſehen aus dieſen Fragmenten: Schon beim erſten Philoſophen, der ſich mit dem Unendlichen befaßte, ſpielte die Zeit eine entſcheidende Rolle bei der Definition des ἄπειρον.

Anaximander führt den Ausdruck ἀρχή, »Anfang«, ein. Das ἄπειρον iſt ἀρχή, weil für es ſelbſt nicht ἀρχή ſein kann, weil es ſelbſt, als ohne »Grenze«, keinen Anfang hat[1]. Er ſagt weiterhin: »Die Dinge zahlen einander Strafe nach der Zeit Ordnung.« Der ewige Wechſel, der notwendig rhythmiſch gedacht werden muß, der ewige Wellenſchlag der Geburten und Tode, – das iſt das ἄπειρον als Prinzip (ἀρχή). Die Stelle iſt alſo nicht moraliſch zu verſtehen, ſondern ſie ſtellt einen Ausdrucksverſuch des unendlichen Weltgeſchehens dar, – mit Worten, die der Lebensbedeutſamkeit entnommen ſind. Das Apeiron iſt die Urkraft (vgl. Diogenes von Apollonia), die das Werden nicht aufhören läßt[2]. –

1) Vgl. Ariſtoteles, Phyſ. III, 4 (203 b, 4–7): εὐλόγως δὲ καὶ ἀρχὴν αὐτὸ (sc. τὸ ἄπειρον) τιθέασι πάντες ... ἅπαντα γὰρ ἢ ἀρχὴ ἢ ἐξ ἀρχῆς· τοῦ δὲ ἀπείρου οὐκ ἔστιν ἀρχή· εἴη γὰρ ἂν αὐτοῦ πέρας.

2) Vgl. fr. 10 (Diels l. c. 13, 31–33, 34–35), das aus Theophraſt ſtammt: ἀπεφήνατο (Anaximander) δὲ τὴν φθορὰν γίνεσθαι καὶ πολὺ πρότερον τὴν γένεσιν ἐξ ἀπείρου αἰῶνος ἀνακυκλουμένων πάντων αὐτῶν. — φησὶ δὲ τὸ ἐκ τοῦ ἀιδίου γόνιμον θερμοῦ καὶ ψυχροῦ κατὰ τὴν γένεσιν τοῦδε τοῦ κόσμου ἀποκριθῆναι ...

Dazu vgl. die Interpretation von K. Reinhardt, Parmenides und die Geſchichte der griechiſchen Philoſophie. (Bonn 1916), S. 253 ff., 258.

Es ſei auch auf Reinhardts Bemerkungen über die grammatiſche Natur des Wortes »ἄπειρον« (ſubſtantiviertes Neutrum eines Adjektivums) hingewieſen (l. c. 251 ff.), die es als philoſophiſchen Terminus beſonders geeignet ſein läßt.

Blicken wir auf die ſämtlichen hiſtoriſchen Belege zurück, die wir vor dem Leſer ausgebreitet haben, ſo ergibt ſich mit voller Klarheit, daß von Anfang an das ἄπειρον mit der Zeit verknüpft erſcheint. Der Sinn der Unendlichkeit entſpringt überall aus dem ἀεί, dem »Immer«, genauer: der immerwährenden Wiederholung (Wiederkehr des Gleichen). Die Endloſigkeit iſt alſo offenbar das entſcheidende Moment an der Zahl, das ſie mit der Zeit in eine ganz urſprüngliche Verbindung bringt. Die Zahl als Reihenglied gewinnt mit dem Horizont der Endloſigkeit zugleich irgendwie den Charakter der Zeitlichkeit.

D. Zahl, Unendlichkeit und die Zeit.

Wir haben dieſe ſinnhafte Verknüpfung von der Seite der Unendlichkeit aus aufgewieſen; wir müſſen nun zur Ergänzung die andere Perſpektive kurz berühren, die ebenfalls Ariſtoteles dem Problem von ſeiten einer Analytik der Zeit (Phyſ. IV, c. 10–14) gegeben hat.

Ariſtoteles definiert die Zeit durch folgende Sätze:

Als Überleitung vom ἄπειρον zum χρόνος ſei zunächſt angeführt: »οὐδὲ μένει ἡ ἀπειρία ἀλλὰ γίνεται, ὥσπερ καὶ ὁ χρόνος καὶ ὁ ἀριθμὸς τοῦ χρόνου« (207 b 14–15).

Bezüglich der Zeit ſelbſt wird zunächſt – nach der Kritik der älteren Anſchauungen – geſagt: ſie ſei weder Bewegung noch ohne Bewegung (οὔτε κίνησιν οὔτε ἄνευ κινήσεως ὁ χρόνος ἐστί, 219, a 1), alſo iſt zu fragen, was an der Bewegung ſie iſt (τί τῆς κινήσεώς ἐστιν, 219, a 3)[1]. Darauf iſt zu antworten, daß dann Zeit vergangen iſt, wenn wir das Frühere und Spätere in der Bewegung wahrgenommen haben. (τότε φαμὲν γεγονέναι χρόνον, ὅταν τοῦ προτέρου καὶ ὑστέρου ἐν τῇ κινήσει αἴσθησιν λάβωμεν, 219 a, 23–25). D. h. nur dann, wenn das Jetzt nicht als eins gegeben iſt, ſondern wir immer ein anderes Jetzt erfaſſen, in der Ordnung des Früheren und Späteren. (τῷ ἄλλο καὶ ἄλλο ὑπολαβεῖν αὐτὰ [sc. τὰ νῦν], 219 a, 25–26).

Und nun kommt die entſcheidende »Definition« der Zeit: »Denn dies iſt die Zeit: die »Zahl« der Bewegung gemäß dem Früher und Später!« (τοῦτο γάρ ἐστιν ὁ χρόνος, ἀριθμὸς κινήσεως κατὰ τὸ πρότερον καὶ ὕστερον; 219b, 1–2.) Und zwar iſt die Zeit genauer nicht die »zählende«, ſondern die »gezählte« Zahl der Bewegtheit.

1) Dazu die ſcharfe Erfaſſung der »inneren« Bewegtheit »in der Seele«: »ἅμα γὰρ κινήσεως αἰσθανόμεθα καὶ χρόνου· καὶ γὰρ ἐὰν ᾖ σκότος, καὶ μηθὲν διὰ τοῦ σώματος πάσχωμεν, κίνησις δέ τις ἐν τῇ ψυχῇ ἐνῇ, εὐθὺς ἅμα δοκεῖ τις γεγονέναι καὶ χρόνος. – Phyſik IV, 11 (219 a, 3–6).

(ὁ δὲ χρόνος ἐστὶ τὸ ἀριθμούμενον, οὐχ ᾧ ἀριθμοῦμεν; 219b, 7–8). Dies geht nach dem Simplicius darauf, daß die kontinuierlich fließende Zeit nicht unmittelbar mit der diskreten Zahl identifiziert werden kann, ſondern ſozuſagen das Urſubſtrat des Zählens darſtellt, wobei aber die innere Aktivität des Zählens immer noch von dem paſſiven Wahrnehmen des ſtetigen Zeitfluſſes unterſchieden werden muß[1].

Mit einer anderen Wendung: die Zeit mißt die Bewegung, und zwar ihrem »Sein« nach (nicht etwa dem ihr zugrunde liegenden raumhaften »Weg« nach): 221a, 4–7: καὶ ἔστι τῇ κινήσει τὸ ἐν χρόνῳ εἶναι, τὸ μετρεῖσθαι τῷ χρόνῳ καὶ αὐτὴν καὶ τὸ εἶναι αὐτῆς· ἅμα γὰρ τὴν κίνησιν καὶ τὸ εἶναι τῇ κινήσει μετρεῖ· καὶ τοῦτ' ἔστιν αὐτῇ τὸ ἐν χρόνῳ εἶναι, τὸ μετρεῖσθαι αὐτῆς τὸ εἶναι.

(Und für die Bewegtheit bedeutet das in der Zeit Sein, daß ſie ſelbſt und ihr Sein durch die Zeit gemeſſen wird. Denn zugleich mißt ſie [die Zeit] die Bewegtheit und das der Bewegtheit zukommende Sein. Und das iſt ihr [der Bewegtheit] das in der Zeit Sein: das Gemeſſenwerden ihres Seins.)

Und weiter: 221b, 14–16: τὸ δ' εἶναι ἐν ἀριθμῷ, ἐστὶ τὸ εἶναί τινα ἀριθμὸν τοῦ πράγματος, καὶ μετρεῖσθαι τὸ εἶναι αὐτοῦ τῷ ἀριθμῷ ἐν ᾧ ἐστίν· ὥστ' εἰ ἐν χρόνῳ, ὑπὸ χρόνου.

(Das Sein in einer Zahlmannigfaltigkeit bedeutet, daß es eine Zahlmannigfaltigkeit [einen Zahlcharakter] der betreffenden Gegen-

---

1) Vgl. dazu neben den weiter unten angeführten Simplicius-Stellen vor allem folgende Äußerung aus der frühperipatetiſchen Schulſchrift περὶ ἀτόμων γραμμῶν 969a30–b3: οὐδὲ δὴ τὸ καθ' ἕκαστον ἅπτεσθαι τῶν ἀπείρων τὴν διάνοιαν οὐκ ἔστιν ἀριθμεῖν, εἰ ἄρα τις καὶ νοήσειεν οὕτως ἐφάπτεσθαι τῶν ἀπείρων τὴν διάνοιαν. ὅπερ ἴσως ἀδύνατον· οὐ γὰρ ἐν συνέχεσι καὶ ὑποκειμένοις ἡ τῆς διανοίας κίνησις, ὥσπερ ἡ τῶν φερομένων. εἰ δ' οὖν καὶ ἐγχωρεῖ κινεῖσθαι οὕτως οὐκ ἔστιν τοῦτο ἀριθμεῖν· τὸ γὰρ ἀριθμεῖν ἐστὶ τὸ μετὰ ἐπιστάσεως.

(Das Erfaſſen jedes einzelnen Elements eines Unendlichen durch die Aufmerkſamkeit (das diskurſive Vermeinen) iſt nicht Zählen; ſelbſt wenn jemand meinen ſollte, daß das Vermeinen [überhaupt] ſo das Unbegrenzte erfaſſen könnte. Das iſt vielleicht unmöglich: denn nicht vollzieht ſich die Bewegung des Vermeinens im Stetigen und Vorliegenden (dem Subſtrat), wie die der bewegten Körper. Aber ſelbſt, wenn man zugibt, daß das Vermeinen ſich ſo bewegen könnte, ſo wäre dies doch kein Zählen. Denn das Zählen geſchieht mit Stillſtänden.)

Vgl. damit die präziſe Äußerung des Ariſtoteles ſelbſt: ᾗ δ' ἀριθμητὸν τὸ πρότερον καὶ ὕστερον, τὸ νῦν ἐστίν (219b25): »ſofern (quâ) das Früher und Später zählbar iſt, iſt es ein Jetzt«. Der Fluß der Zeit wird alſo durch das Herausheben der »Jetzte« (Zeitpunkte) zählbar, d. h. in ſeinem Mannigfaltigkeitscharakter, dem Reihencharakter ſeiner Ordnung, faßbar.

ſtändlichkeit gibt und daß ihr Sein gemeſſen wird durch den Zahlcharakter, in dem ſie iſt. So, wenn ſie in der Zeit iſt, durch die Zeit.)

Doch darf andererſeits dieſes an ſich wichtige Moment des »Meſſens« auch nicht überſchätzt werden, als ob alle Zeit nach unabänderlich quantitativen Maßſtäben gemeſſen werden könnte. Die Heraushebung der ordnungshaften Seite der Zahl iſt entſcheidend: das, was die Zeit zum Zahlcharakter macht, iſt allein das Früher und Später[1].

Darüber finden ſich wenigſtens bei Simplicius Äußerungen von einer auch heute noch unübertroffenen begrifflichen und terminologiſchen Schärfe:

p. 713, 17–19: *ὥστε παντάχοθεν ἡ τοῦ χρόνου ἔννοια ἐγγίνεται τῷ διαλαμβάνεσθαι τὸ πρότερον καὶ ὕστερον τῆς κινήσεως· διαλαμβάνεται δέ, ὅταν ὡς ἄλλο καὶ ἄλλο ληφθῇ, τουτέστιν ὅταν ἀριθμηθῇ.*

(So daß überall das Erfaſſen der Zeit dadurch geſchieht, daß das Früher und Später der Bewegtheit auseinandergehalten wird; es wird aber auseinandergehalten, wenn es wie ein anderes und anderes genommen wird, das iſt, wenn es gezählt wird.)

p. 714, 10–16: *... καὶ ὁ μὲν ἀριθμῶν ἀριθμὸς οὐδ' ἁρμόσειε τῷ χρόνῳ· διῃρημένος γάρ ἐστι καὶ οὐ συνεχής. ὁ δὲ ἀριθμούμενος δύναται καὶ συνεχὴς εἶναι, ὡς τὸ δόρυ τὸ ἑνδεκάπηχυ. καὶ τὸ ἀριθμούμενον δὲ διττόν, τὸ μὲν κατὰ τὸ ποσόν, ὡς λέγομεν δύο κινήσεις ἢ τρεῖς, τὸ δὲ κατὰ τὴν τάξιν, ὡς λέγομεν κατὰ τὴν προτέραν κίνησιν καὶ ὑστέραν. δεῖξαι οὖν βούλεται, ὅτι ἀριθμός ἐστι κινήσεως ὁ χρόνος καὶ ὡς ἀριθμούμενος καὶ ὡς κατὰ τὴν τάξιν ἀριθμούμενος. οὗτος γὰρ ἴδιος.*

(Und die zählende Zahl paßt nicht zur Zeit; denn ſie iſt diskret und nicht kontinuierlich. Aber die gezählte Zahl kann auch kontinuierlich ſein, wie der elf Ellen lange Speer. Aber auch das »Gezählte« hat zwei Bedeutungen: erſtens meint es das Wieviel, wie wenn man ſagt: 2 Bewegungen oder 3, zweitens aber die Reihenfolge, wie wenn man ſagt: die frühere oder ſpätere Bewegung. A. will nun zeigen, daß die Zeit ein Zahlcharakter der Bewegung iſt, und zwar als gezählte Zahl und als Ordnungszahl. Dieſer Zahlcharakter iſt ſpezifiſch)[2].

---

1) Vielleicht nicht allein, denn in dem gelegentlich betonten *τὸ αὐτὸ πάλιν καὶ πάλιν*, in der Wiederkehr des Gleichen (*ἡμέρα, ἐνιαυτός, ἀγών*) liegt auch die Meßbarkeit im Sinne des Wieviel. Aber ſie iſt nicht ſo fundamental wie das Früher und Später.

2) Man vgl. die Parallelſtelle: p. 716, 18–21: *ἐπειδὴ δὲ ὁ ἀριθμὸς διττός, ὁ μὲν ἀριθμητικὸς ἢ ἀριθμητὸς τοῦ ποσοῦ, ὅταν λέγωμεν ἓν δύο τρία, ὁ δὲ*

Dieſer ordnungshafte Reihencharakter der Zahlfolge trifft nun nach Ariſtoteles das Sein der Bewegung ſelbſt, wie die vorhin angeführten Stellen zeigten. Auch hierzu bringt Simplicius noch einige wenigſtens in terminologiſcher Hinſicht bemerkenswerten Erläuterungen: Er kontraſtiert Zeit und Raum, nachdem er zunächſt ihre enge Verwandtſchaft in bezug auf die Charakteriſtik der Bewegung betont hat. Sie beziehen ſich beide auf ein gewiſſes Früher und Später (eine Ordnungsfolge) an der Bewegung. (*ἔοικε διττὸν εἶναι τὸ ἐν τῇ κινήσει πρότερον καὶ ὕστερον, τὸ μὲν ἀπὸ τοῦ τόπου, τὸ δὲ ἀπὸ τοῦ χρόνου.*) Die eine Ordnung bezieht ſich auf die Lage der (räumlichen) Größe (*ἡ τοῦ μεγέθους θέσις*), die andere auf die zeitliche »Erſtreckung« (*χρονικὴ παράτασις*). Die Bewegung ſteht in der Mitte zwiſchen Zeit und Raum und nimmt von beiden das Maß oder die Zahl des Früher und Später. Sie kann aber gewiſſermaßen auf dieſe beiden Komponenten »projiziert« werden, d. h. »verräumlicht« (*τοπίζεται*) bzw. »verzeitlicht« (*χρονίζεται*) werden, einmal, ſofern die Bewegung eine räumliche Erſtreckung oder Lage hat, (*ἡ διάστασις (τῆς κινήσεως) θέσιν ἔχει*, der Abſtand der nach der Bewegung entſteht, hat eine beſtimmte Lage); zweitens, inſofern das Subſtrat im Fluß iſt. (*ἐν ῥοῇ ἦν ἡ ὑπόστασις.*) Die Zeit iſt alſo zu definieren als der Mannigfaltigkeitscharakter des Früher und Später des Seins des Bewegungsfluſſes. (*ἀριθμὸς τοῦ προτέρου καὶ ὑστέρου τοῦ κατὰ τὸ εἶναι τὸ ῥεὸν τῆς κινήσεως*[1].)

* * *

Damit iſt alſo das Sein der Bewegtheit als ſolcher in enge Verbindung gebracht mit dem Sein der Zahl.

τακτικός, ὅταν λέγωμεν πρῶτον δεύτερον τρίτον, τοιοῦτός ἐστιν ἀριθμὸς ὁ χρόνος διὸ κατὰ τὸ πρότερον καὶ ὕστερον ἀφορίζεται.

(Die Zahl aber hat zweifache Bedeutung, einmal als die zählende oder zählbare Zahl des Wieviel, wenn wir ſagen eins, zwei, drei; dann als Ordnungszahl, wenn wir ſagen das erſte, zweite, dritte: eine ſolche Zahl iſt nun die Zeit. Deswegen wird ſie mit Bezug auf das Früher oder Später abgegrenzt [definiert]).

1) Zu der ganzen Darlegung iſt zu vergleichen die platoniſche Ableitung der Zeit aus der Ewigkeit, bei der die Zahl ebenfalls eine entſcheidende Rolle ſpielt: Timäus 37 D:

»*εἰκὼ δ' ἐπινοεῖ* (sc. *ὁ δημιουργος*) *κινητόν τινα αἰῶνος ποιῆσαι, καὶ διακοσμῶν ἅμα οὐρανὸν ποιεῖ μένοντος αἰῶνος ἐν ἑνὶ κατ' ἀριθμὸν ἰοῦσαν αἰώνιον εἰκόνα, τοῦτον ὃν δὴ χρόνον ὠνομάκαμεν.*«

Die Zeit iſt alſo das »bewegte Bild der Ewigkeit« oder genauer »das gemäß der Zahl laufende Ewigkeits-Abbild, während die Ewigkeit im Einhaften verbleibt«.

Vgl. dazu Simplicius, l. c. 703, 7–9; 717, 21 – 718, 12.

Einerſeits iſt die Zeit zu beſchreiben als der ſpezifiſche zahlenhafte Charakter, der jegliche Bewegtheit nach der Dimenſion der ihr eigentümlichen Seinsweiſe ſelbſt kennzeichnet.

Andererſeits iſt die Zahl, ſofern ſie unbegrenzt iſt, notwendig ein Phänomen, das ſein eigentliches Sein im Werden, alſo in der Bewegtheit hat; was am ſchärfſten in der engen Analogie der Definitionen des Unbegrenzten und der Bewegung ſelbſt mittels der ariſtoteliſchen Grundkategorien δύναμις und ἐνέργεια hervortritt.

Es iſt weiterhin klar erkennbar, daß die Zahl in dieſem Zuſammenhang als reines Stellenzeichen, nicht als Anzahl zu faſſen iſt. Nur vermöge der Gleichheit der beim Zählen gemachten Fortſchritte (um jeweils die Einheit) iſt es möglich, die Länge einer ſolchen Reihe zu meſſen. Aber Meſſung unabhängig von der Reihenfolge hat keinen Sinn.

Weil alſo die Anzahl als beſtimmte »wirkliche« Menge notwendig iſt, nicht wird, iſt ſie notwendig endlich. Es gibt keine unendliche Menge (ἄπειρον πλῆθος)[1].

II. Kant über Zeit, Zahl, Unendlichkeit.

Dieſen antiken Analyſen, die dem Begriff des Unendlichen in ſchnellem Fortſchritt nicht lange nach ſeiner Entdeckung (die in halbmythiſchem Gewand durch Anaximander erfolgt, während die begrifflichen ſchon bemerkenswert ſcharfen erſten Formulierungen von Zeno, dem Eleaten und Anaxagoras herrühren) zuteil wurden, ſtellen wir nun die Analyſe Kants gegenüber. Eine Geſchichte des Unendlichkeitsbegriffs im Zuſammenhang mit dem Begriff der Zahl und der Zeit muß erſt noch geſchrieben werden und kann hier natürlich nicht gegeben werden. Kant wählen wir wegen ſeiner grundſätzlichen Verwandtſchaft mit Ariſtoteles in dieſer Frage und wegen ſeiner poſitiven Stellung in der Frage der Beziehung von Zahl und Zeit, eine Stellungnahme, die hinſichtlich ihrer prinzipiellen philoſophiſchen Bedeutung in dem nächſten Abſchnitt (§ 6c III D) noch zu erörtern ſein wird.

Es iſt bekannt, daß Kant die beiden mathematiſchen Urdiſziplinen Arithmetik und Geometrie den beiden Anſchauungsformen (des Menſchen!) Zeit und Raum zuordnet. Wie der reine Raum

1) Dies wurde klar ausgeſprochen und bewieſen bereits durch den Eleaten Zenon. Vgl. das oben zitierte fragm. 3 (Diels) und die bekannten Argumente von Achilles und der Schildkröte u. dgl., die von B. Ruſſell mit Recht im Sinne einer »mengentheoretiſchen« Vergleichung von »Mächtigkeiten« interpretiert worden ſind (ſ. o. S. 144, Anm. 2).

der Geometrie, ſo liegt die reine Zeit der Arithmetik zugrunde. Allerdings offenbar nicht in ganz derſelben Weiſe, denn die Zahl iſt urſprünglich diskret, die geometriſche Figur dagegen kontinuierlich. Dem trägt Kant dadurch Rechnung, daß die Zahl nicht in der tranſzendentalen Äſthetik allein behandelt wird, ſondern außerdem noch in dem Hauptſtück der tranſzendentalen Analytik über den Schematismus der reinen Verſtandsbegriffe und da erſt in eigentlicher und maßgeblicher Weiſe. Dort heißt es:

»Das reine Schema der Größe (quantitatis) als eines Begriffs des Verſtandes iſt die Zahl, welche eine Vorſtellung iſt, die ſukzeſſive Addition von Einem zu Einem (gleichartigen) zuſammenbefaßt. Alſo iſt die Zahl nichts anderes, als die Einheit der Syntheſis des Mannichfaltigen einer gleichartigen Anſchauung überhaupt, dadurch, daß ich die Zeit ſelbſt in der Apprehenſion der Anſchauung erzeuge.« (B 182.)[1] Der Zahl entſpricht demgemäß die »Zeitreihe«. Zur Erläuterung des eigentümlichen und vielumſtrittenen Ausdrucks »Schema« ſei noch folgendes angeführt:

»Dagegen iſt das Schema eines reinen Verſtandesbegriffs etwas, was in gar kein Bild gebracht werden kann, ſondern iſt nur die reine Syntheſis ....., die die Kategorie ausdrückt und iſt ein tranſzendentales Produkt der Einbildungskraft, welches die Beſtimmung des inneren Sinnes überhaupt, nach Bedingungen ihrer Form (der Zeit)[2] in Anſehung aller Vorſtellungen, betrifft, ſofern dieſe der Einheit der Apperzeption gemäß a priori in einem Begriff zuſammenhängen ſollen.« (B 181.)

D. h. alſo die Kategorie (der reine Verſtandsbegriff) der Größe (quantitas) wird durch eine beſtimmte reine Syntheſis der Einbildungskraft »ausgedrückt«, in der Weiſe, daß die ſpezifiſche Zeitform angegeben wird, in der die einzelnen Vorſtellungen gemäß jener Kategorie zur Einheit eines Begriffes gebracht werden können.

Für den uns hier intereſſierenden Zahlbegriff hat dies Kant noch verſtändlicher gemacht durch die Entgegenſetzung von Bild und Schema:

---

1) A bedeutet die erſte, B die zweite Auflage der Kritik der reinen Vernunft. Die Zahlen bezeichnen die Seiten.

2) Vgl. dazu Tranſz. Äſthetik § 6, b: Die Zeit iſt nichts anderes als die Form des inneren Sinns, das iſt des Anſchauens unſerer ſelbſt und unſeres inneren Zuſtandes ... ſie beſtimmt das Verhältnis unſerer Vorſtellungen in unſerem inneren Zuſtand ... Und eben, weil dieſe innere Anſchauung keine Geſtalt gibt, ſuchen wir auch dieſen Mangel durch Analogie zu erſetzen und ſtellen die Zeitfolge durch eine ins Unendliche fortgehende Linie vor ... (B. 49–50).

»- - wenn ich 5 Punkte hintereinanderſetze, ... , iſt dieſes ein Bild der Zahl fünf. Dagegen, wenn ich eine Zahl überhaupt nur denke, die nun fünf oder hundert ſein kann, ſo iſt dieſes Denken mehr die Vorſtellung einer Methode, einem gewiſſen Begriff gemäß eine Menge (z. B. Tauſend) in einem Bilde vorzuſtellen, als dieſes Bild ſelbſt, welches ich im letzteren Falle ſchwerlich würde überſehen und mit dem Begriff vergleichen können[1].

Dieſe Vorſtellung nun von einem allgemeinen Verfahren der Einbildungskraft, einem Begriff ſein Bild zu verſchaffen, nenne ich das Schema zu dieſem Begriff.« (B 179f.)

D. h. alſo, die großen Zahlen können nicht im anſchaulichen Bilde geſtalthafter Art mehr dargeſtellt werden; es bedarf eines Verfahrens, ſich ſolche Zahlen auch über die unmittelbare Vorſtellung hinaus »bildhaft« anſchaulich zu machen. Dieſes Verfahren beſteht dann darin, die Zeit als die Form des »inneren Sinnes«, der anſchaulichen Mannigfaltigkeit der Vorſtellungsverknüpfungen, zu Hilfe zu nehmen, und die Zahl als eine gewiſſe »Zeitbeſtimmung«, nämlich die »Zeitreihe«, aufzufaſſen.

Und zwar iſt die Zeit-Reihe die fundamentalſte Zeitbeſtimmung; ſie allein bedarf im Gegenſatz zu allen anderen Zeitbeſtimmungen »Zeitinhalt«, »Zeitordnung«, »Zeitinbegriff« nicht des »Realen«, das die Zeitform erfüllt, ſondern ergibt ſich unmittelbar aus der Form der Zeitbewegtheit ſelbſt.

Man vergleiche dazu die Bemerkung aus der tranſzendentalen Dialektik (Antinomie der reinen Vernunft, 1. Abſchnitt).

»Die Zeit iſt an ſich ſelbſt eine Reihe (und die formale Bedingung aller Reihen) . . .« (B 438) und in der vorhin zitierten Stelle: » . . dadurch, daß ich die Zeit ſelbſt in der Apprehenſion der Anſchauung erzeuge«. –

Vergleicht man nun damit die ariſtoteliſche Lehre, ſo kann man die Definition der Zeit als *ἀριθμὸς κινήσεως κατὰ τὸ πρότερον καὶ ὕστερον* unmittelbar interpretieren: Zeit als eine (ordnungsmäßig beſtimmte) Reihe (analog wie die ordinale Zahlreihe). Wie auch umgekehrt die unendliche Zahl nur im zeitlichen »Schema« anſchaulich wird, entſprechend wird das *ἄπειρον* von Simplicius charakteriſiert als *τὸ ἐν τῷ γίγνεσθαι τὸ εἶναι ἔχον*.

1) Vgl. dazu außer der oben (S. 91, Anm. 2) zitierten Stelle aus der »Kritik der Urteilskraft« (1. Aufl. S. 86) den ganzen § 26, wo der Sachverhalt ausführlich erläutert wird.

In der Tat: ſind ſchon große endliche Zahlen nicht anders als zeitlich aufzufaſſen (in der Weiſe eines geregelten Durchlaufens an der Hand eines beſtimmten »figuralen Moments«), ſo gilt dies von unendlichen Zahlen erſt recht (Husserl)[1].

Damit ſtimmt denn auch Kants eigene Auffaſſung in dem Abſchnitt über die Antinomien überein.

Das »ſchlechthin Unbedingte«, die ganze (unendliche) »Summe der Bedingungen« kann nur in der Form einer (unendlichen) Reihe von einander untergeordneten Bedingungen gegeben werden. Obwohl z. B. der (unendliche) Raum an ſich keine Richtung enthält, mithin keinen Unterſchied von Progreſſus und Regreſſus, weil er ein »Aggregat, aber keine Reihe iſt« (»indem ſeine Teile insgeſamt zugleich ſind«), ſo iſt doch »die Syntheſis der mannigfaltigen Teile des Raumes, wodurch wir ihn apprehendieren, ſukzeſſiv, geſchieht alſo in der Zeit und enthält eine Reihe« (B 439).

Ähnlich im Beweis der Theſis der I. Antinomie: »Nun können wir die Größe eines Quanti, welches nicht innerhalb gewiſſer Grenzen jeder Anſchauung gegeben wird, auf keine andere Art, als nur durch die Syntheſis der Teile und die Totalität eines ſolchen Quanti nur durch die vollendete Syntheſis oder durch wiederholte Hinzuſetzung der Einheit zu ſich ſelbſt gedenken« (B 454, 456).

Dazu die Anmerkung: »Der Begriff der Totalität iſt in dieſem Falle nichts anderes, als die Vorſtellung der vollendeten Syntheſis ſeiner Teile, weil, da wir nicht von der Anſchauung des Ganzen (als welche in dieſem Falle unmöglich iſt) den Begriff abziehen können, wir dieſen nur durch die Syntheſis der Teile, bis zur Vollendung des Unendlichen, wenigſtens in der Idee faſſen können«.

Und endlich die genaue explizite Beſtimmung des Unendlichkeitsbegriffs in der Anmerkung zur Theſis der I. Antinomie: Fehlerhaft iſt der Begriff der »Dogmatiker«: »Unendlich iſt eine Größe, über die keine Größe möglich iſt« (B 458). »Der wahre (tranſzendentale) Begriff der Unendlichkeit iſt: daß die ſukzeſſive Syntheſis der Einheit in Durchmeſſung eines Quantums niemals vollendet ſein kann« (B 460). (Vgl. Diſſertation von 1770, sect. I, § 1, Anm. 2.)

Man vgl. wieder Ariſtoteles (Phyſik. III, 6; 206b, 33 – 207a, 2): »*Συμβαίνει δὲ τοὐναντίον εἶναι ἄπειρον, ἢ ὡς λέγουσι· οὐ γὰρ οὗ μηδὲν ἔξω, ἀλλ' οὗ ἀεί τι ἔξω ἐστί, τοῦτο ἄπειρόν ἐστιν*«. –

Das Ergebnis dieſer ſchnellen Durchmuſterung der Meinungen Kants über Zahl, Zeit, Unendlichkeit iſt die Feſtſtellung einer

1) Vgl. die Darſtellung in § 5a I. (S. 90–94.)

grundſätzlichen Übereinſtimmung mit Ariſtoteles. (Der tiefere philoſophiſche Grund dieſer Übereinſtimmung wird in § 6c, IV, näher beleuchtet.)

Die Zahl iſt – ſobald ſie ſehr groß oder gar unbegrenzt groß wird – nur von der Zeitreihe aus zu verſtehen (wobei Zeitreihe eine Folge »diskreter« Augenblicke bedeutet; die Relation des Abſtandes dieſer Augenblicke voneinander wird nicht benötigt). Andererſeits iſt das Unendliche ſeinerſeits nur in Beziehung auf das zeitliche »immer wieder« konkret faßbar. Die Zeitreihe iſt alſo das zugrundeliegende Ur-Phänomen[1].

III. Syſtematiſche Unterſuchungen.

A. Die verſchiedenen Arten der unendlichen Progreſſion.

Dieſes Ergebnis hält nun auch der Prüfung vom »ſyſtematiſchen« Geſichtspunkt, d. h. dem der Gegenwart aus ſtand. Denn wir brauchen uns bloß der früher angeſtellten Erörterungen über die Cantorſchen Transfiniten zu erinnern, um die vollkommene Übereinſtimmung der ſachlich-phänomenologiſchen Unterſuchung mit Ariſtoteles und Kant feſtzuſtellen.

Im Anſchluß an Huſſerls »Philoſophie der Arithmetik« hatte ſich ergeben, daß die direkte anſchauliche Erfaſſung einer Zahlgeſtalt nur bei kleinen, vielleicht nur bei ſehr kleinen Zahlen möglich

1) Es iſt merkwürdig, das Hilbert (in ſeinem öfters zitierten Aufſatz über das Unendliche) bei ſeiner Durchmuſterung der »Natur« nach dem Unendlichen die Zeit vergißt! Vielleicht meint er nur aktual und gleichzeitig daſeiendes Unendliches. Dies findet er freilich nicht. Aber hat nicht ſchon Ariſtoteles dies gezeigt?

Andererſeits iſt nochmals auf § 26 der Kritik der Urteilskraft hinzuweiſen, wo außer der »logiſchen (mathematiſchen) Größenſchätzung« (»comprehensio logica« durch den Zahlbegriff des Verſtandes nach dem Schema der Zeitreihe) noch die »äſthetiſche Größenſchätzung« (comprehensio aesthetica) erwähnt wird. Dieſe letzte führt auf die Idee der Unendlichkeit und damit auf das »Mathematiſch-Erhabene«. Denn die Vernunft fordert »zu allen gegebenen Größen, ſelbſt denen, die zwar niemals ganz aufgefaßt werden können, gleichwohl aber (in der ſinnlichen Vorſtellung) als ganz gegeben beurteilt werden, Totalität«. »Das gegebene Unendliche... ohne Widerſpruch auch nur denken zu können, dazu wird ein Vermögen, das ſelbſt überſinnlich iſt, im menſchlichen Gemüte erfordert.« In der äſthetiſchen Größenſchätzung »überſchreitet das Beſtreben der Zuſammenfaſſung das Vermögen der Einbildungskraft«, in dem als »Grundmaß« das »abſolute Ganze« der Natur genommen wird, welches »wegen der Unmöglichkeit der abſoluten Totalität eines Progreſſes ohne Ende« ein »ſich ſelbſt widerſprechender Begriff« iſt. – Das geſtalthafte Denken verliert ſich alſo in tranſzendentale Illuſionen, die freilich den »tranſz. Schein« der Ideen an ſich tragen.

iſt. Sehr bald wird die größer werdende Menge nur noch dem durchlaufenden Blick faßbar; wozu dieſer Blick einer Führung durch ein beſtimmtes »figurales Moment« bedarf. (Man denke etwa an ein Hingleiten längs einer auffallend ſich herausheben den Linie, an der man »entlangzählt«.) Damit tritt die Zeit in ihr Recht. Dieſes Durchlaufen braucht Zeit, alſo auch das Zählen. Und zwar iſt dies nicht nur eine Trivialität — inſofern alles Bewußtſein in der Zeit iſt —, ſondern es gehört zum Sinn des Zählens und der Zahl ſelbſt, daß die Zeit dazu benutzt wird den phänomenologiſchen Zugang zur Zahl zu verſchaffen. Die (größere) Zahl iſt nicht anders »originär« faßbar als im zeitlichen Zählprozeß. Das Unendliche iſt prinzipiell niemals anders »gegeben« als im offenen Horizont des »Immer-Weiter«-Zählens. Das ἀεὶ πάλιν καὶ πάλιν beſtimmt die ontologiſche Struktur des ἄπειρον als τὸ ἐν τῷ γίνεσθαι τὸ εἶναι ἔχον. Deshalb iſt es δυνάμει ὄν, aber nicht wie das »potentiale« Erz in bezug auf die »aktuale« Bildſäule, — ſondern ὡς ἡ ἡμέρα καὶ ὁ ἀγών: wie ein unbegrenzt ſich wiederholender zeitlicher Rhythmus.

Aber — ſo richtig dies alles iſt — damit iſt noch nicht alles geſagt. Es ſind die neuen phänomenologiſchen Möglichkeiten, die ſich aus dem Cantorſchen transfiniten Progreſſus und der Brouwerſchen »freien Wahlfolge« ergeben können, noch nicht herausgearbeitet. Die »freie Wahlfolge« und der transfinite Progreß ſind Formen unendlicher »Folgen«, die bisher noch nicht auf ihre Zeitlichkeit hin betrachtet wurden. Vielleicht ſind es Phänomene, die ſich nicht dem Prinzip der Wiederholung oder beſſer, der ſtändigen Wiederkehr des Gleichen fügen.

Denn z. B. die freie Wahlfolge trägt doch in ſich kein Prinzip, das ſie durch ſtändig wiederholte Anwendung derſelben Regel ins Unbegrenzte zuſtande brächte. Zwar »wähle« ich immer wieder, aber doch eben »frei«, d. h. immer etwas Neues, eine neue Zahl, die in keinem ſchon vorhandenen Geſetz enthalten iſt. Jede Wahl iſt eine ſchöpferiſche »Tathandlung«, nicht das vorausſehbare Ergebnis einer mechaniſchen Rechnung[1].

In einer anderen Weiſe entgeht die Reihe der transfiniten Ordnungszahlen dem Schickſal, eine »ſchlechte Unendlichkeit« in Hegels

1) Ebenſo iſt es, wenn die Zahlen einer werdenden Folge nacheinander durch Rechnung zuſtandekommen, ohne daß vorher vorauszuſehen iſt, welche Zahlen kommen werden oder auch welche Eigenſchaften die kommenden Zahlen haben werden. Man denke an gewiſſe zahlentheoretiſche Probleme, wie das der »Zwillingsprimzahlen« uſw. (ſ. S. 66—68).

Sinn darzuſtellen. Obwohl ihr immer dieſelben beiden (oder drei) Cantorſchen »Erzeugungsprinzipien« zugrunde liegen, ſo erfordert doch, nachdem eine gewiſſe Stufe erreicht iſt, die Fortſetzung die Schaffung eines neuen Symbols, da jedes beſtimmte endliche Zeichenſyſtem ſchließlich nicht mehr für die Bezeichnung der Transfiniten ausreicht. Auch handelt es ſich nicht etwa nur um die mechaniſche gleichförmige Einführung immer neuer einfacher Symbole (die Zahl- oder Verknüpfungsſymbole ſein können) σ_1 σ_2 σ_3 . . . . . , ſondern die Art des Überganges zum Limes iſt immer wieder eine andere; ſie muß immer wieder neu entdeckt werden. Es beſteht ein ganz beſtimmtes mathematiſches Problem der Bezeichnung neuer Transfiniten, das z. B. von Veblen, Mahlo[1] u. a. behandelt worden iſt. Es iſt dabei keine Rede davon, daß man noch alle aufeinanderfolgenden Transfiniten lückenlos bezeichnen kann (das kann man nicht einmal bis zu Ω_1, der Anfangszahl der III. Cantorſchen Zahlklaſſe!), ſondern die durch die Bezeichnung getroffenen Transfiniten folgen aufeinander in immer größer werdenden Sprüngen. Es liegt hier eine äußerſte Steigerung jenes Fortgangs ins Endloſe vor, der gegenüber die Endloſigkeit der gewöhnlichen Zahlreihe allerdings als eine geringe und »ſchlechte« Unendlichkeit erſcheint. In dem gegenwärtigen Zuſammenhang wichtig iſt, daß es zur Entdeckung (und Bezeichnung, was in gewiſſem Sinn zuſammenfällt!) neuer Transfiniten eines wirklich ſchöpferiſchen geiſtigen Aktes bedarf. Es beſteht wirklich eine formale Analogie mit der wahren Unendlichkeit des dialektiſchen Prozeſſes bei Hegel. Denn auch dort iſt es zwar dasſelbe Prinzip des dialektiſchen Dreiſchritts Theſis, Antitheſis, Syntheſis, das immer wieder angewandt wird (analog dem Cantorſchen Wechſel zwiſchen Fortſchritt von β zu $\beta+1$ und Limesbildung), aber trotzdem bedarf es zur Auffindung des in dem jeweils erreichten Begriff liegenden »Widerſpruchs« und zu ſeiner »Verſöhnung« jedesmal einer neuen ſchöpferiſchen Erkenntnis. Nur durch dieſe ſchöpferiſche Erkenntnis wird die Wahrheit konkreter[2].

1) Siehe oben S. 112, 128 u. Math. Anh. zu § 5, VI B.

2) Für Hegels Charakteriſierung und Kritik der »ſchlechten Unendlichkeit« vgl. z. B. »Wiſſenſchaft der Logik« I. Buch, I. Abſchnitt, 2. Kapitel C., b. u. c. (Werke, 2. Aufl., Berlin 1891, Bd. III, S. 142ff.) und »Enzyklopädie der philoſ. Wiſſenſchaften« (herausgegeben von G. Laſſon) §§ 94, 95.

Für die formale Seite des dialektiſchen Prozeſſes ſiehe das letzte Kapitel der »Logik«: »Die abſolute Idee« (l. c. Bd. V, S. 319ff.).

Beſonders wichtig iſt endlich der Begriff des »Aufhebens« (Logik I, 1, Kap. 1, Anm. S. 104f.), der das »Stirb und werde« der hiſtoriſchen Zeitlichkeit

Blickt man nun auf dieſe neue Art ins Unendliche zu gehen, die bei der Wahlfolge und dem transfiniten Progreß auftritt, hin, ſo erhebt ſich nunmehr die ontologiſche Frage nach der Weiſe der Zeitlichkeit, die dieſen »Unendlichkeiten« als ſpezifiſchen Phänomenen eignet. Es handelt ſich jetzt nicht mehr um das ariſtoteliſche ἄπειρον δυνάμει ὂν ὡς ἡ ἡμέρα καὶ ὁ ἀγών. Die γένεσις, die jetzt in Frage ſteht, iſt eine neue und andere. Der ἀριθμὸς κινήσεως dieſer neuen »Bewegtheit« iſt nicht mehr die alte natürliche Zahl, die ins Indefinite, aber nicht ins Transfinite läuft und auch nicht »frei gewählt« wird. Zugleich hat man hier nicht mehr diejenige Zeit, die »die Bewegtheit« auf ihr Sein hin mißt[1]. Denn gerade das Meſſen beſteht ja in dem wiederholten Anlegen ein und desſelben Maßſtabes, der die Einheit darſtellt. Es entſpricht daher der natürlichen Zahlenreihe, wie ja ſchon Euklid die Zahl als Vielheit von Einheiten definiert[2].

Welches iſt nun dieſe Weiſe der Zeitlichkeit, die ihrem Sinne nach keine meſſende (und im gewöhnlichen Sinn zählende) Funktion ausüben kann? Sie ſoll mit dem Terminus »hiſtoriſche Zeitlichkeit« belegt werden; – aus Gründen, die ſpäter zu erörtern ſind.

B. Die hiſtoriſche und die naturhafte Zeit.

Dieſe Weiſe der Zeitlichkeit iſt zuerſt von Heidegger phänomenologiſch beſchrieben worden. Wir geben im folgenden zunächſt einen freilich äußerſt kurzen Abriß der Heideggerſchen Deſkription[3].

---

in ſeiner Weiſe ausdrückt. – Endlich ſei auf das unten (S. 228) in extenso angeführte Stück aus der Vorrede zur »Phänomenologie des Geiſtes« (S. XXXVIII) hingewieſen, wo der Hegelſche Grundgedanke in ſeiner frühen Faſſung beſonders lebendig erſcheint.

1) Vgl. »καὶ ἔστι τῇ κινήσει τὸ ἐν τῷ χρόνῳ εἶναι τὸ μετρεῖσθαι τῷ χρόνῳ καὶ αὐτὴν καὶ τὸ εἶναι αὐτῆς«. (Ariſt. Phyſ. IV, cap. 12, p. 221 a 4–5.) – Vgl. o. S. 210.

2) Euklid, Elemente VII, Def. 2. ἀριθμὸς δὲ τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος. – Vgl. ferner die eigentümliche Kant-Stelle (Kritik der reinen Vernunft B. 300): »Den Begriff der Größe überhaupt kann niemand erklären, als eben ſo: daß ſie die Beſtimmung eines Dinges ſei, dadurch, wievielmal Eines in ihm geſetzt iſt, gedacht werden kann. Allein dieſes Wievielmal gründet ſich auf die ſukzeſſive Wiederholung, mithin auf die Zeit und die Syntheſis (des Gleichartigen) in derſelben.« —

Allerdings iſt zu bemerken, daß man bei einer infinitesimalen Maßeinheit ſich mit der Gleichheit unmittelbar benachbarter »Einheitsſtrecken« begnügen kann. (S. u. S. 225 Anm. 2.)

3) Als Quelle liegt im weſentlichen zugrunde ein vor der Marburger Theologenſchaft am 25. Juli 1924 von Heidegger gehaltener Vortrag mit

Die Heideggerſche Zeitexplikation hängt weſentlich zuſammen mit ſeiner Explikation des (menſchlichen) Daſeins ſelbſt, die näher beſtimmt iſt als Auslegung (Interpretation, ἑρμηνεία, wovon der Ausdruck »hermeneutiſche Phänomenologie«). Die eigentliche Auslegung menſchlichen Daſeins iſt Selbſtauslegung und »die Selbſtauslegung des Daſeins, die jede andere überragt, iſt die auf ſeinen Tod« hin, d. h. »auf die unbeſtimmte Gewißheit der eigenſten Möglichkeit des Zu-Ende-Seins«. Denn »das Daſein iſt in der Jeweiligkeit, es iſt das meinige, – wie ſoll es da erkannt werden, bevor es zu ſeinem Ende gekommen iſt? ..... Vor ſeinem Ende iſt es eigentlich nur das, was es ſein kann« (und Daſein iſt nach Heidegger weſentlich Möglichkeit, δύναμις), – »und iſt es am Ende, ſo iſt es nichts«. So zeigt ſich das Daſein im Tode, oder beſſer im Vorblick auf den eigenen Tod in ſeiner äußerſten (ontologiſchen) Möglichkeit. Der Tod aber ſteht vor dem Daſein zugleich in völliger Gewißheit und völliger Unbeſtimmtheit. So iſt das Wiſſen um den (eigenen) Tod »das Vorlaufen des Daſeins zu ſeinem Vorbei als einer gewiſſen, ganz unbeſtimmten Möglichkeit ſeiner ſelbſt«. In dieſem »Vorlaufen« »entdeckt ſich das Daſein als einmal nicht mehr da«, und damit enthüllt ſich das »Wie ſeiner Jeweiligkeit«, demgegenüber alles Was ſeines alltäglichen Sorgens verſchwindet.

Mit dieſer Stellung des Daſeins zu ſich ſelbſt, dem Vollzug ſeiner Selbſt-Entdeckung hängt nun das Phänomen der »eigentlichen« [in unſerer Terminologie: der hiſtoriſchen] Zeitlichkeit zuſammen.

Denn in dem geſchilderten »Vorlaufen zu ſeinen eigenen Vorbei« iſt das menſchliche Daſein »zukünftig«. »Es iſt dann ſeine Zukunft, es kommt in dieſem Zukünftig-Sein auf ſeine Vergangenheit und Gegenwart zu-rück.« »Das (menſchliche) Daſein in dieſer Möglichkeit ergriffen iſt die Zeit ſelbſt: es iſt nicht nur in der Zeit, ſondern iſt ſelbſt zeitlich.« Aus der Zukünftigkeit gibt ſich das Daſein ſelbſt ſeine Zeit. Im Vorlaufen zu ſeinem Vorbei hat es Zeit. Das Grundphänomen der Zeit iſt alſo die Zukunft.

»Der urſprüngliche Umgang mit der Zeit kann alſo nie ein Meſſen ſein, ſondern das Zurückkommen im Vorlaufen iſt das

---

dem Titel »Die Zeit«. (Nicht veröffentlicht. – Die jetzt gedruckte Ausführung in »Sein und Zeit« konnte im Text noch nicht berückſichtigt werden.) Die Wiedergabe ſchließt ſich möglichſt eng an eine Nachſchrift des Vortrages an, die mir zur Verfügung ſtand. Vollſtändige Treue der Wiedergabe war natürlich nicht zu erreichen. Doch habe ich an den markanteſten Stellen (nicht bei allen übernommenen Ausdrücken) Anführungszeichen geſetzt.

Zurückkommen auf ſtändig dasſelbe Einmalige, auf das Wie des Beſorgens, in dem ich gerade verweile«. Dies Immer-Wieder-Zurückkommen kann nie langweilig werden. Die Jeweiligkeit hat aus dem Vorlaufen in die Zukunft alle Zeit jeweilig für ſich. Die Zeit wird ſo nie lang; weil ſie urſprünglich überhaupt keine Länge hat. Das Vorlaufen bricht aber in ſich zuſammen bei Fragen nach dem »Wann – etwas vorbei ſein wird?« und dem »Wie lange – noch etwas andauert?« Solche Fragen ſind gar nicht im Vorbei, ſondern halten ſich an das »Noch-nicht-vorbei«, beſchäftigen ſich mit dem, was mir möglicherweiſe noch bleibt, ergreifen nicht die Unbeſtimmtheit der Gewißheit des Vorbei, ſondern wollen ſie im Beſtimmen beſeitigen; ſie organiſieren die Flucht vor dem Vorbei.

Trotzdem mißt das »Daſein in der Alltäglichkeit« ſtändig die Zeit, es »lebt mit der Uhr«, wenn auch nur mit der »Tag- und Nacht-Uhr«. Das ſoll heißen: die natürliche Rhythmik der kosmiſchen und biologiſchen (leiblichen) Abläufe (Tag und Nacht, Wachen und Schlafen, Jahreszeiten und Vegetationsperioden uſw.) mißt die Zeit. Das alltägliche Leben wird dadurch veranlaßt die Zeit einzuteilen[1]: »man« rechnet mit der Zeit.

Dieſe nichthiſtoriſche Daſeinsweiſe des Menſchen iſt vor allem durch ein von dem hiſtoriſchen verſchiedenes Zukunftsphänomen gekennzeichnet.

»Die Zukunft [dieſes nicht-hiſtoriſchen Daſeins] iſt das, woran die Sorge [des Alltags] hängt. Nicht das eigentliche [d. i. das hiſtoriſche] Zukünftigſein des Vorbei [iſt damit gemeint], ſondern die Zukunft, welche ſich die Gegenwart als die ihre ausbildet, als eine, welche Gegenwart werden ſoll. Das Vorbei als eigentliche Zukunft kann nie Gegenwart werden, – wäre ſie das, dann wäre ſie das Nichts!«

»... So in der Welt ſeiend, iſt das Daſein zugleich das Daſein als die Zeit, in der man miteinander iſt. Die Uhr, die man hat, zeigt die Zeit des Miteinander-in-der-Welt-Seins. Darin liegen die ... Phänomene der 'Generation' und 'Tradition'«.

Dieſe »gemeſſene Zeit« »fließt ab«, »dieſe Gegenwartszeit wird explizit als Ablaufsfolge, die ſtändig durch die Zeit rollt«. Die Zeit wird dabei »homogeniſiert«, dies bedeutet: »Angleichung an die ſchlechthinnige Präſenz« (Angleichung der Zeit an den Raum,

1) Tempus heißt eigentlich (Zeit-)Abſchnitt. Wurzel »*tem*«, wovon: templum, τέμενος, τέμνω uſw.

[Bergſon], Zeit als vierte Koordinate der »Weltmannigfaltigkeit« [Minkowski]). – – Soweit Heidegger[1]. –

Für die gegenwärtige Problemſtellung iſt vor allem wichtig die Unterſcheidung zweier Arten von Zeit, der hiſtoriſchen und der nicht-hiſtoriſchen; in der Terminologie Heideggers: der eigentlichen Zeit(lichkeit) und der Zeit des Daſeins in ſeiner Alltäglichkeit oder des »man«[2] (d. h. alſo die Zeit, in der »man« lebt). Dem Mathematiker und Naturforſcher liegt ſeinen ganzen Denkgewohnheiten nach die nicht-hiſtoriſche Zeit viel näher als die hiſtoriſche; wir wollen jene auch poſitiv als »Natur-Zeit« oder »naturhafte Zeit« bezeichnen[3].

---

1) Man ſieht ſchon aus dem gegebenen Auszug, daß Heidegger das Problem der Zeit in das philoſophiſche Grundproblem des Seins (das ontologiſche Problem) hineinſtellt. Es muß hier verwieſen werden auf ſeine Abhandlung »Sein und Zeit«. Dort heißt es in der Eingangsbemerkung, das Ziel der Abhandlung ſei die »Interpretation der Zeit als des möglichen Horizontes eines jeden Seinsverſtändniſſes überhaupt«.

2) Für Heidegger iſt das »man« des alltäglichen Umgangs das, was die eigentliche Zeit nicht hat. D. h. dieſes »man« iſt der Repräſentant des nichthiſtoriſchen Lebens (Daſeins.) Vgl. die folgenden Stellen aus dem Zeit-Vortrag: »Daſein iſt ferner beſtimmt als »ich bin«: ebenſo primär wie in der Welt ſein iſt es auch immer mein Daſein, je eigenes, jeweiliges Daſein.... So es ein Seiendes iſt, das ich bin und dies zugleich im Miteinander-Sein, bin ich mein Daſein zumeiſt und durchſchnittlich nicht ſelbſt ... Keiner iſt in der Alltäglichkeit er ſelbſt. Dieſer Niemand, von dem man gelebt wird, iſt das »man«, aus deſſen Hartnäckigkeit das »ich bin« möglich iſt.« — Hier ſcheint aber doch berückſichtigt werden zu müſſen, daß das Phänomen »man« ſoziologiſch eine ganz beſtimmte ſpäte »geſellſchaftliche« (Tönnies) Struktur an ſich trägt; der entwicklungsgeſchichtlich und ſinngenetiſch die ſoziale Form der »Gemeinſchaft« (Lebensgemeinſchaft, Bluts-, Stammesgemeinſchaft uſw.) vorausgeht. Alle dieſe primitiveren »Wir«-Phänomene ſtehen im Gegenſatz ſowohl zum »Ich« wie zum »Man«. Die für ſie kennzeichnende Zeitlichkeit iſt nahezu die Naturzeitlichkeit; das faktiſche (heutige) »Man« iſt dagegen ein naturhaft-hiſtoriſches Miſchphänomen.

3) Wir dehnen dabei den Begriff »Natur« über ſeinen gewöhnlichen Umfang hinaus aus. Wir nennen Natur alles Seiende, was »naturhaft« iſt, alſo, außer der äußeren, »toten« und lebendigen, Natur, auch noch das naturhafte Sein der Naturvölker, des Kindes (des »Naiven«) und des menſchlichen Trieblebens. (Vgl. den Wortgebrauch im Sprichwort: »naturalia non sunt turpia« und »naturam expellas furca, tamen usque recurret« (Horaz).) Es kommt alſo zur äußeren Natur noch hinzu das Primitiv-Seeliſche. – Alle dieſe Phänomenbezirke ſind u. E. gekennzeichnet durch ihre »nichthiſtoriſche« Zeitlichkeit, in der ſie nicht etwa nur ſind, als in einer Leerform, ſondern durch die ſie ontiſch weſentlich mit ausgemacht (konſtituiert) werden. – Wieweit das Mathematiſche naturzeitlich iſt, wird im Text erörtert.

Das Kennzeichnende der Naturzeit gegenüber der hiſtoriſchen Zeit iſt das Beſtehen der Möglichkeit der Wiederkehr des Gleichen, des Sich-Wiederholens des gleichen Ereigniſſes. Dagegen kennt die hiſtoriſche Zeit die Wiederkehr nicht; man könnte zugeſpitzt ſagen: (echte) Zukunft ſchließt (echte) Wiederkunft aus. Indem die Dinge ſtets auf mich zu-kommen d. h. auf mein Daſein in ſeiner einmaligen Jeweiligkeit gewiſſermaßen zugeſpitzt ſind, können ſie nicht in der gleichen Weiſe wiederkommen, denn damit würden ſie ihre eindeutige Zugeſpitztheit verlieren. Damit iſt (in der hiſtoriſchen Zeit) genau genommen auch die Katogorie des Gleichen ausgeſchloſſen, es gibt dort nur Nämliches[1]. (Identiſches im ſtrengen Sinn.) Die Zeit iſt beide Male in ganz verſchiedener Weiſe principium individuationis. Naturzeit ermöglicht das Wiederauftreten des genau Gleichen (ὁμοειδές) »zu verſchiedenen Zeiten«. So iſt etwa ein Schlag des Pendels wie der andere, der Lauf der Sonne nach genau einem Jahr ſo wie ein Jahr zuvor. Auch im Reiche des Lebendigen gilt ähnliches. Schopenhauer ſagt (die Welt als Wille und Vorſtellung, II. Bd., Kap. 91; S. 549). »Ich weiß wohl, wenn ich Einem ernſthaft verſicherte, die Katze, welche eben jetzt auf dem Hofe ſpielte, ſei noch dieſelbe, welche dort vor dreihundert Jahren die nämlichen Sprünge und Schliche gemacht hat,

1) Über den Unterſchied von Nämlichem und Gleichem vgl. H. Ammann, Die menſchliche Rede I (Lahr i. B. 1925), I. Teil: die Idee der Sprache und das Weſen der Wortbedeutung, 6. Kapitel: der Name, beſ. Seite 71f. Etymologiſch kommt »nämlich« von Name, »gleich« von gelich = conformis »dieſelbe Beſchaffenheit habend«. (got.: galeiks = übereinſtimmenden Leib habend, von got. leik = Leib.) – Ammann bemerkt weiter, man könne »das Verhältnis der »Nämlichkeit« ... in voller Entſchiedenheit nur auf den Menſchen anwenden«.

»... Der letzte Sinn der »Nämlichkeit« liegt bei Gegenſtänden wie bei Tieren immer in der Bezogenheit auf den Menſchen, in der Rolle, die »dieſer« Gegenſtand in meinem Leben geſpielt hat«.

»... Die Einheit des Gegenſtandes, die ſeine Identifizierung geſtattet, ruht letzten Endes in der Einheit des Ich, das ſich mit ſich ſelbſt identiſch weiß.« Dies gilt (nach Ammanns wie nach unſerer Anſicht) für den hiſtoriſchen Menſchen (den »mit Bewußtſein ausgeſtatteten Menſchen«). Der Primitive (»das frühmenſchliche Denken«) kennt die Identität der Perſon noch nicht. (Vgl. die Ausführungen l. c. S. 73–76.) –

In dieſen Beſtimmungen, die – mit einigem Vorbehalt – ontologiſche genannt werden können, ſpiegelt ſich derſelbe Grund-Gegenſatz zwiſchen Hiſtoriſchem und Nicht-Hiſtoriſchem, »Geiſt« und »Natur«, der ſich beim Phänomen der Zeitlichkeit als Gegenſatz zwiſchen »Zukunft« und »Wiederkunft« gezeigt hat. – –

er mich für toll halten würde: aber ich weiß auch, daß es ſehr viel toller iſt, zu glauben, die heutige Katze ſei durch und durch und von Grund aus eine ganz andere, als jene vor dreihundert Jahren«[1]. (Vgl. Ariſtot., Metaph. Z, c. 7, p. 1032a 24–25: *ἡ κατὰ τὸ εἶδος λεγομένη φύσις ἡ ὁμοειδής· αὕτη δ'ἐν ἄλλῳ· ἄνθρωπος γὰρ ἄνθρωπον γεννᾷ.*)

Die genaue Gleichheit iſt empiriſch (wie alles »Genaue«) zwar niemals verwirklicht, aber ſie iſt (ideal) möglich: man kann ſich genau gleiche Wiederholungen denken, die Abweichungen ſind »zufällig«. Ein Naturvorgang läßt ſich in zeitlicher Hinſicht direkt kennzeichnen als ein zeitlicher Ablauf, was beſagt, daß eine genaue Wiederkehr weſenhaft möglich iſt. So ſetzt z. B. eine Uhr idealiter eine ſolche genaue Wiederkehr voraus, ſie iſt ein Apparat, um einen rein periodiſchen Vorgang hervorzubringen[2]. Denn nur ſo

1) Noch eine andere Stelle verdient angeführt zu werden (l. c. S. 543): »Durchgängig und überall iſt das echte Symbol der Natur der Kreis, weil er das Schema der Wiederkehr iſt: Dieſe iſt in der Tat die allgemeinſte Form der Natur, welche ſie in allem durchführt, vom Laufe der Geſtirne an bis zum Tod und der Entſtehung organiſcher Weſen, und wodurch allein in dem raſtloſen Strome der Zeit und ihres Inhalts doch ein beſtehendes Daſein, d. i. eine Natur, möglich wird«. Die Vorſtellung dieſer Wiederkehr des Gleichen iſt bekanntlich faſt allgemein antiker Glaube: Plato, Ariſtoteles die Stoa, Plotin ſtimmen darin überein, Epikur macht eine merkwürdige Ausnahme. — (Vgl. Ernſt Hoffmann in Deſſoirs Lehrbuch der Philoſophie Bd. I (Berlin 1925), Seite 219f.) –

Nietzſche hat in ſeiner Lehre von der »ewigen Wiederkunft« dieſe uralten Motive wieder aufgenommen.

2) Vom Geſichtspunkt der modernen Phyſik kann man gegen die Behauptung des Textes einen Einwand erheben: H. Weyl hat in ſeiner Weiterbildung der allgemeinen Relativitätstheorie zu einer reinen Infinitesimalgeometrie der Raumzeitmannigfaltigkeit auch für Raum- und Zeitſtrecken das »Naheprinzip« eingeführt, demzufolge zwei kleine Strecken nur in unmittelbarer (räumlicher bzw. zeitlicher) Nähe miteinander verglichen werden können. Erſt durch eine »unendlich häufige« Wiederholung einer derartigen Nahübertragung kommt man zu einem Fernvergleich. Es iſt nun i. a. durchaus nicht notwendig, daß dieſer Vorgang »vollſtändig integrabel« iſt, d. h. durchwandert man mit Maßſtab und Uhr einen geſchloſſenen Weg von kosmiſchen Dimenſionen, ſo braucht man nicht mit dem gleichlangen Maß und der gleich ſchnell gehenden Uhr zum Ausgangspunkt zurückzukommen, wenn auch die Wanderung ſtörungsfrei durchgeführt würde. Die »Wiederkehr« gilt alſo hier nur im Infinitesimalen. (Vgl. Weyl, »Raum, Zeit, Materie«. 5. Aufl., Berlin 1923, § 17 u. § 40 und meine Arbeit, dſ. Jahrb. VI, S. 529ff.) – Man kann von dieſem Gedanken eine Anwendung machen zur Beſtimmung des Verhältniſſes von biologiſcher Entwicklung und menſchlicher Geſchichte. Die Wiederkehr des

kann die zeitliche Maßeinheit von einer Stelle zur anderen übertragen werden.

Von der Seite des Gedächtniſſes aus erſcheint dieſe primitive, naturhafte Zeitform als die bildhafte Wiederholung einer vergangenen Situation und Situationskette (die wie ein Film wiederholt »abrollen« kann)[1] – im Gegenſatz zur hiſtoriſchen Erinnerung, dem expliziten Sich-Aneignen der eigenen Vergangenheit, die man zuvor ſchon »iſt«. – –

Dagegen individuiert die hiſtoriſche Zeit durchaus nicht in dieſer Weiſe der »Vereinzelung« ganz gleicher, nicht mehr ſpezifizierbarer Gegenſtände. Sie individuiert nur ſo, daß jedes Individuum jeweils auf ſeinen eigenen Tod verwieſen wird, für den es ſich nicht irgendwie vertreten laſſen kann. »Im Zukünftigſein wird das Daſein es ſelbſt, wird ſichtbar als die einzige Diesmaligkeit ſeines einzigen Schickſals, in der gewiſſen Möglichkeit ſeines einzigen, einmaligen Vorbei. Dies verhindert aber gerade, das Individuum als Ausnahmeexiſtenz aufzufaſſen, ſchlägt gerade jedes Sich-Herausnehmen mit einem Schlage nieder, individuiert ſo, daß es ſie alle gleichmacht: im Beiſammenſein mit dem Tode, wo keiner vor dem anderen ausgezeichnet iſt, in einem Wie, in dem alles Was zerſtäubt.« (Heidegger, Zeit-Vortrag.) – –

Es handelt ſich nun darum, das Formale dieſer hiſtoriſchen Zeitlichkeit herauszuheben.

Gleichen in der Kette der Zeugungen (φύσις ὁμοειδής Ariſtoteles) gilt nur im infiniteſimalen Bereich, der die geſamte zeitliche Erſtreckung der menſchlichen Geſchichte enthält. Im Großen iſt der Prozeß nicht integrabel, d. h. Raſſen und ſelbſt Tierſpezies ändern ſich in den »biologiſch großen« Zeiträumen. [Man führt »die Rückkehr zum Ausgangspunkte« durch, indem man etwa ein foſſiles Skelett mit dem des entſprechenden heutigen Tieres vergleicht.] – – Doch ändert all dies an der Gegenüberſtellung von Naturzeit und hiſtoriſcher Zeit nichts; denn die hiſtoriſche Zeit hat auch »im Infiniteſimalen« grundſätzlich keine Möglichkeit der Wiederkehr.

1) Neuere pſychologiſche und ethnologiſche Forſchungen haben einerſeits die »ſubjektiven optiſchen Anſchauungsbilder« als primitive Gedächtnisleiſtung aufgewieſen (E. R. Jaenſch), wobei es auf die »objektive« Treue im Verhältnis zum »Reizvorgang« nicht ſo ſehr ankommt (dieſe iſt im primitiven Seelenleben in mancher Hinſicht geringer als beim ausgebildeten), ſondern nur auf die Gegebenheit des »eidetiſchen« Bildes (Jaenſch) als eines gegenwärtigen.

Andererſeits iſt auf die ungeheure Gedächtnisleiſtung der Primitiven hinzuweiſen (wörtliches Rezitieren langer Epen, Wiederkennen aller Einzelheiten eines langen unüberſichtlichen Weges uſw.), die ſich nur durch ein »Wiederabrollen« des Original-Vorganges verſtehen läßt. (Lévy-Brühl, A. Schweitzer u. a.).

Zu dieſem Zwecke werde dieſer Zeitbegriff zunächſt von ſeiner Zuſpitzung auf die perſönliche Exiſtenz des Einzelnen abgelöſt und auf die hiſtoriſche Zeit einer kulturell geſchloſſenen Menſchen*gruppe* übertragen, womit das von *Heidegger* erwähnte Problem der »Generation« berührt wird.

Die hiſtoriſche »Generation« iſt zwar im Miteinander da, aber doch als Ganzes betrachtet, *ſterblich*, – im Gegenſatz zum »man«, das nicht ſtirbt.

Es handelt ſich dabei nicht um die Generation im biologiſchen, ſondern im hiſtoriſchen, »*geiſtigen*« Sinn[1]. Jede ſolche »Generation« hat ihre ſpezifiſchen »Aufgaben«, ihren »Stil«, ihre Weiſe des Sehens uſw. Schöpferiſch iſt ſie in ihrer *Jugend* (Pubertät). Ihr erwachſenes Leben beſteht im Explizieren und zu Ende bringen des in der ſchöpferiſchen Kriſe der Pubertät Konzipierten. (Was vielleicht nicht ausſchließt, daß beſondere »geniale« Individuen wiederholte Pubertätsperioden haben, wie *Goethe* von ſich ſagte.) Das heißt – zeitlich betrachtet – jede Generation iſt geiſtig bezogen auf ihr eigenes *Ende* (τελευτή). Ihre »Geiſtigkeit« beſteht gerade darin, ſich zu Ende zu bringen (etwa zu Ende zu denken, zum »letzten« Ausdruck zu bringen). Was nach ihr kommt, iſt ihr prinzipiell dunkel. Die nächſte neue, heranwachſende Generation wird von der alten im Grunde nicht mehr verſtanden, d. h. die alte verſteht das *Wollen*, die Schaffensrichtung der neuen nicht mehr. Der Geiſt muß ſich alſo ſelbſt verleugnen, muß ſterben, um aufs neue zu werden. »Stirb und werde!« iſt der für ihn *als* Geiſt ſchlechthin konſtitutive Imperativ. Der hiſtoriſche Geiſt (der ſtets nur, eben als weſenhaft hiſtoriſcher in der *jeweiligen* Generation ſein konkretes Daſein hat) hat ſich alſo nur als ſolcher, wenn er »zu ſeinem eigenen Vorbei vorläuft«. (*Heidegger*.) Dann hat er ſeine eigentliche *Zu-kunft*, er kommt zu ſich ſelbſt in ſeiner einmaligen Jeweiligkeit und Diesheit zurück und begreift darin erſt ſeine ihm eigentümliche Weiſe des Seins.

Jede Bekümmerung um eine »Zukunft, die Gegenwart werden ſoll« (alſo etwa Sorge um künftige Kultur) lähmt die Schöpferkraft des Geiſtes. Nur wenn der Horizont, in den hinein er ſchreitet, dunkel iſt – das »gewiſſe, aber unbeſtimmte Vorbei« –, hat der Geiſt

1) Wir bezeichnen das *hiſtoriſche* Leben (Daſein) als *Geiſt* und ſtellen ihm das nicht-hiſtoriſche, z. B. das »prähiſtoriſche« (frühmenſchliche) und »ſubhiſtoriſche« Daſein (untermenſchliches Triebleben) als *Natur* gegenüber. – Alles »Geiſtige« iſt alſo für uns weſenhaft *hiſtoriſch* und keineswegs »*übergeſchichtlich*«!!

die Freiheit des Schaffens, des Hineingeſtaltens in die Leere, die vor ihm liegt. Trotzdem wirkt er gerade damit zugleich aus ſeiner echten hiſtoriſchen Tradition heraus, aber dieſe iſt ihm nicht als etwas Fremdes bewußt, wonach er ſich richten müßte (als wie nach einer Norm), ſondern er iſt ſeine Geſchichte ſelbſt. (Graf Yorck: »wir ſind die Geſchichte«.)

Der erſte, der dieſe Zeitlichkeit des Geiſtes erſchaut hat — wenn auch nicht unter dieſem Namen —, war Hegel[1]. Es ſei folgende Stelle aus ſeiner Vorrede zur »Phänomenologie des Geiſtes« angeführt (Seite XXXVIII): »Der Kreis, der in ſich geſchloſſen ruht und als Subſtanz ſeine Momente hält, iſt das unmittelbare und darum nicht verwunderſame Verhältnis. Aber daß das von ſeinem Umfange getrennte Akzidentelle als ſolches, das Gebundene und nur in ſeinem Zuſammenhange mit anderem Wirkliche ein eigenes Daſein und abgeſonderte Freiheit gewinnt, iſt die ungeheure Macht des Negativen; es iſt die Energie des Denkens, des reinen Ich. Der Tod, wenn wir jene Unwirklichkeit ſo nennen wollen, iſt das Furchtbarſte, und das Tote feſtzuhalten das, was die größte Kraft erfordert. Die kraftloſe Schönheit haßt den Verſtand, weil er ihr dies zumutet, was ſie nicht vermag. Aber nicht das Leben, das ſich vor dem Tode ſcheut und vor der Verwüſtung rein bewahrt, ſondern das ihn erträgt und ſich in ihm erhält, iſt das Leben des Geiſtes. Er gewinnt ſeine Wahrheit nur, indem er in der abſoluten Zerriſſenheit ſich ſelber findet. Dieſe Macht iſt er nicht als das Poſitive, welches vom Negativen wegſieht, wie wenn wir von etwas ſagen, dies iſt nichts oder falſch, und nun, damit fertig, davon weg zu irgend etwas anderem übergehen; ſondern er iſt dieſe Macht nur, indem er dem Negativen ins Angeſicht ſchaut, bei ihm verweilt. Dieſes Verweilen iſt die Zauberkraft, die es in das Sein umkehrt.« — —

C. Mathematik und Zeitlichkeit.

Wir wiederholen nun unſere Frage: Welches iſt nun die formale Struktur dieſer hiſtoriſchen Zeit? Und weiter: Welcher Zuſammenhang läßt ſich finden zwiſchen ihr und den früher geſchilderten mathematiſchen Phänomenen der Wahlfolge und des transfiniten Progreſſes?

1) Vgl. dazu Heidegger, »Sein und Zeit« § 82, wo zwar der hier nicht behandelte explizite Zeitbegriff Hegels in ſeiner naturhaften Struktur hauptſächlich dargeſtellt iſt, aber doch auch (l. c., S. 435) auf den im Text hervorgehobenen Zuſammenhang hingewieſen wird.

Die Bezeichnung der Wahlfolge als einer »frei werdenden« Folge führt auf den gemeinſamen Zug. Frei werden – das kann nur der Geiſt, das hiſtoriſche Daſein. Die Freiheit des Werdens iſt weſentlich Freiheit des Schaffens – bei der Folge aber die Freiheit der Wahl, die das neue Folgeglied »ſchafft«. Dieſe iſt – was den zugrunde liegenden Zeitcharakter anlangt – nur möglich durch die Dunkelheit der Zukunft, – des eigenen Vorbei. So iſt jede einzelne Wahl »vorbei«, wenn die nächſte vollzogen wird. Bei der erſten Wahl iſt die folgende (und alle weiter folgenden) völlig unbeſtimmt – aber ihr Stattfinden iſt gewiß. Man erkennt Zug um Zug die Eigentümlichkeiten der hiſtoriſchen Zeit.

Ob eine beſtimmte Zahl in der Folge vorkommen wird, iſt nicht entſchieden; auch nicht »an ſich«. Kein »ewiges Geſetz« beherrſcht die Folge. Gerade deshalb iſt die Folge ein »eigentlich zeitliches« Phänomen. Der ausſchlaggebende Umſtand, der die Entſcheidung über das künftige Vorkommen einer beſtimmten Zahl ausſchließt, iſt, daß keine noch ſo große feſte Zahl M a priori angegeben werden kann, derart, daß die Entſcheidung mit der $(M+1)^{\text{ten}}$ Wahl fallen muß. Könnte irgendeine ſolche Zahl angegeben werden, dann wäre ihre Größe ganz gleichgültig; die Schnelligkeit der aufeinander folgenden Wahlen kann nicht gemeſſen werden, iſt beliebig. Die Frage »wie lange es noch dauert« hat keinen Sinn.

Man kann dieſe Verhältniſſe mit der Sterblichkeit des Menſchen in Zuſammenhang bringen: der Menſch als Mathematiker ſtirbt notwendig, bevor er die Folge zu Ende gewählt hat. Welches noch ſo entfernte Glied der werdenden Folge er auch ins Auge faßt, die Entſcheidung kann möglicherweiſe erſt ſpäter fallen: jenſeits des ins Auge gefaßten Ziels, im Gebiete des »Vorbei« der zielenden Intention. Wäre der Menſch unſterblich, ſo gäbe es den Unterſchied zwiſchen freien und geſetzlich gebundenen Folgen nicht.

Aber dagegen läßt ſich folgendes einwenden[1]: Auch wenn jemand »ewig« lebte, würde er doch niemals, ſo lange er auch lebte, die Entſcheidung erreichen. Denn auch der »unſterbliche« Mathematiker müßte doch einen beſtimmten Zeitpunkt ins Auge faſſen, wo die Entſcheidung fertig vorliegt. Und jeder ſolcher erzielte Zeitpunkt wird notwendig einmal von der Entwicklung der Folge überſchritten. Alſo iſt die Sterblichkeit des Mathematikers irrelevant. – Dieſem Einwand iſt nur zu begegnen, wenn man einen

1) Dieſen Einwand verdanke ich Herrn Profeſſor J. Ebbinghaus.

Unterſchied berückſichtigt, den ſchon Plotin in gewiſſem Sinne macht, nämlich den zwiſchen Ewigkeit (*αἰών*) und Immerſein (*ἀιδιότης*)[1]. Was vorhin vorausgeſetzt wurde, iſt nicht ewiges, ſondern immerwährendes Leben des Menſchen. Eine unbegrenzte Hinausſchiebung des Todesdatums verſchafft dem Menſchen noch kein »ewiges Sein«. Der (hiſtoriſche) Menſch iſt gewiſſermaßen ſo weſenhaft ſterblich – eben wegen ſeiner hiſtoriſchen Zeitlichkeit –, daß er auch durch die Abſchaffung des phyſiſchen Todes nicht ewig würde. Denn Ewigkeit iſt in ſich ruhendes, voll-endetes Sein, Sein, das an ſein Ziel (*τέλος*) kam und doch nicht Nichts ward. Ewigkeit iſt allumfaſſende Gegenwart und deshalb dem Augenblick tief verwandt. (Kierkegaard.) Ein tiefſinniger antiker Mythos läßt den Tithonus, der ſich von den Göttern Unſterblichkeit erbat und die Bitte um ewige Jugend vergaß, dahinſchwinden in endloſem Altern, bis er endlich zur Heuſchrecke wird. Er kommt alſo trotz ſeiner Unſterblichkeit ſchließlich »ans Nichts«[2]. Ewige Jugend, das bedeutet Verwandlung des hiſtoriſchen Zeitcharakters (vermöge deſſen der Menſch altert) in den naturhaften.

Für den Blick eines ewigen Weſens wäre in der Tat die Wahlfolge bis ans Ende mit einem Schlag erfaßbar, ſie wäre nicht mehr endelos. Gott zählt nicht (gegen Gauß). Der Unterſchied gegen die geſetzliche Folge hätte ſeinen Sinn verloren. Ja, der Sinn der mathematiſchen Geſetzlichkeit, deren weſenhafte Bedeutung es eben iſt, das Endeloſe mit endlichen Mitteln zu beherrſchen, ginge verloren. Die Mathematik als Wiſſenſchaft verſchwände. –

---

1) Die Darlegungen Plotins darüber ſtehen im 7. Buch der VII. Enneade: *περὶ αἰῶνος καὶ χρόνου*, Kap. 3 ff. (Zitate nach der Ausgabe von R. Volkmann, Lips. 1883, Vol. I) p. 312, 17–21: ... *αἰῶνα εἰδεν ἰδὼν ζωὴν μένουσαν ἐν τῷ αὐτῷ ἀεὶ παρὸν τὸ πᾶν ἔχουσαν, ἀλλ' οὐ νῦν μὲν τόδε, αὖθις δ' ἕτερον, ἀλλ' ἅμα τὰ πάντα ... ἀλλὰ τέλος ἀμερές ...*

p. 313, 6–9: *ὃ οὖν μήτε ἦν, μήτε ἔσται, ἀλλ' ἔστι μόνον, τοῦτο ἑστὼς ἔχον τὸ εἶναι τῷ μὴ μεταβάλλειν εἰς τὸ ἔσται μηδ' αὖ μεταβεβληκέναι ἐστὶν ὁ αἰών.*

p. 314, 21–24: *ἡ οὖν τοῦ ὄντος παντελὴς οὐσία καὶ ὅλη ... καὶ ἡ ἐν τῷ μηδὲν ἂν ἔτι ἐλλείψειν καὶ τῷ μηδὲν ἂν μὴ ὂν αὐτῇ προσγενέσθαι.*

Daraus geht klar hervor, daß bei Plotin *αἰών* mehr iſt, als »Immerſein« iſt. Die *ἀιδιότης* charakteriſiert er aber nicht als ſelbſtändiges Phänomen, ſondern (nach anfänglicher Unterſcheidung) biegt er ſie um in eine Eigentümlichkeit des *ἀιών* ſelbſt.

2) Derſelbe Gedanke findet ſich in entſetzlich eindrucksvoller Weiſe ausgeführt bei Swift, Gullivers Travels, Part. III, Ch. X (a particular description of the Struldbrugs etc. – Die »Struldbrugs« ſind zwar unſterbliche, aber ſtändig alternde, unter den Gebrechen des Alters in furchtbarer Weiſe leidende Weſen).

Was von der Wahlfolge geſagt wurde, gilt mutatis mutandis auch von dem transfiniten Progreß. Auch da muß die Benennung neuer Transfiniten, wenn ein beſtimmtes Bezeichnungsſyſtem und eine beſtimmte Weiſe, zum Limes überzugehen, erſchöpft iſt, neu geſchaffen werden. Nur hängt hier das Vordringen weſentlich mit ab von dem bereits Geleiſteten; durch Reflexion auf den jeweilig vollzogenen endloſen Prozeß, den jeweils durchſchauten endloſen Horizont, wird die neue Stufe der ſtrukturalen Komplikation erreicht. Hier iſt alſo in gewiſſem Sinn die Analogie mit der hiſtoriſchen Entwicklung (und auch mit Hegels dialektiſchem Prozeß[1]) noch enger als bei der Wahlfolge, deren einzelne Schritte ganz unabhängig voneinander ſind. – Nun ſind wir endlich imſtande, das Eigentümliche der hiſtoriſchen Zeit formal zu kennzeichnen.

Man hat bei ihr zu unterſcheiden: erſtens das formale Schema des Weiterſchritts, das ſich gleichbleibt, das ſich wiederholt: die ſtändige Wahl bei der Wahlfolge, die immer von neuem vollzogene Reflexion beim transfiniten Progreß, die ſtändig aufs neue zu leiſtende Überwindung der alten Generation durch die junge. Dieſer formale Weiterſchritt geht ins Endloſe.

Zweitens aber hat man den konkreten Vollzug des Weiterſchritts, der alſo nicht mehr durch das formale Schema erfaßt wird: die konkrete Wahl jeweils einer beſtimmten Zahl, die konkrete Reflexion auf den jeweils gerade zuletzt durchſchauten Horizont, die konkrete ſchöpferiſche Tat der Überwindung des Alten. Für dieſen konkreten Vollzug gibt es keinen erhellten, vorauszuſehenden Horizont. Und das formale Schema iſt im konkreten Vollzug nicht gegenſtändlich da – wäre es das, ſo würde der konkrete Vollzug gehindert[2] –, ſondern der Vollzug vollzieht ſich nach dem Schema ohne ſich deſſen bewußt zu ſein. Der eigentliche Ernſt liegt in

1) Man kann ſogar den letzten Schritt im dialektiſchen Dreiſchritt, die Syntheſis, mit der Reflexion auf das jeweils Vollzogene in eine engere Parallele bringen.

2) Damit iſt ein Phänomen von großer Tragweite berührt: das Reflektieren auf das Gleichförmige des Schemas (den Anteil, den die »ſchlechte Unendlichkeit« auch noch am hiſtoriſchen Prozeß hat) führt zum ſchwächlichen »Relativismus«, der die eigenen Erkenntniſſe und ſchöpferiſchen Taten nicht mehr ernſt nimmt, da ſie ja doch überholt werden würden. Dadurch wird die ſpezifiſch philoſophiſche (ontologiſche) Erkenntnis der weſenhaft hiſtoriſchen Befangenheit des Menſchen trivialiſiert und gänzlich unfruchtbar gemacht.

Die ſtreng hiſtoriſche Zeit iſt im Grunde endlich, d. h. ihr fehlt das (in gewiſſem Sinne poſitive) Phänomen des endloſen Horizontes. (Die End-

dem exquiſit Faktiſchen, dem »Zu-fälligen« (dem, was ihm als Einmaligem gerade zu-fällt), dieſem konkreten Vollzug, für den es keine allgemeingültige, überzeitliche Norm gibt. Der Geiſt iſt in dieſem Vollzug ganz auf ſich ſelbſt angewieſen, auf ſich ſelbſt zurückgeworfen, ſich ſelbſt allein verantwortlich, aus ſeiner eigenen Subſtanz lebend —: frei, aber einſam und im Dunkel, das er nie ſelbſt erhellen kann. —

Die Struktur der hiſtoriſchen Zeit erweiſt ſich ſo als eine doppelte: ein gleichförmiges formales Schema, das ſeinem Zeitcharakter nach eigentlich ſelbſt natur-zeitlich iſt, und ein ganz unſchematiſches Schaffen, das zugleich ein immerwährendes Sterben iſt.

Die formale Struktur der hiſtoriſchen Zeit erſcheint alſo mit einer merkwürdigen Paradoxie behaftet. Sie iſt, ſoweit ſie eigentlich formal iſt, unrein, enthält ein ihr fremdes, nicht-hiſtoriſches Moment, — ſoweit ſie aber hiſtoriſch iſt, iſt ſie formal ganz unfaßbar: der konkrete Vollzug hat keine Gemeinſamkeit der Form.

Das weiſt darauf hin, daß der Begriff der Form ſelbſt ein nichthiſtoriſcher Begriff iſt und daher dem Hiſtoriſchen letzten Endes nicht adäquat. Woher kommt denn dann aber der formale Anteil in der hiſtoriſchen Zeitlichkeit?

Die Antwort lautet: Es wurde in der vorangegangenen Erörterung der urſprünglich hiſtoriſche Zeitbegriff des Individuums außer acht gelaſſen zugunſten der Zeitlichkeit der hiſtoriſchen Gruppe. Damit ging aber viel von der letzten Zuſpitzung des Heideggerſchen Zeitbegriffs verloren; ſo vor allem die Beziehung auf den eigenen Tod, mit dem es wirklich zu Ende iſt. Die ſterbende »Generation« kennt ihren Nachfolger, ihre Beziehung zur Jugend iſt nicht eine rein negative, nicht nur Haß, ſondern auch Liebe. Der einzelne Menſch hat in dieſem Sinn keinen Nachfolger[1];

---

lichkeit kommt alſo durch ſo etwas wie eine doppelte Negation zuſtande!). Ich möchte glauben, daß mit dieſer merkwürdigen Erſcheinung Hegels eigentümliche Lehre vom »Ende der Geſchichte« zuſammenhängt. Die Geſchichte muß zu Ende gehen: — denn die dieſer zugrunde liegende Zeitlichkeit (die, wie ich darzulegen verſuchte, zuerſt von Hegel mittels ſeines Begriffes des »Aufhebens« [= Vernichten und doch Bewahren] ihre, wenn auch unvollkommene, Explikation fand) iſt endlich.

1) Das Verhältnis von Eltern und Kindern iſt kein urſprünglich hiſtoriſches, ſondern ein naturhaftes. Geiſtige Schüler- oder Jüngerſchaft wäre vielleicht die einzige, aber ſehr inadäquate Parallele. Denn der Schüler iſt nicht frei. Hiſtoriſch denkt dagegen Nietzſches Zarathuſtra, wenn er ſagt: »Nun heiße ich euch, mich verlieren und euch finden; und erſt, wenn ihr mich Alle verleugnet habt, will ich Euch wiederkehren.« (Alſo ſprach Zarathuſtra, I. Teil, Von der ſchenkenden Tugend, 3.)

er iſt ſtets jeweils der letzte. So ſagt auch Heidegger: »Das Vorlaufen ins eigene Vorbei läßt das Daſein ganz allein bei ſich ſelbſt ſtehen, mitten im Lärm der Alltäglichkeit, ſtellt es in die Unheimlichkeit«.

Das bedeutet aber, daß das ſchematiſche, naturzeitliche Moment bei der Zeitlichkeit des Einzelnen keine Rolle ſpielt. Jeder Einzelne ſtirbt nur einmal; jede einzelne Generation allerdings auch, aber ſie weiß ſich ein Glied in der Kette der Generationen. Wenn auch völlig leer und dunkel, iſt doch das formale Schema für beliebig viele folgenden Generationen vorgezeichnet. Es ſpielt eben hier offenbar das Naturhafte in der »Kette der Zeugungen« mit hinein. Der Name (generatio) ſelbſt weiſt darauf hin. Das naturhafte Moment in der Zeitlichkeit der hiſtoriſchen Entwicklung einer Menſchengruppe rührt alſo her von dem naturhaften Anteil dieſer Gruppe ſelbſt, die immer etwas von dem Heideggerſchen »Man« an ſich hat.

Daher kommt es, daß das ſchematiſche Moment nicht ein ſtreng verweiſendes, auf die Jeweiligkeit zurückwerfendes iſt (alſo von der Art der ſogenannten »formalen Anzeige« im Sinne Heideggers), ſondern ein Nebeneinander oder Hintereinander, eben das Phänomen der »Kette«, geſtattet.

Betrachtet man das Leben mehrerer Einzelnen, ſo kann man natürlich auch eine formal-ſchematiſche Analogie in ihrem Verhältnis zum Tode und zur Zeit finden; aber dieſe Analogie führt nie zu einem Nebeneinander, das die »Zukünftigkeit«, die Zugeſpitztheit der Zeitlichkeit auf den Einzelnen irgendwie beſeitigte. Im Tode ſind zwar alle gleich, im Wie, aber durch dieſe Gleichheit »individuiert« die hiſtoriſche Zeit gerade den Einzelnen, indem ſie ihn einſam macht, ihm jeden Vergleich mit Anderen hinſichtlich des »Was«, ſeiner qualitativen Beſonderheiten, ſeines Ranges, Wertes uſw. unmöglich macht (ſ. S. 226). Die Schickſalsgemeinſchaft des Sterbens erleichtert dem Einzelnen – als hiſtoriſchem Weſen – den Tod nicht[1]. – Die Weiſe der formalen Gemeinſamkeit beim Einzelnen iſt alſo eine weſentlich andere als bei den »Generationen«. – –

Dieſe Verhältniſſe haben – ſo befremdend das zunächſt auch klingen mag – ihre Analogie im Mathematiſchen.

---

1) Lebenslagen, wo Gemeinſchaften (Menſchen gleichen Stammes, Blutes, Glaubens uſw.) gemeinſam in den Tod gehen, ſind niemals von rein hiſtoriſchem Seinscharakter. Es findet irgendeine Weiſe der Identifizierung (Einsfühlung) ſtatt, die die hiſtoriſche Individuation auslöſcht.

Die freie Wahlfolge (als Repräsentantin des historischen Menschen) ist individuiert derart, daß ein Nebeneinander mehrerer Wahlfolgen in gewissem Sinne ausgeschlossen ist. Man kann nämlich Wahlfolgen nicht in Mengen zusammenfassen, nicht klassifizieren oder auch nur kolligieren. Man könnte das nur in ganz äußerlicher Weise nach ihren Anfangsstücken[1]. Es sind also allein die gesetzmäßigen Folgen einer »Klassifikation« und Abstufung nach der Komplikation ihrer Strukturgesetze fähig, wie bei der Besprechung des Kontinuumproblems (§ 5 b) ausführlich erörtert wurde. – –

Die rein historische Zeitlichkeit, so können wir zusammenfassend sagen, ist die des individuellen historischen Lebens. Sie findet sich wieder in dem Zeitcharakter gewisser mathematischer Phänomene: der frei werdenden Wahlfolge und des transfiniten Progressus. Der Grund dafür ist, daß diese mathematischen Phänomene, die ebensowenig wie irgendwelche anderen Phänomene, reine Gehalts- oder reine Bezugsphänomene sind, selbst historische Vollzugsmodi konstitutiv enthalten: Das freie Wählen und die Reflexion auf die eigene jeweilige Lebenslage[2]. Freilich eignet jenen mathematischen Phänomenen ein gewisses formal-schematisches Moment nichthistorischen (naturzeitlichen) Charakters, das seinen Ursprung hat in dem Umstand, daß das Mathematische als solches nicht-historisch ist.

Dies führt nun endlich auf die letzte in dieser Abhandlung zu erörternde Frage, die nach dem Seinssinn des Mathematischen selbst. Die vorangehende Explikation der Zeitlichkeit mathematischer Gegenstände dient dazu als Vorbereitung. Denn die Zeit kann, nach Heideggers schon angeführtem Wort, interpretiert werden »als der mögliche Horizont eines jeden Seinsverständnisses«.

c) Der ontologische Sinn mathematischer Existenz.

I. Einführung in die Problemstellung.

Der Ausdruck »mathematische Existenz« hat zunächst den Charakter eines terminus technicus. Er bezeichnet innerhalb der mathematischen Wissenschaft und ihrer spezifischen Technik einen be-

1) Nicht völlig freie Wahlfolgen, sondern solche mit Nebenbedingungen, können freilich klassifiziert werden, aber eben nur nach ihren Nebenbedingungen (so kann man etwa Würfelfolgen mit einem oder zwei Würfeln unterscheiden), d. h. also gerade soweit, als sie nicht frei, sondern gesetzlich gebunden sind.

2) Vgl. das in § 5 a, II C im Anschluß an Dostojewskij erörterte Beispiel der »Parenthesen«-Reflexion. (S. 102 ff.)

ſtimmten Grundbegriff. Ihm hatten viele der vorangehenden Betrachtungen gegolten, die ja von einem Konflikt in der gegenwärtigen mathematiſchen (nicht philoſophiſchen) Forſchung ausgingen, obzwar es ſich immerhin dabei um einen Streit um die Grundlegung der Mathematik als Wiſſenſchaft handelte.

Aber, wollte man ſich auf die eben gekennzeichnete Bedeutung der Worte »mathematiſche Exiſtenz« beſchränken, ſo käme man über ein Randproblem der Philoſophie der Mathematik nicht hinaus. Das eigentlich philoſophiſche Problem, das das Beſtehen einer mathematiſchen Wiſſenſchaft und das »Vorkommen« mathematiſcher Gegenſtände in unſerem Leben und ſeiner Welt ſtellt, kann ſich nicht darauf beziehen, mit welchen techniſchen Mitteln man die »Exiſtenz« mathematiſcher Entitäten in der Wiſſenſchaft ſichert. Mag auch klipp und klar entſchieden ſein, ob Konſtruktion (und welche) oder Widerſpruchsfreiheit die »mathematiſche Exiſtenz« garantieren, welche Art des Unendlichen in der Mathematik zuläſſig ſein ſoll uſw., – philoſophiſch iſt damit noch nichts von Belang geleiſtet. Und wenn man nicht der Meinung iſt (– und wir ſind es keineswegs!), daß die Philoſophie als ancilla scientiarum, alſo in unſerem Falle als Magd der Mathematik ihr Daſein friſten ſoll, für die ſie »den Grund zu legen« habe[1], – ſo iſt vor allem zu fragen, welches Problem ſich denn nun eigentlich eine wirkliche Philoſophie der Mathematik zu ſtellen habe.

Nach unſerer grundſätzlichen Anſchauung vom philoſophiſchen Fragen (die hier nicht zu begründen iſt) iſt jede eigentlich philoſophiſche Frage eine ſolche nach dem Sein: genauer dem Sinn des (jeweiligen in Rede ſtehenden) Seins und vielleicht auch nach ſeinem »Grunde« (dem »Seinsgrunde«). Eine ſolche Frage iſt, mit anderen Worten, ontologiſch.

Sofern nun »Exiſtenz« ein Seinsausdruck iſt[2], geht aber die Frage nach der »mathematiſchen Exiſtenz« auf das Sein des Mathematiſchen, genauer auf die Wie ſeines Seins. Wir fragen alſo nach dem Wie des Seins des Mathematiſchen und damit philoſophieren wir über das Mathematiſche.

1) Manche neukantiſchen Richtungen ſind nicht fern von einer ſolchen Behauptung geweſen (ſ. o. S. 126 u. Math. Anh., Schlußbemerkung).

2) Um Mißverſtändniſſe zu vermeiden, ſei bemerkt, daß »Exiſtenz« nicht etwa in dem beſonderen Sinne gemeint iſt, den ihm Heidegger in »Sein und Zeit« gibt. – »Exiſtenz« heißt hier einfach »Seinsweiſe«.

Auch das Wort »ontologiſch« iſt zwar im Anſchluß an Heidegger, aber doch in freierer Weiſe als bei ihm, nicht gemäß der in »Sein und Zeit« gebrauchten ſtrengen Terminologie verwendet.

Um dieſer Frage nunmehr näher zu kommen und auch um zu ſehen, was die vorangehenden Betrachtungen für ihre »Löſung« nützen können, iſt es zunächſt notwendig zu wiſſen, was »das Mathematiſche« iſt.

Eine ſolche Frage iſt nur zu beantworten, wenn man auf die Geſchichte der Philoſophie zurückgeht und in echter, d. h. ſachlicher Interpretation die Entwicklung verfolgt, die die Bedeutung des Ausdrucks durchlaufen hat. In dieſem Sinne werden wir zunächſt die geſchichtlichen Wurzeln der Idee des Mathematiſchen in der antiken Philoſophie zu ergründen verſuchen und dann ihre Entwicklung in der neueren Zeit weiter verfolgen.

II. Hiſtoriſche Orientierung an der Antike.

A. Das Problem der μάθησις (Vorplatoniker [Archytas] und Plato).

Der Ausdruck »das Mathematiſche« iſt mit Abſicht doppeldeutig gewählt. Er kann, ebenſo wie (noch deutlicher) das griechiſche Wort μάθημα, von dem er herſtammt, bedeuten: erſtens die Mathematik, zweitens die mathematiſchen Gegenſtände als Thema der Mathematik.

Dieſe Doppeldeutigkeit iſt nicht einfach eine läſtige Äquivokation, ſondern der Ausdruck für ein eigentümliches Moment am Seinscharakter des Mathematiſchen.

Μάθημα (die Worte auf μα ſtehen im Griechiſchen gewiſſermaßen zwiſchen Verb und Subſtantiv, vgl. S. 194, Anm. 1) heißt einerſeits das, was gelernt (bzw. gelehrt) iſt oder werden kann (der Gegenſtand des Lernens), andererſeits – ebenſo wie unſer deutſches Wort »die Lehre« – der Lebenszuſammenhang, in dem man lernt (belehrt wird)[1]; man denke an die Redewendungen: »er ging beim Meiſter in die Lehre« oder »das war mir eine bittere Lehre«. –

So hat es, bei ſeinem erſtmaligen (wiſſenſchaftlichen) Auftreten in einem wörtlichen Fragment des Archytas (Diels 35, B. 1) ſchon einen »mittleren« Sinn: ».... καὶ περὶ γαμετρίας καὶ ἀριθμῶν καὶ σφαιρικᾶς καὶ ... περὶ μωσικᾶς. ταῦτα γὰρ τὰ μαθήματα δοκοῦντι ἦμεν ἀδελφέα« zu deutſch: »denn dieſe »Lehren« ſcheinen uns verſchwiſtert zu ſein«, – nämlich Aſtronomie, Geometrie, Arithmetik und Muſik. Nach der beachtenswerten Unterſuchung von B. Snell[2]

1) Im Griechiſchen iſt die Sachlage von der Seite des Lernens (μανθάνειν), im Deutſchen von der des Lehrens aus geſehen. (Ähnlich wie im Latein: »disciplina« = »Lehre« kommt von »discere« = »lernen«).

2) Bruno Snell, Die Ausdrücke für den Begriff des Wiſſens in der vorplatoniſchen Philoſophie (Philologiſche Unterſuchungen, herausgegeben von Kießling u. Wilamowitz, Heft 29, Berlin 1924); V. μάθημα, S. 72 ff.

hat μάθημα allerdings eine paſſive Bedeutung (Gegenſtand des Lernens). Snell überſetzt auch in dem ſoeben genannten Fragment μαθήματα mit »Lehrgegenſtände«. Wenn dieſe Interpretation auch offenſichtlich einſeitig iſt, muß man doch andererſeits Snell zugeben, daß die »paſſiviſche Bedeutung des Wortes« zu den Eigentümlichkeiten gehört, »die es dazu geeignet machten, eine ganz beſtimmte Gruppe von Wiſſenſchaften«, eben die mathematiſchen, »zu bezeichnen«. Snell ſagt (l. c. S. 79): »Während alle bisher behandelten Begriffe vom Erkennen des ſinnlich wahrnehmenden Subjekts ausgingen, iſt durch μάθημα das Objekt als das Maßgebende gekennzeichnet. Das Wort μάθημα wies alſo auf eine Erkenntnis, die von der Zufälligkeit der Perſon und der Empirie abſieht, die vielmehr Gegenſtände ſieht, die mit völliger Sicherheit erkannt werden. Aber dieſe Gegenſtände mußten »gelernt« werden können; ihre Erkenntnis mußte eindeutig und mitteilbar ſein. Und dieſer doppelten Forderung entſpricht nur die Mathematik.«

Um dies beſſer zu verſtehen, müſſen wir wiſſen, welches die »anderen Weiſen des Erkennens« ſind, auf die Snell anſpielt. Dieſe ſind: 1. σοφία: das praktiſche Können (von σοφός, der Kundige); 2. γνώμη: das Erkennen durch das Auge; 3. σύνεσις: das Verſtehen durch das Ohr (vor allem deſſen, was jemand ſagt); 4. ἱστορία (von ἵστωρ: der Augenzeuge): das Erfahren durch (das Verhör von) Augenzeugen.

Was iſt nun für alle dieſe Weiſen von Erkenntnis charakteriſtiſch? Und wodurch unterſcheiden ſie ſich alle vom μανθάνειν?

Dieſe Erkenntnisweiſen erwerben ihr Wiſſen alle ſelbſt in der unmittelbaren Lebenserfahrung: durch tätigen Umgang mit den Dingen, durch Erblicken, durch Hinhören, durch eigenes Nachfragen bei Augenzeugen. Dieſe ſelbſterwerbende Erfahrung ruht ganz in der Faktizität des eigenen Daſeins. (Das iſt gemeint mit dem ſehr unzulänglichen Ausdrucke Snells: »Zufälligkeit der Perſon und der Empirie«). Dagegen kann man ohne eigene Erfahrung auch von anderen etwas »lernen«, was der andere vielleicht in ſeiner Lebenserfahrung ſelbſt erworben – der Meiſter des Handwerks zeigt dem Lehrling den und jenen praktiſchen Griff und Kniff – oder ſeinerſeits von einem Dritten gelernt hat. – Aber kann man in der eigenen Lebenserfahrung Erworbenes ſchrankenlos auf andere übertragen? Kann man nicht das Beſte nur »vormachen«, ſo daß es der andere dann, wenn's ihm »glückt«, »nachmachen« kann? Kann jener es nicht höchſtens nur »ablernen«, – aber doch nicht eigentlich, als einen beſtimmten »Gegenſtand des Wiſſens«, lernen?

Der »Ablernende« muß ſich mit ſeiner Faktizität der des Lehrers angleichen, er muß es »ſo machen wie er« und letztlich alſo auch ſelbſt erfahren, in ähnlicher konkreter Lebensſituation, im faktiſchen Umgang mit den Dingen. Zu dieſer Selbſttätigkeit allein leitet ihn der Lehrer an. – Der eigentlich oder »bloß« Lernende aber ſoll dies nicht brauchen. Ihm wird das Wiſſen gegeben, er braucht es nicht ſelbſt zu erwerben; er braucht nicht irgendwie Hand anlegen, er läßt es ſich vorführen, vorlegen.

Kann man aber auf dieſem Wege überhaupt zu echtem Wiſſen gelangen? Iſt dieſes Lernen nicht ein bloßes uneinſichtiges Übernehmen von der Autorität des Lehrers, alſo ein »Sich-Einlernen«, das zu keiner eigenen Überzeugung führen kann?[1]

In der Tat liegt eine Schwierigkeit im Begriffe des eigentlichen Lernens, das weder »Ablernen« noch »Sich-Einlernen« ſein ſoll. Das, was in dieſem ſtrengen Sinn eigentlich erlernbar ſein ſoll, muß in ſich ſelbſt einen ganz beſonderen Sinncharakter haben. Es muß von der ſpezifiſchen Verſchiedenheit der individuellen Lebenserfahrung unabhängig ſein und es muß andererſeits auch trotzdem der eigenen Einſicht zugänglich ſein.

Dies iſt nun in der Tat das Eigentümliche mathematiſcher Zuſammenhänge, daß »ihr Gehalt offen zutage liegt«. (Ariſtoteles: *τῶν δὲ* (sc. *μαθηματικῶν*) *τὸ τί ἐστιν οὐκ ἄδηλον.*)[2] Sie haben alſo einen eigentümlichen Sachgehalt, der in ſich ſinnvoll iſt, ohne Rückſicht auf den Erfahrungszuſammenhang, in dem er auftritt. Daher iſt es in gewiſſem Sinn wirklich richtig, das Eigentümliche der mathematiſchen Erkenntnis vom »Objekt« her zu beſtimmen.[3]

Auf der anderen Seite iſt ein ſolcher erfahrungsunabhängiger Sinngehalt etwas ſehr Rätſelhaftes. Denn die Dinge der Umwelt ſind doch nur im Zuſammenhang der Lebenserfahrung. Sie ſind

---

1) Es wird hier abgeſehen von der Erwerbung von Wiſſen aus autoritativer Tradition, z. B. in religiöſen Angelegenheiten, in der Sitte und im Recht. Dies möchten wir nicht als »Lernen« bezeichnen.

2) An der ſchon früher (S. 190, Anm. 2) zitierten Stelle Eth. Nic. VI, 9 (1142a 20). Der Kontraſt dazu iſt die Erkenntnis der wirklichen Natur, deren Urſprung in der Erfahrung liegt; davon können ſich die jungen Menſchen nicht ſelbſt überzeugen, ſondern ſie reden bloß (ohne Einſicht) darüber. (*τῶν δ' αἱ ἀρχαὶ ἐξ ἐμπειρίας· καὶ τὰ μὲν οὐ πιστεύουσιν οἱ νέοι, ἀλλὰ λέγουσιν*, l. c. 19–20).

3) Snell erwähnt noch (l. c. S. 79 Anm. 5) die in der Tat merkwürdige Tatſache, daß die paſſive Verwendung von *γιγνώσκω* außer bei den mathematiſch gerichteten »Pythagoreern« ſehr ſelten iſt. (Allerdings iſt die Echtheit der Philolaos-Fragmente von E. Frank beſtritten worden.) Das Mathematiſche »wird« in der Tat »eingeſehen«; von wem, iſt belanglos!

gar nicht urſprünglich »Dinge für ſich ſelbſt«, ſondern Gebrauchsgegenſtände, Werkzeuge, Nahrungsmittel, Waffen, freundliche und feindliche Naturgewalten, Rohſtoffe u. dgl.[1]

B. Das Apriori und die Anamneſis (der junge Plato).

Dieſe Rätſelhaftigkeit iſt früh empfunden worden: Plato hat ſie als erſter aufgedeckt und gedeutet, durch ſeine Lehre von der Wiedererinnerung (*ἀνάμνησις*) an die vorweltliche Schau der ewigen Ideen. Im Meno (80A–86C) handelt es ſich um die Möglichkeit des Suchens (Forſchens, *ζητεῖν*) und zugleich auch des *μανθάνειν*. Das ſophiſtiſche Dilemma über das Suchen lautete ſo: Weder nach dem, was der Menſch weiß, wird er forſchen, denn er weiß es ja ſchon, ... noch nach dem, was er nicht weiß, denn er weiß ja gar nicht, wonach er forſchen ſoll. (*οὔτε γὰρ ἂν γε ὃ οἶδε ζητοῖ· οἶδε γὰρ .... οὔτε ὃ μὴ οἶδεν· οὐδὲ γὰρ οἶδεν ὅ τι ζητήσει.*)[2] Man kann das Rätſel des Lernens (was Plato nicht tut) ebenfalls auf die Form eines derartigen Dilemma bringen: Wenn jemand die *μαθήματα* ſchon kennt, braucht er ſie nicht zu lernen, wenn er ſie aber noch nicht kennt, ſo kann er ſie gar nicht lernen, denn ſie ſollen ja nicht in der Lebenserfahrung ihm begegnen, – wie ſoll er alſo auf ſie ſtoßen? Er ſoll ja die *μαθήματα* nicht durch eigenen ſelbſttätigen Umgang mit den Dingen erwerben! – Oder anders ausgedrückt: Wie iſt es möglich, daß einer, ohne eigene Erfahrung, die erſt das alternde Leben ſich erwirbt (*πλῆθος γὰρ χρόνου ποιεῖ τὴν ἐμπειρίαν* Ariſtot., l. c., 1142a 15–16), zu ſeiner eigenen Überzeugung belehrt werde?

Zur Beantwortung dieſer Fragen ſtellt Plato die Theſe auf: *τὸ γὰρ ζητεῖν ἄρα καὶ τὸ μανθάνειν ἀνάμνησις ὅλον ἐστίν*[3] (»denn das

1) Die phänomenologiſche Analyſe der »Umweltlichkeit« iſt von M. Heidegger in die Wiſſenſchaft eingeführt worden, ſ. jetzt »Sein und Zeit« § 15ff. –

Heidegger hat auch gelegentlich (in Marburger Vorleſungen W.-S. 1923/24) die verſchiedenen griechiſchen Ausdrücke für »Gegenſtände« wie folgt zuſammengeſtellt: »1. *τὰ πράγματα* das, womit ich es zu tun habe (»Tatſachen«); 2. *τὰ χρήματα* Dinge, ſofern ſie im Gebrauch ſind; 3. *τὰ ποιούμενα* das künſtlich (*τέχνη*) Hergeſtellte; 4. *τὰ φυσικά* das, was von ſich ſelbſt aus wächſt; 5. *τὰ μαθήματα* das Lehrbare (worüber es ein eigentliches Wiſſen gibt, das jedem beigebracht werden kann)«.

Auch in dieſer vergleichenden Zuſammenſtellung hebt ſich das *μάθημα* ab, durch ſeine formale Charakteriſtik. Ebenſo formal charakteriſiert müßte man (1)–(4) »das in der Lebenserfahrung (im Umgang) Begegnende« nennen.

2) Meno 80 D. 3) Meno 81 C D.

Suchen und das Lernen iſt ganz und gar Wiedererinnerung«). Weil die Seele in einem früheren Leben (Leben und Tod werden als miteinander abwechſelnde periodiſche Zuſtände gedacht) Alles [kennen] »gelernt« hat (*οὐκ ἔστιν ὅ τι οὐ μεμάθηκεν*)[1], iſt ſie imſtande durch Erinnerung »Alles« wieder aufzufinden. Das iſt dann das, was die Menſchen »Lernen« nennen (*ὃ δὴ μάθησιν καλοῦσιν ἄνθρωποι*)[1]. Das primäre *μανθάνειν* der Seele im früheren Leben iſt eine urſprüngliche Erwerbung, alſo kein *μανθάνειν* in dem hier problematiſchen Sinn. Dieſes Urphänomen verbirgt das Dunkel des Mythos. Aber das »ſekundäre«, d. i. das eigentlich problematiſche »Lernen« erklärt ſich dadurch, daß wir uns bei ihm nur an etwas erinnern, was wir im Grunde ſchon von früher her wiſſen, ohne daß wir uns ſelbſt darüber im klaren ſind. »*Τῷ οὐκ εἰδότι ἄρα περὶ ὧν ἂν μὴ εἰδῇ ἔνεισιν ἀληθεῖς δόξαι*«. (»Dem Nichtwiſſenden wohnen alſo wahre Meinungen inne über das, was er nicht weiß«). »*Οὐκοῦν οὐδενὸς διδάξαντος ἀλλ' ἐρωτήσαντος ἐπιστήσεται, ἀναλαβὼν αὐτὸς ἐξ αὑτοῦ τὴν ἐπιστήμην; — ναί*«[2]. (»Wird er nicht, ohne daß ihn jemand belehrt, nur dadurch, daß ihn jemand ausfragt, zum Wiſſen kommen, indem er ſelber aus ſich ſelbſt heraus das Wiſſen heraufholt?« — »Ja«). — So iſt es nach Plato bei allem geometriſchen und überhaupt »mathematiſchen« Wiſſen (*ποιήσει περὶ πάσης γεωμετρίας ταὐτὰ ταῦτα καὶ τῶν ἄλλων μαθημάτων ἁπάντων*)[3].

Damit hat Plato den »aprioriſchen« Charakter alles »mathematiſchen«, eigentlich erlernbaren Wiſſens entdeckt. Es iſt in der Tat im wörtlichſten Sinne Wiſſen vor der Erfahrung dieſes unſeres Lebens.

Das mathematiſche Wiſſen iſt alſo einerſeits Wiſſen »von der Sache allein her«, unabhängig von perſönlicher faktiſcher Erfahrung. Andererſeits gerade deswegen nicht von außen kommend, uns im Leben im Sinn von »Erfahrung« begegnend, ſondern unbewußt in uns beſchloſſen, ſeit mythiſcher Vorzeit. Nur der Anſtoß zu ſeinem Wiederbewußtwerden kann aus der Erfahrung kommen[4], durch Fragen kann auf es aufmerkſam gemacht werden, gelehrt werden kann es nicht. Das Rätſel von Lehren und Lernen wird alſo

1) Meno 81 C D.
2) Meno 85 C.
3) Meno 85 D.
4) Vgl. Kants bekanntes Wort: »Wenn aber gleich alle unſere Erkenntnis mit der Erfahrung anhebt, ſo entſpringt ſie darum doch nicht eben alle aus der Erfahrung.« (Kritik der reinen Vernunft; Einleitung, 2. Aufl., S. 1.)

dadurch »gelöſt«, daß die Möglichkeit eigentlichen Lehrens und Lernens (im naiven Sinn) geleugnet wird[1].

Damit gewinnen aber die μαθήματα und die μάθησις eine ganz ausgezeichnete Stellung: jene ſtammen aus der mythiſchen Vorzeit, und dieſe hat gewiſſermaßen die magiſche Kraft, die Schatten des in jener Vorzeit Lebenden wieder herauf zu beſchwören. Daher die Erhabenheit der Mathematik in der Meinung der Akademie und daher jener merkwürdige Spruch über ihrer Pforte: μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω![2]

Der Skeptiker von heute wird freilich ſagen, es handele ſich eben um einen jener bekannten platoniſchen Mythen und man dürfe die Sache nicht wörtlich nehmen. Ernſthaft habe nicht einmal Plato ſelbſt an die Wirklichkeit des früheren Seelenlebens und an die »Erinnerung« daran geglaubt. Und ſachlich ſei die ſchöne Sage natürlich völlig indiskutierbar. Man habe in der ἀνάμνησις eben den noch ſtammelnden, halbmythiſchen Ausdruck für das allerdings für das philoſophiſche Verſtändnis des Mathematiſchen grundlegende Phänomen der »reinen Anſchauung a priori« im Sinne Kants.

Wir ſind anderer Meinung. Wir wagen zu fragen: Sollte vielleicht der platoniſche Terminus ἀνάμνησις, philoſophiſch d. h. ontologiſch betrachtet, tiefer und eigentlicher das Weſen mathematiſcher Erkenntnis treffen als die Kantiſche Bezeichnung »reine Anſchauung – a priori«? Oder noch ſchärfer gefragt: Was heißt a priori? Was kann es anderes heißen als »von dem Früheren her«, d. h. »aus dem früheren Leben her«?

In welchem Sinn iſt das aber zu verſtehen? Das frühere Leben iſt die »Vor-Zeit«, das prähiſtoriſche Daſein; dieſes iſt wahrhaft vor der ἱστορία, d. h. der leibhaften Erfahrung[3]. Es iſt bei

1) Das vorhin aufgeſtellte Dilemma löſt ſich genauer ſo: In gewiſſem Sinne kennt man ſchon die μαθήματα, in anderem nicht. Man kann ſie »lernen«, weil man ſie innerlich ſchon im Beſitz hat, man hat es aber auch nötig, ſie zu lernen, denn dieſer innere Beſitz iſt nicht »bewußt«; das bewußte (hiſtoriſche) Leben muß ihn ſich erſt aneignen. Dies iſt aber nicht »Lernen« im Sinne der Übernahme einer fremden »Lehre«.

2) Es kann den ſymboliſchen Wert dieſes Spruches nicht antaſten, daß die hiſtoriſche Tatſächlichkeit jener Inſchrift zweifelhaft iſt.

Nach H. Hankel (zur Geſchichte d. Math. im Altert. u. Ma. S. 129) ſoll das Wort in der Form: »μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω μοῦ τὴν στέγην« bei der Eröffnung der Vorträge Platos in der Akademie (389) geſprochen worden ſein. Die (erſt byzantiniſche) Quelle iſt Tzetzes, Chil. VIII, 972.

3) Ich nehme hier ἱστορία, ἱστορεῖν alſo in der Bedeutung »durch (eigene) Augenzeugenſchaft erfahren«; obwohl neuerdings Snell (l. c. S. 59ff.) es wahrſcheinlich gemacht hat, daß ἱστορεῖν urſprünglich »durch das Verhör

jedem Einzelnen ſeine eigene frühe Kindheit, bei jedem Volke ſeine vorgeſchichtliche Epoche, bei der Menſchheit überhaupt das »Frühmenſchliche«, das primitive Seelenleben. Es iſt nicht im groben Sinne »vergangen«, es lebt noch in uns, obzwar verborgen: als das ſogenannt »Unbewußte« oder »Unterbewußte«, wie wir ſagen wollen: als das Subhiſtoriſche.

Platos Theſe von der ἀνάμνησις iſt alſo zu interpretieren als die Behauptung des prähiſtoriſchen bzw. ſubhiſtoriſchen Urſprungs mathematiſcher Erkenntnis[1]. Es iſt gewiß nicht nachweisbar, daß Plato dies mit voller Klarheit gewußt hat. Schon deshalb nicht, weil ihm der explizite Begriff des Hiſtoriſchen fehlt[2], wie eigentlich der geſamten Antike. Aber er hat intuitiv die Spannung zwiſchen Hiſtoriſchem und Nicht-hiſtoriſchem erkannt und die Abſeitigkeit und Ausgeſondertheit des Mathematiſchen von allem übrigen Wiſſen empfunden und ſie tiefſinnig gedeutet als Zugehörigkeit zu jenem vorzeitlichen Bereich. Dieſe

---

von (anderen) Augenzeugen erfahren« bedeutet. Immerhin heißt auch nach Snell ἵστωρ (»Augenzeuge«, aber auch »Schiedsrichter«!) wörtlich: »der, der geſehen hat« und ἱστορέω = ἵστωρ εἰμι »ich bin der, der geſehen hat«. Es iſt alſo wohl auch jetzt noch geſtattet, ἱστορεῖν als »leibhaft erfahren« zu interpretieren und das Wort »hiſtoriſch« in dieſem Sinne terminologiſch zu verwenden.

1) Es ſei bemerkt, daß auch ſonſt Plato für das Prä- und Subhiſtoriſche öfters das feinſte Verſtändnis zeigt. Hingewieſen ſei nur auf die wunderbar hellſichtigen Bemerkungen über den Sinn des Traumes (Staat, Buch IX, 571 CD, 572 B), die geradezu weſentliche Teile der heutigen Pſychoanalyſe vorwegnehmen. – [In fachlicher Hinſicht vgl. o. S. 223 ff.]

2) Implicite exiſtiert die Unterſcheidung des Hiſtoriſchen vom Nichthiſtoriſchen (Naturhaften) bei Plato ſehr wohl.

Zu nennen ſind vor allem die verſchiedenen Seelenmythen (Phaidros, Staat: Buch X, Sympoſion), die Erſchaffung der Zeit im Timaios (37 CD), die Atlantisſage uſw.

Weſentlich ſind vor allem die Zeitvorſtellungen, das Verhältnis von zykliſcher und einmaliger Zeitlichkeit u. ä. – Nach neueren Forſchungen liegen (vielleicht!) altiraniſche Vorſtellungen (die möglicherweiſe durch Eudoxos' Orientreiſen der Akademie vermittelt wurden) zugrunde. (Vgl. W. Jäger, Ariſtoteles (Berlin 1923), Seite 133 ff.)

Für die altiraniſchen Zeitvorſtellungen vgl. Heinrich Junker, Über iraniſche Quellen der helleniſtiſchen Aion-Vorſtellung, Vorträge der Bibliothek Warburg 1921/22 (Leipzig und Berlin 1923). Ferner: R. Reitzenſtein, das iraniſche Erlöſungsmyſterium (Bonn 1921). — Für das primitive Zeitbewußtſein: Caſſirer, Philoſophie der ſymboliſchen Formen II. Teil: das mythiſche Denken (Berlin 1925) S. 132 ff. (Die Darſtellung C.s enthält wichtiges Material, das aber noch nicht weit genug interpretiert iſt. Hier liegt noch eine ſchwierige ungelöſte Aufgabe vor.)

kühnen Ahnungen Platos können uns aber heute noch zum Leitfaden dienen und den Frageanſatz nach dem Seinsſinn des Mathematiſchen wenigſtens andeutungsweiſe geben.

C. Die Abſtraktion (*ἀφαίρεσις*) als das Kennzeichen des Mathematiſchen. (Ariſtoteles.)

Es kreuzt ſich allerdings ſchon in der Antike noch ein ganz anderer Gedankengang mit dem platoniſchen, der ebenfalls unſere ernſteſte Beachtung verdient. Er rührt von Ariſtoteles her und wurde teilweiſe ſchon früher (§ 6a) betrachtet. Es handelt ſich um die Kennzeichnung des Mathematiſchen als des Abſtrakten, als das was »*δι᾽ ἀφαιρέσεώς ἐστιν*«[1]. Dieſe Kennzeichnung ſtempelt das Mathematiſche zu einem Moment am Sein, es nimmt ihm das ſelbſtändige Sein, drückt es unter das volle Sein herab. Genauer geſagt: das Mathematiſche exiſtiert eigentlich nur als Korrelat einer beſtimmten »aphairetiſchen« Weiſe der Betrachtung. Dieſe betrachtet gewiſſe an und für ſich nicht »getrennte« Seiten des ſinnlich vernehmbaren Dinges als getrennte (*τὰ μαθηματικὰ οὐ κεχωρισμένα ὡς κεχωρισμένα νοεῖ*)[2]. Damit betrachtet aber der Mathematiker die Eigentümlichkeiten des Naturdinges nicht als ſolche, in ihrem eigentlichen Weſen, ſondern »als nicht-ſolche«, alſo uneigentlich. Es iſt zum genauen ſachlichen Verſtändnis erforderlich, auf die Texte im einzelnen einzugehen. *ὁ φυσικὸς περὶ ἅπανθ᾽ ὅσα τοῦ τοιουδὶ σώματος*

---

1) Eth. Nic. VI, 9 (1142a 18) [ſ. S. 190, Anm. 2].

2) Die Stelle (de anima III, 7; 431 b 12–16) lautet im Zuſammenhang: *τὰ δὲ ἐν ἀφαιρέσει λεγόμενα νοεῖ* [sc. *τὸ νοητικόν*] *ὥσπερ ἂν εἰ τὸ σιμόν, ᾗ μὲν σιμόν, οὐ κεχωρισμένως, ᾗ δὲ κοῖλον, εἴ τις ἐνόει ἐνεργείᾳ, ἄνευ τῆς σαρκὸς ἂν ἐνόει ἐν ᾗ τὸ κοῖλον· οὕτω τὰ μαθηματικὰ οὐ κεχωρισμένα ὡς κεχωρισμένα νοεῖ, ὅταν νοῇ ἐκεῖνα.* (Nach der Akad. Ausg. [Bekker] und auch nach Biehl-Apelt.)

Nach Bywater ſoll die Stelle (leichter verſtändlich) ſo heißen: *τὰ δ᾽ ἐν ἀφαιρέσει λεγόμενα νοεῖ, ὥσπερ ἄν εἴ τις τὸ σιμόν ᾗ μὲν σιμόν οὔ, ᾗ δὲ κοῖλον ἐνόει, ἐνεργείᾳ νοῶν ἄνευ τῆς σαρκὸς ἂν ἐνόει ἐν ᾗ τὸ κοῖλον, οὕτω τὰ μαθηματικὰ . . .*

Der Sinn iſt: An ſich verhält es ſich mit den räumlichen und Zahl-Eigenſchaften wie mit der Hohlnaſigkeit (entſprechend im Deutſchen wäre das Schielen oder die Scheelheit). Dieſe kommt ihrem eigenen Sinngehalt nach nur der Naſe (bzw. dem Auge) oder ſtofflich dem Fleiſche zu; ſo auch die räumlichen oder Mengencharaktere konkreten Sinnendingen. Aber der Mathematiker betrachtet dieſe Charaktere ſo, wie wenn man das Hohlnaſige (bzw. das Scheele) als das Gebogene oder Hohle (bzw. das Schiefe) betrachtet, d. h. ohne das Fleiſch, in dem doch das Hohlnaſige (bzw. Scheele) notwendig ſeinem Weſen nach iſt. So betrachtet der Mathematiker das weſenhaft nicht Getrennte doch als ein Getrenntes.

Daraus folgt aber, daß das Mathematiſche nur als Korrelat dieſer »abſtrahierenden« Betrachtungsweiſe ſein Sein hat.

καὶ τῆς τοιαύτης ὕλης ἔργα καὶ πάθη· ὅσα δὲ μὴ ᾗ τοιαῦτα, ἄλλος (καὶ περὶ τινῶν μὲν τεχνίτης, ἐὰν τύχῃ, οἷον τέκτων ἢ ἰατρὸς), τῶν δὲ μὴ χωριστῶν μέν, ᾗ δὲ μὴ τοιούτου σώματος πάθη καὶ ἐξ ἀφαιρέσεως, ὁ μαθηματικός, ᾗ δὲ κεχωρισμένα ὁ πρῶτος φιλόσοφος. (de anim. I, 1; 403b, 11–16.) (»Der Naturforſcher betrachtet alles, was zu einem ſolchen Körper hier gehört und die Leiſtungen und Zuſtände eines ſolchen Stoffes. Was aber »nicht als ſolches«[1] angeſehen wird, das unterſucht ein anderer [ſo, wenn ſichs trifft, der Mann der Praxis, wie der Zimmermann oder der Arzt], das aber, was nicht (an ſich) abgetrennt iſt, betrachtet – aber inſofern es nicht Zuſtändlichkeit eines ſolchen Körpers iſt und ſofern es aus der Abſtraktion ſtammt – der Mathematiker; ſofern es aber (an ſich) Abgetrenntes iſt, der erſte Philoſoph«.) Befremdend iſt auf den erſten Blick vielleicht der Vergleich des Mathematikers mit dem *τεχνίτης*, dem Handwerker und Arzt. Aber dieſer Vergleich führt gerade die Abhängigkeit des Mathematiſchen von der Weiſe der Intention, in der es erfaßt wird, deutlich vor Augen. Der Zimmermann nimmt den Stamm, der an ſich ſelbſt die Leiche eines pflanzlichen Organismus iſt, als Baumaterial, der Arzt den Saft einer Pflanze oder ein Salz etwa als Arzenei oder als Gift. Beide haben die Dinge unter einem beſtimmten Aſpekt. Ähnlich der Mathematiker, der etwa die ſteinerne Säule als Zylinder nimmt, den Ball als Kugel, die Kante des Steines oder den Lichtſtrahl als Gerade[2]. Allerdings iſt dieſe Weiſe des Habens von Gegenſtänden immer noch weſenhaft auf ſie bezogen und »trifft« nicht einfach »auf ſie zu« (*συμβαίνει*, wovon *κατὰ συμβεβηκός*)[3].

Das geht am klarſten daraus hervor, daß die mathematiſchen Wiſſenſchaften eine ganz beſtimmte Beziehung zu den Wirklichkeits-

1) Der Text iſt hier leider unſicher: 403b 12 haben die meiſten Handſchriften *ὅσα δὲ μὴ ᾖ τοιαῦτα* Cod E hat *ἦν*; das hieße: »Was aber nicht ſo beſchaffen iſt« bzw. »war«. Simplicius zitiert aber die Stelle mit *ᾗ* (dies übernimmt Biehl-Apelt nach dem Vorgang von Bonitz); danach haben wir überſetzt, denn nur ſo erhält die Stelle die volle Schärfe des Ausdrucks. Gerade die eigentümliche Wendung »*μὴ ᾗ τοιαῦτα*« »nicht als ſolches« ginge ſonſt verloren zugunſten eines gänzlich trivialen Satzes.

2) Vgl. Phyſik II, 2 (der ganze erſte Teil des Kapitels iſt in Betracht zu ziehen bis 194 a 12). — 194 a 9 ff.: *ἀλλ' ἡ μὲν γεωμετρία περὶ γραμμῆς φυσικῆς σκοπεῖ, ἀλλ' οὐχ ᾗ φυσική, ἡ δ' ὀπτικὴ μαθηματικὴν μὲν γραμμήν, ἀλλ' οὐχ ᾗ μαθηματικὴ ἀλλ' ᾗ φυσική.*

3) Die Weiſe, wie Ariſtoteles die Dinge der »Umwelt« ſieht, iſt der der hermeneutiſchen Phänomenologie (Heidegger) in gewiſſem Sinne entgegengeſetzt. Ihre Bedeutſamkeit iſt *κατὰ συμβεβηκός*, ſofern ſie nicht mit *πρᾶξις* und *ποίησις* zuſammenhängt. S. Metaph. E 2; 1026b, 2—10.

wiſſenſchaften haben; »ſo daß die eine »unter« der anderen iſt, indem es Sache der beobachtenden Diſziplin iſt, das »daß« (die bloße Tatſache), der mathematiſchen, das »warum« zu erkennen.« [*ὥστ' εἶναι θάτερον ὑπὸ θάτερον* (78b 36). *τὸ μὲν ὅτι τῶν αἰσθητικῶν εἰδέναι, τὸ δὲ διότι τῶν μαθηματικῶν* (79a, 2 – 3)][1].

Jene angewandten Wiſſenſchaften verhalten ſich ſo, daß ſie, obwohl ſie ihrem Seinsſinn nach anders ſind, doch die (mathematiſchen) Formen gebrauchen. Die Mathematik handelt nämlich von den Formen, und ſie iſt nicht »gemäß einem zugrunde liegenden Subſtrat«. »Denn wenn auch die Geometrie irgendwie ein ſolches haben ſollte, ſo iſt ſie doch als ſolche nicht von ihm abhängig.« (*ἔστι δὲ ταῦτα, ὅσα ἕτερόν τι ὄντα τὴν οὐσίαν, κέχρηται τοῖς εἴδεσιν. τὰ γὰρ μαθήματα περὶ εἴδη ἐστίν. οὐ γὰρ καθ' ὑποκειμένου τινός. εἰ γὰρ καὶ καθ' ὑποκειμένου τινὸς τὰ γεωμετρικά ἐστιν, ἀλλ' οὐχ ᾗ γε καθ' ὑποκειμένου* [79a, 6 – 10].)

Dieſe Stelle zeigt nun zugleich noch eine andere Gedankenwendung, die die Abſtraktionstheorie des Mathematiſchen etwas mildert. Sie beſagt nämlich, daß die *εἴδη*, auf die ſich das Mathematiſche bezieht, doch nicht ſchlechthin ein Moment am wirklichen Körper ſind, ſondern dem Seinsſinn nach anders als der Körper. Die »rein mathematiſchen« Diſziplinen (wie wir *heute* ſagen) hängen nicht ab von dem materiellen Subſtrat, an dem ſie im Leben als konkretes Wiſſen erworben werden. Das dies ſo gemeint iſt, geht aus einer anderen Stelle der *erſten* Analytik (I, 41) hervor. Es wird dort geſagt, die Gültigkeit der formal-logiſchen Sätze ſei nicht abhängig von der *ἔκθεσις* (expositio) der termini, die in dem Schluſſe illuſtrativ figurieren. Denn wir brauchen nicht zum Beweiſe, daß dieſe als Illuſtration dienenden Verhältniſſe wirklich ſo ſind, ſondern es iſt ſo »wie der Geometer zwar ſagt, dieſe Linie ſei gerade und einen Fuß lang und ohne Breite, während ſie es doch nicht (genau) iſt, aber dieſen Umſtand nicht ſo benutzt, daß er daraus argumentiert« (ſondern eben nur als Erläuterung)[2]. Und weiterhin heißt es ein andermal noch deutlicher: »Der Geometer macht keine falſchen Vorausſetzungen, wie man ihn beſchuldigt hat, wenn er von einer fußlangen Geraden ſpricht, wo doch die von ihm gezeichnete Linie weder gerade noch genau ein Fuß lang iſt. Denn er zieht keinen Schluß

1) Vgl. die ganze Stelle: Analyt. post. I, 13 (78b, 39 – 79a, 10).

2) *οὐ δεῖ δ' οἴεσθαι παρὰ τὸ ἐκτίθεσθαί τι συμβαίνειν ἄτοπον· οὐδὲν γὰρ προσχρώμεθα τῷ τόδε τι εἶναι, ἀλλ' ὥσπερ ὁ γεωμέτρης τὴν ποδιαίαν καὶ εὐθεῖαν τήνδε καὶ ἁπλατῆ εἶναι λέγει οὐκ οὖσαν, ἀλλ' οὐχ οὕτως χρῆται ὡς ἐκ τούτων συλλογιζόμενος.* (49b, 33 – 37).

daraus, daß gerade dieſe gezeichnete Linie die iſt, die er angeführt hat, ſondern aus nur dem, was die Zeichnung ſichtbar werden läßt[1].

Ariſtoteles iſt ſich alſo durchaus darüber im klaren, daß die Mathematik auch von der Ungenauigkeit und den Störungen, die den materiellen Dingen anhaften, ſich frei machen muß. Die mathematiſche ἀφαίρεσις iſt alſo nicht nur eine abſtraktive Heraushebung gewiſſer geſtaltlicher (und allgemein »formaler«) Momente am materiellen Seienden, ſondern zugleich auch das, was wir heute »Idealiſierung« nennen. Weder die irdiſchen Gegenſtände zeigen genaue Kreiſe und Gerade, noch ſelbſt die Bewegungen der Geſtirne am Himmel ſind von vollendeter Regelmäßigkeit und auch ſchon die Sterne ſelbſt ſind nicht etwa mathematiſche Punkte[2].

Aber er hat doch eben die abſtraktive Heraushebung und die »Idealiſierung« zuſammen unter dem Terminis ἀφαίρεσις begriffen, er ſieht auch in der Idealiſierung nichts als eine Fortſetzung der Abſtraktion, – wie wir ja auch heute noch zu ſagen pflegen, man müſſe in der Geometrie nicht nur von dem Körperlichen und von der Farbigkeit der gezeichneten Figuren, ſondern auch von ihrer Ungenauigkeit »abſtrahieren«.

Infolgedeſſen bekämpft er die Lehre Platos von der Zwiſchenſtellung der mathematiſchen Gegenſtände zwiſchen Idee und Sinnending, wie ſie von ihm in der ſchon früher (S. 198, Anm. 1) zitierten bekannten Stelle aus dem erſten Buch der Metaphyſik[3] kurz dargeſtellt wird.

Wir können hier dieſe Polemik nicht im einzelnen verfolgen, die im Laufe der Geſchichte ſich nicht als erfolgreich erwieſen hat: die Akademie bis zum Neuplatonismus (Proklos) hat die griechiſche Philoſophie der Mathematik geſchaffen. Aber wir müſſen doch auf die Hauptunterſchiede der platoniſchen und der ariſtoteliſchen Lehre eingehen.

D. Axiomatiſcher Elementaraufbau (στοιχείωσις). (Der ſpätere Plato.)

Die mathematiſchen Gegenſtände (τὰ μαθηματικὰ τῶν πραγμάτων) bilden alſo nach Plato eine dritte Art von Wahrheiten neben den

1) Analyt. post. I, 10 (76 b 39 — 77 a 3): οὐδ' ὁ γεωμέτρης ψευδῆ ὑποτίθεται, ὥσπερ τινὲς ἔφασαν, λέγοντες ὡς οὐ δεῖ τῷ ψεύδει χρῆσθαι, τὸν δὲ γεωμέτρην ψεύδεσθαι λέγοντα ποδιαίαν τὴν οὐ ποδιαίαν ἢ εὐθεῖαν τὴν γεγραμμένην οὐκ εὐθεῖαν οὖσαν. ὁ δὲ γεωμέτρης οὐδὲν συμπεραίνεται τῷ τήνδε εἶναι γραμμὴν ἣν αὐτὸς ἔφθεγκται, ἀλλὰ τὰ διὰ τούτων δηλούμενα.

2) Vgl. Metaph. B 2, 997 b 32 — 998 a 6.

3) Für weiteres Material ſowohl über Platos Lehre wie über Ariſtoteles' Polemik ſ. L. Robin, la théorie platonicienne des idées et des nombres d'après Aristote. (Paris 1908), §§ 99–126 (S. 199ff.).

Sinnendingen und den Ideen, und zwar zwiſchen (μεταξύ) dieſen. Sie unterſcheiden ſich von den ſinnlichen Dingen (wie ſchon früher erwähnt) dadurch, daß ſie ewig und unveränderlich ſind; von den Ideen dadurch, daß ſie in mehreren Exemplaren exiſtieren, während jede Idee nur einmal da ſein kann. (διαφέροντα τῶν μὲν αἰσθητῶν τῷ ἀΐδια καὶ ἀκίνητα εἶναι, τῶν δ'εἰδῶν τῷ τὰ μὲν πολλ' ἄττα ὁμοῖα εἶναι τὸ δ' εἶδος αὐτὸ ἓν ἕκαστον μόνον. Ariſtot. Metaph. A, 6, 987b, 16–18.)

Sie ſind alſo damit auf dem Wege zum ὄντως ὄν, dieſem verwandter als die Sinnendinge: vgl. Timäus 52A: τρίτον (neben εἶδος und αἰσθητόν) δὲ αὖ γένος ὂν τὸ τῆς χώρας ἀεί, φθορὰν οὐ προσδεχόμενον, ἕδραν δὲ παρέχον ὅσα ἔχει γένεσιν πᾶσιν . . . (Die dritte Art des Seienden iſt das Seiende des Raumes, ewig, der Vernichtung nicht unterworfen, allem Werdenden Platz gewährend.) – Weſentlich iſt, daß dieſes mittlere Seinsgebiet dem Werden und Vergehen entrückt iſt. Es kommt ihm, wie wir heute ſagen werden, ein anderer Zeitcharakter zu als der Welt des Werdens[1].

Nun bleibt aber zum mindeſten der ſpätere Plato keineswegs bei dieſer »ontologiſchen Hypoſtaſierung« eines dritten Seinsreiches ſtehen, ſondern gerade dieſes Mittlere (μέσα) iſt, wie die grundlegende Erörterung im Philebos (160ff.) zeigt[2], das methodiſche Mittel, den Sinn des Mathematiſchen, nämlich ſeine Fähigkeit zur »Beherrſchung« des ἄπειρον zur Geltung zu bringen. Das große Problem des Einen und Vielen, der Grenze und des Grenzenloſen (ἄπειρον) kann nur gelöſt werden dadurch, daß man die geſamte Zahl der Vielheit überſieht, die zwiſchen dem Unbegrenzten und dem Einen liegt. (πρὶν ἄν τις τὸν ἀριθμὸν αὐτοῦ πάντα κατίδῃ τὸν μεταξὺ τοῦ ἀπείρου τε καὶ τοῦ ἑνός.) Der Unterſchied zwiſchen der Dialektik und Eriſtik beſteht gerade darin, daß jener »die Mittelglieder entgehen« (τὰ δὲ μέσα αὐτοῖς [sc. den Eriſtikern] ἐκφεύγει), weil ſie unmittelbar nach dem Einen das Unbegrenzte ſetzen (μετὰ δὲ τὸ ἓν

1) Ariſtoteles betont demgegenüber (Metaph. E 1; 1026 a 7ff.): ἀλλ' ἔστι καὶ ἡ μαθηματικὴ θεωρητική· ἀλλ' εἰ ἀκινήτων καὶ χωριστῶν ἐστί, νῦν ἄδηλον· ὅτι μέντοι ἔνια μαθήματα ᾗ ἀκίνητα καὶ ᾗ χωριστὰ θεωρεῖ (!), δῆλον. (1026 a 7–10). – ἡ μὲν γὰρ φυσικὴ περὶ χωριστὰ μὲν ἀλλ' οὐκ ἀκίνητα, τῆς δὲ μαθηματικῆς ἔνια περὶ ἀκίνητα μὲν οὐ χωριστὰ δ' ἴσως, ἀλλ' ὡς ἐν ὕλῃ· ἡ δὲ πρώτη (sc. φιλοσοφία) καὶ περὶ χωριστὰ καὶ ἀκίνητα (1026 a 13–16). In gewiſſem Sinne ſteht alſo auch bei Ariſtoteles die Mathematik zwiſchen »Phyſik« und »erſter Philoſophie«. Aber dieſe Eigentümlichkeit der Mathematik kommt durch die Weiſe ihrer Betrachtung (ᾗ . . . θεωρεῖ) zuſtande, nicht durch die Seinsart ihrer Gegenſtände, die gar nicht ſelbſtändig vorhanden (χωριστά) ſind.

2) Es ſei auf die ſehr wertvolle Interpretation Stenzels zu dieſer Stelle (»Zahl u. Geſtalt bei Plato und Ariſtoteles« S. 12ff.) hingewieſen.

ἄπειρα εὐθύς. – Phil. 16 E). Was damit in concreto gemeint iſt, hat dann bekanntlich Plato an zwei berühmten Beiſpielen auseinandergeſetzt: der Beſtimmung der muſikaliſchen Intervalle durch Zahlen (Phil. 17 D) und der Zerlegung des Lautbeſtandes der Rede in Buchſtaben (Phil. 18 C). Das erſte iſt ein wirklich mathematiſches Beiſpiel, das zweite ein viel allgemeineres und prinzipielles, das ſeine Tragweite aber gerade deshalb auch auf das Mathematiſche zurückerſtreckt. Für die Interpretation im einzelnen verweiſen wir auf Stenzel[1]. Das Weſentlichſte iſt, daß in der »grenzenloſen« Rede beſtimmt begrenzte Laute, und zwar in ihrer genauen (endlichen) Zahl erblickt werden, und zwar von dreierlei Art (Selbſtlaute, Mitlaute, Stumme), die dann bis zu jedem Einzelnen hinab getrennt werden. (*Θεῦθ . . . , ὃς πρῶτος τὰ φωνήεντα ἐν τῷ ἀπείρῳ κατενόησεν οὐχ ἓν ὄντα ἀλλὰ πλείω καὶ πάλιν ἕτερα . . . . . , ἀριθμὸν δέ τινα καὶ τούτων εἶναι . . . · τὸ μετὰ τοῦτο διῄρει τά τε ἄφθογγα καὶ . . . . . μέχρι ἑνὸς ἑκάστου . . . . , ἕως ἀριθμὸν αὐτῶν λαβὼν ἑνί τε ἑκάστῳ καὶ σύμπασι στοιχεῖον ἐπωνόμασε.*) Die unzerlegbaren Einzellaute heißen dann Buchſtaben (*στοιχεῖα*). Das heißt alſo, prinzipiell geſehen, Plato betrachtet die Zerlegung der Rede in Buchſtaben als das typiſche Beiſpiel einer Elementaranalyſe (*στοιχεῖον* = elementum[2]). Die Idee der Kombination endlich vieler Elementarſtücke ſtammt aus der Atomiſtik, die eigentlich die erſte *στοιχείωσις* durchführte. Implicite iſt der Gedanke ſchon ſehr viel früher in der griechiſchen Kunſt vorhanden, nämlich im ſog. »geometriſchen Stil« (11. – 8. Jahrhundert), in dem (wenigſtens im 8. Jahrhundert) Ornamente bereits mit dem Zirkel konſtruiert wurden (ſ. o. S. 136, Anm. 2). So gibt es zum Beiſpiel eine die Sechsteilung des Kreiſes darſtellende Figur auf peloponeſiſchen Fibeln des 8. Jahrhunderts. Dies Ornament iſt alſo aus ſieben genau gleich großen Kreiſen (und einem achten genau doppelt ſo großen) nach einer ganz genau beſtimmten Konſtruktion zuſammengeſetzt; es liegt alſo ein wirklicher Elementaraufbau vor.

Nun liegt hier, in dieſem grundlegenden Gedanken der *στοιχείωσις*[3], der Analyſe bis zu den Elementen und des Aufbaues aus Elementen,

---

1) l. c. S. 12–23.

2) Der Ausdruck *στοιχεῖον* für Element ſtammt von Plato (Simplicius, in Ariſtot. phys. p. 7, 10–14 ed. Diels), der Gedanke der Gleichſetzung von Buchſtabe und Element iſt weitgehend vorbereitet in der Atomiſtik (vgl. Diels, Elementum, Berlin 1899), der älteſte Ausdruck für »Element« *ἀρχή* (»Urſprung«) ſtammt von Anaximander, Empedokles ſagt *ῥίζωμα* (»Wurzel«).

3) Das erſte Vorkommen des Wortes iſt mir unbekannt. (*στοιχειώτης* als ehrende Bezeichnung Euklids erſcheint ſchon bei Archimedes.) Proclus,

die methodiſche Grundidee der griechiſchen Mathematik vor. Die von Stenzel aufgewieſenen Zuſammenhänge bezüglich der »atomiſtiſchen« Mathematik und Phyſik Platos und des Xenokrates, ihrem Nachwirken bei einzelnen ſpäteren Mathematikern (z. B. in Euklids Definitionen), endlich die merkwürdige Lehre von den Idealzahlen möge ihre große Wichtigkeit haben. Allein das, was die Entwicklung für Jahrtauſende, bis heute, in der Mathematik beſtimmt hat, das eigentlich Entſcheidende und Fruchtbare des *στοιχείωσις*-Gedankens iſt damit noch nicht genannt. Dies iſt der Elementaraufbau der Mathematik ſelbſt aus Axiomen und Poſtulaten, durch den »Beweis« der Theoreme, ebenſo wie die Löſung der Probleme durch eine Kombination von »elementaren« Konſtruktionen. Der Neuplatoniker Proklos zum mindeſten hat dies mit völliger Klarheit geſehen und ſich gerade dabei auf das Buchſtabengleichnis bezogen [in Euclidem p. 72, 6ff. (Friedlein)]: *ὡς γὰρ τῆς ἐγγραμμάτου φωνῆς εἰσιν ἀρχαὶ πρῶται καὶ ἀπλούσταται καὶ ἀδιαίρετοι, αἷς τὸ ὄνομα τῶν στοιχείων ἐπιφημίζομεν, καὶ πᾶσα λέξις ἐκ τούτων ὑφέστηκεν καὶ πᾶς λόγος, οὕτω δὴ καὶ τῆς ὅλης γεωμετρίας ἐστί τινα θεωρήματα προηγούμενα καὶ ἀρχῆς λόγον ἔχοντα πρὸς τὰ ἐφεξῆς καὶ διήκοντα διὰ πάντων καὶ παρεχόμενα πολλῶν ἀποδείξεις συμπτωμάτων, ἃ δὴ στοιχεῖα προσαγορεύουσιν.* (Wie es nämlich erſte, unzerlegbare Anfänge (Elemente) der Rede gibt, denen wir den Namen der Buchſtaben geben, und wie jeder ſchriftliche Text aus dieſen beſteht und auch jede Rede, ſo gibt es auch in der Geometrie gewiſſe Theoreme, die vorangeſtellt werden und das Verhältnis des Urſprungs haben zu den folgenden, die alles durchdringen und die Beweiſe für viele Eigentümlichkeiten gewähren, welche denn auch »*στοιχεῖα*« (Buchſtaben, elementa) genannt werden[1].)

Daß alſo der Gegenſtand der Mathematik eine »definite Mannigfaltigkeit« iſt, der aus einer endlichen Anzahl von Konſtruktionselementen mittels einer endlichen Anzahl von Konſtruktionsprinzipien aufgebaut werden kann, dieſe bis heute grundlegende methodiſche Maxime verdanken wir Plato.

---

in Euclidem verwendet es häufig. (Ariſtoteles und die ältere Stoa [Fragm. coll. Arnim] verwenden es nach den Indices v. Boniß bzw. v. Arnim-Adler noch nicht.)

1) Im weiteren Text (p. 72, 23ff.) gibt Proklos die Meinung des Menaichmos (des Eudoxosſchülers) über *στοιχεῖον* wieder, wo ſich beide Bedeutungen des Aufbaues (*τὸ κατασκευάζον ἐστὶ τοῦ κατασκευαζομένου στοιχεῖον*, p. 72, 24–25) und des Ergebniſſes der Analyſe (*ἄλλως δὲ λέγεται στοιχεῖον, εἰς ὃ ἁπλούστερον ὑπάρχον διαιρεῖται τὸ σύνθετον* (p. 73, 5–6) finden.

Es gibt aber noch ein anderes spezielleres, aber glänzendes Beispiel für die im Philebos aufgestellte Methode[1]: Das ist die Klassifikation der Irrationalitäten durch Theätet, eine hochbedeutsame mathematische Leistung, die sozusagen unter den Augen Platos vollzogen wurde[1]. Denn hier wird die Unendlichkeit des geheimnisvollen und unheimlichen Irrationalen von den Elementen aus systematisch aufgebaut und damit der Grenze und der Zahl unterworfen. Wir sahen früher (vgl. z. B. S. 158, Anm. 2), daß das (mathematische) Kontinuumproblem schon hier – mit der Spannung zwischen Theätets Konstruktionen und Eudoxos' »Nominaldefinition« des »Verhältnisses« (λόγος) — beginnt. Wir bemerken jetzt, daß es sich eingliedert in das Problem der Begrenzung des Unbegrenzten, wie es Plato im Philebos stellt und an dem Buchstabenbeispiel erläutert.

Im großen betrachtet, kann man sagen: Die Mathematik vor Plato war noch an das Anschaulich-Gestalthafte gebunden (»Wahrnehmungsgeometrie« Zeuthen). Auffallende (symmetrische u. dgl.) Figuren wurden auf ihre Eigentümlichkeiten hin untersucht, ohne daß diese Untersuchungen einen einheitlichen Zusammenhang gehabt hätten. Auch die »Konstruktionen« waren willkürlich und nicht von strengen Regeln beherrscht (»Einschiebung, allerlei kinematische Konstruktionen, wie etwa bei der Quadratrix (τετραγωνίζουσα) des Hippias von Elis). Plato führte erst die durchgreifende Reform durch, die uns die axiomatische Methode und die Definition der mathematischen Existenz durch Konstruktion schenkte[2].

Wie überhaupt, so waren auch bezüglich der Räumlichkeit und »Zahl«, die Gesamt-Gestalten das Primäre. Sie werden nicht primär in der frühen Mathematik (weder in der Arithmetik noch in der Geometrie) konstruiert, sondern vorgefunden und analysiert.

1) Fortgesetzt in Euklids X. Buch (s. o. § 5b I. S. 135ff.). – Gegenüber dieser Leistung kommen die abstrakten Spekulationen des Xenokrates, Speusippos usw. und selbst Platos eigene Idealzahlenlehre gar nicht in Betracht.

2) Vgl. dazu etwa Zeuthen, Sur les connaissances géometriques des Grecs avant la réforme platonicienne. Oversight over Danske Vid. Selsk. Forh. 1913, p. 431ff. O. Toeplitz hat demgegenüber darauf hingewiesen (»die Antike«, Bd. I, S. 201ff.), daß der στοιχείωσις-Gedanke auch möglicherweise aus der konkreten mathematischen Forschung stammen und von dort aus Plato erst zugeflossen sein könnte. Diese Hypothese läßt sich bei den wenigen uns bekannten Urkunden aus der Zeit weder beweisen noch widerlegen. Soviel wird man aber doch wohl als sicher annehmen können, daß Plato als erster das klare Bewußtsein des streng methodischen Verfahrens des Elementaraufbaues gewonnen hat und dadurch auch die Entwicklung der positiven mathematischen Forschung entscheidend gefördert hat.

In einem entwickelteren Stadium erfolgt dann ihre Re-konſtruktion aus den »Elementen«, die erſt durch Analyſe gewonnen werden mußten. Zugleich und in engſter weſenhafter Verbundenheit leuchtet im Augenblick dieſes Umſchlags gleichſam von der Analyſis in die Syntheſis das Problem des Unendlichen (Grenzenloſen, ἄπειρον) auf. Die primitiven Geſtalten werden in der Paſſivität des Vernehmens, das ſeinerſeits wieder aus der naiven Aktivität des urſprünglichen »Umgangs« mit den Dingen erwuchs, noch nicht als abgehoben und in ſich geſchloſſen vorgefunden: ſie ſind in einem ſtrukturierten »Feld«, einer »Umwelt«, von vornherein eingebaut. Sobald ſie in Elemente zerlegt werden, entſteht die Gefahr, daß die ihres natürlichen, »gewachſenen« Zuſammenhangs beraubte Welt zu einem wüſten Trümmerhaufen zerfällt (die Welt des Werdens Heraklits, Kratylos', des jungen Plato), der dann als unbeſtimmbar, unbegrenzt, nicht zu durchlaufen, unüberſehbar erſcheint und mit dem wegwerfenden Ausdruck μὴ ὄν, »nicht ſeiend«, abgelehnt wird[1]. Dieſes Unheimliche – nachdem die urſprüngliche Heimlichkeit der Welt zerſtört iſt –, dieſes ἄπειρον verlangt in Schranken gehalten, geordnet, beherrſcht, überſehbar gemacht zu werden. Man kann ſagen, das ἄπειρον iſt, im Munde Platos, das zu Bändigende; die chaotiſche Unheimlichkeit[2], die zu bannen, das Untier, das zu feſſeln iſt. Es gibt in der Tat einen zentralen Gedanken Platos, der ſeine Stellung klar verdeutlicht, nämlich den des Syndesmos, wie er im Mittelpunkt der Stenzelſchen Interpretation ſteht[3]. Er iſt im gegenwärtigen Zuſammenhang zu verſtehen als das Band des Geſetzes, wodurch dem grenzenloſen Chaos die Ordnung, die Beherrſchbarkeit zuteil wird. Dies iſt nicht nur anwendbar auf die Beherrſchung der ſinnlichen Welt des Werdens durch das Mathema-

1) Es iſt dabei nicht etwa nur an »Phyſik« zu denken. Auch die natürlich erwachſenen Grundlagen des menſchlichen faktiſchen Lebens ſelbſt, in Religion, Sitte, Kunſt, Staat werden zur Zeit des jungen Plato von der Sophiſtik »zerſetzt«. Auch da oder vielmehr da in erſter Linie droht der Trümmerhaufen!

2) Die Bedeutung von ἄπειρος (cf. Phileb. 17 E) ſchwankt, nach Natorp (Platos Ideenlehre[1] S. 302), zwiſchen »unendlich«, »unbeſtimmt«, »unkundig« (Gegenſatz: ἔμπειρος!; auch ἀπορία iſt entfernt verwandt). Vgl.: πεῖρα, πόρος, entfernter πέρα, πέρας uſw.; ἄπειρος kann aber von beiden Stämmen, je nach der Bedeutung, abgeleitet werden; gemeinſam iſt aber doch letztlich die Grundbedeutung *'per'* = »durch«, »hinüber«. (Vgl. Boiſacq, Dictionnaire étymologique de la langue grecque (Heidelberg-Paris 1916), p. 772).

3) Vgl. »Zahl und Geſtalt«, die im Sachregiſter unter »Syndesmos« angeführten Stellen.

tiſche, auch nicht nur auf die mathematiſche Erfaſſung des anſchaulichen Kontinuums, ſondern vor allem zunächſt innerhalb des rein mathematiſchen Bereichs ſelbſt. Die unendlichen Möglichkeiten, die die unbegrenzte Kombinationsfähigkeit der mathematiſchen Elemente auftauchen läßt, etwa die unbegrenzte Mannigfaltigkeit der formal (durch Eudoxos) definierten λόγοι, müſſen in erſter Linie beherrſchbar ſein, damit Mathematik ihrem eigenen Sinn nach die Fähigkeit der Weltbeherrſchung in ſich bergen ſoll, indem der Mathematiker, wie der platoniſche »Gott Theuth«, »dieſe Feſſel erdenkt, die ſelbſt eine iſt und dieſes alles irgendwie zu Einem macht« (τοῦτον τὸν δεσμὸν αὖ λογισάμενος ὡς ὄντα ἕνα καὶ πάντα ταῦτα ἕν πως ποιοῦντα, Phil. 18 C)[1]. Dies iſt der grundſätzliche Sinn des intern mathematiſchen »Kontinuumproblems«, wie wir es früher (§ 5 b) ausführlich erörtert haben, des Problems (wie nochmals wiederholt ſei), das Theätet zuerſt in Angriff nimmt und das bis auf Hilbert nicht geruht hat.

Mit dieſer ſpätplatoniſchen Gedankenreihe iſt anſcheinend die myſtiſche Haltung der ἀνάμνησις-Lehre verlaſſen und eine »exakt-naturwiſſenſchaftliche« Stellung gewonnen. So hat man es gelegentlich heute angeſehen (Eva Sachs, E. Frank)[2]. Aber dies wäre

---

1) Man wird dieſen Gedanken der Beherrſchung durch das Mathematiſche vielleicht unantik und ſpezifiſch nordiſch-abendländiſch finden. Nannten doch die Griechen das, was wir die mathematiſche »Beherrſchung« der Phänomene nennen: τὰ φαινόμενα σώζειν (die Ph. retten). So hat etwa Scheler in ſeiner Abhandlung »Erkenntnis und Arbeit« (in »die Wiſſensformen und die Geſellſchaft«, Leipzig 1926) den Machtgedanken gerade als Eigentümlichkeit der modernen Naturwiſſenſchaft (ſeit der Renaiſſance) hingeſtellt. Gewiß liegen dort die Dinge inſofern anders, als da an techniſche Beherrſchung der Natur ſofort gedacht wird (z. B. von Fr. Bacon), und das Experiment, das die Natur »zur Antwort zwingt«, die Hauptrolle ſpielt. Aber in der Tiefe hat doch alles mathematiſche Denken dies Gemeinſame, das Grenzenloſe zu faſſen, durch das Geſetz zu »feſſeln«; ein Zug, der bis tief in die Urgeſchichte der Menſchheit zurückgeht und nicht an einen einzelnen Kulturkreis gebunden iſt. (Babyloniſche, ägyptiſche, chineſiſche, indiſche Aſtronomie!)

2) Um die Aufklärung dieſes Gegenſatzes hat ſich E. Frank (»Plato und die ſogenannten Pythagoreer«, Halle 1923) weſentliche Verdienſte erworben. Von den »ſogenannten« Pythagoreern (Archytas und Schüler) ſind aber die erſten zu unterſcheiden, von denen man allerdings direkt nichts weiß. Es iſt ſehr ſchwer zu ſagen, ob Franks Athteſe der Philolaos-Fragmente berechtigt iſt, ſelbſt die inhaltliche Übereinſtimmung mit Speuſippos zuzugeben. Denn die von Frank ſo gerügte aprioriſch-konſtruierende Methode der frühen Akademie iſt in der Tat »archaiſtiſch«, d. h. ſie geht irgendwie auf archaiſche Vorbilder zurück. Die Zahl als Geſtalt iſt ſicher primitiv, das zeigen die ethnologiſchen und »ganzheitspſychologiſchen« Forſchungen, und die von

eine falſche Auffaſſung. Nicht umſonſt iſt ſo ein ſpäter Dialog wie der Timaios von ſo orphiſch-mythiſchem Stimmungsgehalt. Das Mathematiſche iſt für Plato niemals zum bloßen Werkzeug der Naturerkenntnis herabgeſunken. Das zeigt der Gegenſatz zu der poſitiviſtiſchen kyzikener Schule (zu der man Archytas als Eudoxos' Lehrer hinzurechnen muß), der in der Muſiktheorie, in der Aſtronomie und in der Lehre von den Grundlagen der Mathematik (Streit zwiſchen Speuſippos und Menaichmos) hervortritt. Die bekannten Erörterungen im VII. Buch des Staates zeigen ſehr deutlich die Ablehnung der Approximation der Beobachtungen durch die mathematiſche Theorie. Die wahrnehmbaren Geſtirne bleiben weit zurück hinter dem Wahrhaften, hinter den Bewegungen, »in welchen ſich die wahre (»ſeiende«) Schnelligkeit und die wahre (»ſeiende«) Langſamkeit nach der wahren Zahl und nach durchgängig wahren Figuren gegeneinander bewegen«. (*τῶν δὲ ἀληθινῶν πολὺ ἐνδεῖν, ἃς τὸ ὂν τάχος καὶ ἡ οὖσα βραδυτὴς ἐν τῷ ἀληθινῷ ἀριθμῷ καὶ πᾶσι τοῖς ἀληθέσι σχήμασι φοράς τε πρὸς ἄλληλα φέρεται . . . .* Republ. VII, 529 D.) Ebenſowenig wie man von einem materiellen Modell eines mathematiſchen Körpers Genauigkeit verlangen könne, ebenſowenig könne man es vom ſichtbaren Himmel und den hörbaren Tönen. Dieſe Paralleliſierung zeigt aufs klarſte, daß Plato – entgegen voll ausgebildeten exakten Tendenzen ſeiner Zeit – gar keine exakte Naturwiſſenſchaft wollte[1]. Man kann auch hier keine grundlegenden Unterſchiede zwiſchen dem »Staat« und den Spätſchriften finden: im »Timäus« kommt ja die »Tetraktys« vor, eine rein ſpekulative »Tonleiter«[2].

Stenzel im einzelnen verfolgte platoniſche Zahlenlehre hat deutlich primitive Züge. Rätſelhaft iſt viel eher die Modernität des Archytas (die nüchtern-korrekte Löſung des Problems der muſikaliſchen Intervalle) als die Primitivität Platos (wie ſie etwa in ſeiner rein ſpekulativen »Tetraktys« hervortritt).

1) Man bedenke, welche Ungeheuerlichkeit für uns darin liegt, ein mathematiſches Modell, das doch nur zur Illuſtration eines »idealen« Sachverhaltes künſtlich hergeſtellt iſt, mit einem Naturvorgang zu vergleichen, deſſen zu beobachtende Geſetzmäßigkeit mit mathematiſchen Mitteln »beſchrieben« oder »dargeſtellt« werden ſoll!

In dem erſten Fall iſt die mathematiſche Figur das Vorbild, das Modell das Abbild, im zweiten aber (nach unſerer Meinung) doch der Naturvorgang das Original, das wir mit unſeren Theorien rekonſtruieren! Für Plato aber liegen beide Fälle ganz gleich; nämlich, ebenſo wie im Falle des Modelles iſt auch der ſichtbare Himmel nur das unvollkommene Abbild eines rein »idealen« kinematiſchen Sachverhaltes.

2) Vgl. darüber die ausführlichen Erörterungen E. Franks, l. c. S. 13, 17f., 140, 163, Anm. 1, 166f., 181ff., 264ff.

Dieſe für unſere heutige Auffaſſung befremdliche, beinahe unbegreifliche Stellung Platos wurzelt in ſeiner Ontologie, iſt alſo philoſophiſch bedingt. Das Mathematiſche iſt eben dem eigentlich Seienden (ὄντως ὄν) näher als das Sinnliche. Man beachte den Gebrauch der Worte »ſeiend« (ὄν, οὖσα) und wahr (ἀληθινόν) in ganz demſelben Sinne (in der zitierten Stelle Rep. 529 D). Es iſt unter allen Umſtänden das mit dem größeren ontiſchen Gewicht Behaftete, und zwar als das Unbewegtere und Harmoniſchere. Daß die Mathematik die Dienerin der beobachtenden Wiſſenſchaft ſein könnte, iſt ein ganz unplatoniſcher Gedanke, den man auch nicht in die Philebos-Stellen hineinlegen darf. Gerade das muſiktheoretiſche Beiſpiel[1] zeigt ja klar, wie es gemeint iſt, – nicht im Sinne der erfahrungsgemäßen Geſetze des Archytas, ſondern im Sinne der aus ſelbſtherrlichen, rein aprioriſchen, Motiven entworfenen Tetraktys.

E. Der platoniſch-ariſtoteliſche Gegenſatz.

Es beſteht alſo ein unüberbrückbarer Gegenſatz zwiſchen der platoniſchen und der ariſtoteliſchen Auffaſſung des Seins des Mathematiſchen. Für Plato iſt es eigenſtändig, ſein eigenes Geſetz in ſich tragend, in ſeiner Seinsweiſe dem Phyſiſchen überlegen Für Ariſtoteles ein Produkt der Abſtraktion, für ſich gar nicht exiſtierend, ſondern nur »als« (ᾗ) für ſich ſeiend betrachtet. Entſprechend iſt für Plato Mathematik die erhabene Lehre, die zur Schau der Idee führt und die zugleich die Kraft hat, das Gewühl der Sinnlichkeit zu binden. Für Ariſtoteles iſt ſie eine Hilfswiſſenſchaft der Phyſik und auch der Metaphyſik[2].

Damit ſind aber zwei Grundanſätze der Deutung des Mathematiſchen herausgeſtellt, die heute noch unverändert ihre Geltung bewahren:

1. Das Mathematiſche iſt das über die Welt der Lebenserfahrung Erhabene, aus einer urſprünglicheren Sphäre ſtammend als das in der Erfahrung begegnende Sein; von dieſem letztlich hiſtoriſchen Phänomen abgehoben durch ſeinen grundſätzlich anderen Zeitcharakter.

2. Das Mathematiſche iſt das Abſtrakte, zugleich das »Idealiſierte«, wodurch ſeine Seinsbedeutung in zweierlei Hinſicht eingeſchränkt iſt. Einmal inſofern es nichts Selbſtändiges iſt, ſondern das Ergebnis einer einſeitigen Betrachtung eines Teilmomentes am

1) Vgl. Staat 530 C–351 C, dazu Frank, l. c. S. 151–153.

2) Bezüglich der Himmelsbewegungen: Met. Λ, 8, beſ. 1073a 1ff.

konkreten Sein. Zweitens, weil es auch dieſes Teilmoment nicht, ſo wie es iſt, wiedergibt, ſondern zurechtgerückt, aus methodiſchen Gründen vereinfacht und ſyſtematiſch geſchloſſener gemacht. Beides ſollte Anlaß geben, ſich davor zu hüten, dem mathematiſchen Sein einen entſcheidenden Anteil an dem Verſtändnis der konkreten Welt der Lebenserfahrung, d. h. des hiſtoriſchen Daſeins, zuzuſchreiben. »Die Mathematik iſt nicht ſtrenger, ſondern weniger ſtreng als die Hiſtorie« (Heidegger). –

Dieſe beiden Grundanſätze ſind in vielem entgegengeſetzt gerichtet, aber trotzdem, recht verſtanden, nicht unvereinbar. Denn man muß bedenken, daß ſie beide den Seinsſinn des Mathematiſchen abheben gegen den Seinsſinn des hiſtoriſchen Lebens. Die »Erhabenheit« des Mathematiſchen iſt Erhabenheit über das hiſtoriſche Daſein. Seine Unzulänglichkeit iſt Unzulänglichkeit zur Auslegung eben dieſes hiſtoriſchen Daſeins. Beides entſpringt derſelben Wurzel – der Verſchiedenheit ſeines Seinsſinns vom hiſtoriſchen Seinsſinn. Wir werden alſo auf dieſe Verſchiedenheit hingewieſen, als auf das entſcheidende Mittel zu einem ontologiſchen Verſtändnis des mathematiſchen Phänomenkreiſes.

F. Die Anfänge des Mathematiſch-Formalen.

Ehe wir nun aber dieſe Deutung verſuchen, iſt noch ein dritter Anſatz zum Verſtändnis des Mathematiſchen zu erörtern, der anſcheinend erſt aus neuerer Zeit ſtammt, tatſächlich aber keimhaft ſchon in der Antike vorhanden iſt. Das iſt der Anſatz der Mathematik als des Gebiets der formalen Allgemeinheit in einem beſonders zugeſpitzten Sinne, nämlich in dem einer alle gehaltlichen und auch die konkret ſeinsmäßigen Unterſchiede überſpringenden, die ſo unterſchiedenen Gegenſtände vermöge des Denkmittels der Analogie beherrſchenden Formalität. Die ſo verſtandene formale Allgemeinheit iſt ſtreng zu ſcheiden von der gattungsmäßigen Allgemeinheit, möge es ſich auch um höchſte Gattungen handeln[1].

Mit dieſer eigentümlichen, die gattungsmäßigen Differenzen überſteigenden (obſchon nicht in derſelben »generaliſierenden« Richtung fortſetzenden) Allgemeinheit tritt das Mathematiſche in engen Zuſammenhang mit dem Begriff des Seins ſelbſt und als ſolchen, des ὂν ᾗ ὄν des Ariſtoteles. Das Sein iſt zwar der allgemeinſte Begriff (καθόλου μάλιστα πάντων, Met. B 4 1001 a 21), aber es iſt keine oberſte Geltung (οὐχ οἷόν τε τῶν ὄντων οὔτε τὸ ἓν

1) Vgl. Huſſerl, »Ideen« § 13.

οὔτε τὸ ὂν εἶναι γένος Met. B 3. 998 b 22). Nach der Ausdrucksweise des Mittelalters ist das ens ein transcendens[1].

Es ist hier nun die Aufgabe, den Berührungspunkt der Transzendentienlehre mit der Entwicklung der Idee des Mathematisch-Formalen aufzuzeigen.

In dieser Beziehung ist eine, wie uns scheint, zu wenig beachtete Stelle in der aristotelischen Metaphysik von Wichtigkeit:

Met. K 3 (1061 a 28 – b 6). καθάπερ δ' ὁ μαθηματικὸς περὶ τὰ ἐξ ἀφαιρέσεως τὴν θεωρίαν ποῖεται (περιελὼν γὰρ πάντα τὰ αἰσθητὰ θεωρεῖ, ... μόνον δὲ καταλείπει τὸ ποσὸν καὶ τὸ συνεχές, ... καὶ τὰ πάθη τὰ τούτων ᾗ ποσά ἐστι καὶ συνεχῆ, καὶ οὐ καθ' ἕτερόν τι θεωρεῖ, καὶ τῶν μὲν τὰς πρὸς ἄλληλα θέσεις σκοπεῖ καὶ τὰ ταύταις ὑπάρχοντα, τῶν δὲ τὰς συμμετρίας καὶ ἀσυμμετρίας, τῶν δὲ τοὺς λόγους, ἀλλ' ὅμως μίαν πάντων καὶ τὴν αὐτὴν τίθεμεν ἐπιστήμην τὴν γεωμετρικήν·) τὸν αὐτὸν δὴ τρόπον ἔχει καὶ περὶ τὸ ὄν. τὰ γὰρ τούτῳ συμβεβηκότα καθ' ὅσον ἐστὶν ὄν, καὶ τὰς ἐναντιώσεις αὐτοῦ ᾗ ὄν, οὐκ ἄλλης ἐπιστήμης ἢ φιλοσοφίας θεωρῆσαι.

An dieser Stelle sind zwei Punkte bedeutsam. Erstens: Obwohl der Mathematiker ganz verschiedenartige Gegenstände betrachtet (Punkte, Linien, Flächen, Körper – dann »Größen« und auch wieder Zahlen) und an ihnen auch wieder Verschiedenes (die Lage, die Kommensurabilität und ihr Gegenteil usw.), so haben wir doch dafür nur eine Wissenschaft, die Geometrie. Zweitens (das wichtigere): Der Mathematiker betrachtet allerlei verschieden qualifizierte Sinnendinge (und auch andere) in der Abstraktion, d. h. nur auf das »wie mannigfach« (ποσόν)[2] und die Kontinuität hin. Es spielt also das sinnliche Aussehen (εἶδος), etwa Farbe oder Schwere,

1) Über die Geschichte des Terminus »transcendens« bzw. »transcendentalis« vgl. Heinrich Knittermeyer, »Der Terminus transcendental in seiner historischen Entwicklung bis auf Kant«. Marburger philos. Dissert. 1920. Das Wort geht ursprünglich, was Knittermeyer nicht sagt, auf Platos Wendung ἐπέκεινα τῆς οὐσίας (Staat VI, 509 B) zurück, welches Wort dann bei Plotin und Proklos (in Euclidem p. 137, 18 Friedlein) als Terminus vorkommt. Die Bezeichnung »transcendentia« findet sich in der hier relevanten Bedeutung zuerst bei Albertus Magnus, ausführlich erörtert wurden die transcendentia bei Thomas v. Aquin, u. a. in den »quaestiones disputatae de veritate«. Wichtig ist ferner, was Duns Scotus darüber geschrieben hat. Man findet dies dargestellt bei M. Heidegger, die Kategorien- und Bedeutungslehre des Duns Scotus (Tübingen 1916) I. Teil, Kap. 1 u. 2.

2) Ich erlaube mir (nach Heideggers Vorgang) τὸ ποσόν in dieser Allgemeinheit wiederzugeben, denn es bezieht sich doch hier offenbar sowohl auf die μεγέθη als auch auf die ἀριθμοί.

Härte, Kälte uſw. keine Rolle. (Bezüglich des »Ausſehens« der Raumgeſtalt kann man zweifeln!) Es werden alſo Gegenſtände ganz verſchiedenen Ausſehens, ganz verſchiedener anſchaulicher Artung (species) zum Gegenſtand einer Wiſſenſchaft gemacht. Dies iſt möglich durch die eigenartige mathematiſche Abſtraktion (ἀφαίρεσις), vermöge der der Mathematiker die Zuſtändlichkeiten ſeiner Objekte nur ſofern ſie mannigfaltig und ſtetig zuſammenhängend ſind und nach keiner anderen Hinſicht betrachtet (τὰ πάθη ... ᾗ ποσά ἐστι καὶ συνεχῆ καὶ οὗ καθ' ἕτερόν τι θεωρεῖ.) Ebenſo, fährt nun Ariſtoteles fort, verhält es ſich auch mit dem Seienden als ſolches (ᾗ ὄν), ſofern es Sein iſt (καθ' ὅσον ἐστὶν ὄν). Unter dieſem beſonderen, in ſeiner Weiſe auch abſtrahierenden Aſpekt ſieht die erſte Philoſophie das Seiende. Man kann alſo kurz ſagen: der mathematiſchen Abſtraktion tritt die ontologiſche (metaphyſiſche) zur Seite. (Bemerkenswert iſt, daß ſich in den Parallelſtellen in Γ 2 dieſe Analogiſierung der metaphyſiſchen Betrachtungsweiſe mit der mathematiſchen ἀφαίρεσις nicht findet[1]). Genauer geſagt: dieſelbe Betrachtungsweiſe im Modus des »als« oder »inſofern« (ᾗ, καθ' ὅσον: lateiniſch: qua, prout, inquantum, secundum quid u. dgl.) iſt kennzeichnend für die Mathematik und die erſte Philoſophie. Sie geht über die εἴδη und γένη hinaus, genauer: ſie braucht ſie nicht zu beachten, ſie entzieht ſich ihnen eben durch ihre eigentümliche abſtrahierende Haltung. Keineswegs iſt das formale Etwas (das ὄν

1) Man hat das Buch K dem Ariſtoteles abgeſprochen. Neuerdings hat aber Jäger für die erſte Hälfte K, 1–8 wieder überzeugend (vor allem gegenüber Natorp) die Echtheit nachgewieſen. Vgl. W. W. Jäger, »Studien zur Entſtehungsgeſchichte der Metaphyſik des Ariſtoteles« (Berlin 1912) I. Teil, 3. Kap. (S. 63ff.) und »Ariſtoteles, Grundlegung einer Geſchichte ſeiner Entwicklung« (Berlin 1923), S. 216ff.

Die im Text angeführte Stelle hat keine genaue Parallele in ihrer »Dublette« in Γ 2. Zwar wird dort auch der Mathematiker mit dem Philoſophen verglichen (1004a 6ff.) und es wird auch geſagt (1004b 10–16: ἐπεὶ ὥσπερ ἐστὶ καὶ ἀριθμοῦ ᾗ ἀριθμὸς ἴδια πάθη ... ὁμοίως δὲ καὶ στερεῷ ... ἔστιν ἕτερα ἴδια· οὕτω καὶ τῷ ὄντι ᾗ ὂν ἔστι τινὰ ἴδια, καὶ ταῦτ' ἐστὶ περὶ ὧν τοῦ φιλοσόφου ἐπισκέψασθαι τἀληθές. Aber es fehlt der Gedanke, die mathematiſche ἀφαίρεσις mit der Eigenart der ontologiſchen Betrachtung in Parallele zu ſetzen. Vielleicht ſcheint ſich Ariſtoteles in der (nach Jägers Meinung ſpäteren) Faſſung in Γ 2 der Gedanke einer metaphyſiſchen Abſtraktion, die der mathematiſchen analog wäre, nahezulegen, wie dies in K 3 offenbar der Fall iſt. Dies würde mit der Auffaſſung Natorps (die jetzt auch Jäger zugibt, vgl. »Ariſtoteles«, S. 217, Anm. 2) übereinſtimmen, daß in K 1–8 platoniſierende Spuren zu bemerken ſind. Denn die Herabdrückung der ontologiſchen Bedeutung des Mathematiſchen, die man in Γ 2 gegenüber K 3 bemerken kann, iſt eine Abwendung vom Platonismus.

oder ens), wie die Stoiker ſpäter meinten, eine höchſte Geltung (*γενικώτατον*)[1].

In dieſer Gemeinſamkeit von Mathematik und Ontologie, die auf dem formalen Charakter beider beruht, liegt der Keim der Idee einer matheſis universalis verborgen, der ſich allerdings in der Antike nicht entwickelt hat, wenngleich es gewiſſe Tendenzen in dieſer Richtung gibt.

Dies lag wohl hauptſächlich an dem geometriſchen Charakter der griechiſchen Mathematik und dieſer wieder, wie früher gezeigt, an dem konſtruktiven Begriff der mathematiſchen Exiſtenz, der ſeinerſeits von dem im vorigen gekennzeichneten grundlegenden methodiſchen Gedanken der *στοιχείωσις* (Plato) abhängt[2].

Die klaſſiſche griechiſche Mathematik kam nie von der ſinnlich-anſchaulichen (wenn auch idealiſierten) Grundlage der geometriſchen Figur los. Wohl gibt es gerade bei Ariſtoteles ſchon die Ausdehnung der Bedeutung von *σχῆμα* auf die Zuſammenſtellung der Termini zu einer Schlußfigur, und zwar nicht nur in dem Fall, wo ein Syllogismos wirklich möglich iſt, ſondern auch, wenn er unmöglich iſt[3]. Ebenſo wendet er in den Analytiken Buchſtaben zur Bezeichnung ganz allgemeiner logiſcher Termini an, ohne aber über dieſe äußerſt formale Bezeichnungsweiſe irgend eine Bemerkung zu machen[4]. Endlich findet ſich bei ihm (Analyt. poster. I, 5; p. 74

1) Es iſt bezeichnend, daß dieſe Beſtimmung des *ὄν* oder *τί* in den einleitenden Betrachtungen der ſtoiſchen Logik oder Phyſik ſteht. (Eine Ontologie als ſelbſtändige philoſophiſche Diſziplin kennt die Stoa bekanntlich nicht, auf die Logik [Dialektik] folgt ſofort die Phyſik.) Vgl. Stoicorum veterum fragmenta (coll. J. ab Arnim), Vol. III, p. 214, 31 (Diogenes Babylonius fr. 25) *γενικώτατον δέ ἐστιν ὃ γένος ὂν γένος οὐκ ἔχει, οἷον τὸ ὄν* u. ferner. Vol. II p. 217. (Chryſippus fr. 329, 332, 333, 334, 371.)

2) Es verdient bemerkt zu werden, daß ſchon früh die Arithmetik grundſätzlich der Geometrie vorgezogen wird:

Archytas fr. 4 (Diels, Vorsokr. 35 B 4), aus den Diatriben: »*καὶ δοκεῖ ἃ λογιστικὰ ποτὶ τὰν σοφίαν τῶν μὲν ἀλλᾶν τεχνῶν καὶ πολὺ διαφέρειν, ἀτὰρ καὶ τᾶς γεωμετρικᾶς ἐναργεστέρω πραγματεύεσθαι ἃ θέλει . . .*«

Ariſtoteles, Met. A, 2 (982a 26f.) *αἱ γὰρ* [sc. *ἐπιστημαὶ*] *ἐξ ἐλαττόνων ἀκριβέστεραι τῶν ἐκ προσθέσεως λαμβανομένων, οἷον ἀριθμητικὴ γεωμετρίας.*

Dieſe Rangordnung der mathematiſchen Diſziplinen gewinnt dann im Neuplatonismus grundſätzliche Bedeutung. (Proclus, in Euclidem: p. 59, 16—61, 17; p. 95, 23—96, 15 [Friedl.] S. u. im Text S. 261 ff.

3) Vgl. Analyt. priora I, 4 (26a 13f.): »*ἐν τούτῳ τῷ σχήματι πότε ἔσται καὶ πότε οὐκ ἔσται συλλογισμός.*«

4) Boëthius, de syllogismo categorico tut dies als erſter. Albertus Magnus nennt dann die durch Buchſtaben bezeichneten leeren Termini

a 17ff.) die für ſeine klare grundſätzliche Erfaſſung mathematiſcher Verhältniſſe wichtige Bemerkung, daß man zuerſt die Vertauſchung der Innenglieder bei einer Proportion (ἐναλλάξ, vgl. Euklid V, Def. 13) einzeln betrachtet habe, nämlich bezüglich (ᾗ) der Linien oder der Körper uſw. Denn, weil alle die verſchiedenen mathematiſchen Gegenſtändlichkeiten keinen gemeinſamen Namen hatten und auch dem »Ausſehen«, ihrer ſichtbaren Artung (εἶδος) nach, ſich voneinander unterſchieden, habe man ſie für ſich genommen. (διὰ τὸ μὴ εἶναι ὠνομασμένον τι πάντα ταῦτα ἕν, ἀριθμοί, μῆκη, χρόνος, στερεά, καὶ εἴδει διαφέρειν ἀλλήλων, χωρὶς ἐλαμβάνετο [21–23].) Jetzt aber würde die Vertauſchbarkeit der Innenglieder »im Ganzen«, d. h. allgemein, bewieſen. Denn ſie beſtände ja nicht in Bezug auf die Linien eben als ſolche (ᾗ γραμμαί) uſw., ſondern bezüglich deſſen, von dem ſie vorausſetzen, daß es »im Ganzen« zugrunde liegt. (ᾗ τοδί, ὃ καθόλου ὑποτίθενται ὑπάρχειν.) καθόλου heißt: »auf das Ganze hin (eigentlich hinunter) geſehen«, modern kann man nicht gut anders ſagen, als »in formaler Allgemeinheit«. Aber dieſer Begriff der »Form« iſt der Antike ganz fremd. Er ſteht in geradem Gegenſatz zur anſchaulichen Geſtalt, worauf die Worte εἶδος und μορφή gehen, wie ſpäter noch klarer hervortreten wird. In der Tat iſt das ἐναλλάττειν und ähnliches Operieren mit Proportionen (vgl. Euklid, V. Buch Def. 13–17 uſw.) im Grunde wirklich »formale«, alſo griechiſch geſehen gerade über das εἶδος hinausgehende Mathematik. Man nannte dies τὰ κοινά oder auch die »ſogenannten mathematiſchen Axiome«. Das Hinausgehen ſolcher Beziehungen (als Beiſpiel dient etwa, daß Gleiches von Gleichem weggenommen, Gleiches ergibt) über das übliche mathematiſche Gebiet, veranlaßt Ariſtoteles jenen κοινά oder ἀξιώματα der (erſten) Philoſophie zuzuweiſen[1]. Unter dieſen

im Syllogismus »termini transcendentes«, »nihil et omnia significantes«. (Knittermeyer, l. c. p. 15.) Es beſteht alſo eine ausdrückliche Beziehung zum ens transcendens.

1) Vgl. Metaph. Γ 3 (1005a 19–b 1); K 4 (1061b 18–33). Der Inhalt der beiden Stellen iſt im weſentlichen identiſch, wie auch die Erläuterungen des Alexander bzw. Ps.-Alex. zu ihnen zeigen. Daß unter der κοινά wirklich die allgemeinſten mathematiſchen Axiome verſtanden ſind, die auch über das übliche mathematiſche Gebiet hinaus auf jedes »Mannigfaltige« (ποσόν) anzuwenden ſind, hat W. Jäger gegen Natorp mit Recht betont. (Entſtehungsgeſchichte d. Met. S. 80–81.) Entſcheidend iſt die auch von Jäger herangezogene logiſche Vergleichsſtelle über die κοινά, Analyt. post. I, 11 (77a 22–32). Es werden nämlich da als Beiſpiele für ein ſolches κοινόν unmittelbar nacheinander der rein logiſche Satz vom ausgeſchloſſenen Dritten und das Größenaxiom »Gleiches von Gleichem gibt Gleiches« angeführt. (77a 30f.: οἷον ὅτι ἅπαν φάναι ἢ ἀποφάναι, ἢ ὅτι ἴσα ἀπὸ ἴσων ἢ τῶν τοιούτων ἄττα).

»allgemeinen« Sätzen ſind auch rein logiſche, wie der Satz von ausgeſchloſſenen Dritten. Es ergibt ſich ſomit ein Gebiet allgemeinſter »formaler« Art, das das Thema der ſpäter (zuerſt bei Descartes) explizit aufgetretenen mathesis universalis iſt. Ariſtoteles ſcheut ſich, daraus ein ſelbſtändiges Gebiet zu machen, da alsdann die Gefahr der Selbſtändigkeit jener »formalen« Entitäten auftaucht, Er ſieht eben in ihnen durchaus *οὐ κεχωρισμένα*, die aber *ᾗ (ὡς) κεχωρισμένα* beobachtet werden können.

Es iſt allerdings nicht zu leugnen, daß ein gewiſſes Schwanken beſteht. So wird Met. *E* 1 ausdrücklich geſagt, die erſte Philoſophie oder »Theologie« (*θεολογική*) beſchäftige ſich, im Gegenſatz zur (gewöhnlichen) Mathematik, mit den *χωριστὰ καὶ ἀκίνητα* (1026 a, 16). Es ergibt ſich hieraus aber ſofort eine gewiſſe Schwierigkeit dadurch, daß die erſte Philoſophie als Wiſſenſchaft vom Seienden als ſolchen (*ὂν ᾗ ὄν*) einerſeits »von formaler Allgemeinheit« (*καθόλου*) iſt, andererſeits aber doch, als *θεολογική* Wiſſenſchaft von der *οὐσία ἀκίνητος* und *χωριστή*, alſo von einer ausgezeichneten, »göttlichen« Seinsweiſe. (E 1, 1026 a, 23–32.)[1] W. Jäger erklärt dieſes Schwanken aus der Entwicklung der ariſtoteliſchen Lehre vom Platonismus weg. Der ſpezifiſch ariſtoteliſche Gedanke, das Sein mit dem Denkmittel der Analogie (*τὸ ὂν λέγεται πολλαχῶς*) philoſophiſch zu erfaſſen, oder anders ausgedrückt, es »formal« (*καθόλου*) zu nehmen, löſt ſich erſt langſam von dem platoniſchen Gedanken los, das »Abgeſonderte und Unbewegte«, d. h. das Göttliche als das *ὄντως ὄν*, das eigentlich Seiende allein anzuſehen.

Auf das uns hier allein intereſſierende »Formal-Mathematiſche« (*τὰ κοινά*) bezogen, heißt das: Ariſtoteles faßt dieſes *κοινόν* in ſeiner reifen Philoſophie als ein Moment am *ὂν ᾗ ὄν* ſelbſt und damit als unſelbſtändig im Sinne alles deſſen, was wir, nach heutigem Sprachgebrauch (!), »formal« nennen. Gerade wegen dieſer Unſelbſtändigkeit, deshalb, weil es nicht abgeſondert (*χωριστόν*) iſt, kann es verſchiedenen materialen Gebieten gemeinſam (*κοινόν*) ſein. Es iſt alſo kein *γένος*, das anderen *γένη* vergleichbar, wenn auch ihnen in der großen Reihenfolge der *γένη τοῦ ὄντος* übergeordnet iſt.

---

1) Dazu W. Jäger, Ariſtoteles, S. 226 f. (das ganze 4. Kap. d. II. Teils iſt im Zuſammenhang zu leſen) und auch ſchon Boniz. – Bemerkenswert iſt auch die Ratloſigkeit Alexanders, der ſchließlich *καθόλου* in dem ihm unverſtändlichen ariſtoteliſchen Satz »*καὶ καθόλου* [sc. *ἡ πρώτη φιλοσοφία*] *οὕτως ὅτι πρώτη*« (1026 a, 30 f.) folgendermaßen umdeutet: »*τὸ καθόλου οὐ τοιοῦτον ἠρώτα οἷον ἡμεῖς ἐξεδεξάμεθα ἀντὶ τοῦ περιέχον τὰς ἄλλας* (was es doch offenbar bedeutet!), *ἀλλὰ τοῦ καθόλου ἀντὶ τοῦ βελτίων καὶ τιμιωτέρα*« (p. 413, 4–5 Boniz).

Die Abgrenzung gegen dieſe platoniſche und auch neuplatoniſche Auffaſſung gibt Ariſtoteles deutlich in Met. *M* 2 (1077 a, 9 – 12). Wenn man das Mathematiſche zwiſchen die Ideen und die Sinnendinge ſtellt, ſo wird folgerichtigerweiſe »Einiges«, was von den Mathematikern »allgemein aufgeſtellt wird« (*καθόλου γράφεται*) als eine vierte Stufe noch zwiſchen das gewöhnliche Mathematiſche und die Ideen eingeſchoben werden müſſen. (*ἔσται οὖν καὶ αὕτη τις ἄλλη οὐσία μεταξὺ κεχωρισμένη τῶν τ' ἰδεῶν καὶ τῶν μεταξύ, ἣ οὔτε ἀριθμός ἐστιν οὔτε στιγμὴ οὔτε μέγεθος οὔτε χρόνος*[1].)

Im Neuplatonismus findet ſich der Gedanke dann wirklich poſitiv vertreten. So ſehr klar und ausführlich bei Proclus (in Euclidem p. 7, 13 ff. Friedlein): » . . . *καθόλου θεωρούμενα καὶ κοινῶς, οὐ καθόσον ἐστὶν ἐν σχήμασιν ἢ ἀριθμοῖς ἢ κινήσεσιν, ἀλλ' αὐτὸ καθ' αὑτὸ τούτων ἑκάτερον φύσιν τινὰ ἔχον κοινὴν καὶ γνῶσιν ἑαυτοῦ παρεχόμενον ἁπλουστέραν.* (7, 27 — 8, 4.) (Ein Theorem iſt »allgemein« und »gemeinſam«, nicht ſofern es von Figuren oder Zahlen oder Bewegungen handelt, ſondern indem es ſelbſt an ſich ſelbſt eine jedem von dieſen gemeinſame Natur hat und eine einfachere Erkenntnis ſeiner ſelbſt gewährt.)

Zugleich damit wendet ſich der Charakter der mathematiſchen Erkenntnis von der anſchaulichen Geſtalt (*εἶδος, σχῆμα* oder *μορφή*: »Form« im klaſſiſchen Sinn) weg und wird zur *γνῶσις ἀσχημάτιστος καὶ ἀμόρφωτος*. Die wahre Mathematik ſoll *τὰ διαστατὰ ἀδιαστάτως, τὰ μεριστὰ ἀμερίστως, τὸ σχῆμα ἀσχηματίστως* uſw. betrachten, alſo das anſchauliche Außereinander (den »Abſtand«), das Geteilte und die Figur in der Weiſe eines Ineinander (*ἀδιαστάτως*), eines Ungeteilten, eines Nichtfigürlichen anſehen[2]. Die Geſamtanſchauung des Proklos kommt etwa in folgender ſchwungvollen Stelle zum klaren Ausdruck:

Die geometriſche *νόησις μετὰ φαντασίας* bahnt zwar den Weg zur *διανοητικὴ οὐσία*, aber: »ſie iſt noch nicht zu jener hinaufgeſtiegen, weil die *διάνοια* auf das außerhalb Befindliche hinſieht . . . Wenn ſie aber einmal die Abſtände zuſammenfalten und die geprägten Formen und die Mannigfaltigkeit unbildlich und einsgeſtaltig anſchauen und ſich auf ſich ſelbſt zurückwenden könnte, dann würde ſie (obſchon

1) Dazu vgl. Pſeudo-Alexander, der jene vier Stufen ausführlich auseinanderlegt, ohne jedoch die neu eingeführte zweithöchſte anders als durch Umſchreibung kennzeichnen zu können. (*ἕτερον τούτων ἁπάντων* [sc. *τῶν μαθηματικῶν*] *ἔσται καθολικώτερον ὄν*, p. 706, 6 Boniß).

2) Vgl. die entſprechende Bemerkung über die (zu verwerfende) Anſchauung (Proclus, p. 52, 23 ff.): [*ἡ φαντασία τὸ γνωστὸν*] *ἐκ τοῦ ἀμεροῦς τῆς ζωῆς εἰς μερισμὸν καὶ διάστασιν καὶ σχῆμα προάγει . . . καὶ διὰ τοῦτο πᾶν, ὅπερ ἂν νοῇ, τύπος ἐστὶ καὶ μορφὴ νοήματος . . .*

ſie unterſcheidend) die geometriſchen Sachverhalte ungeteilt (d. h. ohne extenſives Außereinander und ohne Vielfachheit) ſehen, die unabſtändigen, feinsgeſtaltigen, deren es eine Fülle gibt. Und dieſes wirkende Sein (*ἐνέργεια*) wäre wohl das ſchönſte Ziel der Bekümmerung um die Geometrie und in Wahrheit das Werk einer hermetiſchen Gabe, die ſie von irgendeiner Kalypſo hinaufführt zur vollendeten und einſichtigen Erkenntnis und ſie ablöſt von den geſtalthaften Verfahrungsweiſen der Phantaſie«[1].

Dieſen von der etwas dunklen Glut jener ſpätantiken Zeit erfüllten Spekulationen entſpricht freilich bei Proklos keine poſitive mathematiſche Leiſtung. Die im Grunde ſchon ſehr alte (von Eudoxos ſtammende!) und wenig ausgedehnte »formale« Theorie der Proportionen iſt das einzige Stück »formaler«, d. h. in Proklos' Sinn über das *εἶδος*, die *μορφή*, das *σχῆμα*, den *τύπος* hinausgehender Mathematik, das die Antike kannte. Höchſtens die Arithmetik des Diophant, die ſogar *ἀριθμοί* und *μεγέθη* nicht mehr ſcheidet, wäre anzuführen, wenn ſie jemals zu einem ſtrengen Syſtem erwachſen und der griechiſchen Mathematik eingegliedert worden wäre. Aber Proklos iſt doch ſcharfſinnig genug, um die Kritik, die Geminus einige Jahrhunderte früher gelegentlich der Erörterung des 5. euklidiſchen Poſtulats an dem blinden Vertrauen in die Evidenz der Anſchauung geübt hatte, in ſeinem Sinn auszunutzen. Gegen diejenigen, die ſich betrügen ließen (*ἀπατώμενοι*) und das 5. Poſtulat anerkannten, weil es »von ſich aus Überzeugung gewähre« (*αὐτόθεν τὴν πίστιν παρεχόμενον*), habe Geminus mit Recht geſagt, »daß wir von den Führern dieſer unſerer Wiſſenſchaft ſelbſt gelernt haben, daß man durchaus nicht den vertrauenerweckenden anſchaulichen Vorſtellungen der Phantaſie Beachtung ſchenken dürfe bei der Übernahme von Sätzen in der Geometrie«[2]. Das Zuſammenfallen der Geraden gemäß

1) Vgl. den Urtext: Proclus, in Euclidem p. 55, 13–27 (Friedlein): *εἰ δέ ποτε συμπτύξασα τὰς διαστάσεις καὶ τοὺς τύπους καὶ τὸ πλῆθος ἀτυπώτως καὶ ἐνοειδῶς θεασαμένη πρὸς ἑαυτὴν ἐπιστρέψαι δυνηθείη, τότ' ἂν διαφερόντως τοὺς λόγους τοὺς γεωμετρικοὺς ἴδοι τοὺς ἀμερίστους, τοὺς ἀδιαστάτους, τοὺς οὐσιώδεις, ὧν ἐστι πλήρωμα. καὶ ἡ ἐνέργεια αὐτῆς αὕτη τέλος ἂν εἴη τὸ ἄριστον τῆς περὶ γεωμετρίαν σπουδῆς καὶ ὄντως τῆς Ἑρμαϊκῆς δόσεως ἔργον, ἀπό τινος Καλυψοῦς ἀναγούσης αὐτὴν εἰς τελειοτέραν καὶ νοερωτέραν γνῶσιν καὶ ἀπολυούσης τῶν ἐν φαντασίᾳ μορφωτικῶν ἐπιβολῶν. καὶ ταύτην δεῖ τὴν μελέτην μελετᾶν τὸν ὡς ἀληθῶς γεωμετρικόν, καὶ πρὸς τὴν ἔγερσιν καὶ τὴν ἀπὸ τῆς φαντασίας μετάστασιν εἰς μόνην τὴν διάνοιαν αὐτὴν καθ' αὑτὴν ποιεῖσθαι τέλος* .....

2) *πρὸς οὕς ὁ Γεμῖνος ὀρθῶς ἀπήντησε λέγων, ὅτι παρ' αὐτῶν ἐμάθομεν τῶν τῆς ἐπιστήμης ταύτης ἡγεμόνων, μὴ πάνυ προσέχειν τὸν νοῦν ταῖς πιθαναῖς φαντασίαις εἰς τὴν τῶν λόγων τῶν ἐν γεωμετρίᾳ παραδοχήν.* (192, 5–9.) Die im Text benutzten Stellen ſind: 192, 1–4; 13–29; zu vergleichen iſt noch 177, 13–21.

dem 5. Poſtulat ſei »zwar glaubhaft, aber nicht notwendig, wenn nicht jemand einen Beweis führt« (. . . *συμπεσεῖσθαί ποτε πιθανόν, ἀλλ' οὐκ ἀναγκαῖον, εἰ μή τις ἀποδείξειεν λόγος*), daß gewiſſe Linien (wie die Hyperbel) aſymptotiſch verliefen, ſei »obwohl unglaubhaft und paradox, dennoch wahr« (*καίτοι δοκοῦν ἀπίθανον εἶναι καὶ παράδοξον, ὅμως ἀληθές ἐστι*) und auch im Falle der Geraden »verführt das für andere Linien Gezeigte die Phantaſie, bis wir den Sachverhalt durch Beweis niedergebunden haben« (*ἕως γὰρ ἂν δι' ἀποδείξεως αὐτὸ καταδησώμεθα, περισπᾷ τὴν φαντασίαν τὰ ἐπ' ἄλλων δεικνύμενα γραμμῶν.*)

Dieſe Skepſis gegen die Anſchauung führt aber dann nicht etwa zu einer nicht-euklidiſchen Geometrie, ſondern zu Scheinbeweiſen des 5. Poſtulats. Ebenſowenig kommt es zu einem poſitiven Anſatz für eine von der *φανταστὴ ὕλη* freien Geometrie[1]; es bleibt beim Poſtulat einer ſolchen die Anſchauung hinter ſich laſſenden Mathematik.

Aber man kann ſagen, daß in gewiſſem Sinn jener ſpätantike Traum des Proklos in der abendländiſchen Mathematik in Erfüllung ging, die klaſſiſche antike und orientaliſche (indiſch-arabiſche) Motive mit autochthonen, nordiſch-germaniſchen (die man nicht unterſchätzen darf!) vereinigte und damit eine weit über alles Frühere hinausreichende Stoßkraft gewann. Denn die »abendländiſche«, unausgebreitete, abſtrakt analytiſche »Formel«, durch die recht eigentlich das ganz »Uneidetiſche« (*ἀνείδεστον*) und »Amorphotiſche« (*ἀμόρφωτον*) des neuen Mathematiſch-Formalen ausgedrückt iſt, umfaßt oft eine Fülle von geſtaltlich ganz verſchiedenen Dingen durch die Analogie ihres inneren Geſetzes. (*λόγος.*) Damit iſt die Mathematik vor eine grundſätzlich neue Aufgabe geſtellt, dieſe nicht mehr anſchauliche »Form« zu differenzieren und in begrifflicher Weiſe zu explizieren, ohne ſie in einem raumhaften und überhaupt quantitativen Medium auszubreiten. Es wird damit zugleich etwas höchſt Allgemeines und Beherrſchendes erreicht, indem gewiſſermaßen die formalen Charaktere alles Seins (des *ὂν ᾗ ὄν*) feſtgeſtellt werden. Jetzt iſt das Formale nicht mehr durch »Generaliſierung« ſchrittweiſe vom anſchaulichen Sonderfall aus zu erreichen – wie etwa bei Plato im Sympoſion die Idee des Schönen von den ſchönen Leibern und Seelen aus –, ſondern man gelangt zu ihm durch eine radikale Umbiegung des Aufwärtsſteigens in eine ganz andere Richtung. (»Formaliſierung.«) Auch zwiſchen dem allgemeinſten Anſchaulichen (*φανταστόν*), der höchſten anſchaulichen Gattung (*εἶδος, γένος*) und dem »Formalen« klafft noch

1) Der Gedanke einer *ὕλη νοητή* bzw. *ὕλη τῶν μαθηματικῶν* iſt ſchon akademiſch, vgl. Ariſtoteles, Met. Z 10 (1036 a 8–12), K 1 (1059 b 16).

dieſelbe prinzipielle Kluft, wie zwiſchen konkretem Einzelding und »Form«.

Dieſes abendländiſche »Mathematiſche Formale« hat alſo einerſeits enge Beziehung zu dem durch die ariſtoteliſche ἀφαίρεσις gewonnenen ὂν ᾗ ὄν, das ſein ἴδιον hat. Andererſeits iſt es doch durchaus nicht »abſtrakt« im Sinne der Unſelbſtändigkeit, ſondern eine ſelbſtändige Seinsſphäre von überragender Bedeutung im abendländiſchen Rationalismus, deſſen Gedankengänge wir nun ein Stück weit verfolgen müſſen.

III. Die Weiterentwicklung des Mathematiſch-Formalen im Abendland.

A. Begrenzung dieſer Darſtellung.

Die weitere Geſchichte der Idee der Mathematik kann aus verſchiedenen Gründen nicht mit der bisherigen relativen Ausführlichkeit weiter verfolgt werden. Einmal nimmt der Stoff ſofort einen gewaltigen Umfang an, der zur äußerſten Beſchränkung zwingt, und dann verflicht ſich in der neueren Zeit die Geſchichte der reinen Mathematik in unauflöslicher Weiſe mit der der mathematiſchen Naturwiſſenſchaft. Die Antike hat nur vereinzelt mathematiſch-naturwiſſenſchaftliche Theorieen von größerem Umfang entwickelt: die Aſtronomie, die Statik und Hydroſtatik und (teilweiſe) die geometriſche Optik. Stets hat ſie an unmittelbar Beobachtbares angeknüpft oder hat ſich mit ſehr einfachen Inſtrumenten und Vorkehrungen, die auch ſonſt aus der täglichen Praxis bekannt waren, begnügt, niemals hat ſie die im täglichen Leben auftretenden Naturerſcheinungen in ihrer natürlichen Geſtaltung von Grund auf »aufgelöſt« (in Komponenten) wie die moderne Wiſſenſchaft, ſondern ſie höchſtens in ihre ſchon anſchaulich ſichtbaren Geſtaltmomente »zerlegt«[1]. Die Antike kennt nicht das ſyſtematiſche Experiment, ſie zwingt die Natur nicht auf der Folter zur Antwort. So läßt die antike Wiſſenſchaft auch nicht hinter der ſichtbaren, »phänomenalen« Oberfläche der Natur eine der Anſchauung im Laufe der Entwicklung immer fremder werdende »wahre Welt« zum Vorſchein kommen, die nun zufolge ihrer Fremdartigkeit auch wieder neue begriffliche Beherrſchungsmittel von der reinen Mathematik fordert. Dagegen beſteht, von einem umfaſſenden Geſichtspunkt aus geſehen, eine ſtändige Wechſelbeziehung zwiſchen Mathematik und Phyſik in der neueren Zeit. Die abendländiſche (ſo ſtark nordiſch beſtimmte) For-

1) Vgl. meine Rezenſion des Buches von E. Frank »Plato und die ſog. Pythagoreer« im »Logos«, Bd. XIII, S. 133ff., beſ. S. 137, u. o. S. 252, Anm. 1.

ſchung dringt in die »Tiefe« der Natur in einem der geſtalthaft denkenden Antike ganz fremden Maße ein und gelangt ſchrittweiſe zu immer weniger anſchaulichen Sachverhalten. Heute, am Ende einer langen Entwicklung, haben wir die allgemeine Relativitätstheorie mit ihrer im großen unvorſtellbaren nichteuklidiſchen Räumlichkeit und ihrer Aufhebung der Gleichzeitigkeit entfernter Ereigniſſe erlebt und ſind ſchließlich bis zu den vieldimenſionalen Räumen der Quantentheorie (Schrödinger)[1] und zu Hilberts bloß »idealen« transfiniten Ausſagen gelangt, die trotz ihrer ſogar formal-ontologiſchen Unbegreiflichkeit dennoch ſich auf »Wirkliches« beziehen, allerdings nur als Beſtandteile eines auch »eigentliche« Ausſagen enthaltenden Syſtems.

Die abendländiſche Forſchung iſt einem Zauberlehrling zu vergleichen, der ſich in die magiſchen Zuſammenhänge der Natur zuweit hineinwagte und der darüber ſeinen der natürlichen Geſtalthaftigkeit des alltäglichen Lebens angepaßten »Verſtand« verlor. Das iſt vielleicht mehr als eine Fabel, wenn man Verſtand ſtreng im Kantiſchen Sinn auffaßt, in dem er lediglich die »klaſſiſche« Galilei-Huyghens-Newtonſche Phyſik zu »verſtehen« imſtande iſt.

Eine tiefgehende Erörterung der neueren Mathematik iſt alſo nur in Verbindung mit der neueren Phyſik möglich, und damit wäre der Rahmen dieſer Unterſuchung überſchritten. Es ſoll daher im folgenden nur eine kurze Darſtellung der drei Hauptſtadien des Begriffs des Mathematiſch-Formalen, die durch die Namen Descartes, Leibniz und Kant repräſentiert werden, nebſt einigen ergänzenden Bemerkungen gegeben werden.

B. Descartes und ſeine Zeit.

Die ſogenannte »moderne« Mathematik nimmt ihren Anfang mit der Entſtehung dreier neuen Diſziplinen, denen bald darauf noch eine vierte, wichtigſte folgte. Es ſind das die Algebra (Buchſtabenrechnung, Löſung algebraiſcher Gleichungen), die projektive

1) Vgl. darüber H. Weyl, im »Handbuch der Philoſophie« (München 1926, Oldenbourg), Abt. II, A, Seite 142, 20ff., beſ. Zeile 48ff.: Ein »materieller Vorgang«, den man als rein virtuell betrachten mag, iſt zu ſupponieren, der ſich in einem vieldimenſionalen Medium abſpielt und ſtrengen Geſetzen, nämlich partiellen Differentialgleichungen vom Typus der Schwingungsgleichung genügt. Die wirkliche vierdimenſionale Welt iſt in jenes Medium eingebettet. Durch eine auf ſtatiſtiſchen Prinzipien beruhende »Projektion« des ſupponierten materiellen Vorgangs auf dieſe wirkliche Welt ergeben ſich die beobachtbaren »Felderſcheinungen«.

und die analytiſche Geometrie, denen allmählich die Infinitesimalanalyſe, die im Grunde eine Theorie der Funktionen iſt, folgt. Die Buchſtabenrechnung entſteht allmählich während des Mittelalters (Jordanus Nemorarius um 1200) und erreicht im weſentlichen mit Viète (1540–1603) ihren Abſchluß[1]. Vorher noch erfolgt die allgemeine Auflöſung der Gleichungen dritten und vierten Grades durch die großen italieniſchen Algebraiſten (Tartaglia 1539, Ferrari 1545). Die projektive Geometrie wird von Desargues (1593–1662) begründet, die analytiſche von Fermat (1601–1665) und Descartes ſelbſt (La Géometrie 1657). Fermat und Pascal (1623–1662) legen gleichzeitig den Grund für die infinitesimalen Diſziplinen, deren ſyſtematiſche Ausbildung erſt der nächſten Epoche (Ende des 17. Jahrhunderts) angehört.

Alle dieſe neuen mathematiſchen Diſziplinen haben das Gemeinſame, daß ſie die ſpätantike Sehnſucht nach einer über die anſchauliche Geſtalt hinausführenden Mathematik erfüllen. (Man könnte dies höchſtens für die projektive Geometrie bezweifeln, aber es iſt doch auch ihre ſpezifiſche Eigenart gegenüber der antiken, daß ſie anſchaulich Disparates kontinuierlich ineinander überführt mittels des »idealen« Unendlichfernen, etwa die Ellipſe über die Parabel in die Hyperbel und dgl.).

Zwei methodiſche Mittel (die in ſpäterer Zeit in eine nahe Beziehung treten) ſpielen dabei eine entſcheidende Rolle: die (nicht immer eineindeutige) Abbildung bzw. Zuordnung, die mit dem Begriff der Funktion eng zuſammenhängt und nicht nur zwiſchen Gebilden gleicher Art, ſondern z. B. auch zwiſchen abſtrakten Zuſammenhängen und ihren Symbolen ſtattfinden kann, und das Prinzip der Permanenz der formalen Geſetze. Es wird immer noch zu wenig beachtet, daß dieſe beiden fundamentalen nicht-antiken[2] Begriffe im abendländiſchen ſpäten Mittelalter anſcheinend unbeeinflußt von anderen Kulturkreiſen entſtanden ſind.

1) Grundlegend: Vieta, in artem analyticam isagoge, Tours 1591.

2) Es gibt immerhin auch in der Antike gewiſſe Anwendungen des Begriffs der Abbildung, wie perſpektiviſche und ſtereographiſche Projektion, aber da nur zwiſchen anſchaulichen Gegebenheiten gleicher Art. Außer der formalen Proportionenlehre, die, wie wir ſahen, ja als einziges mathematiſches Beiſpiel eines über die εἴδη hinausführenden κοινόν fortwährend genannt wird, gibt es – nach den Erläuterungen von A. Czwalina, des Überſetzers der archimediſchen Schriften in »Oſtwalds Klaſſikern der exakten Wiſſenſchaften« – bei Archimedes einzelne tiefe, aber in der antiken Darſtellung ganz verdeckte Beiſpiele. (Vgl. darüber den »Anhang« zur Überſetzung der Schrift »Über Spiralen« [Nr. 201], beſonders S. 63–71).

Sie finden ſich ebenſowenig im Orient wie in der Antike und ſie ſind es doch im Grunde, die die freiſchwebende »reelle« Zahl der Orientalen für das Abendland erſt fruchtbar gemacht haben. Nicole Oresme (der um 1360–1370 ſchrieb) begründet zuerſt eine zwar primitive, aber doch genial vorausahnende Theorie der Funktion (ſ. oben S. 149 ff.) und wendet zuerſt das Permanenz-Prinzip an, auf das Rechnen mit Potenzen mit gebrochenen Exponenten. (»Algorismus proportionum«)[1]. Die ſymboliſche Darſtellung abſtrakter Zuſammenhänge entwickelt ſich allmählich, nicht ohne orientaliſchen Einfluß.

Die ungeheure Bedeutung des Abbildungsbegriffes und des Permanenz-Prinzips bis in die heutige Zeit iſt bekannt, aus dem erſten leitet ſich die moderne Koordinatengeometrie, die Funktionen- und vor allem die Gruppen- und Invariantentheorie her, und auch in der Mengenlehre ſpielt er eine entſcheidende Rolle (eineindeutige und »ähnliche« Abbildung und dgl.); aus dem zweiten entſprangen alle jene Erweiterungen des Zahlbegriffs (negative, imaginäre, ideale, z. T. auch transfinite Zahlen) und anderer mathematiſcher Begriffe, die ſchließlich in der Hilbertſchen Mathematik der transfiniten »idealen« Ausſagen gipfeln[2].

Wenn alſo auch die Wurzeln der geſamten modernen Mathematik ſchon vor Descartes liegen und er ſelbſt an ihrer Entſtehung entſcheidenden Anteil hat, ſo iſt doch andererſeits nicht zu verkennen, daß die karteſiſche Epoche die abendländiſche Wiſſenſchaft noch in einem relativ primitiven Stadium zeigt. Die Aſſimilation der antiken und orientaliſchen Mathematik iſt rein inhaltlich vollendet, und viel Neues iſt über das antike und orientaliſche Wiſſen hinaus gefunden, aber in den Methoden iſt die Gebundenheit an antike

Es iſt aber auch hier, wie ſonſt, das Genie des Archimedes über die Schranken des wiſſenſchaftlichen »Stils« ſeiner Zeit und ſeines Kulturkreiſes hinweggeſchritten.

1) Vgl dazu: H. Hankel, Zur Geſchichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter (Leipzig 1874), Seite 350–51. Hankel iſt übrigens derjenige Mathematiker, der das Prinzip der Permanenz der formalen Geſetze zuerſt ſyſtematiſch unter dieſem Namen in die Mathematik eingeführt hat. (»Theorie der komplexen Zahlenſyſteme«. 1867.) – Die nächſte Anwendung des Prinzip nach Oresme erfolgte von Chuquet (um 1500): Potenzen mit negativen Exponenten; die negativen Zahlen ſelbſt führt erſt Stifel (1544) ſyſtematiſch ein; zugleich oder nur wenig ſpäter rechnet man bereits mit imaginären Zahlen: Cardano, »Ars magna« 1545, Bombelli, »l'algebra« 1579 (Löſung des casus irreducibilis der kubiſchen Gleichung).

2) Vgl. beſ. die Darſtellung Hilberts in dem oft erwähnten Aufſatz »Über das Unendliche« (Math. Ann. 95).

Vorſtellungsweiſen noch längſt nicht überwunden. Dies iſt nun von ſchwerwiegendem Einfluß auf die Philoſophie der Mathematik des Descartes und deshalb mußten wir auch die mathematiſche Entwicklung bis zu ihm kurz ſkizzieren.

Die antike Gebundenheit Descartes' äußert ſich einmal in ſeiner an der antiken Form des axiomatiſchen Aufbaus orientierten allgemeinen wiſſenſchaftlich-philoſophiſchen Methode in den »Regulae ad directionem ingenii« und im »Discours sur la méthode«. Sie wurde von Spinoza auf die Spitze getrieben (demonstratio more geometrico), findet ſich aber auch gelegentlich ſchon in rein philoſophiſchen Fragen bei Descartes. (Vgl. die »Einwände und Erwiderungen« zu den Meditationen, Anhang zu den »zweiten Erwiderungen«; p. 217ff. der Original-Ausgabe.)

Sie iſt freilich die allgemeine exakt-wiſſenſchaftliche Darſtellungsform der ganzen Zeit (man denke an die Hauptwerke von Galilei, Kepler, Huyghens). Aber Descartes hat als Philoſoph das Auszeichnende, daß er ſich über das Weſen dieſer Methode klar werden will[1]. Sein grundlegendes Prinzip der Evidenz (der clara et distincta perceptio) rührt daher. Es iſt im Grunde ein geometriſches Prinzip, gegründet auf reine Anſchauung (intuitio, intellectio). Nicht nur wird die Wiſſenſchaft von der materiellen Welt ganz auf die extensio gegründet, ſondern auch die res cogitans hat doch in der klaren Durchſichtigkeit ihrer Struktur etwas »Geometriſches« im übertragenen Sinn. Es iſt bei dieſer allgemeinen Haltung nicht verwunderlich, daß auch die allgemeine Idee der Subſtanz ſich ihrem Seinscharakter nach nicht eigentlich über die dinglich-raumhafte Sphäre erhebt. Sie wird charakteriſiert durch ihre Unbedürftigkeit[2]. (Per substantiam nihil intellegere possumus, quam rem quae ita existit, ut nulla alia re indigeat ad existendum. Princip. philos. I, 51.) Im eigentlichen, radikalen Sinn iſt daher nur Gott als ens perfectissimum Subſtanz (Et quidem substantia, quae nulla plane re indigeat, unica tantum potest intellegi, nempe Deus. ibid.) Die geſchaffenen Subſtanzen, Materie und Geiſt bedürfen wenigſtens nur Gottes Hilfe zum Sein. (solo Dei concursu egent

1) Außer den »regulae« und der Schrift über die Methode iſt der erſte und z. T. der zweite Teil der »principia philosophiae« von Wichtigkeit, wo der ſyſtematiſche Aufbau der karteſiſchen Philoſophie am klarſten hervortritt.

2) Zu den folgenden ontologiſchen Bemerkungen iſt die kurze, aber alles Weſentliche hervorhebende Darſtellung, die Heidegger in »Sein und Zeit« §§ 19–21 (S. 89ff.) von den Grundzügen der karteſiſchen Ontologie gegeben hat, zu vergleichen.

ad existendum. Princ. I, 52.) Die Selbſtändigkeit der Subſtanzen drückt ſich in ihrer Dauer gegenüber dem Wechſel der Modi bzw. Qualitäten aus, ihre ſpezifiſche Eigentümlichkeit zeigt ſich der Erkenntnis als ein »Attribut«[1]. Jede Subſtanz hat eine ausgezeichnete Eigenſchaft, aus der ihr ſpezifiſches Weſen ableitbar iſt. (Et quidem ex quolibet attributo substantia cognoscitur: sed una tamen est cujusque substantiae praecipue proprietas, quae ipsius naturam essentiamque constituit et ad quam aliae omnes referuntur. Princ. I, 53.) Für die Materie iſt das die Ausdehnung (extensio), für den »Geiſt« (mens) das »Denken« (cogitatio).

Unter den »Univerſalien«, die auf jegliches Seiende angewandt werden können, figurieren alſo Dauer, Ordnung, Zahl (duratio, ordo, numerus). Von dieſen wird geſagt, daß ſie, auch ohne daß ihnen der Begriff einer Subſtanz hinzugefügt würde, erkennbar ſeien, denn ſie ſeien nur Modi, unter denen wir die Dinge auffaßten[2]. Es erſcheint alſo hier das Mathematiſche als »formal« im modernen Sinn, oder als »abſtrakt« (δι' ἀφαιρέσεως) in der ariſtoteliſchen Bedeutung, denn die »Modi, gemäß denen wir die Dinge betrachten« entſprechen genau den Hinſichten, nach denen der Mathematiker nach Ariſtoteles (Met. K3, 1061a, 34s.) die Dinge und ihre Zuſtände betrachtet (τὰ πάθη τὰ τούτων ᾗ ποσά ἐστι καὶ συνεχῆ καὶ οὐ καθ' ἕτερόν τι θεωρεῖ; ſ. oben S. 286[3]). Aber andererſeits wird doch in den »Regulae« die »Mathesis universalis«, die die formalen Eigentümlichkeiten unterſchiedslos aller Dinge betrachten ſoll, charakteriſiert als »eine beſtimmte allgemeine Wiſſenſchaft« von allem, »was der

1) »Verumtamen non potest substantia primum animadverti ex hoc solo, quod sit res existens: quia hoc solum per se nos non afficit: sed facile ipsam agnocimus ex quolibet ejus attributo . . .« (Princ. I, 52). ». . . sed cum consideramus substantiam ab illis [modis latiore sensu] affici vel variari, vocamus modos; cum ab ista variatione talem posse denominari, vocamus qualitates; ac denique, cum generalius spectamus tantum ea substantiae inesse, vocamus attributa. (Princ. I, 56.) Vgl. ferner Princ. I, 64, 65.

2) »Duratio, ordo et numerus, a nobis etiam distinctissime intelliguntur, si nullum iis substantiae conceptum affingamus, sed putemus durationem rei cujusque esse tantum modum, sub quo concipimus rem ipsam, quatenus esse perseverat. Et similiter, nec ordinem nec numerum esse quicquam diversum a rebus ordinatis et numeratis, sed esse tantum modos, sub quibus illas consideramus.« (Princ. I, 60.)

3) Vgl. hierzu noch Principia I, 57–59, beſonders I, 58: »Ita etiam, cum numerus non in ullis rebus creatis, sed tantum in abstracto, sive in genere consideratur, est modus cogitandi duntaxat: ut et alia omnia quae universalia vocamus.«

Ordnung und dem Maße unterworfen, ohne Anwendung auf eine beſondere Materie, als Problem auftreten kann«[1]. Die Univerſalmathematik, die eine geheim gehaltene Methode der alten Geometer (!) — Spuren davon ſeien bei Pappos und Diophant überliefert — zur allgemeinen Kenntnis bringen ſoll, von der Geometrie und Algebra »ſpontane Früchte ſind, die aus den einzelnen Prinzipien der Methode entſpringen«, iſt alſo an dem Begriff des Maßes (mensura) orientiert. Es fragt ſich nur, ob ſie damit nicht die ihr eigentlich zukommende »formale« Sphäre verläßt und ſich nicht, wenn auch nicht eingeſtandenermaßen, nach dem »materialen« Weſen des anſchaulichen Raumes richtet. Wenn als Eigenſchaften der ausgedehnten Materie Größe (magnitudo), Geſtalt (figura), örtliche Bewegung (motus localis) uſw. genannt werden, ſo fragt es ſich, ob denn nicht nur auf dieſe konkreteren Eigentümlichkeiten »Ordnung« und »Maß« angewandt werden können. Die denkende Subſtanz, die dieſe Eigenſchaften nicht hat, kann eigentlich nur ihrer Zeitdauer nach (duratio iſt ein univerſale!) dem Maße unterworfen werden. Dabei iſt aber die Zeit offenbar genau ſo gemeint wie die objektive Zeit der Natur; die »Bewegtheit« des Geiſtes (mens) iſt von der Seins-Art der Ortsbewegung in der Natur.

Die Stellung der Univerſalmathematik wird nun von zwei ganz verſchiedenen Eigentümlichkeiten der Descarteſchen Philoſophie und Mathematik noch ſchärfer beleuchtet.

Erſtens von einer mathematiſchen Eigenart: Die mathematiſche Exiſtenz iſt (wie wir in § 5b II A ſahen) bei Descartes, wie auch bei Viète, noch durchaus im klaſſiſch-antiken Sinn auf Geometrie begründet. Der ſymboliſche Kalkül (die Buchſtabenrechnung) trägt ſich nicht ſelbſt, iſt nicht der Ausdruck einer in ſich gegründeten abſtrakt-analytiſchen Mathematik, ſondern die karteſiſche Mathematik iſt ontologiſch durchaus analytiſche Geometrie: es wird keine irrationale Zahl zugelaſſen, die nicht im klaſſiſch-antiken Sinn konſtruierbar iſt, die allgemeinſte von Descartes betrachtete algebraiſche Kurve iſt der »Ort zu 2n Geraden« des Pappos, der allgemeinſte »lineare Ort« den die Antike kennt (ſ. oben S. 139, Anm. 2; S. 149).

1) Regula IV. (S. 11/12 der Originalausgabe): ». . . illa omnia tantum, in quibus ordo vel mensura examinatur, ad Mathesim referri, nec interesse, utrum in numeris, vel figuris, vel astris, vel sonis aliove quovis objecto talis mensura quaerenda sit, ac proinde generalem quandam esse debere scientiam, quae id omne explicat quod circa ordinem et mensuram nulli speciali matereriae addicta quaeri potest . . . .«

Zweitens iſt in logiſcher Hinſicht ein klarer Unterſchied zwiſchen generaliſierender und formaliſierender Verallgemeinerung (im Sinne Huſſerls, Ideen § 13) nicht bei Descartes zu finden. Er ſtellt (Princ. I, 59) als Beiſpiel eines universale die Zahl und die Figur eines Dreiecks unmittelbar nebeneinander. Die Art der Abſtraktion, die vom Beiſpiel der zwei Steine oder zwei Vögel zur Zahl zwei führt, iſt genau dieſelbe, die uns von verſchiedenen dreieckigen Figuren zur »univerſalen« Idee des Dreiecks bringt.[1]

Endlich hängt mit dieſer mangelnden Unterſcheidung auch die eigentümliche Stellung zuſammen, die Descartes zum überlieferten ſcholaſtiſchen Problem der »Analogie des Seins« (analogia entis) und der Lehre von der »Transcendentialien« hat. Er ſtößt notwendig auf das Problem der Analogie beim allgemeinen Begriff der Subſtanz, die nicht »univoce«, in demſelben Sinn, von dem unendlichen, ungeſchaffenen Weſen Gottes und den endlichen geſchaffenen Weſen des Geiſtes und der Materie ausgeſagt werden kann[2]: »Atque ideo nomen subſtantiae non convenit Deo et illis univoce, ut dici solet in Scholiis, hoc est, nulla eius nominis significatio potest distincte intellegi quae Deo et creaturae sit communis.« (Princ. I, 51) Die Scholaſtik faßt den gemeinſamen Sinn des Wortes Subſtanz als ein »analoges Bedeuten«, das weder einſinnig (univoce, *συνωνύμως*) noch bloß gleichnamig (aequivoce, *ὁμωνύμως*) iſt. Descartes aber weicht dem Problem aus, indem er leugnet, daß eine »gemeinſame« Bedeutung von Subſtanz im Falle

1) »Fiuntque haec universalia ex eo tantum, quod una et eadem idea utamur ad omnia individua, quae inter se similia sunt cogitanda: ut etiam unum et idem nomen omnibus rebus per ideam istam repraesentatis imponimus, quod nomen est universale. Ita cum videmus duos lapides nec ad ipsorum naturam, sed tantum quod duo sint attendimus, formamus ideam ejus numeri quam vocamus binarium, cumque postea duas aves aut duas arbores videmus, nec etiam earum naturam, sed tantum quod duae sint consideramus, repetimus eandem ideam quam prius, quae ideo est universalis, ut et hunc numerum binarium eodem universali nomine binarium appellamus. Eodemque modo, cum spectamus figuram tribus lineis comprehensam, quandam ejus ideam formamus, quam vocamus ideam trianguli, et eadem postea ut universali utimur, ad omnes alias figuras tribus lineis comprehensas animo nostro exhibendas.« – Es wird offenbar nicht der geringſte Unterſchied gemacht zwiſchen der »formaliſierenden« Verallgemeinerung, die zur Zahl zwei, und der in der materialen Region »Raumgeſtalt« verbleibenden »Generaliſierung«, die zur Idee des Dreiecks führt.

2) Vgl. zum folgenden Heidegger »Sein u. Zeit«, S. 93, der für die ſcholaſtiſche Lehre auf Caietanus (Opuscula [Lugduni 1580] III, Tract. V, p. 211–219 »de nominum analogia«) verweiſt.

Gottes und der Kreatur überhaupt möglich ſei. Das heißt: Descartes verzichtet darauf, dem »transcendentalen« Sinn eines formal-ontologiſchen Begriffs wie Subſtanz nachzugehen. In der Tat gehört ja auch die Subſtanz traditionell zu den Kategorien (noch bei Kant) und nicht zu der Transcendentien, obwohl ihr formaler, den Unterſchied zwiſchen Gott und Kreatur überſpringender Gebrauch eigentlich »transcendental« iſt.

Die Transcendentienlehre ſelbſt erwähnt zwar Descartes mit keinem Wort, aber trotzdem erſetzt gewiſſermaßen ſeine Idee der Mathesis universalis und des allgemeinen Subſtanzbegriffs die alten Transcendentien. Das Seiende als ſolches wird als ſtändige Vorhandenheit gefaßt (remanens capax mutationum substantia = subsistens), die der intellectio, dem ſchauenden Erfaſſen in der Weiſe des Mathematikers entſpricht[1].

Über die Transcendentienlehre ſelbſt ſei bemerkt, daß ſie an ſich der Mathematik inhaltlich ganz fernſteht, daß ſie aber, wie wir ſahen, ſchon bei Ariſtoteles, als Lehre vom ὂν ᾗ ὄν, dem die Kategorien (die εἴδη und γένη) und auch den Gegenſatz von Gott und Welt überſteigenden Sein, doch mit der »formalen«, das εἶδος hinter ſich laſſenden Mathematik methodiſch (wie ſich ſchon in der gemeinſamen Partikel ᾗ bzw. ὡς ausdrückt) verwandt iſt. Auch in der »Operation« der additio (πρόσθεσις, nicht σύνθεσις)[2] bei Alexander Halensis, Thomas Aquinas und Duns Scotus[3] liegt immerhin ein Verfahren vor, das aus dem leeren ens transcendens eine Reihe modi entis entwickelt unter ſorgfältiger Vermeidung aller Spezifizierung und alles Kategorialen. Dieſer additio müßte das Verfahren einer wirklichen mathesis universalis entſprechen. Es gibt tatſächlich auch im Mittelalter in der Idee des Raimundus Lullus (1235–1315), durch eine kombinatoriſche scientia generalis[4] ein allen Wiſſenſchaften gemeinſames Syſtem von Grundbegriffen aufzuſtellen, einen gewiſſen univerſalmathematiſchen Anſatz, der ſtark auf Leibniz gewirkt hat. Allerdings ſteht der Autodidakt Lullus nicht in der Tradition der Transcendentienlehre. –

1) Vgl. Heidegger, l. c. 95–96. Dazu iſt noch zu bemerken, daß ſich das Sein der res cogitans von dem der res extensa im Grunde ſeinem Wie nach nicht unterſcheidet.

2) Ich möchte vermuten, daß der Terminus »additio« = πρόσθεσις von der Stelle: Ariſtoteles, Met. Γ 2 (1003 b 30 f.) herrührt: »... ὥστε φανερὸν ὅτι ἡ πρόσθεσις ἐν τούτοις ταὐτὸ δηλοῖ, καὶ οὐδὲν ἕτερον τὸ ἓν παρὰ τὸ ὄν.«

3) Zitate bei Knittermeyer, l. c (ſ. o. S. 256, Anm. 1).

4) Vgl. die kurze aber klare Darſtellung bei Joh. Ed. Erdmann, Grundriß der Geſchichte der Philoſophie (4. Aufl., Berlin 1896), Bd. I, S. 417 ff.

Anhangsweiſe ſei noch, zur Vergleichung mit ſpäteren Stellungnahmen die Stellung des Descartes zum Unendlichkeitsproblem kurz gekennzeichnet. Sie hängt in gewiſſem Sinn mit ſeiner Umgebung der Frage der Analogie des Seins von Gott und Kreatur zuſammen. So wie nämlich alle Gemeinſamkeit zwiſchen der unendlichen und endlichen Subſtanz abgelehnt wird, ſo wird auch ein unüberbrückbarer Abſtand zwiſchen dem »infinitum«, der Unendlichkeit Gottes und dem allein dem Menſchen als endlichem Weſen zugänglichen indefinitum (dem Endloſen) angenommen[1]. Von Gott ſehen wir poſitiv ein (»poſitive intellegimus«), daß er keine Grenzen hat, von der Ausdehnung der möglichen Dinge aber kennen wir nur die Grenzen nicht, aber ſie können möglicherweiſe vorhanden ſein. (Negative tamen eorum limites, si quos habeant, inveniri nobis non posse confitemur.)

Descartes bleibt alſo auch hier auf dem antiken Standpunkt des ἄπειρον δυνάμει ὄν, denn das iſt das indefinitum, ſtehen[2].

So ſehen wir, daß er auf allen Gebieten zwar die Wendung zur modernen Mathematik einleitet, aber keineswegs durchführt, wie er auch in ſeiner Phyſik, darin ſogar hinter ſeinen Zeitgenoſſen Galilei und Huygbens zurückbleibend, noch keineswegs ſich zum neuen dynamiſchen Standpunkt hindurchringt. Grundlegend iſt überall Descartes' geometriſche Orientierung, der Raum iſt ihm noch nicht problematiſch geworden; vielleicht zeigt ſich in nichts deutlicher als gerade darin ſeine Gebundenheit an das geſtalthafte Denken der Antike.

Darin liegt zugleich, daß er den Grundgedanken der finiten Konſtruktion, der aus der klaſſiſchen Antike als »στοιχείωσις« überkommen war, niemals verläßt. Er iſt in demſelben Sinne wie die Antike »naiver Intuitioniſt«, das Problem, das in dem Gegenſatz der möglichen Auffaſſungen »Intuitionismus – Formalismus« liegt, iſt ihm noch nicht aufgegangen[3].

1) Princ. I, 26: ita nullis unquam fatigabimus disputationibus de infinito. Num sane, cum sumus finiti, absurdum esset, nos aliquid de ipso determinare atque sic illud quasi finire ac comprehendere conari .... Haecque (geſchaffene endloſe Dinge) indefinita potius dicemus quam infinita.

2) Man vgl. Galileis Äußerung im Dialogo (Opere compl., Firenze 1842/56, Bd. I, S. 116) über den Unterſchied der menſchlichen, Schritt für Schritt von Schluß zu Schluß fortſchreitenden, mathematiſchen Erkenntnis und dem göttlichen Intellekt, der durch bloße Erfaſſung des Weſens ohne zeitliches Erwägen die unendliche Fülle ſeiner Eigenſchaften ergreift.

3) Die intelletio (das διανοεῖν) baut ſich auf den intuitio (dem νοεῖν als reinem Hinſehen) problemlos auf. Vgl. Heidegger, l. c. S. 96.

Descartes Philoſophie der Mathematik iſt daher für unſer ſachliches Problem nicht mehr von ins Gewicht fallendem Belang, nur als Inauguration der neuen Mathematik iſt ſie von hiſtoriſchem Intereſſe. Dagegen iſt Leibniz, dem wir uns nunmehr zuwenden, geradezu als diejenige Perſönlichkeit der neueren Geſchichte aufzufaſſen, in der die innige Durchdringung bahnbrechender philoſophiſcher und mathematiſcher Gedanken in einer weder früher noch ſpäter auch nur annähernd erreichten Intenſität gelang.

C. Leibniz.

Die hiſtoriſche Betrachtung Leibnizens iſt von einſchneidender ſachlicher Bedeutung für die ſyſtematiſchen Probleme dieſer Unterſuchung, denn in Leibniz erſt gelangt das abendländiſche mathematiſche Denken zum philoſophiſchen Bewußtſein ſeiner Eigenart gegenüber der Antike. Im Gegenſatz zu Descartes iſt Leibniz der große Arithmetiker[1]. Er iſt der erſte Mathematiker, der die moderne abſtrakte Mathematik ganz auf ſich ſelbſt ſtellt, d. h. von der Arithmetik aus entwickelt. Trotz ſeiner verſöhnlichen Haltung gegenüber der antik-mittelalterlichen Tradition vollzieht er doch den methodiſch entſcheidenden Schritt über die antike geometriſche Konſtruktion als Baſis der mathematiſchen Exiſtenzbeweiſe hinaus. Unabhängig von Barrows und Newtons geometriſch-kinematiſcher Betrachtungsweiſe begründet er den arithmetiſchen, d. h. den rein analytiſchen Funktionsbegriff und auf dieſem baſierend die Infinitеſimalanalyſe, die er allein zu einer eigentlichen Rechnung entwickeln kann, wodurch erſt die Analyſis zum ſyſtematiſchen Lehrgebäude wird. Dieſes »algorithmiſche« Moment iſt auch in vielen anderen Unterſuchungen für ihn charakteriſtiſch, in der Zahlentheorie (Algebra, Determinantenlehre), in der ſogenannten »Analysis situs« (womit eine »direkte Analyſis« zur Geometrie, etwa im Sinne unſerer heutigen Vektor- und Tenſorrechnung intendiert iſt), im Logikkalkül. Darüber hinaus gipfeln alle dieſe Diſziplinen in einer echten Mathesis universalis. Sie iſt nicht mehr, wie bei Descartes, die allgemeine Wiſſenſchaft von der Größe oder Quantität, ſondern die allgemeinſte Wiſſenſchaft der Ordnungsformen und qualitativen Relationen, die die von ihm ſelbſt geſchaffene

1) Den Gegenſatz des Descartesſchen »Geometrismus« und des Leibnizſchen »Arithmetismus« hat Schmalenbach in ſeiner Leibniz-Darſtellung (München 1921) betont. Wir übernehmen von ihm die Termini, ohne damit ſeine ſachlichen Darlegungen, die teilweiſe ſehr anfechtbar ſind, uns in größerem Umfange zu eigen zu machen.

Kombinatorik mit umfaßt. Indem alle dieſe deduktiven Syſteme in der Zeichenſchrift der »allgemeinen Charakteriſtik« ausgedrückt werden, wird die Mathesis zur »Algebra universalis«, die in »Logistik« (ſymboliſchen Mathematik der Quantität) und »kombinatoriſche Charakteriſtik« (ſymboliſche Mathematik der Qualität) zerfällt[1]. Unter die zweite fällt auch die »geometriſche« Charakteriſtik; damit iſt endgültig die Geometrie von der Kombinatorik beſtimmt und (auch als »ſynthetiſche«) als mathematiſche Grundwiſſenſchaft überwunden.[2]

Der zentralſte Punkt iſt aber vielleicht, daß dieſes Problem der »univerſellen Charakteriſtik«, der Darſtellung abſtrakter, ja jeglicher (menſchlicher) Anſchauung tranſzendenten Zuſammenhänge durch ſinnlich-anſchauliche Symbole in den Mittelpunkt ſeiner Philoſophie tritt. Wenn man einen Begriff als den tragenden und eigentlich ausſchlaggebenden des Leibnizſchen Syſtems bezeichnen darf, ſo iſt es der der Repräſentation. In ihm laufen alle Fäden der verſchlungenen Motivation des gigantiſchen Gewebes der Leibnizſchen Philoſophie zuſammen: der grundlegende mathematiſche Begriff der Abbildung (nicht nur zwiſchen gleichartigen, ſondern auch zwiſchen [anſcheinend] verſchiedenartigen Gefügen)[3], der uralte mythiſch-magiſche Gedanke der univerſellen »Sympathie« aller Dinge und gewiſſe ſpeziellere Lehren der philoſophiſchen Tradition (die antike Bildchen [εἴδωλον]-Theorie der Erkenntnis und Mikrokosmoslehre und die chriſtlich-mittelalterliche »analogia entis«-Theorie in der Metaphyſik)[4]. Es iſt von beſonderer Wichtigkeit, daß dieſe repräſen-

1) Vgl. L. Couturat, la logique de Leibniz. Paris 1901. Vgl. (Mahnke, ds. Jahrb. VII., S. 338.)

2) Charakteriſtiſch iſt folgende (frühe) Stelle (Gerhard, philoſ. Schriften VII, 184 = Cassirer-Buchenau I, 30 ». . . Manches weiſt keine Teile auf und entzieht ſich ſomit der Meſſung . . . Dagegen gibt es nichts, was nicht der Zahl unterworfen wäre. Die Zahl iſt daher gewiſſermaßen eine metaphyſiſche Grundgeſtalt und die Arithmetik eine Art Statik des Univerſums, in der ſich die Kräfte der Dinge enthüllen.«

Es klingen in dieſer frühen Stelle noch zahlenmyſtiſche Motive an. Aber grundſätzlich iſt doch die Kategorie der Qualität überwunden und die Zahl als Eigentümlichkeit alles Seienden (als ſolchen) gegenüber dem »Maße« herausgehoben.

3) Daß es eigentlich nichts ganz Verſchiedenartiges gibt, iſt der Sinn des Kontinuitäts-Prinzips.

4) Die folgende Darſtellung ſtützt ſich vor allem auf die die geſamte wichtige moderne Leibnizliteratur zuſammenfaſſende und kritiſch unter Rückgang auf die primären Quellen darſtellende ausgezeichnete Arbeit D. Mahnkes »Leibnizens Syntheſe von Univerſalmathematik und Individualmetaphyſik«.

tierende »Abbildung« nicht bloß zwiſchen in ihrer Seinsart übereinſtimmenden Syſtemen ſtattfinden kann, ſondern auch zwiſchen (anſcheinend) gänzlich disparaten, wie zwiſchen Gott und Kreatur. Während noch Descartes leugnete, daß der Begriff der Subſtanz in gleicher Weiſe auf Gott und Kreatur angewandt werden könne, iſt für Leibniz Gott eine Monade (individuelle Subſtanz), in gewiſſem Sinne ſogar neben den anderen Monaden, mit ihnen dadurch zu tiefer Gemeinſamkeit verbunden, daß ſie alle »das Univerſum widerſpiegeln«. (Was nicht als ein paſſives Reflektieren, ſondern als ein aktives Schaffen und Nachſchaffen zu verſtehen iſt). Der vereinzelten Iſoliertheit (»Fenſterloſigkeit«) der »individuellen Subſtanz« hält das Eingebettetſein in dem univerſalen harmoniſchen Zuſammenhang immer die Wage: ganz aus ſich ſelbſt heraus lebend repräſentieren alle Individuen doch dasſelbe Univerſum[1].

Zu dieſem vielleicht tiefſten Leibnizſchen Begriff der Repräſentation, in dem das Individuelle wie das Univerſale gleichmäßig zu ſeinem Rechte kommt, tritt hinzu das Prinzip der Kontinuität aller Monaden, d. h. des Beſtehens einer ſtetigen Reihenfolge, beginnend mit der »transfiniten« Ideenwelt Gottes über ihre klare und deutliche Repräſentation in der indefiniten Gedankenwelt der vernünftigen Geiſter zu ihrer verworrenen, aber immer noch klaren Vorſtellung in den Sinnesphänomenen der Seele der höheren Tiere und endlich zu ihrer ganz dunklen Darſtellung in den petites perceptions der unterbewußten Monaden (der niederen tieriſchen und pflanzlichen Organismen und der lebloſen Körper)[2].

In dieſem unendlich reichen Kontinuum von Möglichkeiten (in der Geſamtheit aller Möglichkeiten gibt es nicht wie in der Wirklichkeit ein vacuum formarum) iſt jedes einzelne individuelle Glied durch ein »individualiſierendes Bildungsgeſetz« oder »volldeutig« (Pichler) beſtimmt.[3] Dieſer eigenartige Begriff

(In dieſem Jahrbuch Bd. VII, S. 305ff. u. auch ſeparat [Halle 1925] erſchienen. Ich zitiere ſtets nach dieſer Separatausgabe, deren Paginierung auch im Jahrbuch mit angegeben iſt.) Von da aus ſind die Einzelnachweiſe leicht zu finden. — Für die »Repräſentation« vgl. l. c. § 21, beſ. S. 214ff.

1) Dies iſt eigentlich das immerwährende Grundthema der Mahnkeſchen Ausführungen, daß jeder Verſuch, einſeitig den individualiſtiſchen oder den univerſaliſtiſchen Pol der Leibnizſchen Philoſophie hervorzukehren, an der Hand der Quellen zurückgewieſen wird.

2) Vgl. Mahnke l. c. S. 156, dazu S. 188f. (Schwarz), S. 190 (Windelband).

3) Für das folgende vgl. Mahnke l. c. § 20 über Pichlers Leibnizdeutung.

der universitas ordinata, die das eigentliche totum im Gegenſatz zum bloßen compositum oder aggregatum kennzeichnet, iſt ein principium individuationis, das den ganzen Begriffsinhalt der Individuen erſchöpfend darſtellt. Die Leibniz-Wolffſche Lehre von der ratio sufficiens, nach der jede logiſche Wahrheit auf einer ontologiſchen, jeder »Erkenntnisgrund« auf einem »Seinsgrund« ruht, bedeutet nach Pichler, daß überall »ordo in varietate« herrſcht, d. h. daß die Welt aus einer Hierarchie von »universitates ordinatae« iſt. Das iſt nichts anderes, als daß ſie überall den ariſtoteliſch-ſcholaſtiſchen »Transcendentalien«, dem unum, verum, bonum unterſteht. Aber nicht nur die wirkliche Welt, ſondern auch jede mögliche Gegenſtändlichkeit überhaupt, hat ihre innere Möglichkeit (»Widerſpruchsloſigkeit«), recht verſtanden lediglich in dem Unterworfenſein unter die allgemeinſten formal-analytiſchen Prinzipien. Während aber ſpäter Wolff das principium contradictionis allein für ausreichend hält, fügt Leibniz das ſelbſtändige principium rationis sufficientis hinzu und erweitert damit die formelle Logik zur Univerſalmathematik.[1] Denn nunmehr beſagt »innere Möglichkeit« die Einordnung in konkret-individualiſierende Syſtembegriffe, darin liegt erſt die »Verträglichkeit« der logiſchen Gegenſtände (Pichlers, »Logik der Gemeinſchaft«).

Dieſe drei Prinzipien, das der Repräſentation, der Kontinuität und des ordo in varietate, bzw. der universitas ordinata (der »volldeutigen Beſtimmtheit« oder des »individualiſierenden Bildungsgeſetzes« nach Pichler) beſtimmen nun auch die Leibnizſche Philoſophie der Mathematik. Die große Leiſtung Leibnizens auf dieſem Gebiet iſt, die neuen »abendländiſchen« Möglichkeiten der Mathematik in ihrer ungeheuren Ausdehnungsfähigkeit und damit freilich unlösbar verbundenen tiefen Schwierigkeit, ja Fragwürdigkeit, entdeckt zu haben. Und vielleicht hat er ſogar das

1) Dieſe Univerſalmathematik iſt allerdings nicht mehr »analytiſch« im Kantiſchen Sinne. Die ganze Frage der Bedeutung des Ausdrucks »analytiſch« iſt eine ſehr verwickelte. Leibnizens Terminus »inesse in subjecto« iſt nicht gleichbedeutend mit Kants »in einem (Subjekts-) Begriffe verſteckter Weiſe enthalten ſein.« (K. d. r. V.², 10.) Gerade der Umſtand, daß Wolff, der (nebſt Baumgarten) Kanten die Tradition des deutſchen Rationalismus vermittelte, das principium rationis sufficientis fallen ließ und das princ. contradictionis allein als Grundlage formal-ontologiſchen Denkens beibehielt, ſcheint entſcheidend bei dem geringſchätzigen Urteil Kants über die rein analytiſchen Argumentationen, daß durch ſie »unſere Erkenntnis gar nicht erweitert werde« (K. d. r. V.¹, 7), mitgeſprochen zu haben.

Mittel zur Überwindung dieſer Schwierigkeiten wenigſtens grundſätzlich angegeben.

Aus den bisher gegebenen geſchichtlichen Darſtellungen (nicht nur in § 6c, ſondern auch in § 5b und §6b) ergibt ſich als das große mathematiſche Grundproblem die Frage nach dem Weſen und der Beherrſchbarkeit des Unendlichen. Die antike Mathematik hatte ſich (durch die ſchon ſo früh entdeckten Zenoniſchen Paradoxien vorſichtig gemacht) entſchloſſen für das ἄπειρον δυνάμει ὄν entſchieden und damit für das Prinzip der finiten, anſchaulich-geometriſchen Konſtruktion als einziges Mittel des mathematiſchen Exiſtenzbeweiſes. Dazu trat dann der unendliche (genauer: indefinite) konvergente Grenzprozeß, der aber nicht als ſelbſtändiges Beweismittel mathematiſcher Exiſtenz diente. (Vielmehr mußten mechaniſch-geſtalthafte Betrachtungen als Erſatz dienen.) Erſt kurz vor Leibniz (durch Gregory 1667[1]) wurde der konvergente Grenzprozeß als Definitionsmittel zugelaſſen. Leibniz ſelbſt geht nun über dieſe beſcheidene Konzeption des »indefinitum« weit hinaus. Gott, als ens perfectissimum, war ſeit langem (zuletzt von Descartes, Spinoza u. a.) als infinitus im eigentlichen Sinne angeſehen worden. Aber an ſeiner poſitiven Erkennbarkeit als infiten verzweifelte man (ſ. o. bezüglich Descartes S. 713f., und auch Spinoza faßt omnis determinatio als negatio, die gewiſſermaßen aus dem infiniten Urweſen durch Einſchränkung Figuren herausſchneidet). Leibniz dagegen wird durch ſeinen Gedanken der univerſellen Repräſentation unmittelbar dahin geführt, in jedem noch ſo kleinen Weltſtück, als Abbild bzw. Spiegel des Univerſums, eine aktuale Unendlichkeit von Einzelheiten anzunehmen[2].

Die Welt iſt nach ihm eine »unendlichfache aktuale Unendlichkeit« indem erſtens die Anzahl der Monaden aktual unendlich iſt und dann noch jede einzelne Monade die »Konzentration« des

1) Vera circuli et hyperbolae quadratura Padua 1667 (sic, nach Eneſtröm, Bibl. Math. X, (1909/10), S. 348f.). Vgl. Mahnke, Abh. d. Preuß. Akademie 1925, Phyſ. Math. Kl. Nr. 1, Seite 29 mit Anm. 2; Seite 30 mit Anm. 2.

2) Vgl. Mahnke l. c. S. 138 u. Anm. 169, wo die folgende berühmte Belegſtelle aus einem Briefe an Foucher zitiert iſt (Gerhardt, Philoſ. Schriften I, 416): »Je suis tellement pour l'infini actuel, qu'au lieu d'admettre que la nature l'abhorre, comme l'on dit vulgairement, je tiens qu'elle l'affecte partout, pour mieux marquer les perfections de son auteur. Ainsi je crois qu'il n'y a aucune partie de la matière qui ne soit je ne dis pas divisible mais actuellement divisée, et par consequent, la moindre particelle doit estre considerée comme un monde plein d'une infinité de creatures differentes.«

aktual-unendlichen Univerſums iſt, vermöge der doppelten ſowohl intentionalen als realen Funktion der »Repräſentation«: als »Vorſtellung« wie auch als »Darſtellung«, als intentionales »Bewußthaben von . . .« wie als reale »Vertretung« der göttlichen Ideenwelt. In bezug auf die erſte Unendlichkeit der Monaden ſelbſt tritt der ordo in varietate in ſein Recht: die individuelle Monade iſt durch das »individualiſierende Bildungsgeſetz volldeutig beſtimmt« (Pichler), ſie hat in der universitas ordinata ihre ſyſtematiſche Stelle, wie eine natürliche Zahl in der Zahlenreihe, wie eine beſtimmte Irrationalität im Syſtem aller Irrationalen.

Hierin liegt nun offenbar ein ſchweres mathematiſch-philoſophiſches Problem. Denn in dieſem Gedanken der »volldeutigen Beſtimmtheit« iſt das finite Konſtruktionsprinzip der Antike und auch die indefinite Beſtimmungsmethode mittels des konvergenten Grenzprozeſſes überſchritten: die »Konſtruktion« der universitas ordinata iſt, in der Sprache Hilberts ausgedrückt, transfinit (aktual-transfinit, nicht bloß transfinit im Sinne eines erweiterten indefiniten Prozeſſes). Die »Volldeutigkeit« iſt, wie Mahnke mit Recht ſagt[1], das »höhere« Analogon der Definitheit im Sinne Huſſerls. Während die definite Mannigfaltigkeit dadurch gekennzeichnet iſt, daß aus einer endlichen Anzahl von Begriffen und Sätzen die Geſamtheit aller möglichen Geſtaltungen innerhalb ihrer in der Weiſe rein analytiſcher Notwendigkeit vollſtändig und eindeutig beſtimmt iſt[2], fällt bei der volldeutigen Mannigfaltigkeit die Bedingung der Endlichkeit weg. Es werden auch Syſteme »von unendlich vielen Dimenſionen und mit unüberſehbaren Bildungsgeſetzen« (Pichler) zugelaſſen.

Bei zwei Gelegenheiten wird dieſe Idee der aktual-transfiniten Mannigfaltigkeit von Wichtigkeit: einmal beim Problem der »Realdefinition« und der »Tatſachenwahrheiten« (»Contingentiae radix est infinitum«[3]) und dann bei der ſchwierigen Frage des »Labyrinths des Kontinuums«.

Das erſte Problem zerfällt in zwei inhaltlich verſchiedene aber doch formal noch verwandte Unterfragen. Erſtens: ein Verfahren zu finden, um ſich a priori der Gültigkeit einer Realdefinition, d. h. der Verträglichkeit (compossibilitas) der begrifflichen Elemente des durch ſie beſtimmten Gegenſtandes zu verſichern. Zweitens:

1) »Leibnizens Syntheſe uſw.« S. 42f., 102, 198.

2) Vgl. Huſſerl, »Ideen uſw.« S. 135 und Becker, dſ. Jahrb. VI, Seite 403ff.

3) Mahnke l. c. Anm. 43 am Schluſſe (= Bodemann, L.-Handſchr. S. 121).

die »kontingenten« oder Tatſachenwahrheiten (verités de fait oder contingentes) auf identiſche (d. i. tautologiſche, formallogiſch evidente) Sätze zurückführen. Die verités de fait ſind nun, gegenüber den verités de raison, dadurch charakteriſiert, daß ſie (ähnlich wie die Irrationalzahlen gegenüber den Rationalzahlen) unendlich verwickelt ſind. Ebenſo gehört zur Zerlegung eines Begriffs in Elementenbegriffe ein unendlicher Regreß; die begriffliche Auflöſung iſt in beiden Fällen für den Menſchen nur aſymptotiſch erreichbar. Ein unendlicher Intellekt würde zwar auch weder die Begriffe noch die »zufälligen Wahrheiten« (verités contingentes) »zu Ende analyſieren« können, aber, das Geſetz des Regreſſes gleichſam durchſchauend, ſich die Verträglichkeit der unendlich vielen Elementarbegriffe und den Zuſammenhang der kontingenten mit den notwendigen Wahrheiten evident machen können[1]. Denn die Elementarbegriffe bilden eine nicht endlich erſchöpfend definierbare Mannigfaltigkeit[2]. Es fragt ſich nun, wie man ſich der Gültigkeit einer Realdefinition als Menſch verſichern kann. Dies kann man entweder durch empiriſche Beobachtung des empiriſchen Gegenſtandes oder a priori durch die Angabe der Erzeugungsweiſe des Begriffs, durch die ſogenannte »kauſale Definition«, wie z. B. die Konſtruktionsmethode einer Kurve. Im gewiſſem Sinne iſt alſo die Frage der Verträglichkeit (compossibilitas) bei tatſächlichen Gegenſtänden ein logiſch-analytiſch unlösbares Problem, das nur Gottes infallibilis visio löſen kann[3]. Zur aprioriſchen Erkenntnis der Möglichkeit müſſen

1) Siehe über Tatſachenwahrheiten: Mahnke, l. c. S. 37/38, dazu Anm. 43 (S. 240f.).

2) L. c. S. 42. – Ferner über Realdefinition S. 25, Anm. 32, S. 121–123.

3) S. Mahnke l. c. Anm. 32 (S. 236ff.): »Habemus ideas simplicium, habemus tantum characteres compositorum ... Non habemus ideam Dei ... Et hoc facit, ut non possimus facile judicare de rei possibilitate ex cogitabilitate ejus requisitorum, quando singula ejus requisita cogitavimus atque in unum conjunximus. ... Non possumus in unam conjungere cogitationem ideas diversas, etsi ope characterum unire possimus et cogitationum diversarum seriem totam simul repraesentare .... quod non potest fieri nisi sentiendo sive imaginando simul characteres omnium. (Jagodinsky, Leibnitiana 4, 6.)

Auch die Fortſetzung des Zitats iſt für die Beurteilung der Stellung der Charakteriſtik mit ihren ſinnlichen Symbolen wichtig: et quoniam aliquando tantus est characterum numerus, ut totus imaginationi observari non possit, opus est delineatione in materia .... Ideam defectum in nobis supplet imago aliqua sensibilis aut .... phantasma aliquod, quod totum simul sentitur. Solius Dei est ideas habere rerum compositarum.

ſämtliche (aktual-unendlich viele!) Elementarbegriffe deutlich unterſchieden, zugleich aber in einer Anſchauung zuſammengefaßt werden; dies iſt dem Menſchen nur durch das Surrogat von Symbolen möglich. Es kann ſo unter Umſtänden das ſynthetiſche Geſetz des unendlichen zerlegenden Prozeſſes konſtruktiv erfaßt werden.[1]

Dasſelbe gilt natürlich mutandis mutatis für die kontingenten Wahrheiten und ihre Auflöſung in identiſche Sätze. Es verdient bemerkt zu werden, daß nach Leibniz zur vollſtändigen Analyſe der Sätze nicht die der Begriffe erforderlich iſt[2]. Denn ſonſt könnte man, in Anbetracht der ſehr umfangreichen, ja häufig unendlichen Menge der Elementarbegriffe, überhaupt kaum einen formal-analytiſchen Beweis einer Wahrheit führen. Man braucht aber tatſächlich die Zerlegung nur ſoweit zu führen, daß das Enthaltenſein des Subjekts im Prädikat evident wird, und das iſt in vielen Fällen auch durch eine endliche Anzahl von Denkſchritten möglich. Dieſe Bemerkung iſt wichtig, denn ſie wirft ein gewiſſes Licht darauf, wie es möglich iſt, mittels einer finiten ſymboliſchen Darſtellung der unendlich komplizierten Begriffe Schlüſſe zu ziehen, wie es im Logikkalkül geſchieht[3].

Bevor aber die entſcheidende Rolle der ſymboliſchen Darſtellung (der »Charakteriſtik«) in der mathematiſchen Philoſophie Leibnizens dargelegt werden kann, iſt es noch erforderlich, auf das zweite große mit dem Unendlichen verknüpften Problem einzugehen, auf das des Kontinuums. Es handelt ſich um folgende grundlegende Schwierigkeit, die in ihrer ganzen Schärfe vor allem von Ruſſell und Schmalenbach in ihren Leibnizdarſtellungen herausgearbeitet worden iſt[4]. Eine ſtetige Größe kann in eine indefinit unend-

1) Mahnke l.c. Anm. 43 (S. 241): »propositio vera contingens non potest reduci ad identicas, probatur tamen, ostendendo continuata magis magisque resolutione, accedi quidem perpetuo ad identicas, numquam tamen ad eas perveniri. Unde solius Dei est, qui totum infinitum Mente complectitur, nosse certitudinem omnium contingentium veritatum .... ex ipsa progressione resolutionis, seu ex relatione quadam generali inter resolutiones praecendentes et sequentem. .... Quodsi ex continuata resolutione et inde nata progressione ejusque regula saltem appareat nunquam orituram contradictionem, propositio est possibilis. (Couturat, Opuscules inédits p. 371, 374, 388.)

2) Vgl. Mahnke, l. c. S. 121 (nach Heimſoeth).

3) Man denke beſonders an das Verhältnis etwa des Hilbertſchen transfiniten Axioms, das in Symbolen geſchrieben durchaus finit iſt, zu ſeiner transfiniten Bedeutung.

4) Vgl. den Bericht von Mahnke, l. c. S. 28ff. (Ruſſell), S. 151f., 156 (Schmalenbach), wo nähere Zitate zu finden ſind.

liche Anzahl Teile weitergeteilt werden. Dieſe indefinite Teilbarkeit verhindert, daß man jemals zu letzten Elementen des Stetigen kommt und daß man je das Stetige aus Elementen aufbauen kann. (Vgl. Ariſtoteles: *οὐ γὰρ χαλεπὸν ἀνελεῖν τὰς ἀτόμους γραμμάς.* Phyſik III, 6; 206 a, 17.) Denn eine aktual-unendlich große Anzahl iſt ein widerſpruchsvoller Begriff. (Vgl. wiederum Ariſtoteles; Phyſik III, 4 [203 b, 34] und III, 5 [204 b, 7–10].) Dagegen enthält, aus metaphyſiſchen Gründen realiter jedes noch ſo kleine Weltſtück (als Spiegel des Univerſums) aktual-unendlich viele einfache Weſen. Es entſteht alſo der Widerſpruch, daß einerſeits die Welt ein Aggregat aus diskreten »Einsheiten« (Schmalenbach) in aktual-unendlicher Anzahl iſt, alſo die Elemente dem »tamquam unum« der Welt vorhergehen – Schmalenbach nennt dieſe Anſchauung nicht mit Unrecht »Arithmetismus« –, andererſeits aber doch die Welt ſtetig ausſieht, als ob das Ganze den Teilen voran ginge. Aber in dieſer Formulierung liegt ſchon die Leibnizſche »Löſung« angedeutet: realiter enthält die Welt zwar aktual-unendlich viele diskrete Monaden, aber phänomenal iſt ſie ſtetig. Die Stetigkeit iſt alſo lediglich in der unwirklichen Ideenwelt, der Welt der bloßen Denkmöglichkeit zu Hauſe, iſt lediglich Phänomen. Wenn auch ideell-geometriſche Punkte (ebenſo wie die *ἄτομοι γραμμαί* nach Ariſtoteles) unmöglich ſind, ſo ſind doch die Monaden als metaphyſiſche Punkte (und zwar in aktual-unendlicher Anzahl) möglich und wirklich.

Weder Ruſſell noch Schmalenbach können dieſen Leibnizſchen Verſuch, den Ausweg aus dem »Labyrinth des Kontinuums« zu finden, anerkennen. Denn man könne, wenn die Stetigkeit (indefinite Teilbarkeit) etwas Unwirkliches iſt, niemals aus ihr die Wirklichkeit einer realen aktualen Unendlichkeit erſchließen. (Ruſſell)[1]. Ferner ſei es inkonſequent, einerſeits die »transfinite« Unendlichkeit Gottes als urſprünglichſte wirklich anzuerkennen, andererſeits die Irrealität der Kontinua aus ihrer indefiniten Zerlegungsfähigkeit zu folgern. Leibniz habe den Begriff des Kontinuums zuſammen mit dem der transfiniten Unendlichkeit aus dem myſtiſchen Erlebnis des allumfaſſenden göttlichen Einen gewonnen, in allen Fällen lägen Ganzheiten im echten Sinn vor (tota, nicht Aggregate: composita), die vom »arithmetiſchen« Verſtand nicht zu Ende analyſiert werden könnten[2]. Letztlich ſtünden eben Monismus und Pluralismus, konti-

1) Die weitere ſubtile Argumentation Ruſſells, die allerdings von ſeinen eigenen erkenntnistheoretiſchen und metaphyſiſchen Grundanſchauungen ſtark abhängig iſt, wolle man bei Mahnke, l. c. 28 ff. nachleſen.

2) l. c. S. 153. – Über Kants Löſungsverſuch ſ. u. S. 299, Anm. 1.

nuierlicher Zuſammenhang (univerſelle Harmonie) und diskrete Sonderung (fenſterloſe Monaden) in unauflösbarem Widerſpruch. (Schmalenbach).

Gegenüber dieſer Kritik (die allerdings hier nur ganz andeutungsweiſe und notwendig unzulänglich wiedergegeben werden konnte und die der eingehenden Beachtung wert iſt) verteidigt nun Mahnke Leibniz, indem er mit Nachdruck auf den Grundbegriff der Repräſentation und zwar als ſymboliſcher Darſtellung (»Charakteriſtik«) hinweiſt. Hier iſt nun die Stelle, wo die Leibnizſche Begriffsbildung für die heute aktuellen Probleme des Transfiniten von außerordentlicher Wichtigkeit wird. Es handelt ſich dabei eigentlich nicht nur um das Kontinuumproblem, ſondern um die Frage der Erkenntnismöglichkeit transzendenttransfiniter Strukturen überhaupt. (Es fallen unter dieſen Problembegriff auch die »Realdefinition« und die kontingenten Wahrheiten).

Es beſteht nach Mahnke[1] für Leibniz weder zwiſchen »Einheit« und Kontinuität, noch zwiſchen objektiver Idealität (im Geiſte Gottes), d. h. metaphyſiſcher Realität, und ſubjektiver Phänomenalität (im menſchlichen Geiſte) ein radikaler Gegenſatz. Es führt ja eine ſtetige Stufenreihe möglicher Zwiſchenglieder von der transfiniten Ideenwelt Gottes zu ihren bloß indefinit unendlichen Repräſentationen im menſchlichen Geiſt; das Transfinite erſcheint »perſpektiviſch verkürzt« als Indefinites. So liegt auch zwiſchen der Diskretheit des Realen und der Kontinuität des Idealen oder Phänomenalen keine unüberbrückbare Kluft, ſondern eine Weltregion wird durch die andere mit aſymptotiſcher Annäherung dargeſtellt.

Es kommt nun für die Durchführbarkeit eines ſolchen Gedankengangs, der ſchon oben anläßlich der Explikation des Repräſentationsbegriffs kurz dargeſtellt wurde, alles darauf an, von dem ſehr allgemeinen und etwas unbeſtimmten Begriff der »Repräſentation« und den metaphoriſchen Ausdrücken »Abbildung«, »Spiegelung«, »Perſpektive«[2] u. dgl. zu einer eigentlichen präziſen Charakteriſierung zu gelangen.

Die Hauptfrage, auf die ſich alles zuſpitzt, ſcheint nun in dieſer Beziehung die zu ſein, ob die Repräſentation als iſomorphe Ab-

1) l. c. S. 156f.

2) Ein präziſer perſpektiviſcher Vergleich (elliptiſche Projektionen der Hyperbel) findet ſich bei Couturat, Opuscules p. 15, der von Koehler zur Erläuterung der Repräſentation verwendet wird. Vgl. Mahnke, l. c. S. 223f.

bildung (d. h. als eineindeutige, alle Relationen des Originals adäquat in ihrer formalen Struktur wiedergebende Abspiegelung) aufzufassen ist oder nicht. Darauf ist zu antworten, daß zwar das Ideal einer Repräsentation erst durch eineindeutige Entsprechung aller wesentlichen Momente von Original und Bild erreicht wird, daß man sich aber in vielen Fällen mit der Wiedergabe einiger Züge begnügen kann und muß. Das Ideal wäre offenbar, daß bei der symbolischen Darstellung jedem Symbol (Buchstaben) ein und nur ein Elementarbegriff entspräche und jeder »Relation der Gedanken« eine ganz genau bestimmte Verbindung von Zeichen[1].

Dieses Ideal kann aber offenbar der endliche menschliche Intellekt nicht erreichen, ihm ist die Anschauung des Unendlichen verschlossen und zwar nicht nur die sinnliche Wahrnehmung (sensatio), sondern auch die idealisierende imaginatio des Aktual-Unendlichen. Es ist die »cogitatio intuitiva«, die nicht nur alle einzelnen Teilbegriffe klar und deutlich erkennt, sondern sie auch sämtlich »zugleich denkt«, bei unendlicher Komplikation unmöglich. Daher muß sich die menschliche Wissenschaft mit der »cogitatio symbolica« begnügen, die statt der (evt. transfiniten) Gegenstände die übersehbaren (finiten, höchstens Indefinites ausdrückenden) Zeichen betrachtet[2].

Insbesondere kann die compossibilitas der Begriffselemente (etwa die Widerspruchsfreiheit der in einem Axiomensystem implizit definierten Begriffe) nicht unmittelbar eingesehen werden, außer durch Gottes vollkommene intuitio. Sie muß auf die der finiten menschlicher Anschauung zugänglichen Betrachtung der Widerspruchsfreiheit der Symbole und ihrer Verknüpfungen zurückgeführt werden. Denn ein »mathematischer Existenzbeweis« kann nicht ohne imaginatio geführt werden; die Mathematik ist, im Gegensatz zur Metaphysik die scientia imaginationis, was aber ihrem logischen Charakter nicht widerspricht. (Leibniz reißt Anschauung und Denken, »Sinnlichkeit« und »Verstand« nicht auseinander wie Kant, sondern hält

1) Vgl. dazu und zum folgenden D. Mahnke, »Leibniz als Begründer der symbolischen Mathematik«, Abschnitt I (»Isis«, Zeitschr. d. intern. Gesellsch. f. Geschichte d. Wiss., 1927); insbesondere l. c. Anm. 8: »Ars characteristica est ars ita formandi atque ordinandi characteres, ut referant cogitationes, seu ut eam inter se habeant relationem, quam cogitationes inter se habeant. Expressio est aggregatum characterum rem quae exprimitur repraesentantium. Lex expressionum haec est: ut ex quarum rerum ideis componitur rei exprimendae idea, ex illarum rerum characteribus componatur rei expressio«. (Bodemann, Leibniz-Handschriften, S. 80f.)

2) Siehe Meditationes de cognitione, veritate et ideis (Acta eruditorum, Nov. 1684; Philos. W. (Gerhardt) IV, 423f. (Mahnke, l. c. Anm. 15.)

eine kontinuierliche Vermittelung zwiſchen ihnen für möglich.) Denn es wird z. B. von der geometriſchen Charakteriſtik (die die anſchauliche Geometrie im Verlauf der Geſchichte überwand) geſagt, ſie ſei eine logica imaginationis, per quam Geometria ad Logicam refertur[1].

Aber die Symbole ſind, wenn ſie »Transfinites« darſtellen, nicht den repräſentierten Dingen in allen Stücken, ſondern nur »in dem, worum es ſich handelt, ähnlich[2]«.

Allerdings beſteht nach Leibniz die (ideelle) Möglichkeit des kontinuierlichen Übergangs von der ſymboliſchen zur immer adäquateren bis ſchließlich zur intuitiven Erkenntnis auch des Aktual-Unendlichen. Selbſt wenn dem Menſchen wegen ſeiner kontingenten Beſchränktheit dies ewig unmöglich ſein ſollte, ſo ſind doch höhere Monaden zwiſchen Gott und Menſch wenigſtens denkbar, die die kontinuierliche Annäherung an das Transfinite unbegrenzt weit treiben könnten.

In dieſem Punkte entſtehen freilich, wenn man die Sache vom phänomenologiſchen Standpunkt aus anſieht, für Leibnizens Optimismus große Schwierigkeiten. Nach Huſſerl iſt es auch einem »idealiſierten Erkenntnisvermögen« unmöglich, Aktual-Unendliches zu erkennen. Faßt man Gott als »erkenntnistheoretiſchen Grenzbegriff« (Huſſerl), ſo könnte das Aktual-Unendliche in ſeiner Ideenwelt keinen Platz haben; iſt Gott dagegen dem Menſchen völlig transzendent und unvergleichlich, dann iſt auch keine kontinuierliche Vermittlung bis zu ihm denkbar. Sehen wir einſtweilen von dieſem Punkte ab (s. u. S. 310 ff.), ſo müſſen wir ſagen: dadurch, daß er ſich mit Problemen des Verhältniſſes von Transfinitem und Indefinitem tiefeindringend beſchäftigte, hat Leibniz in Wahrheit tiefer geblickt[3] als Bolzano, dem die erſten ſchüchternen mathematiſchen Anſätze zu verdanken ſind, und tiefer als Cantor[4], Dedekind, Frege und Ruſſell, denn dieſe Forſcher vermeinten alle das Transfinite »über philoſophiſche Vorurteile hinwegſchreitend« unmittelbar erfaſſen zu können. Bezüglich der ſachlich-mathematiſchen Anſätze

1) Mahnke, Iſis-Aufſatz, Anm. 14 (Math. Schr. V, 173; Opuscules 348); vgl. auch Mahnke, »L.'s Syntheſe uſw.«, Seite 203.

2) Vgl. Mahnke, Iſis-Aufſatz, Anm. 15. »id autem (die Erkenntnis der Verträglichkeit, compatibilitas) patet non fieri posse, nisi experimento vel rei vel alterius rei similis, in eo saltem de quo agitur ....« (Opuscules 374 f.).

3) In grundſätzlich-philoſophiſcher, nicht in poſitiv-mathematiſcher Hinſicht.

4) Cantor iſt allerdings in gewiſſer Hinſicht auszunehmen. Vgl. oben § 5a I, S. 82 ff.; beſ. S. 85, 89 Anm. 1.

iſt Leibniz (wenn auch vielleicht nicht ganz konſequent und bloß in der Formulierung der Grundbegriffe und Grundſätze, nicht in der exakten Durchführung der Theorie) Intuitioniſt, aber dabei bleibt er nicht ſtehen, ſondern erfaßt die Möglichkeit einer ſymboliſch-formalen Mathematik, die über alles der Intuition Erreichbare hinausgeht[1]. Freilich hat dieſe auch eine ſachliche Bedeutung, aber nur in Gott.

Es läßt ſich nicht verkennen, daß mit dieſen Grundanſchauungen Leibniz in die Nähe derjenigen modernen Poſition in der Philoſophie der Mathematik rückt, die man »Formalismus« (Hilbert) oder »ſymboliſche Mathematik« (Weyl in ſeiner neueſten Phaſe) nennt[2]. Dieſe Poſition wendet ſich gleichermaßen gegen zwei Fronten: gegen die intuitioniſtiſche (Brouwer) und die ältere logiziſtiſche (»exiſtentual-abſolutiſtiſche«) Anſchauung (Frege, Ruſſell u. a.). Weder läßt ſich das aktuale Transfinite unmittelbar, im Sinne der klaſſiſchen Mengenlehre, erfaſſen, wie die Logiziſten meinten[3], noch läßt es ſich

---

1) Vgl. folgende, in Mahnkes Isis-Aufſatz (Anm. 9 u. 10) zitierte Stelle: »Invento quod quaeritur in characteribus facile idem inveniatur in rebus per positum ab initio rerum characterumque consensum (Math. Schr. V, 191). Cuiusque rei nomen [characteristicum] clavis est omnium quae de ea . . . . ratione atque ordine sciri possunt . . . . et interiores rerum formas deteget (Philoſ. Schr. VII, 13–15) . . . . tanto perfectiores esse characteres quanto magis sunt αὐταρκεῖς, ita ut omnes consequentiae inde duci possint (Opuscules 284). – Die Iſomorphie iſt alſo das zu erſtrebende Ideal. –

Größere Reichweite der ſymboliſchen im Vergleich zur anſchaulichen Mathematik: »raisonnements qui se peuvent faire par les operations de caractères, qui ne se scauroient exprimer par des figures . . . ea ad quae imaginatio per linearum ductus attigere nequit. (Math. Schr. IV 455, 479; II 20 f.)

2) Vgl. Mahnke (»L.'s Syntheſe uſw.«), S. 203, Anm. 146; ferner: »Von Hilbert zu Huſſerl« (Unterrichtsbl. f. Math. u. Naturwiſſenſch. XXIX, 35 ff.); »Leibniz und Goethe« (Erfurt 1924), S. 58–66; »L. als Begründer der ſymbol. Math.« (»Iſis« 1927).

3) Ruſſell hat hierin eine merkwürdige Wandlung durchgemacht. In der »Principles of Mathematics« (1903) iſt er noch durchaus überzeugter Exiſtentialabſolutiſt, wenn auch ſchon die Entdeckung der Antinomieen wie eine Drohung auftaucht, in den »Principia Mathematica« (1910) werden die Anſprüche der logiziſtiſchen Begründung ſchon ſtark eingeſchränkt (das »Axiom des Unendlichen« und das »Auswahlaxiom« werden als Hypotheſen eingeführt), endlich in der »Introduction to mathematical philoſophy« (1919) wird (auf Seite 191 f.) ſogar das grundlegende logiſche »axiom of reducibility« nicht mehr kategoriſch aufrecht erhalten und von den allein noch geſicherten, finiten »tautologiſchen Axiomen« (S. 203 ff.) unterſchieden. (Vgl. auch S. 131 bis 143 über das »axiom of infinity«.) Damit iſt aber Ruſſell im Grunde

auf intuitiv indefinite und »transfinite« (δυνάμει) Prozeſſe zurückführen. Aber die transfiniten Beziehungen, als ſolche dem menſchlichen Geiſt unzugänglich (und nur durch Erſchleichung ſcheinbar zugänglich, indem ſubreptiv Endliches anſtelle des Unendlichen geſetzt wird), ſind in finiten Symbol-Zuſammenhängen darſtellbar, deren Widerſpruchsfreiheit, nicht anſchaulich ausweisbare »Wahrheit«, gezeigt werden kann. Es entſteht freilich die fundamentale Schwierigkeit, ob damit nicht die geſamte transfinite Mathematik zum leeren Formelſpiel degradiert iſt (ſ. o. § 3a, b; § 4b [Schluß]; § 6a.) Hilbert begegnet der Schwierigkeit durch einen Kantiſchen Gedanken (Totalität in der Idee, ſ. u. § 6c III D), Weyl dagegen ſieht die Bedeutſamkeit der transfiniten formalen Mathematik in ihrer Fähigkeit reale phyſikaliſche Zuſammenhänge ſymboliſch darzuſtellen[1]. Inſofern nun nach Leibniz die – allerdings letztlich metaphyſiſche – Struktur des Univerſums adäquat (d. h. »iſomorph«) in Gottes Ideenwelt repräſentiert iſt, und die ſymboliſche Mathematik Leibnizens in immer größerer Annäherung, wenn auch ſie nie erreichend, Gottes unendliche Verwicklung vereinfachend abbildet, erſtrebt auch nach Leibniz die menſchliche Mathematik die ſymboliſche Darſtellung des realen Univerſums.

Man kann alſo grundſätzlich Hilberts formaliſtiſche Mathematik und ihre Interpretation ſeitens Weyls als ſymboliſche Darſtellung transfiniter ſachlicher Zuſammenhänge mit Leibnizens Auffaſſung in Einklang bringen. Es iſt aber von entſcheidender Wichtigkeit, dabei auch auf einen fundamentalen Unterſchied zwiſchen Leibniz und Hilbert-Weyl hinzuweiſen. Während die heutigen Forſcher Intuitives und Formales, inhaltliche Metamathematik und formale eigentliche Mathematik ſcharf ſcheiden, der erſten eine phänomenologiſche, der zweiten eine ſich auch der kategorialen Anſchauung völlig entziehende Bedeutung zuweiſen, iſt Leibniz vom Beſtehen eines kontinuierlichen Übergangs von der transfiniten (aktual-unendlichen) Ideenwelt Gottes bis zur bloß indefiniten Welt des menſchlichen Geiſtes überzeugt. Hier liegt auch der wohl weſentlichſte Unterſchied in der Grundauffaſſung Leibnizens und Kantens: Leibniz, der »harmoniſche Synthetiker«, vermittelt

---

zu einer Art Finitismus gelangt, ähnlich wie Hilbert. Vgl. auch das merkwürdige Feſthalten der finiten Einſchachtelung der logiſchen Typen, worüber oben § 5a III, S. 117, berichtet wurde. – In dieſer Richtung gehen weiter die Arbeiten der ſog. »Halbintuitioniſten«. (Chwiſtek, Wittgenſtein u. a.).

1) Weyl, Math. Zeitſchr. 20, S. 149f., Sympoſion I, S. 30ff. Handbuch der Philoſ., Abt. II A., S. 40ff. (über Leibniz S. 49, 3ff.) und paſſim.

kontinuierlich zwiſchen Gott und Menſch; Kant, der unerbittliche Kritiker, ſieht zwiſchen beiden den unüberbrückbaren Abgrund[1].

Mit dem unerhört kühnen Gedanken, daß die Macht menſchlicher Symbolik bis an Gott heranreiche, hat Leibniz vielleicht am tiefſten von allen Philoſophen dem geheimen Motiv nachgeſpürt, das den himmelſtürmenden, die Grenzen des »Eidos« durchbrechenden Flug der abendländiſchen, in ihrem Kern nordiſch-germaniſch beſtimmten Mathematik emportrieb. Ein Gedanke, der mit dem myſtiſchen Urſprung der Leibnizſchen Philoſophie[2] und ihres Mittelbegriffs der Repräſentation eng zuſammenhängt. Wir können alſo in Leibniz den mit Plato größten »mathematiſchen Myſtiker« verehren. Was dies für eine ſyſtematiſche (ontologiſche) letzte Deutung des Seinsſinns des Mathematiſchen beſagt, werden wir noch am Schluſſe dieſer Unterſuchung zu entwickeln haben.

Kant hat allerdings dieſer überſchwänglichen mathematiſchen Myſtik die ganze Schärfe ſeiner ſchneidenden Kritik entgegengeſetzt. Wir haben heute die Pflicht der Kühnheit Leibnizens und Kantens unbeirrbarer Nüchternheit gleichmäßig Rechnung zu tragen, ſie beide in dem ganzen Gewicht ihrer Argumente wirken zu laſſen.

D. Kant.

Mit Kant tritt die Entwicklung der abendländiſchen Philoſophie der Mathematik in ihre dritte Phaſe. Während Descartes noch in vieler Hinſicht an den überlieferten antik-mittelalterlichen Grundauffaſſungen feſthielt, ſo bahnbrechend er beſonders durch ſeine analytiſche Geometrie (mehr als durch ſeine ſehr unbeſtimmte und wenig radikale Idee der mathesis universalis) geworden iſt, ſahen wir in Leibniz das neue nordiſch beſtimmte mathematiſche Denken ſein philoſophiſches Selbſtbewußtſein erreichen und ſeine letzten Möglichkeiten aufleuchten. Demgegenüber folgt endlich in Kant nach jenem

1) Auch Weyl lehnt ausdrücklich jede »anſchauende Einſicht« des nur ſymboliſch Erkennbaren als »myſtiſchen Irrtum« ab. Vgl. Sympoſion I, S. 30f.: »Theoretiſche Geſtaltung iſt etwas anderes als anſchauende Einſicht; ihr Ziel nicht minder problematiſch wie künſtleriſche Geſtaltung. . . . . Aber er [Fichte] unterliegt noch dem myſtiſchen Irrtum, daß jenes Transzendente (d. i. das Transfinite Hilberts) letzten Endes doch innerhalb des Lichtkreiſes der Einſicht von uns erfaßt werden könne. Hier bleibt uns aber nur die ſymboliſche Konſtruktion . . . .«

2) Vgl. die bei Mahnke l. c. referierten Forſchungen von Kabitz (S. 68ff.), Feilchenfeld (S. 74f.), Jagodinsky und Jaſinowski (S. 76ff.), Baruzi (S. 111ff.), Heimſoeth (S. 133ff.) u. a. — In die »große Linie der mathematiſchen Myſtik« ordnet Mahnke (S. 140) ſelbſt Leibniz ein.

allzu weit ausgreifenden Vorſtoß die kritiſche Selbſtbeſinnung und die nüchterne Erkenntnis der Grenzen menſchlicher Spekulation.

Die geſchichtliche Rolle Kants entſpringt einmal ſeiner Leibniz in Vielem entgegengeſetzten Perſönlichkeit, dann aber auch dem »Zeitſtil«, d. h. der inneren Logik der geiſtesgeſchichtlichen Entwicklung ſelbſt.

Kant kann ſich bezüglich ſeines Anteils an der Entwicklung mathematiſcher Forſchung nicht mit Leibniz meſſen, er iſt poſitiv mathematiſch ebenſowenig produktiv geweſen wie Ariſtoteles[1]. Nur die Idee der n-dimenſionalen Geometrie, die er, im einzelnen freilich unbeſtimmt genug, wohl als erſter in ſeiner Erſtlingsſchrift (1747) entwickelt, iſt ihm als bedeutende Leiſtung auf mathematiſchem Gebiete anzurechnen[2]. Dieſe Konzeption der Jugendſchrift hat aller-

1) Über die mathematiſch-naturwiſſenſchaftlichen Leiſtungen Kants vgl. das gründliche Werk von Adickes, Kant als Naturforſcher. 2 Bde. (Berlin 1924); beſ. die ausführliche und wohlabgewogene Geſamtcharakteriſtik in der »Einleitung« (§§ 1–23; Bd. I, Seite 1–64). Es wird dort (S. 64) treffend Kant als »Ausnahmegeiſt von großer Divinationsgabe, ſtarkem moniſtiſchen Drang und einer nicht gewöhnlichen Kraft der Syntheſis und Synopſis« bezeichnet, dem »eine Reihe glücklicher Intuitionen und treffender Aperçus beſchieden war«, die ſich aber nicht »auf das naturwiſſenſchaftliche Detail, ſondern auf die Anwendung allgemeinſter Grundſätze und Geſetze, die Durchführung prinzipieller erkenntnistheoretiſcher bzw. methodologiſcher Erwägungen« beziehen und »alſo nicht aus ſpeziell wiſſenſchaftlichem« (wir können hinzufügen: erſt recht nicht mathematiſchem), ſondern aus allgemein philoſophiſch-methodologiſchem Geiſt geboren« ſind. — Über den Mangel der poſitiv-mathematiſchen Leiſtung bei Kant ſ. insbeſ. l. c. §§ 5—8 (I, S. 15–39).

2) Siehe »Gedanken von der wahren Schätzung der lebendigen Kräfte« I. Hauptſtück, §§ 7, 8, 9, 10, 11, beſ. § 10, 2. Abſatz. (Vgl. auch Adickes, l. c. § 32, Bd. I, S. 84–89.) — Der Grundgedanke Kants geht von der von Leibniz übernommenen Annahme aus, daß »jedwedes ſelbſtändige Weſen [= Monade] die vollſtändige Quelle aller ſeiner Beſtimmungen in ſich enthält«. Es ſei daher möglich, daß Subſtanzen ohne äußerliche Relation gegen andere, wodurch doch der Ort erſt zuſtande komme, exiſtieren oder auch gegeneinander iſolierte Syſteme jeweils untereinander räumlich verbundener Subſtanzen. So könne »im metaphyſiſchen Verſtande« mehr als eine Welt exiſtieren. Die Subſtanzen unſerer Welt hätten »weſentliche Kräfte von der Art, daß ſie in Vereinigung miteinander nach dem doppelten umgekehrten Verhältnis der Weiten ihre Wirkungen von ſich ausbreiten«, weshalb »das Ganze, was daher entſpringt, vermöge dieſes Geſetzes die Eigenſchaft der dreifachen Dimenſion habe.« Dieſes Geſetz und daher auch die Dreidimenſionalität des Raumes ſei aber willkürlich und Gott habe bei Erſchaffung der Welt ein anderes wählen können, aus welchem auch »eine andere Ausdehnung von anderen Eigenſchaften und Abmeſſungen gefloſſen wäre.« »Eine Wiſſenſchaft von allen dieſen möglichen Raumesarten wäre unfehlbar die höchſte Geometie, die ein endlicher Verſtand unternehmen könnte«.

dings eine Weiterentwicklung nicht gefunden, aber der Gedanke, daß mehrere verſchiedene Raumesarten möglich ſind, von denen unſer euklidiſcher dreidimenſionaler Raum nur eine iſt, hat vielleicht doch unter anderem die kritiſche Auffaſſung, die die menſchliche Raumanſchauung für kontingent und auf den Menſchen relativ erklärt, mit vorbereitet[1].

Dieſe einzige mathematiſche Jugendleiſtung Kants iſt alſo auch nur im Zuſammenhang mit ſeiner Philoſophie fruchtbar geworden. Es bleibt alſo dabei: Kant iſt auf mathematiſch-philoſophiſchem Gebiet nicht produktiv, ſondern lediglich kritiſch.

Hierin drückt ſich nun, wie ſchon geſagt, ſowohl ein Grundzug ſeiner Perſönlichkeit, wie auch ſeiner Zeit aus.

Die Mathematik des ausgehenden 17. und des 18. Jahrhunderts iſt gekennzeichnet durch ihre außerordentliche Fruchtbarkeit im Entwerfen neuer analytiſcher (echt abendländiſcher) Diſziplinen[2]. Es

---

Kant erfaßt alſo mit genialer Phantaſie die Möglichkeit der mehrdimenſionalen und vielleicht ſogar der nichteuklidiſchen Geometrieen, und zwar ſoll die »Raumesart« abhängig von den Wirkungsgeſetzen der phyſikaliſchen Kräfte ſein. (Alſo im gewiſſen Sinn wie bei Riemann und Einſtein.)

Dieſer genialen Grundidee ſteht allerdings ein gewiſſer Mangel an mathematiſcher Präziſierung gegenüber. (Wie ſoll denn nach Kant das Wirkungsgeſetz der Kräfte des näheren die »Raumesart« beſtimmen? Vielleicht meint er, daß $K = -\frac{m}{r^s}$ die Dimenſionenzahl $s+1$ nach ſich zieht.)

Ob Kant 1747 als erſter den Gedanken der mehrdimenſionalen Geometrie faßte, iſt nicht leicht zu entſcheiden. Bereits die italieniſchen Algebraiker des 15. Jahrhunderts und ſpäter Viète verwandten »hypergeometriſche« Ausdrücke zur Bezeichnung der höheren Potenzen (z. B. quadratoquadratum für die 4., und cubocubocubus für die 9. Potenz; vgl. Zeuthen, Geſchichte d. Math. im 16. u. 17. Jahrh. S. 94, 97–98). Später haben ſich Pascal und Leibniz mit vier- und mehrdimenſionaler Geometrie beſchäftigt. Leibniz glaubte allerdings bewieſen zu haben, daß der wirkliche Raum dreidimenſional ſein müſſe und gibt nur phyſikaliſche Beiſpiele (»Gewicht« und »Wucht« dreidimenſionaler Gebilde) für höhere Mannigfaltigkeiten. (Vgl. Mahnke, Neue Einblicke in die Entdeckungsgeſchichte der höheren Analyſis, S. 32: beſ. Anm. 3 u. 4.)

Im Grunde gibt freilich ſchon das antike, auf Hippokrates von Chios (5. Jahrh.) zurückgehende Verfahren, durch »Einſchieben« einer beliebigen Folge von mittleren Proportionalen höhere Potenzen (bzw. Wurzeln) auszudrücken die Möglichkeit der Verallgemeinerung, beiſpielsweiſe des Deliſchen Problems, auf n Dimenſionen.

1) Vgl. Adickes l. c. Bd. I, Seite 85, Anm. 1.

2) In dieſer Zeit entſtehen: Höhere Algebra, Zahlentheorie, Differential- und Integralrechnung, Variationsrechnung, die Lehre von den Differentialgleichungen (alſo eigentlich die geſamte reelle Analyſis); im 19. Jahr-

wurde in dieſer Zeit der Grund gelegt für die meiſten modernen mathematiſche Entwicklungen. Die enorme Fruchtbarkeit Eulers iſt etwa der Exponent für den Höhepunkt dieſes Zeitalters. Gegen Ende des Jahrhunderts zeigen ſich allenthalben kritiſche Bedenken: Lagranges Theorie der abgeleiteten Funktionen in der Differentialrechnung u. ä. Bald darauf (Anfang des 19. Jahrh.) folgen die vielfachen Bemühungen von Gauß um ſtrenge Begründung auf den verſchiedenſten Gebieten (Zahlentheorie, Fundamentalſatz der Algebra, Theorie der komplexen Zahlen, Reihenkonvergenz uſw.).

Auf philoſophiſchem Gebiet bezeichnet Kant das τέλος der dogmatiſchen Metaphyſik des 17. und 18. Jahrhunderts in der doppelten Bedeutung von Ziel und Ende, Vollendung und Auflöſung. Er iſt zugleich der ſouveräne Beherrſcher der ſubtilen Begriffsgefüge des deutſchen Rationalismus und andererſeits tief beeinflußt von Humes Skepſis. Denn er läßt dieſe Skepſis in ihrer Negativität, d. h. als ſolche wirken. Er verſteht es nicht wie Leibniz, lediglich das Poſitive aus den mannigfaltigen überlieferten philoſophiſchen Strömungen und Gedankengebäuden herauszuziehen und die verſchiedenen Tendenzen verſöhnend zu einem höheren Ganzen zu vereinigen. Sondern ſeine Grundabſicht iſt kritiſch, d. h. ſcheidend oder Grenzen ſetzend. Kant glaubt nicht an das »Primat des Poſitiven«. Die menſchliche Vernunft iſt einem »wohlbeſtallten Richter« zu vergleichen, der jedem das Seine gibt, wozu gehört, daß jeder Anſpruch wohl unterſchieden, im Einzelnen geprüft und in ſeine Grenzen zurückgewieſen wird. Die Grenze enthält aber ihrem Sinne nach dieſe Negativität, daß bei ihr der Anſpruch und die Möglichkeit des Fortgangs aufhört. Während alſo Leibnizens Kontinuitätsprinzip alle Grenzen zu überfluten beſtrebt iſt, kämpft Kant immer wieder gegen das Ineinanderlaufenlaſſen der Grenzen[1].

Man kann nun dieſe kritiſche Grundtendenz Kants von zwei Geſichtspunkten aus würdigen, je nachdem man in Kant den Erkenntniskritiker, oder den »Metaphyſiker« bzw. Religionsphiloſophen für das Primäre hält. Eine dritte Möglichkeit, die aber für unſere Problematik weniger naheliegend iſt, wäre Kant als Kritiker der Urteilskraft (bzw. des »Geſchmacks«) oder zugeſpitzt: als »Kritiker

---

hundert kommt dann nur die komplexe Funktionentheorie und die allerdings ſehr weitreichende Gruppen- und Invariantentheorie und die Mengenlehre als grundſätzlich neu hinzu.

1) Mahnke hat dieſen Unterſchied von Leibniz und Kant (unter fernerer Berückſichtigung Hegels) im Anfang ſeine Abhandlung »L.'s Syntheſe uſw.« ſchön herausgearbeitet (l. c. S. 1 ff.).

der Kritik« zu faſſen. (Vgl. für die univerſelle Bedeutung auch dieſer Problemrichtung [die auf die philoſophiſche Erfaſſung des Problems der Individualität abzielt] das geiſtreiche Buch A. Bäumlers, Kants Kritik der Urteilskraft, Bd. I, Halle 1923.)

Ähnlich wie in der Leibniz-Forſchung iſt neuerdings bei der Interpretation Kants der erkenntniskritiſche hinter dem »metaphyſiſchen« Geſichtspunkt zurückgetreten[1]. Man ſieht nicht mehr das Syſtem der Philoſophie von dem erkenntniskritiſchen Unterbau allein getragen, ſondern dieſen mindeſtens in demſelben Maße von (offenen der verſtekten) metaphyſiſch-religöſen Grundſtellungnahmen.

Nimmt man nun dieſen »modernen« Standpunkt ein, dem unſere »ontologiſche« Grundhaltung entſpricht, (die Frage ſeines Vorzugs vor dem früheren kann hier nicht näher erörtert werden), ſo wird man ſagen müſſen: das Grundproblem des Kantiſchen wie auch ſchon des Leibnizſchen Denkens iſt die richtige Fixierung des Verhältniſſes von Gott und Menſch; dieſer Frage dient ſeine theoretiſche wie praktiſche Philoſophie gleichermaßen und — was für den gegenwärtigen Zuſammenhang ausſchlaggebend iſt — die Antwort auf dieſe Frage beſtimmt auch Kants Philoſophie der Mathematik.

In der Frageſtellung iſt ſich Kant mit Leibniz einig, in der Beantwortung weitgehend von ihm unterſchieden. Während Leibniz mit der Myſtik (beſonders der deutſchen) eine tiefe Weſensgemeinſchaft zwiſchen Gott und Menſch annimmt, ſo daß wir im Grunde alle Dinge nur durch Gott ſchauen[2], betont Kant das Trennende, und lehrt die abſolute Tranſzendenz Gottes.

Der entſcheidende Unterſchied des endlichen und unendlichen Geiſtes iſt nun, daß des erſten Erkenntnisvermögen in getrennte »Stämme« zerfällt (»die vielleicht aus einer gemeinſchaftlichen, aber

1) Für Leibniz denke man an den Gegenſatz der Werke Ruſſells (1900), Couturats (1901), Caſſirers (1902) und den ſpäteren Interpretationen von Baruzi (1905, 1909), Kabitz (1909), Pichler (1909–24), Köhler (1913), Jagodinſky (1913), Heimſoeth (1914, 1922), Mahnke (ſeit 1907) u. a. (In früherer Zeit iſt allerdings gerade für den religiöſen Urſprung der Leibnizſchen Philoſophie eingetreten H. Ritter [1853!], auch Windelband [ſeit 1878] und Dilthey [ſeit 1900] ſind nicht einſeitig erkenntnistheoretiſch eingeſtellt.)

Für Kant iſt die neue Interpretationsrichtung von Heimſoeth N. Hartmann, M. Wundt und (in anderer Hinſicht) J. Ebbinghaus im Gegenſatz zu H. Cohen, Natorp, Caſſirer und auch Windelband, Rickert, Lask anzuführen.

2) Vgl. Mahnke, »L.'s Syntheſe uſw.«, S. 114 (Baruzi) und S. 136 (Heimſoeth).

uns unbekannten Wurzel entſpringen« (B 29)[1]), nämlich Sinnlichkeit und Verſtand. Dem Menſchen iſt weder eine »intellektuelle Anſchauung« noch ein »anſchauender Verſtand« (intellectus archetypus) zu teil geworden. »Begriffe ohne Anſchauungen ſind leer und Anſchauungen ohne Begriffe blind«. »Anſchauungen und Begriffe machen die Elemente aller unſerer Erkenntnis aus, ſo daß weder Begriffe ohne ihnen auf einige Art korreſpondierende Anſchauung, noch Anſchauung ohne Begriffe ein Erkenntnis abgeben können«. Der Menſch iſt alſo – im Gegenſatz zu Gott, der die Einheit beider Stämme beſitzt (»intellektuelle Anſchauung« bzw. »anſchauenden Verſtand«) – gebunden an eine ſinnliche Grundlage ſeiner Erkenntniſſe[2]; dieſe überſchreiten – auch ſofern ſie a priori ſind – niemals die Grenzen der möglichen Erfahrung. Der tiefere Grund dieſer Annahme von der radikalen Getrenntheit von Verſtand und Sinnlichkeit liegt in der metaphyſiſch-religiöſen Überzeugung Kants, daß der Menſch, als geſchaffenes Weſen, ſelbſt keine ſchöpferiſchen Fähigkeiten beſitzt. Er hat daher weder einen (»urbildlichen«) »intuitiven Verſtand« (intellectus archetypus) »durch deſſen Vorſtellung zugleich die Objekte dieſer Vorſtellung exiſtierten« (B 139), »durch deſſen Vorſtellung die Gegenſtände zugleich gegeben und hervorgebracht würden« (B 145), noch eine intellektuelle (»urſprüngliche«) Anſchauung«, einen »intuitus orginarius«, d. h. »eine ſolche, durch die ſelbſt das Daſein des Objekts der Anſchauung gegeben wird« (»als welche ... allein dem Urweſen, niemals aber einem, ſeinem Daſein ſowohl als ſeiner Anſchauung nach ... abhängigen Weſen zuzukommen ſcheint«) (B 72). Sondern ſeine Anſchauung iſt ſinnlich (d. h. »abgeleitet«, intuitus derivativus) d. h. rezeptiv, und ſein Verſtand bloß denkend (d. h. der Bilder bedürftig, intellectus ectypus), d. h. Gegebenes verknüpfend. (Vgl. Kritik der Urteilskraft § 76 – 77).

Nun bezieht ſich allerdings der Ausdruck »Erkenntnis« bei Kant zunächſt immer nur auf wirkliche Gegenſtände, alſo nicht auf Gegenſtände der reinen Mathematik[3], auf die es uns hier an-

1) Es bedeutet A die 1. Auflage, B die 2. Auflage der Kritik der reinen Vernunft: AK den III. Band der Kant-Ausgabe der Berliner Akademie (die beiden Zahlen zeigen die Seite und Zeile an; dieſe Zitierweiſe wird bei nicht in extenso gegebenen Zitaten benutzt).

2) »Die Anſchauung findet nur ſtatt, ſofern uns der Gegenſtand gegeben wird; dieſes aber iſt wiederum, uns Menſchen wenigſtens, nur dadurch möglich, daß er das Gemüt auf gewiſſe Weiſe afficiere.« (B 33.)

3) »... alle mathematiſchen Begriffe [ſind] für ſich nicht Erkenntniſſe; außer, ſofern man vorausſetzt, daß es Dinge gibt,

kommt. Man könnte alſo denken die geſamte Erkenntnistheorie Kants ginge der Mathematik nichts an.

Hier greift aber ein zweites Moment ein, welches (allerdings aus demſelben metaphyſiſchen Motiv letztlich entſpringend) die Mathematik auf das Formale eines möglichen Gegenſtandes der Erfahrung beſchränkt und zwar genauer auf die anſchauliche Form, die ſog. reine Anſchauung.

Kant trennt nämlich, wiederum im Gegenſatz zu Leibniz, ſcharf Logik, Metaphyſik und Mathematik, zerſpaltet alſo die »Univerſalmathematik« in drei heterogene Stücke. Außer zwiſchen Anſchauung und Begriff, unterſcheidet er reinlich die »analytiſchen« und »ſynthetiſchen« Urteile und Deduktionen. Die formale Logik wird zu einer von der Art ihrer Gegenſtände ganz abſehenden, rein analytiſchen Disziplin geſtempelt, die allein auf dem Satz von Widerſpruch beruht. (B 74ff.) Das im Grunde metaphyſiſche Prinzip des zureichenden Grundes wird aus ihr entfernt (was ſchon Wolff tat) und damit ihr univerſal-mathematiſcher Charakter zerſtört. Denn die analytiſche Argumentation iſt iſoliert gänzlich unfruchtbar, zergliedert bloß das in dem Begriff ſchon in verworrener Weiſe Enthaltene und macht es deutlich, erweitert aber die Erkenntnis nicht. (B 9ff.)

Die Entwertung des Formal-Analytiſchen zu einer bloßen unfruchtbaren Zergliederung und Verdeutlichung der verworrenen Begriffe ſteht im ſcharfen Gegenſatz zu Leibniz, für den jene »bloße Verdeutlichung« einen ganz anderen Akzent trägt, indem in ihr ſich eine Repräſentation von Gottes Ideenwelt durch die endlichen Geiſter ausdrückt. Der Gegenſatz »verworren – deutlich« iſt für Kant eine belangloſe oder nebenſächliche Angelegenheit. (A XXI. [Vorrede], B 9.) Für Leibniz liegt darin die ganze Spannung zwiſchen Gott und Menſch und zugleich auch die Möglichkeit ihres Ausgleichs. Darin, daß Kant (ſeit 1770) Anſchauung und Denken radikal trennt, wird dieſe Brücke vom Menſchen zu Gott abgebrochen. Es liegt daher in der Kantiſchen Konzeption des Analytiſchen ein tiefer metaphyſiſcher (bzw. religiöſer) Sinn. Das ſchon erwähnte ontologiſche Grundmotiv macht ſich geltend: Der Menſch darf als creatura nicht von ſich aus ſchöpferiſch ſein, auch ſein rein formaler Verſtandesgebrauch bringt nicht Neues hervor, ſondern zergliedert nur ſchon verworren Vorhandenes, bereits Geſchaffenes.

---

die ſich nur der Form jener reinen ſinnlichen Anſchauung gemäß uns darſtellen laſſen.« (B 147.)

Die Mathematik war ſchon bei Leibniz als scientia imaginationis (bzw. sc. rerum imaginabilium) im Gegenſatz zur Metaphyſik als scientia rerum intellectualium bezeichnet worden. Allein die Idee der ſymboliſchen Repräſentation überwand auch hier die Schärfe des Gegenſatzes. Ganz anders bei Kant:

Die Mathematik iſt bei ihm eine fruchtbare, die Erkenntnis erweiternde Disziplin, deshalb notwendig ſynthetiſch, und zwar a priori. Alſo iſt ſie, wie alle Syntheſis a priori auf Anſchauung ebenſo wie auf Begriffe angewieſen; Anſchauung iſt aber, auch ſofern ſie rein iſt, immer nur die Form möglicher (natürlich menſchlicher) Erfahrung[1]. Alle Begriffe und Grundſätze beziehen ſich, »ſo ſehr ſie auch a priori möglich ſein mögen, dennoch auf empiriſche Anſchauung, d. i. data zur möglichen Erfahrung.« Sonſt wären ſie ein bloßes Spiel der Einbildungskraft oder des Verſtandes. Dafür ſind die Begriffe der Mathematik ein Beiſpiel und zwar ſowohl in ihren reinen Anſchauungen als in den abgeſonderten Begriffen. Die anſchaulichen mathematiſchen (beſonders geometriſchen) Grundſätze würden, »obwohl ſie völlig a priori im Gemüt erzeugt werden« gar nichts bedeuten, »könnten wir nicht immer an Erſcheinungen (empiriſchen Gegenſtänden) ihre Bedeutung darlegen«. Ein »abgeſonderter Begriff« iſt aber »ſinnlich zu machen, d. i. das ihm korreſpondierende Objekt in der Anſchauung darzulegen, weil ohne dieſes, der Begriff (wie man ſagt) ohne Sinn d. i. ohne Bedeutung bleiben würde«. Hierin liegt wiederum das ontologiſche Moment der Unfruchtbarkeit des Menſchen, dem nur der intuitus derivativus, vergönnt iſt: aller abgeleiteten Anſchauung muß Affektion zugrunde liegen. (Vgl. Anm. 2 zu S. 293.) »Die Mathematik erfüllt dieſe Forderung durch Konſtruktion der Geſtalt, welche eine den Sinnen gegenwärtige (obzwar a priori zuſtande gebrachte) Erſcheinung iſt. Der Begriff der Größe ſucht in eben der Wiſſenſchaft ſeine Haltung und Sinn in der Zahl, dieſe aber an den Fingern, den Korallen des Rechenbretts, oder den Strichen und Punkten, die vor Augen geſtellt werden«. (B 298 – 99.)

Allerdings entſpricht dieſer Anſpielung auf die ſinnlichen Symbole, mit denen man rechnet, nicht die tiefſte Meinung Kants über das Weſen von Größe und Zahl. Dieſe iſt vielmehr bezogen auf die Zeit, wie wir früher (§ 6b II) ausführlich darlegten. Die Größe eines quanti kann nur durch Syntheſis der Teile und durch wiederholte Hinzuſetzung der Einheit zu ſich ſelbſt gedacht werden.

1) Vgl. dazu B 298; AK 204, 15–25.

(B 454, 456; vgl. auch B 300, AK. 205, 24–28). Und die Zahl iſt ja »die Einheit des Syntheſis des Mannichfaltigen einer gleichartigen Anſchauung überhaupt, dadurch daß ich die Zeit ſelbſt in der Apprehenſion der Anſchauung erzeuge.« (B 182.) Das eigentliche ſinnliche Schema der Zahl iſt alſo eher ein gleichförmiger rhythmiſcher Vorgang, wie Pendelſchlag, Pulsſchlag, Herzſchlag u. dgl.

Dies wird auch noch durch die folgende bekannte Stelle der »Methodenlehre« beſtätigt: (B 751 — 752). Wir können unſere mathematiſchen Begriffe »in der Anſchauung a priori beſtimmen, indem wir uns im Raume und in der Zeit die Gegenſtände ſelbſt durch gleichförmige Syntheſis ſchaffen, indem wir ſie als bloße Quanta betrachten«[1] Dies iſt »der Vernunftgebrauch durch Konſtruktion der Begriffe«. ». . . im Raume eine Anſchauung a priori zu beſtimmen (Geſtalt), die Zeit zu teilen (Dauer) oder bloß das allgemeine der Syntheſis von einem und demſelben in der Zeit und dem Raume und die daraus entſpringende Größe der Anſchauung überhaupt (Zahl) zu erkennen, das iſt ein Vernunftgeſchäft durch Konſtruktion der Begriffe und heißt mathematiſch.« [Der Gegenſatz iſt: »ein Vernunfterkenntnis aus Begriffen, welches philoſophiſch genannt wird«.][2]

Damit iſt alſo die geſamte Mathematik, nicht etwa nur die Geometrie, ſondern auch die Arithmetik, an die menſchlich-kontingenten »Anſchauungsformen« Raum und Zeit gebunden. Andere Vernunftweſen, obwohl ſie als endliche immer irgendwelcher Anſchauungsweiſen bedürfen werden, um ihre Begriffe ſinnlich zu machen[3], können andere Formen der Anſchauung haben. »Wir können nur vom Standpunkt eines Menſchen vom Raum, vom ausgedehnten Weſen uſw. reden«. (B 42.)

»Wir können von den Anſchauungen anderer denkender Weſen gar nicht urteilen, ob ſie an die nämlichen Bedingungen gebunden

---

1) Merkwürdig iſt die Übereinſtimmung mit Ariſtoteles, Met. K 3 (1061 a 34): »ἢ ποσά ἐστι καὶ συνεχῆ . . . θεωρεῖ« (ſ. o. S. 256 f., 269).

2) Vgl. dazu B 151–152 (AK 119, 25–120, 15) über die »synthesis speciosa«, die »figürliche Syntheſis der tranſzendentalen Einbildungskraft; B 153–155 (AK 120, 31 – 122, 6) über die Notwendigkeit des Ziehens einer Linie, des Beſchreibens eines Zirkels uſw. und die Bemerkungen über das »Schema der ſinnlichen Begriffe (als der Figuren im Raume)« und der reinen Verſtandesbegriffe, wie z.B. die Zahl: B 179–81 (beſ. 181), AK 136, 22–35.

3) Vgl. B 72–73 (AK 72, 23 – 73, 4); B 138 f. (AK 112, 12–33); B 145 f. (AK 116, 10–29); Kritik der Urteilskraft § 76–77.

ſeien, welche unſere Anſchauung einſchränken und für uns allgemein gültig ſind«. (B 43.) – Entſprechend für die Zeit: »Die Zeit iſt nichts anderes als die Form des inneren Sinnes, d. i. des Anſchauens unſerer ſelbſt und unſeres inneren Zuſtandes«. (B 49.) Die Zeit iſt alſo lediglich »eine ſubjektive Bedingung unſerer (menſchlichen) Anſchauung ... und an ſich, außer dem Subjekte, nichts.« (B 51.)

Mathematik iſt alſo gewiſſermaßen scientia imaginationis humanae, durch und durch »anthropologiſch befangen«, auch in ihren abſtrakteſten Spekulationen, die ja durchgehends den Begriff der Zahl weſentlich mit gebrauchen.

Damit verzichtet Kant völlig auf jede Möglichkeit einer Univerſalmathematik im Leibnizſchen Sinn. Sein Verzicht bedeutet auch mathematiſch eine klaſſiziſtiſche, man möchte ſagen: eine »reaktionäre« Wendung. Die Statuierung der für den Menſchen abſoluten Geltung der euklidiſchen dreidimenſionalen Geometrie iſt z. B. eine Konſequenz dieſer Wendung. Derſelbe Kant, der in ſeiner Jugendſchrift von 1747 die Idee der n-dimenſionalen und vielleicht auch nichteuklidiſchen Geometrie faßte (deren Entwicklung ſich damals anbahnte: Saccheri 1733, Lambert 1766), verwirft die freie »abendländiſche« Konzeption der Geometrie (Leibnizens geometriſche Charakteriſtik) und kehrt zur klaſſiſch-antiken Auffaſſung (über die im ſpäteren Altertum ſchon Geminus hinausging) zurück. Damit trennt ſich ſeine Philoſophie der Mathematik von der poſitiven Forſchung. Es muß aber hinzugefügt werden, daß auch in der Verfolgung der Kantiſchen Gedankengänge die Möglichkeit allgemeinerer »Geometrieen« in »analytiſchem« Gewande, d. h. als arithmetiſcher Gebilde gegeben iſt. Allerdings ginge dann jene abſtrakt-»analytiſche« Geometrie natürlich im Kantiſchen Wortſinne ſynthetiſch vor, nämlich als arithmetiſche Konſtruktion, die ſich auf die reine Anſchauung der Zeitreihe gründet. Es wäre alſo vielleicht hier die Möglichkeit gegeben, »Räume« außermenſchlicher Vernunftweſen in ihrem arithmetiſchen Abbild zu ſtudieren. Aber freilich gäbe es nach Kant kein Prinzip, aus der unendlichen Fülle ſolcher arithmetiſchen Konſtruktionen die geometriſch relevanten herauszuheben, da uns die Art der »Raumanſchauung« außermenſchlicher Weſen nicht bekannt werden kann[1].

1) Die moderne Verwendung nichteuklidiſcher »Räume« in der theoretiſch-phyſikaliſchen Konſtruktion (Relativitätstheorie, Quantentheorie) war Kant in ſeiner Jugendſchrift von 1747 nicht ganz fremd. Er hätte jenen Gedanken auch in ſeiner kritiſchen Zeit (von 1770 ab) nicht unbedingt aufzugeben brauchen, denn die Natur iſt ja nur ſo weit euklidiſch-räumlich, als ſie »in die Sinne

Kants Geometrie ist also die Wissenschaft vom »materialen Wesen« Raum, vom Anschauungsraum. Als solche ist sie durchaus berechtigt und in ihrer Art einzig[1]. Kant erkannte freilich nicht, daß die abendländische Mathematik längst ihrer inneren Struktur nach in eine weitaus formalere Sphäre, die rein arithmetisch-analytische, vorgestoßen war. Durch seine weitgehende Parallelisierung von Zeit und Raum entging ihm, wenigstens zu einem gewissen Teile, der tiefe Unterschied von Arithmetik und Geometrie. Aber auch bei ihm ist doch Arithmetik Wissenschaft vom transzendentalen Schema der Zeitreihe, nicht von der Zeit selbst, während sich Geometrie auf das sinnliche Schema der Raumfigur bezieht[2].

Diese Lehre Kants von der Arithmetik als Wissenschaft vom zeitlichen Schema, der Zahl, ist das wichtigste Stück seiner Philosophie der Mathematik. Sieht man von Verschiedenheiten der Terminologie ab, so fällt die Kantische Grundauffassung ziemlich genau mit der modernen intuitionistischen (Brouwers) zusammen. Es ist eine Konsequenz dieser Auffassung, daß Mathematik wesentlich die Beherrschung des Unendlichen durch den endlichen Geist in der Form des indefiniten gesetzmäßigen Prozesses ist (obwohl das Kant ausdrücklich nirgends sagt). Das diese Beherrschung damit eng begrenzt ist im Verhältnis zum vollen Wesen des Unendlichen, ist offenbar. Die zweite und dritte Klasse der dialektischen Vernunftschlüsse, die auf den »transzendentalen Begriff der absoluten Totalität« einer unendlichen Reihe von Bedingungen bzw. auf die »absolute synthetische Einheit aller Bedingungen der Möglichkeit der Dinge überhaupt« gehen, führen zu

---

fällt.« (»... leges sensualitatis erunt leges naturae, quatenus in sensus cadere potest«; Dissert. von 1770, § 15 E). Es ließe sich denken, daß die Naturlehre gezwungen ist, auch auf die Natur als Ursache der räumlichen Erscheinungen einzugehen, sofern sie nicht in die Sinne fällt. Wenn etwa schon die Atome nicht sinnlich erscheinen, ist es dann notwendig, daß die den sinnlichen Erscheinungen zugrunde liegende Natur durch ein sinnliches Modell adäquat dargestellt werden kann? Im Grunde ist das gerade nach Kants eigener dynamischer Theorie der Materie nicht der Fall. Die die Materie konstituierenden anziehenden und abstoßenden Kräfte sind keine sinnlichen dabilia. Es wäre also die Anwendung nichteuklidischer und mehrdimensionaler Konstruktionen in dem unsichtbaren Mechanismus der Natur nicht unmöglich. Nur müssen diese erstens arithmetisch begründbar sein und zweitens die sichtbaren Erscheinungen im euklidischen Raum belassen.

1) Vgl. meine Arbeit »Beiträge zur phänomenologischen Begründung der Geometrie usw.« §§ 12/13, dsl. Jahrbuch, Bd. VI, S. 481 ff. und auch S. 389–96.

2) Vgl. die schon oben zitierte Stelle B 181 (AK 136, 22–35).

Antinomien bzw. zum leeren Ideal. Die Lehre von den Antinomien beſonders zeigt genau, daß es unerlaubt iſt, über das indefinitum hinauszugehen[1].

Wir ſahen (in § 3 b und § 4 b Ende), daß Hilbert das Unendliche als Idee im Kantiſchen Sinne faßt, als abſolute Totalität auf die das Indefinite hinzudrängen ſcheint. Vom Kantiſchen Standpunkt aus iſt dazu warnend zu bemerken, daß die Ideen nichts als Blendwerke und »tranſzendentaler Schein« ſind, von dem ein konſtitutiver Gebrauch nicht gemacht werden darf, ſo notwendig er ſich auch der menſchlichen Vernunft aufdrängt.

Kants Philoſophie der Mathematik hat zwar, recht ausgelegt, nicht die extreme klaſſiziſtiſche Enge, die man ihr manchmal zuſchreibt. Insbeſondere ſchließt ſie nicht die Möglichkeit der »Metageometrien«, als rein mathematiſcher, arithmetiſch-konſtruierter Gebilde aus. Aber ſie hält ſich ſtreng im Rahmen des phänomenologiſch Begründbaren. Die indefiniten Zahlphänomene als Symbole für Transfinites anzuſehen, liegt ihr ganz fern[2]. Damit verſchwinden die weitausgreifenden Leibnizſchen Konzeptionen. Ontologiſch leiſtet die Mathematik keineswegs die Überbrückung des Gegenſatzes Gott – Menſch, ſie muß ſich damit begnügen, als eine interne anthropologiſche Angelegenheit zu gelten, dazu auch noch im Grunde unter der Logik und Kategorienlehre ſtehend, als Wiſſenſchaft der Form der ſinnlichen Phänomene und höchſtens noch der Schemata, die zwiſchen Sinnlichkeit und Verſtand vermitteln. –

An dieſer Stelle nun drängt ſich noch eine Frage auf, deren Beantwortung ſich auch unſere flüchtige hiſtoriſche Betrachtung nicht entziehen kann, umſomehr, als ſich dabei Gelegenheit bietet, die philoſophiſche Grundpoſition Kants bezüglich der Mathematik noch ſchärfer zu charakteriſieren. Wie konnte der große Gedanke der Univerſalmathematik, der aus der antik-mittelalterlichen Tranſzendentalienlehre erwuchs (Parallele des ὂν ἧ ὄν und des Mathematiſch-Formalen ſchon bei Ariſtoteles!), bei Kant ganz verloren gehen? Wie erklärt ſich dieſe befremdende Ausnahme, wo doch Kant in faſt allen Fällen die rationaliſtiſchen Überlieferungen zu ihrem legitimen Ende führt?

1) Der ſubtile Unterſchied, den Kant zwiſchen dem Progreſſus in infinitum und in indefinitum macht (B 538 ff.), offenbar zur Löſung des Leibnizſchen Kontinuumproblems (ſ. o. S. 281 f.), hat auf die heutige Forſchung keinen Einfluß gehabt und iſt wohl nur von rein hiſtoriſchem Intereſſe.

2) Man vergleiche, in mathematiſcher Hinſicht, die Erörterung des Leibnizſchen Verfahrens in dem Abſchnitt über die »Amphibolie der Reflexionsbegriffe«.

Genauer handelt es ſich um Folgendes: Was tritt bei Kant an die Stelle der modi generalis entis, desjenigen über die Geſtalt (εἶδος, species) hinausgehenden (»tranſzendentalen«) Formalen, das ſich auf das Seiende als ſolches bezieht?

Einerſeits kommt hier die reine Analyſis in Betracht, die »Logik des allgemeinen Verſtandesgebrauchs«, die von allem Inhalt abſtrahiert. Aber wir ſahen ſchon: Sie hat es mit der bloßen Form des Denkens zu tun und iſt daher in gewiſſem Sinne tautologiſch, ſie »bringt den Verſtand nicht weiter.« In der Tat iſt die reine Syllogiſtik ganz unfruchtbar[1].

Andererſeits könnte man an die reine Syntheſis begrifflicher Art denken. Hier tritt nun die eigentümliche Wendung ein, daß die Kategorien bei Kant nicht mehr als modi specialis entis, auf die anſchauliche Geſtalt der ſinnlichen Erſcheinung bezogen, auftreten, ſondern als formale Weiſen der Syntheſis ſelbſt. »Ich verſtehe unter Syntheſis in der allgemeinſten Bedeutung die Handlung, verſchiedene Vorſtellungen zueinander hinzuzutun und ihre Mannichfaltigkeit in einer Erkenntnis zu begreifen . . .« (B 103). »Die reine Syntheſis, allgemein vorgeſtellt, gibt den reinen Verſtandesbegriff« (= Kategorie)[2].

Und nun iſt das Merkwürdige, daß die reine Analyſis und Syntheſis in ihren Modifikationen eine eigentümliche formale Analogie zeigen, wodurch der berühmte »Leitfaden zur Entdeckung der reinen Verſtandsbegriffe«, auf den Kant ſelbſt einen ſo ungeheuren Wert legt, nämlich der Übergang von der Logik der Urteilsformen zu der Kategorientafel, erreicht wird. »Dieſelbe Funktion, welche den verſchiedenen Vorſtellungen in einem Urteile Einheit gibt, die gibt auch der bloßen Syntheſis verſchiedener Vorſtellungen in einer Anſchauung Einheit, welche, allgemein ausgedrückt, der reine Verſtandesbegriff heißt. Derſelbe Verſtand alſo, und zwar durch eben dieſelben Handlungen, wodurch er in Be-

1) Daß dies Leibniz entging, liegt daran, daß er ſtillſchweigend »ſynthetiſche« Momente in ſeine Univerſalmathematik mit aufnahm.

2) Bemerkenswert iſt auch die Fortſetzung der Stelle: »Ich verſtehe aber unter dieſer Syntheſis diejenige, welche auf einem Grunde der ſynthetiſchen Einheit a priori beruht: ſo iſt unſer Zählen (vornehmlich iſt es in größeren Zahlen merklicher) eine Syntheſis nach Begriffen, weil ſie nach einem gemeinſchaftlichen Grunde der Einheit geſchieht (z. B. der Dekadik). Unter dieſem Begriffe wird alſo die Einheit in der Syntheſis des Mannigfaltigen notwendig.« (B 104). – Sie zeigt, wie eng das arithmetiſche Denken mit der reinen Syntheſis zuſammenhängt.

griffen, vermittels der analytiſchen (!) Einheit, die logiſche Form des Urteils zuſtande brachte, bringt auch, vermittels der ſynthetiſchen Einheit des Mannichfaltigen in der Anſchauung überhaupt, in ſeine Vorſtellungen einen tranſzendentalen Inhalt, weswegen ſie reine Verſtandesbegriffe heißen, die a priori auf Objekte gehen, welches die allgemeine Logik nicht leiſten kann«. (B 104 – 105.) Es iſt hier von einer »analytiſche« und einer »ſynthetiſche« Einheit gebenden Funktion die Rede, die formal-analog ſind. Das allgemeinſte formale Einheitsprinzip wird alſo über den Unterſchied analytiſch – ſynthetiſch noch hinausgehen müſſen. Es ſcheint hier alſo die höchſte Stufe der Formaliſierung erreicht, ohne daß es ſich doch in jedem Fall um bloße Begriffszergliederung handeln müßte. Dieſes Einheitsprinzip wird unter dem Titel »Verbindung« im zweiten Abſchnitt der transc. Deduktion (§ 15) näher behandelt. Dieſer Begriff bedeutet die »Vorſtellung der ſynthetiſchen Einheit des Mannichfaltigen« in einem höchſt allgemeinen Sinn. Es handelt ſich nicht etwa um die Kategorie der Einheit, denn Kategorien ſetzen logiſche Funktionen in Urteilen, alſo ſchon Verbindung voraus. Sondern wir müſſen »dieſe Einheit (als qualitative, § 12) noch höher ſuchen, nämlich in demjenigen, was ſelbſt den Grund der Einheit verſchiedener Begriffe in Urteilen, mithin die Möglichkeit des Verſtandes ſogar in ſeinem logiſchen Gebrauche enthält«. (B 131.) Kant weiſt hier zurück auf § 12, wo im Anſchluß an das traditionelle »unum transcendens« von der »qualitativen Einheit des Begriffs« die Rede iſt, »ſofern darunter nur die Einheit der Zuſammenfaſſung des Mannigfaltigen der Erkenntnis gedacht wird, wie etwa die Einheit des Thema in einem Schauſpiel, einer Rede, einer Fabel«. (B 114.)

Hier iſt alſo der Punkt, wo die Lehre von den Tranſzendentalien bei Kant fortwirkt, in der höchſten und formalſten Idee der Einheit bzw. der Syntheſis, und man könnte hier den Ort für eine mögliche Univerſalmathematik zu finden glauben. Freilich wird dies unum transcendens nicht mehr als modus entis generalis, als Charakter des Seienden als ſolchen angeſehen. Die transcendentalia, »dieſe vermeintlich tranſzendentalen Prädikate der Dinge [unum, verum, bonum] ſind nichts Anderes als logiſche Erforderniſſe und Kriterien aller Erkenntnis der Dinge überhaupt, und legen ihr die Kategorien der Quantität ... zum Grunde, nur daß ſie [sc. die Alten] dieſe, welche eigentlich material, als zur Möglichkeit der Dinge ſelbſt gehörig, genommen werden müßten, in der Tat nur in formaler Bedeutung als zur logiſchen

Forderung in Anſehung jeder Erkenntnis gehörig brauchten, und doch dieſe Kriterien des Denkens unbehutſamer Weiſe zu Eigenſchaften der Dinge an ſich ſelbſt machten.« (B 113–114.) Man ſieht hier ſehr deutlich, wie ſich der Sinn des Ausdrucks »tranſzendental« wandelt aus einem dem Sein als ſolchen zugehörigen Charakter in ein Kriterium des Denkens. Der Unterſchied der »qualitativen Einheit« gegenüber den Kategorien iſt jedoch in gewiſſem Sinn immer noch der zwiſchen formal und material, wobei mit material gemeint iſt, daß die Möglichkeit der Gegenſtände in Frage ſteht, während formal ohne Anſehen des Gegenſtandes bedeutet. In der Tat muß der analytiſche Verſtandesgebrauch ja auch mit getroffen werden und dieſer iſt ja unabhängig von der Möglichkeit irgend eines Gegenſtandes.

Von hier aus führt nun Kants Gedankengang weiter zur »urſprünglich-ſynthetiſchen Einheit der Apperzeption, die ſelbſt erſt die analytiſche Einheit des Verſtandes möglich macht.« Sie iſt »der höchſte Punkt, an dem man allen Verſtandesgebrauch, ja ſelbſt die ganze Logik und, nach ihr, die Tranſzendental-Philoſophie heften muß, ja dieſes Vermögen iſt der Verſtand ſelbſt«. (B 133 Anm., AK 109 Anm., Z. 35–38.) Dieſe ſynthetiſche Einheit des Bewußtſeins iſt die Bedingung »unter der jede Anſchauung ſtehen muß, um für mich Objekt zu werden«. Denn alle meine Vorſtellungen müſſen unter der Bedingung ſtehen, »unter der ich ſie allein als meine Vorſtellungen zu dem identiſchen Selbſt rechnen« und alſo »als in einer Apperzeption ſynthetiſch verbunden, durch den allgemeinen Ausdruck 'Ich denke' zuſammenfaſſen kann«.

Man könnte denken, mit dieſer höchſten formalen Spitze ſei nun ein weſentlich univerſaler Charakter jeder Erkenntnis überhaupt erreicht. Aber Kant ſagt: Dieſer Grundſatz iſt, trotz ſeiner unvermeidlichen Geltung als erſtes Prinzip des menſchlichen Verſtandes, dennoch nicht jedem Verſtande überhaupt zu eigen. »Derjenige Verſtand, durch deſſen Selbſtbewußtſein zugleich das Mannichfaltige der Anſchauung gegeben würde, ein Verſtand, durch deſſen Vorſtellung zugleich die Objekte dieſer Vorſtellung exiſtierten, würde einen beſonderen Aktus der Syntheſis des Mannichfaltigen zu der Einheit des Bewußtſeins nicht bedürfen, deren der menſchliche Verſtand, der bloß denkt, nicht anſchaut, bedarf«[1]. (B 138–139.)

1) Vgl. dazu die weitere Stelle in § 21. (B 145.): die Kategorien, hätten für einen Verſtand, »der ſelbſt anſchauete, wie etwa ein göttlicher, der nicht

Es iſt alſo nach Kant der ganze Gedanke der Einheit der Apperzeption überhaupt nur ſinnvoll, weil unſer Verſtand nicht anſchauend iſt. Weil der Menſch als Geſchöpf (ens creatum) nicht ſchöpferiſch iſt (ſondern nur Gott), deshalb hat er einen lediglich denkenden Verſtand und damit Einheit der Apperzeption, um das ihm gegebene, nicht von ihm aus einheitlichem Grunde hervorgebrachte, zerſtreute Mannigfaltige zu verbinden. Alſo auch hier wieder derſelbe, uns genugſam bekannte ontologiſche Grundgedanke an entſcheidender Stelle!

Damit iſt die Idee des unum transcendens nicht bloß ins Subjektive, ſondern ſogar ins Anthropologiſche gewandt, das einheitsbildende Prinzip kommt nicht dem Seienden ſelbſt, auch nicht dem Erkennen überhaupt, ſondern der Erkenntnisfunktion des Menſchen, bzw. höchſtens des geſchaffenen endlichen Vernunftweſens überhaupt zu.

Damit iſt aber die Möglichkeit, eine »rein ſynthetiſche« Univerſalmathematik aus der näheren Explikation des unum transcendens oder ſeines bezugsmäßigen (»ſubjektiven«, d. h. genauer noetiſchen) Korrelats zu gewinnen, abgeſchnitten. Sogar die ſynthetiſche oberſte Einheit des Verſtandes iſt relativ auf das endliche denkende Weſen (die Kategorieen im beſonderen ſogar relativ auf den Menſchen, vgl. transc. Deduktion § 21 Schluß; B 145–146, AK 116, 23–29) alſo nicht univerſales Prinzip des Seienden oder korrelativ ſeiner Erkenntnis ſelbſt.

Aber das iſt noch nicht Alles. Man könnte immerhin annehmen, die reinen Verſtandesbegriffe – und a fortiori eine etwaige formale Explikation der reinen Syntheſis der Apperzeption überhaupt in eine univerſal-mathematiſche Bezugsmannigfaltigkeit – erſtreckten ſich »auf Gegenſtände der Anſchauung überhaupt, ſie mag der unſeren ähnlich ſein oder nicht, wenn ſie nur ſinnlich und nicht intellektuell iſt«. (B 148.) Das gäbe dann wenigſtens eine für alle endlichen Vernunftweſen gültige ſynthetiſche Univerſal-Mathematik, die über Zeit und Raum hinausreichte (wenn auch natürlich Gottes Unendlichkeit ihr unerreichbar bliebe). Aber in Wahrheit erhielte man bloße »leere Begriffe von Objekten«, über deren Möglichkeit wir nicht urteilen können, »bloße Gedankenformen ohne objektive Realität«, weil wir keine Anſchauung zur Hand haben, auf welche die ſynthetiſche Einheit der Apperzeption, welche jene

gegebene Gegenſtände ſich vorſtellte, ſondern durch deſſen Vorſtellung die Gegenſtände ſelbſt zugleich gegeben oder hervorgebracht würden«, keine Bedeutung.

allein enthalten, angewandt werden und so einen Gegenstand bestimmen könnten.« – »Unsere sinnliche und empirische Anschauung kann ihnen allein Sinn und Bedeutung verschaffen«. (B 148–149.) Wie in dem Abschnitt »Von dem Grunde der Unterscheidung aller Gegenstände überhaupt in Phaenomena und Noumena« ausführlich dargelegt wird, entspricht der isoliert, ohne Sinnlichkeit genommenen Synthesis des Verstandes »der transzendentale Gegenstand d. i. der gänzlich unbestimmte Gedanke von etwas überhaupt«. (A 253.) Dieses »transzendentale Objekt« bedeutet aber »ein Etwas = x, wovon wir gar nichts wissen, noch überhaupt ... wissen können, sondern welches nur als ein Korrelatum der Einheit der Apperzeption des Mannichfaltigen in der sinnlichen Anschauung dienen kann, vermittels deren der Verstand dasselbe in dem Begriff eines Gegenstandes vereinigt.« (A 250.) Wir werden verleitet, »den ganz unbestimmten Begriff von einem Verstandeswesen als einem Etwas überhaupt außer unserer Sinnlichkeit« (d. i. »ein Noumenon im negativen Verstande«) «für einen bestimmten Begriff von einem Wesen, welches wir durch den Verstand auf einige Art erkennen können« (d. i. »ein Noumenon im positiven Verstande«) »zu halten«. (B 307.) Die Konsequenz der Aufdeckung dieser Verwechslung ist der Zusammenbruch der traditionellen formalen Ontologie: »Der stolze Name einer Ontologie, welche sich anmaßt, von Dingen überhaupt synthetische Erkenntnisse a priori in einer systematischen Doktrin zu geben ..., muß dem bescheidenen einer bloßen Analytik des reinen Verstandes Platz machen«. (B 303.)[1]

Der Anhang zum Abschnitt über Phänomena und Noumena »von der Amphibolie der Reflexionsbegriffe«, besonders die Anmerkung dazu, gibt in Konsequenz der geschilderten Ablehnung des Noumenons im positiven Verstande eine Kritik der Leibnizschen Philosophie: »... Leibniz intellektuierte die Erscheinungen, so wie Locke die Verstandsbegriffe ... sensifiziert hatte«. »Anstatt im Verstande und in der Sinnlichkeit zwei ganz verschiedene Quellen von Vorstellungen zu suchen, die aber nur in Verknüpfung objektiv gültig von Dingen urteilen können, hielt sich jeder der beiden

1) »Wir haben einen Verstand, der sich problematisch weiter erstreckt als die Sphäre der Erscheinungen, aber keine Anschauung, ja auch nicht einmal den Begriff von einer möglichen Anschauung, wodurch uns außer dem Feld der Sinnlichkeit [d. i. unserer menschlichen Sinnlichkeit in Raum und Zeit!] Gegenstände gegeben und der Verstand über dieselbe hinaus assertorisch gebraucht werden könne« (B 310). —

großen Männer nur an eine von beiden, die ſich ihrer Meinung nach unmittelbar auf die Dinge an ſich bezöge, indeſſen daß die andere nichts that, als die Vorſtellungen der erſten zu verwirren oder zu ordnen«. (B 327.) »In Ermangelung einer tranſzendentalen Logik« wurde Leibniz »durch die Amphibolie der Reflexionsbegriffe hintergangen«. Der fundamentalen Täuſchung der tranſzendentalen Reflexion (»Überlegung«) unterlag er, »weil er der Sinnlichkeit keine eigene Art der Anſchauung zugeſtand, ſondern alle, ſelbſt die empiriſche Vorſtellung der Gegenſtände im Verſtande ſuchte, und den Sinnen nichts als das verächtliche Geſchäft ließ, die Vorſtellungen des erſteren zu verwirren und zu verunſtalten«. (B 332.)

Das iſt nun freilich, ſo wie wir die Sache heute ſehen, ein arges Mißverſtändnis Leibnizens. Denn dieſer meint doch nicht, daß die Sinne als deſtruktives Moment die Vorſtellungen des Verſtandes verunſtalten, ſondern er ſieht auch in der primitivſten, rohſten Sinnlichkeit ein Analogon, eine Repräſentation der klarſten göttlichen Ideenwelt, ein myſtiſches Einsſein und Teilhaben mit dem Göttlichen; alſo iſt das Sinnliche wohl eine unvermeidliche Trübung, die aber doch die Weſensgleichheit von Geſchöpf und Schöpfer in der Tiefe nicht aufheben kann. Aber das Mißverſtändnis iſt ſehr charakteriſtiſch für Kants Grundanſchauung, die jeder Myſtik als »Schwärmerei« durchaus abhold iſt und ſie für überheblich halten muß.

So führt auch die genauere Verfolgung der Möglichkeit einer rein ſynthetiſchen Matheſis universalis auf keinem der einzuſchlagenden Wege zum Ziel; ſie zeigt aber die Grundhaltung, die Kant gegenüber Descartes und Leibniz einnimmt, nunmehr in voller Deutlichkeit.

Kant iſt der ganzen tiefen Struktur ſeiner Philoſophie nach »Intuitioniſt« und darin Descartes verwandter als dem »rationalen Myſtiker« Leibniz. Denn auch Descartes lehrt die ſtändige und radikale Abhängigkeit der endlichen Subſtanz von Gott und die abſolute Beſchränktheit der menſchlichen Erkenntnis bezüglich des Unendlichen. (S. o. S. 273.) Aber darin ſind wiederum alle drei abendländiſchen Philoſophen einig, daß die Idee eines infinitum absolutum möglich iſt, — im Gegenſatz zur Antike (Ariſtoteles). Hierin iſt freilich Kant am ſkeptiſchſten, indem er ſowohl die kosmologiſche Idee der Totalität wie die theologiſche Idee des transzendentalen Ideals für »vernünftelnd« und ohne konſtitutive Bedeutung erklärt: aber er unterſcheidet ſehr fein zwiſchen ens imaginarium, ens rationis und nihil negativum (B 347 f.) Das ens imaginarium iſt die reine Anſchauungsform Raum und Zeit, ohne Subſtanz und wirklichen Gegenſtand darin,

d. h. alſo die Domäne der rein intuitiven Mathematik. Das ens rationis iſt der leere widerſpruchsloſe Begriff, dem keine Anſchauung entſpricht, das »Gedankending« (bloße Erdichtung, obzwar nicht widerſprechende) und das nihil negativum das »Unding«, das dem Möglichen entgegengeſetzt iſt, indem ſein Begriff ſogar ſich ſelbſt aufhebt. Beides ſind leere Begriffe, aber verſchiedener Art.

Dieſe Begriffsbildung iſt von ſehr aktueller Bedeutung, denn Hilbert benutzt ſie im Grunde zu ſeiner Interpretation der formalen Mathematik. Die Gegenſtände der Hilbertſchen Metamathematik (und der Brouwerſchen intuitiven Mathematik) ſind entia imaginaria, die der Hilbertſchen formalen Mathematik entia rationis; was der Widerſpruchsfreiheitsbeweis ausſchließen ſoll, iſt das nihil negativum. Aber freilich iſt dieſes ens rationis beſtenfalls eine Idee, deren reale Möglichkeit dahinſteht. Es iſt alſo vom Kantiſchen Standpunkt aus nicht einzuſehen, wie Hilberts entia rationis phyſikaliſche Realitäten erklären können, gemäß der Idee einer »ſymboliſchen Mathematik«, welche Idee freilich gar nicht an Kant, ſondern an der ganz verſchiedenen Grundauffaſſung von Leibniz orientiert iſt[1]. — —

Mit Kant verliert bereits die ſchöpferiſche Mathematik die Fühlung mit der Philoſophie. Nach ihm ſetzt eine tiefe Entfremdung zwiſchen den führenden Philoſophen und der Mathematik ein. Die Philoſophie der Mathematik verödet und notgedrungen zimmern

1) Vgl. Kants Bemerkung in der Kritik des ontologiſchen Gottesbeweiſes: (B 624 Anm.) »Der Begriff iſt allemal möglich, wenn er ſich nicht widerſpricht. Das iſt das logiſche Merkmal der Möglichkeit und dadurch wird ſein Gegenſtand vom nihil negativum unterſchieden. Allein er kann nichtsdeſtoweniger ein leerer Begriff ſein, wenn die objektive Realität der Syntheſis, dadurch der Begriff erzeugt wird, nicht beſonders dargetan wird, welches aber jederzeit . . . auf Prinzipien möglicher Erfahrung und nicht auf dem Grundſatz der Analyſis (dem Satze des Widerſpruchs) beruht. Das iſt eine Warnung, von der Möglichkeit der Begriffe (logiſche) nicht ſofort auf die Möglichkeit der Dinge (reale) zu ſchließen.« — Auf die Ideenlehre Kants (für die vor allem auch die »Kritik der Urteilskraft« heranzuziehen wäre) kann hier, wo die »ſymboliſche Erkenntnis« nicht zum eigentlichen Thema der Unterſuchung gehört, nicht näher eingegangen werden. Vielleicht würden ſich doch auch poſitive Beziehungen zwiſchen Hilberts Auffaſſung des Aktual-Unendlichen als einer »Idee« und Kants »regulativem Gebrauch« der Ideen finden laſſen. Freilich darf man nie vergeſſen, welch' tiefer Gegenſatz zwiſchen Hilberts Widerſpruchsfreiheitsbeweis und Kants Lehre von den kosmologiſchen Antinomien klafft. — Kants Definition des »tranſz. Ideals« als »omnitudo realitatis« (B 599 ff.) bedeutet zwar die Einführung des Aktual-Unendlichen, aber dieſer Begriff iſt mathematiſch für Kant nicht relevant.

ſich die poſitiven Mathematiker die »logiſchen Grundlagen« ihrer Wiſſenſchaft zurecht, ſo gut es eben geht. Zwar ſucht Riemann an Herbart und G. Cantor an Leibniz und an mittelalterlichen Theologen eine Stütze, aber tiefgreifend ſind die Beziehungen nicht. Huſſerls »Philoſophie der Arithmetik« bedeutet eine entſchiedene Wendung zum Intuitionismus, d. h. ungewollt zu Kant; Frege bekämpft den Pſychologismus in der Logik, ohne daß jedoch eine geſchloſſene philoſophiſche Stellung ſichtbar würde; Ruſſell verteidigt den mathematiſchen Exiſtentialabſolutismus auf Grund des platoniſierenden Begriffsrealismus von G. E. Moore, der ſeinerſeits Motive der alten platoniſierenden »Schule von Cambridge« wiederaufzunehmen ſcheint. Der Neukantianismus Natorps iſt mit ſeiner eigentümlichen Vermiſchung »intuitioniſtiſcher« und »exiſtential-abſolutiſtiſcher« Anſichten im Grunde nie recht fruchtbar geworden und ohne wirkliche Fühlung mit den logiſchen Nöten der poſitiven Forſchung geblieben. Hilbert verſucht ſich, wie wir ſahen, mit recht zweifelhaftem Recht auf Kant zu ſtützen; Weyl, in ſeiner letzten Phaſe, nähert ſich, merkwürdigerweiſe über Fichte und wohl auch Schelling, deutlich wieder Leibniz.

Soll in Zukunft die Philoſophie der Mathematik als ſolche, d. h. in einem über eine poſitiviſtiſche »Grundlagenforſchung« hinausgehenden Sinne, ſich wieder vertiefen, ſo wird ſie ſich auf den großen Gegenſatz Leibniz–Kant beſinnen und die keineswegs ausgeglichenen Spannungen dieſes Gegenſatzes zur treibenden Kraft weiteren ſachlichen Fortſchreitens machen müſſen.

IV. Syſtematiſche Erörterung der Frage nach dem Seinsſinn des Mathematiſchen.

(Abſchließende Bemerkungen über die gegenwärtige Problemlage.)

Überblickt man die in den vorangehenden Abſchnitten entwickelte hiſtoriſche Orientierung in ihrer Geſamtheit, ſo tritt eine in der antiken und der abendländiſchen geiſtesgeſchichtlichen Entwicklung merkwürdig analoge große Linie im Wandel der philoſophiſchen Deutung des Mathematiſchen zutage, die man kurz bezeichnen könnte als den Übergang von der mathematiſchen Myſtik zur Kritik. Entgegen der heute vielfach üblichen Anſchauung (die die Marburger Neukantianer aufbrachten) muß man nämlich unter den vier großen von uns betrachteten Philoſophen Plato mit Leibniz und Ariſtoteles mit Kant in ſachlicher Hinſicht zuſammenſtellen, wenn es ſich um mathematiſch-philoſophiſche Pro-

bleme handelt. Plato und Leibniz beginnen beide als offenkundige mathematiſche Myſtiker, ſie ſind beide »Pythagoreer«[1]; ſie enden dann beide damit, dem Mathematiſchen eine beſtimmende Rolle im Aufbau der Welt zuzuſchreiben, es ſymboliſch die metaphyſiſch-ontologiſche Struktur darſtellen zu laſſen. Beide haben ſie die Mikrokosmosidee, die Umformung der alten magiſchen Idee der univerſellen Sympathie in eine dem wachen (hiſtoriſch werdenden) Bewußtſein erträgliche Form mit Hilfe des Mathematiſchen: bei Plato ſind vor allem die Zahlgeſtalten in ihrer ſyſtematiſchen Entwicklung im diairetiſchen Schema das Symbol des univerſalen Syndesmos (vgl. die Interpretation Stenzels); bei Leibniz iſt das Abbildungsverhältnis zwiſchen ſymboliſchem Kalkül und dargeſtellter mathematiſcher Weſenheit das Schema der univerſalen Repräſentation[2].

Das Mathematiſche iſt alſo beiden die Pforte zu tiefſten metaphyſiſchen Erkenntniſſen, es kommt für ſie aus dem Magiſchen und führt, zur Wiſſenſchaft geworden, zu einer geläuterten Auffaſſung des Weltgrundes ſelbſt. Als Mathematiker wird der Menſch Gott ähnlich, ſtellt ſich in die kosmiſche Sympathie hinein, erhebt ſich ſchauend gleichſam über ſeine endliche Sphäre.

Ariſtoteles und Kant ſind demgegenüber Kritiker, nüchterne Ermahner, allen mythiſchen Reminiszenzen und aller »Schwärmerei« zu entſagen. Beide entkleiden die Mathematik ihrer geheimnisvollen Bedeutung. Für beide iſt die Mathematik eine abſtrakte, nicht das zentrale Weſen der Dinge treffende Betrachtungsweiſe. (Nach Ariſtoteles betrachtet ſie das Nichtgetrennte als Getrenntes (*τὰ οὐ κεχωρισμένα ἢ κεχωρισμένα*), nach Kant gibt ſie »für ſich keine Erkenntnis«. Eigentliche Erkenntnis geht bei beiden auf Wirkliches.) – Der Mathematiker bleibt endlicher Menſch, jeder über das Phänomenal-Aufweisbare hinausgehende Unendlichkeitsbegriff wird ſtreng abgewieſen. Die »Kritiker« ſind »Intuitioniſten«, alſo, trotz des Namens das gerade Gegenteil myſtiſcher »Seher«. –

1) Ich meine hiermit echte Pythagoreer, die man als primitive Philoſophen der Mathematik vor Plato notwendig vorausſetzen muß, wenn auch der »ſogenannte Pythagoreer« Archytas nicht zu ihnen gehört, der vielmehr die kritiſch-poſitiviſtiſche Richtung des Eudoxos, Menaichmos und ſchließlich Ariſtoteles eröffnet. (S. o. S. 199, Anm. 3.)

2) Vgl. die Theſe Walter Feilchenfelds, »der Barockbau« der Leibnizſchen Metaphyſik ſei ein großartiger Verſuch, »die Begriffswelt des neuplatoniſch-myſtiſchen Syſtems der geiſtigen Struktur eines theoretiſch-mathematiſch denkenden Menſchen kommenſurabel zu machen«. (Zitiert nach Mahnke, L.'s Syntheſe uſw. S. 74.)

Die Geſchichte ſcheint alſo zu lehren, daß nur zwei große philoſophiſche Stellungnahmen zur Mathematik möglich ſind, die einander auch nicht endgültig ablöſen. Denn am Ende der Antike, im Neuplatonismus, ſetzt ſich die mythiſch-metaphyſiſche Deutung der Mathematik wieder durch, bei allem Beſtreben, die Errungenſchaften der inzwiſchen reich entwickelten poſitiven mathematiſchen Wiſſenſchaft zu bewahren. (Proklos.) Vielleicht erleben wir heute etwas Ähnliches, jedenfalls iſt es ſehr zweifelhaft, ob ſich Brouwers ſtrenger Intuitionismus, der, philoſophiſch geſehen, durchaus ariſtoteliſch-kantiſches Erbe im beſten Sinn iſt, in der Gegenwart wird behaupten können[1].

Wir ſind alſo heute, in »ſyſtematiſcher« Hinſicht, vor die Aufgabe geſtellt, zwiſchen mathematiſchem Symbolismus und Kritizismus zu entſcheiden bzw., wenn möglich, ihre ſachlich der Kritik ſtandhaltende Syntheſe zu vollziehen. Die in den vorangehenden Unterſuchungen erreichten Ergebniſſe müſſen auf die Ebene dieſer welthiſtoriſchen Problematik projiziert werden.

* * *

Wendet man ſich mit phänomenologiſchen Methoden dieſer Aufgabe zu, ſo wird die weitere Unterſuchung ſogleich von dem phänomenologiſchen Grundprinzip der Ausweisbarkeit aller »wahren« Phänomene beſtimmt.

Dieſes Prinzip des Zugangs, der möglichen originären Gegebenheit, das auch (in gewiſſem Sinne mit Recht) als das »Prinzip des tranſzendentalen Idealismus« bezeichnet zu werden pflegt, beſteht in der Forderung, daß jedes echte Phänomen ſeinem eigenen Seinsſinn nach ſich ausweiſen müſſe, für den, dem ſeine adäquate Erfaſſung gelingt, in einem Akt originärer Anſchauung, deren Art und Weiſe allerdings eine ſpezifiſche iſt und ſich nach der Natur der in Frage kommenden Gegenſtändlichkeit ſelbſt richtet.

Wenn ein ſolcher adäquater Zugang auch nicht de facto für jedes zufällige Subjekt immer hergeſtellt werden kann, ſo muß doch eine ſolche ideale Variation der Bedingungen nicht bloß in abſtracto denkbar, ſondern auch als konkrete Perſpektive erfaßbar ſein, daß es zur originären Gegebenheit des Phänomens kommt[2]. (Dabei kann ſehr wohl dieſe »ideale Variationsmöglichkeit« realiter völlig und für immer ausgeſchloſſen ſein. So gibt es ſpezifiſche nur dem Kinde

1) Vgl. den Wandel in den Anſichten des früheren Intuitioniſten Weyl: Handbuch der Philoſophie II A, S. 44, 13–18.

2) Vgl. Huſſerl, »Ideen uſw.« § 47–48 (S. 87ff.) u. ö.

zugänglichen Phänomene. Der Erwachsene kann sich idealiter zum Kinde zurückverwandelt denken, aber nicht wirklich wieder zum Kinde werden und jene Phänomene wirklich haben. Ebenso gibt es nach Ansicht mancher heutigen Psychologen[1] und auch Phänomenologen[2] gewisse, für bestimmte Menschentypen spezifische Phänomene; auch hier ist die Verwandlung des Menschen eines anderen Typus in den für ein vorgeschriebenes Phänomen als »Subjektivität« notwendigen Typ realiter unmöglich.)

Das Prinzip der Ausweisbarkeit stellt nun offenbar den Phänomenologen in Fragen der Philosophie der Mathematik sofort in die Reihe der Kritizisten, also an die Seite von Aristoteles und Kant und in Gegensatz zu Plato und Leibniz, besonders zu dem letzten. Denn der »mathematische Mystiker« stellt sich in einen dem menschlichen Verstande und der menschlichen Anschauung grundsätzlich unzugänglichen übermenschlichen, göttlichen oder kosmischen, »sympathetischen« Zusammenhang hinein (bei Leibniz sehr deutlich durch sein universelles Prinzip der »Repräsentation« bezeichnet), der dann in einer trotz aller scheinbaren Rationalität doch wesentlich mystisch bleibenden Vision erblickt wird. Wenn Leibniz der Mathematik die »symbolische« Erkenntnis in dem Sinne zuweist, daß sie vermittels ihrer »symbolischen Charakteristik« das Aktual-Unendliche (Transzendent-Transfinite) der göttlichen Ideenwelt gewissermaßen in seiner bloß potentiell-unendlichen (immanent-finiten bzw. indefiniten) »Projektion« erfassen lehrt, so liegt darin die Annahme einer ununterbrochenen Kontinuität zwischen endlichem und unendlichem Wesen, welche Annahme aus dem Glauben an eine unio mystica mit Gott letztlich stammt. Dem nüchternen und wachen menschlichen Bewußtsein (ontologisch gesagt: dem historischen menschlichen Dasein) ist eine derartige Perspektive bis zu Gott hin unmöglich, – sofern der traditionelle metaphysische Gottesbegriff des ens perfectissimum aufrecht erhalten wird, der nur durch die Negation der dem

1) Vgl. z. B. E. R. Jaensch, Über psychische Selektion, Anhang. (Zeitschrift für Psychologie, Abt. I, Bd. 98 (1926), bes. S. 201 ff.).

2) Scheler (Die Wissensformen und die Gesellschaft, Leipzig 1926, Vorwort): »Nicht die menschliche 'Vernunft' ihrem formalsten Wesen nach, die den 'Menschen' mitdefiniert, wohl aber das, was man ihre 'Organisation' und ihr subjektiv-kategoriales Gefüge zu nennen pflegt, befindet sich im Werden und in einer Entwicklung, die wahrscheinlich Wachstum und Verlust zugleich ist. Eine absolute geschichtliche Konstanz 'menschlicher' Vernunftformen und -Prinzipien, die der größte Teil aller bisherigen Erkenntnistheorie als unwandelbaren Gegenstand ihrer Forschung naiv vorausgesetzt hat, ist nach der in diesem Buche vertretenen Ansicht ein Idol« (l. c. S. V).

Geſchöpf zukommenden endlichen, dem Menſchen allein zugänglichen Eigenſchaften beſtimmt wird. (»Negative Theologie«). Es iſt aber vom phänomenologiſchen Geſichtspunkt aus auch noch eine andere Interpretation des Begriffs des ens perfectissimum möglich. Man kann nämlich Gott als »idealiſierten Menſchen« faſſen, ihm ein idealiſiertes menſchliches Erkenntnisvermögen zuſchreiben uſw., kurz ihn als den Limes definieren, dem ſich der Menſch idealiter unbegrenzt annähern kann. Es würde alſo dann »idealiter« das Wort der Schlange im Paradieſe gelten: »Eritis sicut Deus«. Dieſes »ens perfectissimum« würde aber nicht das Aktual-Unendliche faſſen können, es würde nicht einmal das kleinſte »materielle Ding«, das ja nach Huſſerl in einem endloſen »Fluſſe von Aſpekten« allein gegeben werden und alſo weſensmäßig nie zu Ende gegeben ſein kann[1], mit einem Schlage ganz erblicken können. Dieſer poſitive Grenzbegriff, der im Grunde immanent iſt oder höchſtens »am Rande« des Immanenten liegt, iſt freilich nicht zu verwechſeln mit dem alten aktual-unendlichen »Urweſen« (im Sinne des infinitum absolutum, increatum sive aeternum). Der dem phänomenologiſchen Grenzbegriff zukommende Name iſt alſo nicht »Gott«, ſondern nur »Dämon«.

Man kann nun gegen Leibniz ſagen, daß er »Gott« mit dieſem »Dämon« verwechſelt oder vielmehr, daß er in myſtiſcher, rational nicht mehr einſichtiger Weiſe vom dämoniſchen zum göttlichen Weſen den Übergang vollzieht; die Perſpektive auf das Dämoniſche hin iſt dem Menſchen noch zugänglich, das dämoniſche Weſen als Grenzbegriff phänomenologiſch poſitiv aufweisbar, – die poſitive Perſpektive auf Gott hin iſt dem Menſchen verſchloſſen: zwiſchen Dämon und Gott ſelbſt klafft ein Abgrund, den auch die Brücke der Leibnizſchen Kontinuität nicht rechtmäßig überwölbt.

Kant bewährt gerade hier ſeine kritiſche Nüchternheit. Der unüberwindliche Abſtand zwiſchen Gott und Menſch, Schöpfer und Geſchöpf iſt ſein Grundprinzip, das (wie wir zeigten), die Grundſtruktur ſeiner Erkenntnistheorie beſtimmt: Die radikale Unterſcheidung von Verſtand und Sinnlichkeit, abſtraktem Denken und konkreter Anſchauung iſt die Folge (aber kaum der Urſprung) der metaphyſiſchen Differenz zwiſchen intellectus archetypus und ectypus,

1) Vgl. Mahnke, Leibnizens Syntheſe uſw., Seite 38 (Conturat), dazu Anm. 32 und 43; S. 130 (Heimſoeth). – Danach hat auch Leibniz ſelbſt der »visio« Gottes nur ein Überſchauen der unendlichen Begründungskette, nicht aber deren (weſensmäßig unmögliche) Erſchöpfung zugeſchrieben. – Vgl. andrerſeits Huſſerl, »Ideen uſw.« § 43 (S. 78ff.).

zwiſchen intuitus originarius und derivativus: die »Urbildlichkeit« und »Urſprünglichkeit« entſpringen allein göttlicher Schöpferkraft.

Phänomenologiſch handelt es ſich um das Grundverhältnis von leerer Intention und erfüllender Anſchauung. Wohl iſt die »Dunkelheit« der »verworrenen Vorſtellung« mit ihrer »Leere«, ihrem Mangel an »Anſchauungsfülle« verwandt, aber doch iſt beides nicht dasſelbe. Die »verworrene Vorſtellung« kann »klar und deutlich« werden und doch leer bleiben. Die völlig leere, grundſätzlich unerfüllbare, weil auf anſchaulich Widerſinniges gehende Intention kann als Intention völlig widerſpruchsfrei, klar und deutlich ſein. So immer im Falle des materialen, nicht »formal-analytiſchen« (Huſſerl) Widerſinns, z. B. im Falle des Siebenflächners oder regulären Tauſendflächners (im dreidimenſionalen euklidiſchen Anſchauungs-Raum). Umgekehrt kann eine ganz und gar erfüllte Anſchauung unbeſtimmt und verwaſchen, ihrem Weſen nach, ſein, z. B. beim Phänomen des unbeſtimmten leiſen Geräuſchs, bei gewiſſen optiſchen Phänomenen in ſchlechter Beleuchtung, bei »dunklen« Gefühlsregungen aller Art (neurotiſcher Angſt u. dgl.) uſw.

Man muß alſo Kant Recht geben, wenn er Verſtand und Sinnlichkeit ihrem Weſen nach ſcheidet und keinen kontinuierlichen Übergang zwiſchen ihnen zuläßt[1].

Was Leibniz zu ſeinem Glauben an eine ſolche Kontinuität auf elementar-phänomenologiſchem Gebiet[2] veranlaßte, iſt wohl die Tatſache, daß eine leere Intention ſich ſtetig immer mehr, bis zur Fülle, mit Anſchauung erfüllen kann. (Huſſerl, VI. logiſche Unterſuchung, I. Abſchnitt.) Es handelt ſich hier aber keineswegs um einen Übergang von Intention zu Anſchauung, bei dem ſich jene in dieſe verwandelt, ſondern um ein »Sich-Erfüllen« der Intention, die als Intention deshalb nicht verſchwindet, ſondern ſogar zumeiſt ihrerſeits beſtimmter und prägnanter wird.

So erweiſt ſich alſo die Kantiſche Auffaſſung der Leibnizſchen an Schärfe überlegen, was ſich dann bewährt bei ſeinen ontologiſchen Grundunterſcheidungen, die für die ontologiſchen Probleme

1) Hierbei iſt der Unterſchied von Sinnlichkeit und Verſtand (Anſchauen und Denken) dem zwiſchen Erfüllung und Leerintention gleichgeſetzt; dasſelbe gilt aber auch, wenn man den Gegenſatz von ſinnlicher und kategorialer Anſchauung in Betracht zieht. (Vgl. Huſſerl, VI. logiſcher Unterſuchung.)

2) Von den Phänomenen einer »natürlichen Symbolik« in Sprache, Mythos uſw. iſt hier nicht die Rede. Ob dort nicht die von Kant vergebens geſuchte »gemeinſame Wurzel« von Verſtand und Sinnlichkeit zu finden ſei, bleibe dahingeſtellt.

der modernen Mathematik ſo wichtig ſind. Das »Verſtandesding« (ens rationis), der leere, obzwar widerſpruchsfreie, alſo »logiſch mögliche Begriff« wird unterſchieden vom »Unding« (nihil negativum), das in ſich widerſinnig iſt. Das Tranſzendent-Transfinite (für das man bei Kant als Beiſpiel das »tranſzendentale Ideal« [Prototypon transcendentale] nehmen kann) iſt ein »leeres Ideal«, d. h. es iſt logiſch möglich, aber nicht real möglich, was bedeutet, daß es zu dieſem Begriff keine mögliche Anſchauung gibt, auf die er angewandt werden könnte, um »objektive« Bedeutung zu erlangen. Aber trotzdem iſt die logiſche Möglichkeit nicht nichts; das Fehlen (die privatio) der ſachlichen Möglichkeit (die »Nicht-Möglichkeit«) iſt nicht gleichbedeutend mit der ſachlichen Unmöglichkeit (der negatio der Möglichkeit). Das »leere Ideal« iſt alſo eine Art nihil privativum bezüglich der realen theoretiſchen Zugänglichkeit, aber kein nihil negativum bezüglich jeder Zugänglichkeit. So iſt es denn auch möglich, daß Gott als praktiſches Poſtulat in der Ethik und als »Fiktion« in der Teleologie der Natur wieder auftaucht. Kants theoretiſche Stellung (in der Kritik der reinen Vernunft) iſt alſo äußerſt vorſichtig und verbaut ſich keine Möglichkeit.

Der Standpunkt Huſſerls iſt vielleicht nicht ganz ſo vorſichtig, wie der kantiſche. Die klaſſiſche Phänomenologie Huſſerls ſpricht der leeren logiſchen Möglichkeit (Widerſpruchsfreiheit) dadurch jede weſentliche Bedeutung ab, daß ſie die Theſe aufſtellt: Iſt die Möglichkeit wirklich leer dem Weſen nach, d. h. prinzipiell nicht und niemals anſchaulich zugänglich, dann enthält ſie notwendig einen intuitiven (ſei es nun formal-ontologiſchen oder materialen) Widerſinn. Iſt dies aber ſo – und es muß notwendig ſo ſein, ſofern allein originäre, erfüllte Intuition wahrhaftes Sein begründet — dann iſt der weſenhaft leere, obzwar widerſpruchsfreie Begriff in ſachlicher Hinſicht nicht bloß ein nihil privativum, ſondern ein nihil negativum, d. h. es kommt ſeine ſachliche Möglichkeit niemals und nirgends, auch nicht in »praktiſchen« oder »teleologiſchen« oder ſonſt welchen Zuſammenhängen in Frage.

Dieſe Stellungnahme folgt mit Notwendigkeit ſchon aus Huſſerls äußerſt radikaler Kritik des »Pſychologismus« und »Anthropologismus« in den »Logiſchen Unterſuchungen« (I. Band). Denn jene Kritik involviert zwei Konſequenzen:

1. Die »Uniformiſierung« ſämtlicher, »praktiſcher« wie »theoretiſcher«, weltlicher wie religiöſer Zugangsweiſen auf den formalen Begriff der originären Anſchauung. Man kann alſo nicht theoretiſch die anſchauliche Erfaſſung leugnen und ſie »praktiſch« als

»Postulat« wieder einführen. (Z. B. ist das kantische Gefühl der »Achtung« vor dem Sittengesetz, phänomenologisch gesehen, eine Weise des anschaulichen originären Zugangs!)

2. Die ideale Kontinuität aller ideal möglichen Subjekte als spezifischen Träger der noetischen Korrelate irgend welcher sachlich möglichen Gegenständlichkeiten. Keine fremde Subjektsart ist dem Menschen völlig transzendent. Darin liegt erst die radikale Ablehnung jeglichen »Anthropologismus«.

Beide Thesen sind nur Konsequenzen des Grundprinzips der universalen Ausweisbarkeit jeglichen Phänomens, mit dem der Phänomenbegriff selbst — zum mindesten innerhalb der »klassischen« Phänomenologie, wie sie in Husserls »Logischen Untersuchungen« und »Ideen zu einer reinen Phänomenologie« vorliegt — steht und fällt.

Man kann dieses Prinzip als das des transzendentalen Idealismus bezeichnen. Denn es läßt nur solche Phänomene und Gegenständlichkeiten als möglich zu, die sich im »reinen Bewußtsein« konstituieren können. Und der formale Begriff »reines Bewußtsein« besagt eben in konkreter Interpretation, daß alle denkbaren Bewußtseinsweisen idealiter kontinuierlich zusammenhängen und also durch ideale (wenn auch keineswegs immer real mögliche) Variation aus der uns Menschen faktisch bekannten Bewußtseinsweise gewonnen werden können.

Von hier aus läßt sich der Bewußtseins- oder »Daseins«begriff der »hermeneutischen Phänomenologie« Heideggers dadurch erreichen, daß man einerseits die in Frage kommende »Subjektivität« (ψυχή in weitem Sinn), die von Heidegger mit Dasein in ontologischer Hinsicht bezeichnet wird[1], auf den Menschen (und zwar den Erwachsenen in unserer Kulturlage) einschränkt, andererseits aber (mit Heidegger) diese »objektiv« beschränkte Lebensform als die ausgezeichnete, weil reichste, die Möglichkeiten aller anderen primitiveren Lebensformen in sich enthaltende, auffaßt[2], so daß nur

1) Vgl. Heidegger, »Sein und Zeit«, § 4, Seite 12: »Und weil die Wesensbestimmung dieses Seienden [des Menschen] nicht durch Angabe eines sachhaltigen Was vollzogen werden kann, sein Wesen vielmehr darin liegt, daß es je sein Sein als seiniges zu sein hat, ist der Titel Dasein als reiner Seinsausdruck dieses Seienden gewählt.«

2) Heidegger, l. c. S. 13: »Dem Dasein gehört nun aber gleichursprünglich ... zu: ein Verstehen des Seins alles nicht daseinsmäßigen Seienden.« — Ferner vgl. den ganzen § 10, besonders Seite 49—50: »In der Ordnung des möglichen Erfassens und Auslegens ist die Biologie als »Wissenschaft vom Leben« in der Ontologie des Daseins fundiert, wenn auch nicht ausschließlich

von ihr aus eine Interpretation anderer Weiſen des Lebens überhaupt möglich iſt. Der Übergang von der »formalen« Phänomenologie (Huſſerl) zur »hermeneutiſchen« (Heidegger) beſteht alſo in der Zuſpitzung des »reinen Bewußtſeins« zum »hiſtoriſchen Daſein«; dies bedeutet eine Verengung, aber auch eine Konkretiſierung. In dieſer Konkretion tritt das idealiſtiſche Moment der formalen Phänomenologie ins Ontologiſche gewendet noch deutlicher hervor; »ἡ ψυχὴ τὰ ὄντα πώς ἐστιν (Ariſtoteles, de anima III, 8; 431b, 21[1].) Alles Seiende gewinnt erſt ſein Sein durch das »tranſzendentale Sein«, das weſentlich (menſchliches) Daſein iſt oder eine teilweiſe Privation ſeiner.

* * *

Unſere eigenen mathematiſch-ontologiſchen Einzelinterpretationen ſind nun, wie leicht erſichtlich, durchweg an jenem »idealiſtiſchen« Prinzip der Ausweisbarkeit und teilweiſe auch an ſeiner konkreten Zuſpitzung im Sinne der hermeneutiſchen Phänomenologie (das hiſtoriſch-menſchliche »Daſein« iſt das »tranſzendentale Sein«) orientiert.

Ein kurzer Rückblick wird dies zeigen:

Die Gegenüberſtellung der beiden Definitionen mathematiſcher Exiſtenz (§ 2) beruhte auf dem Gegenſatz von Zugänglichkeit (Ausweisbarkeit) und Widerſpruchsfreiheit (bloßer logiſcher Möglichkeit).

Die Kritik der Hilbertſchen Neubegründung der Mathematik (§ 3) zeigte, daß die rein formal-mathematiſchen Gegenſtändlichkeiten im Gegenſatz zu den »mathematiſchen« Gebilden entia rationis,

---

in ihr. Leben iſt eine eigene Seinsart, aber weſenhaft nur zugänglich im Daſein. Die Ontologie des Lebens vollzieht ſich auf dem Wege einer privaten Interpretation; ſie beſtimmt das, was ſein muß, daß ſo etwas wie Nur-noch-leben ſein kann . . .«. Vgl. auch l. c. S. 58, 65.

1) Vgl. Heidegger, l. c. S. 14. – Über das Verhältnis Heideggers zum Idealismus vgl. l. c. § 43a, beſonders S. 207–208; zuſammenfaſſend ſagt er (S. 208): »Beſagt der Titel Idealismus ſoviel wie Verſtändnis deſſen, daß Sein nie durch Seiendes erklärbar, ſondern für jedes Seiende je ſchon das »Tranſzendentale« iſt, dann liegt im Idealismus die einzige und rechte Möglichkeit philoſophiſcher Problematik. Dann war Ariſtoteles nicht weniger Idealiſt als Kant. Bedeutet Idealismus die Rückführung alles Seienden auf ein Subjekt oder Bewußtſein, die ſich nur dadurch auszeichnen, daß ſie in ihrem Sein unbeſtimmt bleiben und höchſtens negativ als »undinglich« charakteriſiert werden, dann iſt dieſer Idealismus methodiſch nicht weniger naiv als der grobſchlächtigſte Realismus.«

reine »Verſtandesdinge« ſind, denen nur durch Erſchleichung (subreptio) Anſchauungen untergeſchoben werden können. Sie ſind alſo keine (ausweisbaren) Phänomene, ſondern (transphänomenale) bloße »Geſetztheiten«; ſie können auch nicht zu Phänomenen werden (wie die imaginären Zahlen es durch Gauß wurden), ſondern ſie involvieren einen intuitiven und zwar »formal-ontologiſchen« Widerſinn: inſofern das Unendliche, ſeiner ontologiſchen Natur nach, potentiell (*δυνάμει ὄν*) iſt, d. h. ein Prozeß, aber keine aktuale Menge. Ausſagen über »Geſetzheiten« ſind nicht einzeln wahr oder falſch, ſondern nur als Syſtem »konſequent«, »widerſpruchsfrei« oder das Gegenteil. (§ 3b; § 4b.) Die völlige Inhaltsloſigkeit aller Behauptungen über ſolche Geſetztheiten ließ ſogar den Zweifel aufkommen, ob die Forderung der Widerſpruchsfreiheit ſelbſt in dieſer Sphäre überhaupt noch ſinnvoll bleibt, aber es erwies ſich, daß ihr eine weſentliche Rolle auch im »Deduktions-Spiel« zufällt, nämlich die unbeſchränkte Fortſetzbarkeit des Spieles zu ſichern. (§ 3a.)

Die poſitive phänomenologiſche Unterſuchung des Unendlichen (§ 5a, b), verbunden mit der geiſtesgeſchichtlichen Interpretation des Unendlichkeitsbegriffs (§ 6b, insbeſondere I C, D; II; III A), ergab die Möglichkeit nicht nur des Indefiniten, ſondern auch des Transfiniten als eines Prozeſſes. Die Anſätze zu einer konſtruktiven Theorie der transfiniten Ordinalzahlen laſſen ſich durchweg ſachlich interpretieren, als formale Ordnungstypen der möglichen Komplikationsſtufen des reinen Bewußtſeins. Dabei iſt die phänomenologiſche Interpretation allerdings nicht imſtande, die Unbeſtimmtheiten und Schwierigkeiten, die der mathematiſchen Theorie des Transfiniten gegenwärtig noch anhaften, von ſich aus mit einem Schlage zu beſeitigen. (§ 5a IV, Math. Anh., zu § 5). Aber es gelingen doch zwei wichtige Feſtſtellungen: erſtens, daß die Antinomie, die mit dem Begriff der größten Ordnungszahl verknüpft iſt, von innen heraus in ganz ungezwungener Weiſe vermieden wird (§ 5a II C, III) und zweitens, daß das Kontinuumproblem im Cantor-Hilbertſchen Sinne ein durchaus ſachliches, phänomenologiſch verſtehbares Problem iſt. Die mathematiſchen Anſätze, die Hilbert ſeinem Löſungsverſuch zu grunde legt, ſtehen in engſter Beziehung zu unſerem Aufweis der transfiniten Komplikation des reinen Bewußtſeins. (§ 5b III; Math. Anh., zu § 5.) Endlich verdient noch der Nachweis Erwähnung, daß in Hilberts eigener »Metamathematik« (Beweistheorie) indefinite und »halbtransfinite« Strukturen notwendig »inhaltlich«, d. h. als wirkliche Phänomene (nämlich in der Komplikation der in der Theorie vorkommenden noetiſchen Strukturen) vorkommen

(§ 3c, Math. Anh., zu § 3, II), wenn man nicht zu »archaiſchen« Denkmitteln ſeine Zuflucht nehmen will. (Math. Anh., zu § 3, III.)

Der transfinite Prozeß iſt aber, wie ſich weiter zeigte, nicht nur einer formal-phänomenologiſchen Ausweiſung, ſondern auch einer echten hermeneutiſchen Interpretation fähig, vermittels der Betrachtung der iterierten Reflexion auf ſich ſelbſt (§ 5a IIC). Die »Parentheſen-Reflexion«, die ſich transfinit ohne Ende iterieren kann, erwies ſich, hermeneutiſch betrachtet, als der denkbar zugeſpitzteſte Ausdruck für die radikale Bodenloſigkeit des vor ſich ſelbſt auf der Flucht befindlichen Daſeins. Damit kommt das ſcheinbar rein mathematiſche Problem des transfiniten Prozeſſes in engen Zuſammenhang mit den Grundbegriffen der Heideggerſchen Hermeneutik der Faktizität, nämlich der »Geworfenheit« und dem »Verfallen« des Daſeins[1], und zugleich mit ihrer hermeneutiſchen Explikation. Die eigentümlich geſteigerte Endloſigkeit des transfiniten Reflexionsprozeſſes im Verhältnis zum bloß indefiniten zeigt die radikale Hemmungsloſigkeit des »der Welt verfallenen« Daſeins in ſeiner Alltäglichkeit. Die Enthüllung dieſer ſpezifiſchen extremen Hemmungsloſigkeit expliziert alſo einen Weſenszug des Verfallens des Daſeins und bringt ihn zur Auslegung. Es erweiſt ſich alſo die transfinite Endloſigkeit als ein für das Verſtändnis der Faktizität des alltäglichen Daſeins weſentliches Phänomen, das über ſeine formale Merkwürdigkeit hinaus eine echte Lebensbedeutung beſitzt. Das Transfinite iſt alſo nicht bloß eine »ſachliche« (nicht ſachhaltige) Formſtruktur des reinen Bewußtſeins, ſondern hat eine ganz konkrete, »hiſtoriſche« Wirklichkeit.

* * *

Dies tritt noch viel grundſätzlicher hervor in dem ſehr merkwürdigen und grundlegenden Zuſammenhang des transfiniten Prozeſſes mit dem Phänomen der Zeitlichkeit (§ 6b, beſ. III). Dieſer iſt jetzt nochmals in ſyſtematiſcher Abſicht zu würdigen:

Der Gedanke der Unendlichkeit, ſobald er konkret vollzogen werden ſoll, führt auf das Phänomen der ins Unendliche laufenden Zeit. Das ἀεί, das »immer«, iſt das konkrete Grundphänomen des ἄπειρον. (Dies zeigt auch die geſchichtliche Entwicklung. Vgl. § 6b, I C.) Aber dieſes »immer weiter« iſt noch einer zweifachen konkreten Geſtaltung fähig. Es kann erſtens nichts anderes ſein als eine einfache reine Wiederkehr, die »ewige« Wiederkunft identiſch desſelben Phänomens, wie bei der gewöhnlichen Zahlenreihe. Dies

1) Vgl. »Sein und Zeit« § 38. (Über »Hemmungsloſigkeit« beſ. S. 177f.).

iſt die Form der rein naturhaften Zeit, wie ſie etwa in der gleichförmigen Umdrehung des Fixſternhimmels zutage tritt[1]. Das iſt die »ſchlechte Unendlichkeit« im Sinne Hegels. Es kann aber auch ſein, daß ſich mit der immer wiederkehrenden Form ein immer neuer unvorausſehbarer, friſch zu erſchaffender Inhalt einſtellt. Dies iſt die Seinsweiſe der hiſtoriſchen Zeit und zwar zunächſt im Erleben einer geſamten geſchichtlichen Gruppe (Volk, Kulturkreis uſw.). Die Kette der Generationen ſtellt eine naturhaft bedingte Wiederkehr dar, aber die geſchichtliche Möglichkeit, Aufgabe und Leiſtung jeder »Generation« iſt eine andere, jede Generation ſtirbt nicht nur leiblich, ſondern mit ihr »ſtirbt« ihre ſpezifiſche geiſtesgeſchichtliche Lage (ihr »Stil« im weiteſten Sinn), um einer neuen unvorausſehbaren Platz zu machen. Die hiſtoriſche Zeitlichkeit führt alſo immer ins Dunkel, was »nach dem (eigenen) Tode« iſt, iſt unbekannt. Dieſe Tatſache iſt in ihrer Wucht gemildert bei der Gruppe, die ja in der neuen Generation fortlebt (»ſtirb und werde«!). Das Individuum aber ſtirbt (als hiſtoriſches jedenfalls) endgültig: es iſt unerbittlich vor »ſein eigenes Vorbei« geſtellt und »kommt an ſein Nichts« (Heidegger). Das Merkwürdige in unſerm Problemzuſammenhang iſt nun, daß auch dieſe »hiſtoriſche Zeitlichkeit«, ihrer formalen Struktur nach in gewiſſen mathematiſchen Bildungen ſich darſtellt.

Die »Wahlfolge«, die mit Recht als »frei werdend« bezeichnet werden kann, ſtellt den reinſten Typ hiſtoriſcher Zeitlichkeit dar. Der Akt der Wahl kehrt immer wieder, aber welche Zahl gewählt wird, hängt von der freien Willkür (mit gewiſſen Einſchränkungen) ab; der Ausfall der Wahlen iſt nicht vorausſehbar, nur daß ſtändig gewählt wird, ſteht feſt. Die frei werdende Folge iſt alſo in »eigentlicher« (hiſtoriſcher) Weiſe zeitlich. Man kann verabreden, daß ein gewiſſer Wahlausfall den »Tod« der Folge, »die Vernichtung des ganzen Prozeſſes und ſeines Reſultats« (Brouwer) herbeiführt. Das iſt dann das Analogon zum »Tod« der hiſtoriſchen Menſchen. Die geſetzmäßige Folge iſt dagegen naturzeitlich. Jedes Glied iſt nach identiſch derſelben Regel gebaut und die Struktur des tauſendſten Gliedes iſt mit derſelben Sicherheit vorausſagbar, wie die des dritten etwa. (Es gibt allerlei Zwiſchenmöglichkeiten zwiſchen der freien Wahlfolge und der nicht rekurrent definierten geſetzmäßigen Folge mit völlig durchſichtigem Bildungsgeſetz. Alle derartigen Bildungen

1) »Wiederkehr« iſt nicht gleichbedeutend mit echter »Wiederholung«, wie ſchon das Phänomen der muſikaliſchen »Repriſe« zeigt. Vgl. dazu H. Beſſeler, Jahrb. d. Muſikbibliothek Peters für 1926 (33. Jahr.), S. 73 ff.

ſind ihrer Zeitlichkeit nach ein Gewebe aus hiſtoriſchen und naturhaften Einſchlägen.) Die Aufgabe der mathematiſchen Wiſſenſchaft beſteht zu einem entſcheidenden Teil darin, aus freien Folgen geſetzmäßige zu machen, d. h. das freie Werden hierin zu binden durch das Geſetz und damit das Dunkel der Zukunft zu erhellen (§ 4a, § 6b C). Mit anderen Worten: Die Mathematik iſt die Methode, das Unendliche durch das Endliche zu beherrſchen.

Der transfinite Prozeß iſt ein merkwürdiges Geflecht aus hiſtoriſchen und nichthiſtoriſchen Momenten: Die immer gleichen Erzeugungsprinzipien müſſen ſich in immer neuer Weiſe eine konkrete Anwendungsmöglichkeit ſuchen, aber dieſe Möglichkeit iſt doch durch die vorangegangenen Bildungen beſtimmt und wird gewiſſermaßen von ihnen erzeugt. Während alſo die freie Wahl bei der Wahlfolge von »außen«, von einem ganz willkürlichen und quaſi »tranſzendenten« Prinzip beſtimmt wird, das man als »Schickſal« oder auch als das Geheimnis des frei ſchöpferiſchen hiſtoriſchen Geiſtes auffaſſen kann, trägt der transfinite Prozeß ſein Geſetz in ihm ſelbſt, aber verborgen, nur durch die ſchöpferiſche Tat des Mathematikers erſchließbar und entdeckbar. In prinzipiell ontologiſcher Hinſicht beſteht ſo eine enge Beziehung zu Hegels dialektiſchem Prozeß, in dem auch die ſtändig gleiche Form des Widerſpruchs und ſeiner Verſöhnung in immer neuer Weiſe ſich konkret erfüllt, die doch wieder von der geſamten »Vergangenheit« der Entwicklung beſtimmt iſt. Denn jene »Vergangenheit« iſt ja »aufgehoben«, d. h. nicht nur vernichtet, ſondern auch »bewahrt«.

In jedem Fall aber geht die Tendenz der Mathematik auf Beſtimmung der Unbeſtimmtheit des »eigentlichen« Werdens, auf Bindung der freien Willkür durch die in unbeſchränkter Wiederkehr anwendbare Regel, auf Erhellung der dunklen »Zukunft« durch das Wiſſen um die vorausſagbare »Wiederkunft«, auf die Beherrſchung der Offenheit des Unendlichen durch das geſchloſſene endliche Geſetz.

* * *

Welches iſt der Seinsſinn des Mathematiſchen (d. h. die »mathematiſche Exiſtenz« im philoſophiſchen Sinn), der hier ſichtbar wird?

Das »Mathematiſche«, das μάθημα iſt, wie wir ſahen (S. 236), ein ſinnvoll doppeldeutiger Ausdruck. Es bezeichnet einerſeits die μάθησις, das Leben im Vollzug mathematiſcher Erwägungen und andererſeits den »Gegenſtand« dieſer Erwägungen ſelbſt.

Unſere Einzel-Betrachtungen haben, ausgehend von dem Prinzip der phänomenologiſchen Ausweisbarkeit und weiterhin der Auslegbarkeit auf das allenthalben zugrundeliegende Daſein ſelbſt hin, den Vorrang der erſten »noetiſchen« oder wenn man will, »ſubjektiven« oder »idealiſtiſchen« Bedeutung von μάθημα gezeigt, ſoweit rein phänomenologiſche Geſichtspunkte in Frage kommen: μάθημα iſt als Phänomen allenfalls der mathematiſche Gedanke, eigentlicher aber das mathematiſche »Denken« als lebendiger Vollzug ſelbſt, — nicht aber ſein etwaiger tranſzendenter Gegenſtand.

Die genauere phänomenologiſche Analyſe (in § 6a, S. 192—197) erwies, daß das Mathematiſche primär ein Bezugsphänomen iſt. Als ſolches hat es ſeinen ontiſchen Schwerpunkt im Vollzug dieſes Bezugs, in der konkreten Weiſe daſeienden Lebens, in der dieſer Bezug allein gelebt werden kann.

Das μάθημα iſt alſo ontologiſch zu charakteriſieren als bloßes »noematiſches« Korrelat zum »Mathematiſieren« (μαθηματικεύεσθαι), was analog wie »philoſophieren« (φιλοσοφεῖν) und »muſizieren« (μουσικεύεσθαι) eine echte lebendige Haltung iſt, nicht das Betreiben eines gleichgültigen Geſchäfts.

Eine ſolche Auffaſſung hat es allerdings gerade dem Mathematiſchen gegenüber ſchwer. Denn man kann gegen ſie die Unbekümmertheit des echten Mathematikers um ſich ſelbſt, ſein Tun und ſeine Daſeinsform, ſeine Entfremdung dem eigenen faktiſchen Leben gegenüber, ſein Ausgelöſchtſein als hiſtoriſches Individuum und ähnliche Züge, die weſentlich den Mathematiker als ſolchen kennzeichnen, anführen. Dem ſteht dann, paradox genug, gegenüber: die Anwendung der reinen Mathematik in der experimentellen Naturwiſſenſchaft und ihrer Auswirkung, der Technik, die den aktivſten, dem praktiſchen Leben nächſten und ihn am meiſten verhafteten Menſchentyp erzeugte, den Ingenieur. Aber dieſes Paradox löſt ſich leicht. Denn auch der Ingenieur, in ſeiner Raſtloſigkeit und Freiheit von Hemmungen, in der Unbekümmertheit um die letzten Ziele ſeines Tuns (die ihm von außen, von den ſozialen und wirtſchaftlichen Bedürfniſſen, die er (als Ingenieur) ungeprüft als zielſetzend hinnimmt, gegeben werden) iſt dem »eigentlichen Daſein« fern, iſt bar jeder Vertiefung in das Hiſtoriſche des Lebens. Iſt alſo das »Mathematiſieren« nebſt ſeinen Anwendungen nicht doch bloßem »Betrieb« verfallendes Daſein?

Der Einwand iſt indeſſen zu widerlegen, gerade durch die Tatſachen, die er für ſich anführt. Und ſeine Widerlegung führt uns

nunmehr zur eigentlichen entſcheidenden Frage nach dem Seinsſinn des Mathema ſelbſt.

Die »Selbſtvergeſſenheit« ſteht dem Mathematiker wohl an, geht doch ſeine letzte Abſicht auf die Überwindung des Hiſtoriſchen, konkreter: auf die Überwindung des Todes, von dem hiſtoriſches Leben durch und durch beſtimmt iſt.

Wir zeigten: Die Mathematik erſetzt die hiſtoriſche Zeitlichkeit ſoweit als möglich durch die Naturzeit; das iſt nur ein Symptom für die Verwandlung hiſtoriſchen Daſeins in naturhaftes Leben, die ſie vollzieht. Naturhaftes Leben iſt aber »ſelbſtvergeſſen«, richtiger: es hat ſein Selbſt, den »Wer ſeines Daſeins« (Heidegger) noch gar nicht gefunden.

Um den Seinsſinn des Mathematiſchen zu verſtehen, muß man das ganze ontologiſche Problem hineinſtellen in die univerſale Spannung zwiſchen Hiſtoriſchem und Nichthiſtoriſchem, zwiſchen »Geiſt« und »Natur«[1].

»Geiſt« iſt (wie wir das Wort hier verſtehen) durch und durch hiſtoriſch, d. h. gekennzeichnet durch die Seinsweiſe der eigentlichen Zeitlichkeit. (Norm, überzeitliche Geltung u. dgl. iſt nichts Geiſtiges, ſondern vom echten Geiſt aus geſehen, deſſen Weſen in ſeiner freien Schöpferkraft beſteht, Verfall (Erſtarrung) hiſtoriſchen Daſeins.) Dagegen iſt alles primitive Leben (des Kindes, des »Naturvolkes«, der triebhaften Unterſchicht in uns ſelbſt, die in krankhaften Zuſtänden, aber nicht nur in dieſen, zutage tritt) »Natur«.

Das primitive, »naturhafte« Leben kennt den Tod nicht, beſitzt die Sehergabe (»Naturſichtigkeit«) und die »Allmacht der Gedanken« (Magie).

Das »wache«, hiſtoriſche Daſein verlor alle dieſe koſtbaren Güter, um den Preis des »Selbſtbewußtſeins«, des Wiſſens um die eigene Exiſtenz. Dieſer ungeheure Verluſt iſt aber unerträglich und das Leben ſucht ſtändig nach Möglichkeiten, im »Wachen« jene Vorzüge primitiven Daſeins zurückzuerhalten. Ein Mittel dazu (unter anderen) iſt die Mathematik (und andere »Vernunft«wiſſenſchaften). Die menſchliche ratio, mit ihren Anſpruch auf ewige Geltung ihrer Erkenntniſſe, iſt offenbar nicht zeitlich im hiſtoriſchen Sinn, ſondern — ſo paradox es auch klingt — naturzeitlich. Die »überzeitliche Vernunft« iſt

1) Das Folgende kann hier nur als Theſe hingeſtellt werden, für die der Verfaſſer die umfaſſende philoſophiſche Begründung in ſpäterer Zeit zu liefern hofft.

alſo ein primitiver Zug im hiſtoriſchen Daſein, ſie iſt ein archaiſches Erbſtück, ſie bezeichnet die Naturgebundenheit und die relative Ungeiſtigkeit menſchlichen Daſeins.

Die Überwindung des Todes durch die Vorausſicht der Zukunft und die Beherrſchung der Natur, das iſt die Leiſtung der auf Mathematik gegründeten Naturwiſſenſchaft. Damit erfüllt ſie, ſoweit es noch dem »wachen« Leben möglich iſt, die Wünſche nach dem verlorenen Beſitz des mythiſchen, »prähiſtoriſchen« Zeitalters.

Mathematik, Naturwiſſenſchaft und Medizin entſtehen geſchichtlich aus den Künſten der archaiſchen Mantik und Magie. Dieſe Entwicklung iſt nicht, wie man vielfach meint, ein hiſtoriſches Kurioſum, ſondern der äußere Ausdruck eines tiefen ontologiſchen Tatbeſtandes. Die »exakten« Wiſſenſchaften erſetzen Mantik und Magie in völlig legitimer Weiſe[1].

Aber der prophetiſche und beherrſchende Charakter des Mathematiſchen tritt nicht bloß in ſeinen Anwendungen, ſondern ſchon in der »reinen Mathematik« zutage. Unüberſehbare Zahlenbeziehungen werden etwa in der höheren Zahlentheorie (einer ganz beſonders »rein« mathematiſchen Diſziplin) durch endliche Geſetze beherrſchbar und damit das Ergebnis von Rechnungen vorausſehbar. Das »Mantiſche« iſt alſo ſchon eine intern-mathematiſche Angelegenheit und hier gewiſſermaßen verlockend durch das eigentümliche Machtgefühl, das es dem »Eingeweihten« verleiht. Als reine ſeeliſche Haltung vereinigt alſo das »Mathematiſieren« bereits das »Wachſein« und die »Zeitüberlegenheit«, Züge hiſtoriſchen und naturhaften Daſeins. (Allerdings hat das Wachſein verſtändlicherweiſe gewiſſe Grenzen; es iſt »ſelbſtvergeſſen«.)

Von dieſer Explikation der »mathematiſierenden Haltung« aus fällt nun auch neues Licht auf unſere frühere Interpretation des Sinnes der demonſtrativen und deduktiven Mathematik (§ 6a). Es wurde gezeigt, daß die rein deduktive Mathematik, die gar nicht mehr Erkenntnis ſachlicher Wahrheiten, ſondern nur widerſpruchsfreie Ableitung von Folgerungen aus undurchſichtigen Prämiſſen zum Ziel hat, einen eigentlichen Begriff mathema-

1) Dieſe Theſen ſind einer ſtrengen Begründung auf Grund des hiſtoriſchen Materials fähig, die an dieſer Stelle nicht gegeben werden kann. – Vgl. das früher (S. 239 ff.) über Platos Deutung des mathematiſchen »a priori« aus der ἀνάμνησις und das (S. 288, 308) über Leibnizens »mathematiſche Myſtik« Geſagte.

tiſcher Exiſtenz gar nicht kennt, daß vielmehr ihre ganze Sorge der reibungsloſen Fortſetzung des inhaltlich ganz leeren Folgerungs-*Betriebs* gilt. Jetzt wird die Motivation dieſes befremdlichen Formelſpiels deutlicher. Beherrſchung und Vorausſage iſt auch im Formelſpiel in gewiſſem Sinne möglich. Man kann einen verwickelten Spielzuſammenhang durch einfache Geſetze beherrſchen und das Auftreten beſtimmter »ſpielgerechter« Formeln im Folgerungsſpiel vorausſagen lernen. Der Reichtum und die Durchſichtigkeit der Spielbeziehungen hat einen eigentümlichen quaſiäſthetiſchen Reiz. In beſonderem Maße wird dieſer Reiz dadurch geſteigert, daß durch eine Art Erſchleichung (im Sinne des mathematiſchen »Exiſtentialabſolutismus) dem leeren Spiel ein ſublimer Sinn untergelegt wird, als ob man tiefe, übermenſchliche Erkenntniſſe über das Aktual-Unendliche, das Tranſzendent-Transfinite gewönne. Es wird mit anderen Worten die *Illuſion* erregt, man beherrſche das Aktual-Unendliche. Aber dieſe Illuſion hält der nüchternen Kritik nicht ſtand, ſie verſchafft uns zwar ſo etwas wie einen erfüllenden Traum archaiſcher Wünſche, – aber beim Erwachen zerrinnt alles in Nichts. Alſo auch vom rein »noetiſchen«, »immanenten« Geſichtspunkt des mathematiſierenden Bewußtſeins aus iſt die reine Deduktion zwar verſtändlich, aber nicht ihrer eigentlichen Abſicht entſprechend. Es gelingt in dieſer geiſtigen Haltung *nicht*, volles Wachſein mit naturhaftem Befriedigtſein zu vereinigen; das Gleichgewicht der hiſtoriſchen und der naturhaften Tendenzen iſt geſtört, zuungunſten des Hiſtoriſchen. Die »*Sachlichkeit*« *der Mathematik iſt alſo ſchon eine immanente Forderung der Daſeinsweiſe des faktiſchen Lebens ſelbſt, ohne daß eine bewußtſeins-tranſzendente* »*Objektivität*« *in Rückſicht gezogen werden braucht.*

Überblicken wir die vorſtehenden Betrachtungen mit Rückſicht auf die hiſtoriſch überlieferte Problem-Spannung zwiſchen mathematiſcher Myſtik (*Plato, Leibniz*) und mathematiſchem Kritizismus (*Ariſtoteles, Kant*), ſo kann kein Zweifel ſein, daß ſie *für die Kritik und gegen die Myſtik* entſcheiden. Soweit immanent-phänomenologiſche Geſichtspunkte in Frage kommen und ſoweit es ſich um reine Mathematik handelt, vermag die Theorie der reinen Geſetzheiten ihren ſpieleriſchen Charakter nicht zu überwinden. Und, was noch ausſchlaggebender iſt, *jenes formal-mathematiſche* »*Spiel*« (im Sinne *Hilberts*) *iſt eben auch nicht als Weiſe des Lebens, als Spielbetätigung oder beſſer als* **spielendes Dasein** *die Erfüllung einer großen*

Lebensaufgabe. Erſt der Ernst der Sachlichkeit vermag daſeinsmäßig Entſcheidendes zu leiſten! –

So ſehr nun aber innerhalb der Sphären der reinen Matheſis, die wir in dieſer Abhandlung allein unterſucht haben, die »Kritik« die »reine Phänomenologie«, der »Idealismus« und der hiſtoriſch-hermeneutiſche Geſichtspunkt letztlich den Seinsſinn des Mathematiſchen entſcheidend beſtimmen, ſo bleibt doch noch ein ungeklärter Reſt.

Gedankenallmacht und Vorausſage, Magie und Mantik beziehen ſich urſprünglich, im prähiſtoriſchen Leben unbedingt auf die Wirklichkeit. Die Reduktion des mathematiſchen Gedankens auf das reine, wirklichkeitsfreie Mathematiſche, die wir ſelbſt ja auch erſt nachträglich vollzogen, iſt ein künſtliches Verfahren, das den ausſchlaggebenden Anſpruch primitiven Lebens, der ſich durch die Mathematik ins hiſtoriſche Daſein »hineinretten« ſoll, unbefriedigt läßt, – eben der Anſpruch auf die Beherrſchung der wirklichen Welt. Die Mathematik ſoll ja nicht lediglich eine Art Seelentechnik ſein, um ſich, bei kühlem Blute, in eine Art »kalter Ekſtaſe« hinein zu verſetzen (wie ſie Thomas Mann im »Tonio Kröger« dem Künſtler zuſchreibt), in der der ſeeliſche Habitus archaiſchen Lebens wieder auflebt. Die Mathematik ſoll mehr ſein als ſolch ein wacher Traum; ſie ſoll die »vermeintliche« Beherrſchung der Wirklichkeit zu einer »wirklichen« machen. Sie erreicht alſo erſt als mathematiſche Naturwiſſenſchaft ihre eigentliche, ihr von ihrem Weſen vorgezeichnete Abſicht.

Damit aber tritt das Tranſzendente auf den Plan. Es tritt die Frage auf, ob das μάθημα auch einen echt »gegenſtändlichen«, »objektiven« Sinn haben kann.

Dies iſt eine Frage ganz anderer Ordnung als alle bisher behandelten. Es iſt die Frage der Anwendungsmöglichkeit des Mathematiſchen auf die Natur.

Auf die ſich damit eröffnende neue Richtung der ontologiſchen Problematik mathematiſcher Exiſtenz, die man etwa mit den Worten ausdrücken kann: »Was beſagt die Exiſtenz mathematiſcher Gegenſtände?«, kann hier am Schluſſe dieſer Arbeit nur noch ein kurzer Hinweis gegeben werden. Es iſt aber unmöglich, ganz an ihr vorüber zu gehen, weil im Hinblick auf dieſe neue Frage die »mathematiſche Myſtik« in einem neuen Lichte erſcheint. Denn ihr Grundglaube iſt doch, daß die Wirklichkeit mathematiſcher Beherrſchung ſich willig fügt.

Auch die bewunderungswürdige Beſonnenheit Kants ließ der Kritik der reinen Vernunft, nach der »der Verſtand der Natur die

Geſetze vorſchreibt«, die Kritik der Urteilskraft folgen, wo mit Recht geſagt wird, daß, um die allgemeinen Grundſätze des reinen Verſtandes, wie etwa das Prinzip der Kauſalität, auf die Natur konkret anwenden zu können, noch mehr erfordert wird als die Einſicht in die Notwendigkeit der Verſtandesgrundſätze. Dann mögen jene immerhin die Form der weltlichen Erfahrung beſtimmen (ſie geben »auf die Möglichkeit einer Natur [als Gegenſtands der Sinne] überhaupt«), ſo bedarf doch die »reflektierende Urteilskraft, die von dem Beſonderen der Natur zum Allgemeinen aufzuſteigen die Obliegenheit hat« eines neuen Prinzips, um die »Einheit aller empiriſchen Prinzipien« und »die Möglichkeit der ſyſtematiſchen Unterordnung derſelben untereinander« zu begründen. Dieſes Prinzip ſieht Kant darin, die Naturgeſetze ſo zu betrachten, »als ob gleichfalls ein Verſtand (wenn gleich nicht der unſrige) ſie zum Behuf unſerer Erkenntnisvermögen, um ein Syſtem der Erfahrung nach beſonderen Naturgeſetzen möglich zu machen, gegeben hätte«. Es bedarf nämlich einer gewiſſen »Zuſammenſtimmung der Natur zu unſerem Erkenntnisvermögen«, damit wir überhaupt durchſichtige Geſetze in der Natur erblicken können. Denn es könnte, unbeſchadet der ſtrengen Erfülltheit des Kauſalprinzips, »die ſpezifiſche Verſchiedenheit der empiriſchen Geſetze der Natur« ſo groß ſein, »daß es für unſeren Verſtand unmöglich wäre, in ihr eine faßliche Ordnung zu entdecken«[1].

Ähnlich ſagt ein moderner führender Mathematiker[2]: »Und zwar iſt das Entſcheidende: je weiter die Analyſe fortſchreitet, in je feineren Details alſo die Vorgänge erfaßt und in je feinere Elemente ſie zerlegt werden, um ſo einfacher – nicht wie man erwarten ſollte, um ſo komplizierter – werden dieſe geſetzmäßigen Grundbeziehungen, und um ſo vollſtändiger und um ſo genauer erklären ſie den tatſächlichen Verlauf.« Es liegt alſo hier ein ſehr deutliches Entgegenkommen der Natur vor. Man kann keinesfalls (wie H. Dingler meint) ſicher ſein, durch ein ſchematiſches abſtrahierendes und approximierendes Verfahren zu durchſichtigen Naturgeſetzen zu gelangen; die Verwicklung der Geſetzmäßigkeit könnte jedes weitere Vordringen bald hemmen. »Die Setzung der realen Außenwelt garantiert nicht dafür, daß dieſe in der Vernunft ſich aus den Erſcheinungen durch die Einſtimmigkeit ſchaffende Erkenntnisarbeit konſtituiere; dazu iſt vielmehr nötig, daß ſie von einfachen Elementargeſetzen durchwaltet ſei. Die bloße

1) Vgl. »Kritik der Urteilskraft«, Einleitung, Abſchnitt IV und V.

2) H. Weyl, Handbuch der Philoſophie, Abt. II, Beitrag A, S. 108, 2ff.

Setzung der Außenwelt erklärt also eigentlich nicht, was sie doch erklären sollte, sondern die Frage nach ihrer Realität fließt untrennbar zusammen mit der nach dem Grunde für die gesetzlich-mathematische Harmonie der Welt. So liegt die Antwort denn doch, jenseits des Wissens, in Gott ...«[1].

Auch Husserl sind derartige Gedankengänge nicht fremd, wie verschiedene Stellen seiner »Ideen zu einer reinen Phänomenologie« zeigen. Er wirft (S. 5 und S. 119, Anmerkung) die Frage auf, ob und wie eine »Tatsachenwissenschaft von den transzendental reduzierten Erlebnissen möglich sei« und »welche Beziehung eine solche Tatsachenforschung zur Idee der Metaphysik haben mag«. In dem § 58, mit dem Titel »Die Transzendenz Gottes ausgeschaltet« wird, außer auf die wunderbare Teleologie der menschlichen Kulturentwicklung auch auf die »Rationalität« der bloßen Natur hingewiesen, die in der Existenz einer »morphologisch geordneten Welt« liegt, die weiterhin sogar die Auffindung exakter Naturgesetze gestattet.[2] »In all dem liegt, da die Rationalität, welche das Faktum verwirklicht, keine solche ist, die das Wesen fordert, eine wunderbare Teleologie«. (S. 110, vgl. auch die »Anmerkung« auf S. 96f.)

Es wird also jedenfalls die Frage nach dem Sinn der Realität der Natur neu aufgeworfen. Kant bleibt in seiner vorsichtigen Weise bei der »subjektiven« Notwendigkeit stehen, daß die Naturerkenntnis ihrer Möglichkeit nach eine solche harmonisch-einfache Natur voraussetzt. Der »mathematische Mystiker« freilich wird Gottes Ideenwelt im Spiegel dieses harmonischen Universums zu erblicken glauben. Und hier besteht nur eine Beziehung zur »symbolischen Mathematik« Leibnizens und seiner Nachfolger Hilbert und Weyl (in seiner neusten Phase). Die Harmonie der Natur ist aus konstitutiven Gründen nicht als mit Notwendigkeit realisiert einzusehen. Wohl muß eine Welt, wenn sie als solche unserem endlichen Bewußtsein erfaßbar sein soll, eine (bis zu einem gewissen

1) Weyl, l. c. S. 89, 47ff.

2) Vgl. l. c. S. 110: »Die Reduktion der natürlichen Welt auf das Bewußtseinsabsolute ergibt faktische Zusammenhänge von Bewußtseinserlebnissen gewisser Artungen mit ausgezeichneten Regelordnungen, in denen sich, als intentionales Korrelat, eine in der Sphäre der empirischen Anschauung morphologisch geordnete Welt konstituiert, d. i. eine Welt, für die es klassifizierende und beschreibende Wissenschaften geben kann. Eben diese Welt läßt sich zugleich, was die materielle Unterstufe anlangt, im theoretischen Denken der mathematischen Naturwissenschaften als »Erscheinung« einer unter exakten Naturgesetzen stehenden physikalischen Natur bestimmen.«

Grade) »harmoniſche« ſein. Das Phänomen »Welt« iſt ſeinem eignen Sinne nach Kosmos und nicht Chaos. Aber, daß eine Welt wirklich exiſtiert, das iſt von dem Geſichtspunkt phänomenologiſcher Konſtitution aus »zufällig«. In dieſer Kontingenz drückt ſich ein metaphyſiſcher Tatbeſtand aus.[1] Darüber hinaus[2] nun zeigt die Tatſache des Beſtehens der modernen Phyſik, daß die »ſymboliſche«, unverſtändliche, tranſzendent-transfinite Mathematik Hilberts die Harmonie der Welt entſchleiert. Alſo hat jenes leere Formelſpiel einen geheimnisvollen Bezug auf die metaphyſiſche Struktur des Kosmos. Welches iſt der Sinn und der Grund jenes Bezugs?

Dieſe Frage iſt hier nicht mehr zu beantworten. Sie ſtellt den ungelöſten Reſt des Problems der mathematiſchen Exiſtenz dar, den wir am Schluſſe dieſer Abhandlung ſtehen laſſen müſſen. Es taucht hier methodiſch eine neue Frageſtellung auf: Die Aufgabe der Deutung (divinatio, μαντεία) eines Phänomenzuſammenhangs, die ſich von der Auslegung (ἑρμηνεία, interpretatio) und erſt recht von der Aufgabe der Ergründung der formalen Konſtitution der Phänomene unterſcheidet. Auch ſie iſt in gewiſſem Sinn eine onto-

---

1) Huſſerl betont (in dem angeführten § 58 der »Ideen«) ausdrücklich, daß die in der Teleologie der Natur und der menſchlichen Kulturentwicklung ſich äußernde (göttliche) Tranſzendenz eine neue iſt, »der Tranſzendenz der Welt gleichſam polar gegenüberſtehend« (S. 110). Er ſpricht (S. 111) von der »Exiſtenz eines außerweltlichen »göttlichen« Seins«, welches »nicht bloß der Welt, ſondern auch dem »abſoluten« Bewußtſein tranſzendent wäre.« »Es wäre alſo ein »Abſolutes« in einem total anderen Sinne als das Abſolute des Bewußtſeins, wie es andererſeits ein Tranſzendentes in total anderem Sinne wäre gegenüber dem Tranſzendenten im Sinne der Welt.« — Damit iſt der Grund, aus dem jene Teleologie entſpringt, mit voller Klarheit als metaphyſiſch gekennzeichnet.

2) Es wäre auch eine »ungefähr« harmoniſche Welt denkbar, die nicht von exakten Naturgeſetzen beherrſcht wird. Das tägliche (»vorwiſſenſchaftliche«) Leben rechnet immer nur ungefähr (ὡς ἐπὶ τὸ πολύ, Ariſtoteles), mit einer für die Praxis hinreichenden und bequemen Genauigkeit. Die geſamte Antike kannte kaum exakte Naturgeſetze außer den aſtronomiſchen und einzelnen ſtatiſchen und geometriſch-optiſchen Sätzen. Aber auch in der heutigen Phyſik ſind die unmittelbar verifizierbaren, ſog. »phänomenologiſchen« Geſetze faſt alle ſtatiſtiſche Überſchläge und bloß approximativ und mit einer gewiſſen Wahrſcheinlichkeit zutreffend. Es liegt alſo in der Forderung exakter phyſikaliſcher Elementargeſetze ſehr viel mehr als das Poſtulat einer Welt, »in der es ſich leben läßt« — in anderer Hinſicht freilich auch viel weniger! (Derartige Gedanken ſind von Huſſerl mehrfach in Vorleſungen und Übungen entwickelt worden.)

logiſche, aber nicht mehr im Sinne einer hermeneutiſchen Explikation des »Seinsſinnes«, ſondern — vielleicht — einer »Erdeutung« eines tranſzendenten »Seinsgrundes«. Das Korrelat dieſer Deutung, das in ihr zu Deutende, iſt das »Naturhafte« in dem weiten, früher erläutertem Sinn. Die Natur (Phyſis) iſt das wahrhaft »Metaphyſiſche« im Gegenſatz zur Immanenz des Hiſtoriſchen. Innerhalb dieſer großen neuen Aufgaben der Deutung, deren ſyſtematiſche Betrachtung man als »mantiſche Phänomenologie« (in Analogie zur »hermeneutiſchen«) bezeichnen könnte, hat vielleicht auch die moderne »mathematiſche Myſtik« Hilberts und Weyls eine Stelle[1].

Dies kann hier nicht mehr Gegenſtand der Unterſuchung ſein. Mag auch die ſpätere phänomenologiſche Forſchung, die in der angedeuteten »mantiſchen« Richtung vorzudringen in Zukunft unbedingt beſtrebt ſein muß[2], die Berechtigung der »ſymboliſchen« auch gegenüber den hier verteidigten und ihrem Seinsſinn nach unterſuchten »ſachlichen« Mathematik erweiſen — die Beſchränkung auf den ontologiſchen Geſichtspunkt im traditionellen und im hermeneutiſchen Sinn war notwendig. Denn wie es auch um die Deutung des Tranſzendent-Metaphyſiſchen ſtehen möge — man muß wiſſen wo die immanent-phänomenologiſche Sphäre endet und die »jenſeitige« in einem gewiſſen Betracht transphänomenale beginnt, ſoll nicht eine hemmungsloſe Myſtik das mühſam angebaute Gebiet kritiſchen Wiſſens überfluten.

---

1) Zitiert doch Weyl ſelbſt als Motto ſeiner Darſtellung der Philoſophie der Naturwiſſenſchaft den heraklitiſchen Spruch (fr. 93 Diels): *Ὁ ἄναξ, οὗ τὸ μαντεῖόν ἐστι τὸ ἐν Δελφοῖς, οὔτε λέγει οὔτε κρύπτει ἀλλὰ σημαίνει.* (Handbuch der Philoſ. II A. S. 65).

2) Es ſei noch dazu folgender, rein philoſophiſcher Gedankengang angedeutet: Indem das Naturhafte und das Hiſtoriſche unterſchieden wird, iſt ſchon der Kreis der hiſtoriſchen Immanenz durchbrochen und die Geſchloſſenheit idealiſtiſch-hermeneutiſcher Forſchung unwiederbringlich verloren. Denn jener große Prozeß der »Hiſtoriſierung« des Naturhaften und ſein Gegenteil (die »Naturaliſierung« des Hiſtoriſchen, wie ſie etwa im »Verfallen des Daſeins« [Heidegger] ſich äußert), ſpielt doch ſelbſt in einer beſtimmten »Zeitlichkeit«, die ſicher nicht die hiſtoriſche und auch nicht einfach die naturhafte iſt. Man wird ſie alſo kaum anders als »metaphyſiſch« bezeichnen können. Von hier aus wird die Theſe: Phyſis = Metaphyſis offenbar erſchüttert: man wird dazu gedrängt, zwei Arten des Metaphyſiſchen zu unterſcheiden; das uns (relativ) Naheliegende und in der »Deutung« Zugängliche (die Natur) und die eigentlich im zugeſpitzten Sinn tranſzendente Sphäre, innerhalb der ſich der Kampf von Hiſtoriſchem und Nichthiſtoriſchem entſcheidet. Vielleicht hat dieſe eine Beziehung zur Tranſzendenz Gottes ſelbſt.