Über die Leibnizschen Fortschritte auf diesem Gebiet[1]) ist wohl auch noch nicht das letzte Wort gesprochen; aber das gehört nicht mehr zur Frühgeschichte des Imaginären.

(Eingegangen am 31. 12. 25.)

Das Problem der Universitätsvorlesungen über Infinitesimalrechnung und ihrer Abgrenzung gegenüber der Infinitesimalrechnung an den höheren Schulen.[2])

Von OTTO TOEPLITZ in Kiel.

Meine Damen und Herren!

Als die Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte das vorige Mal in Düsseldorf tagte, vor 28 Jahren, fand, eben am 24. September, im Anschluß an Vorträge von Felix Klein und von Alfred Pringsheim eine Debatte ungefähr über das nämliche Thema statt, auf das ich heute Ihre Aufmerksamkeit lenken möchte. Wenn der gedruckte Bericht über diese Düsseldorfer Debatte lediglich vermerkt: „auf Einzelheiten derselben kann hier nicht eingegangen werden", so läßt er nur erraten, daß damals zwei der stärksten Dozentenpersönlichkeiten unter den deutschen Mathematikern jener Zeit mit dem vollen ihnen eigenen Temperament ihre polaren Ansichten über dieses Thema einander entgegengesetzt haben.

Die Probleme, die damals angerissen wurden, bestehen noch heute in der gleichen Aktualität. Ein Menschenalter ist verflossen, eine Generation, die in Mengenlehre eine abirrende Kuriosität erblickte, ist von einer anderen abgelöst, die eben diese Mengenlehre mit der Muttermilch einsaugt; aber im Punkte der Anfängervorlesungen über Infinitesimalrechnung besteht noch die gleiche Polarität der beiden Standpunkte wie damals. Der tatsächliche Zustand dieser Vorlesung an den deutschen Universitäten zeigt noch heute die gleiche bunte Mannigfaltigkeit: auf der einen Seite die strenge Observanz, die mit einer sechswöchentlichen Dedekindkur anhebt und dann aus den Eigenschaften des allgemeinen Zahl- und Funktionsbegriffs die konkreten Regeln des

III[2], S. 110. Genauere Ausführungen über die Leibnizsche Abh. bei R. B. McClenon: A Contribution of Leibniz to the History of Complex Numbers. The Amer. Math. Monthly 30 (1923), S. 369—374.

1) Siehe Tropfke II, S. 82/83.

2) Vortrag, gehalten auf dem Kongreß zu Düsseldorf in der Sitzung des Reichsverbandes vom 24. September 1926.

Differenzierens und Integrierens herleitet, als wären sie notwendige, natürliche Konsequenzen, auf der anderen Seite die anschauliche Richtung, die den Zauber der Differentiale walten läßt und auch in der letzten Stunde der zwei Semester umspannenden Vorlesung den Nebel, der aus den Indivisibilien aufsteigt, nicht durch den Sonnenschein eines klaren Grenzbegriffs zerreißt; und dazwischen die hundert Schattierungen von Diagonalen, die man zwischen zwei zueinander senkrechten Ideenrichtungen einzuschalten vermag.

Gerade diese Vielheit in der Art, wie man sich mit diesem Vorlesungsproblem abzufinden sucht, setzt seine Größe und Schwierigkeit ins hellste Licht. Empfunden, glaube ich, wird diese Schwierigkeit von uns allen, sei es, daß wir darum eine besondere Sorgfalt auf diese Vorlesung verwenden, sei es, daß wir sie in unbewußter Anerkenntnis ihrer Tücke dem jüngsten Kollegen anvertrauen mit der Devise: die Anfängervorlesung den Anfängern. — Es geschieht nur aus dem Bewußtsein von der Schwierigkeit dieses Problems heraus, wenn ich mich — wie es auch jene Debatte vor 28 Jahren getan hat — allein auf die *Universitäts*-Vorlesung beschränke und die ganz ebenso verwickelten, aber ganz anders gelagerten Probleme der Infinitesimalrechnung auf der *Technischen Hochschule* hier ganz beiseitelasse.

Die Gründe für die Schwierigkeit unseres Problems erblicke ich in drei Momenten. Das *erste Moment* ist die eben schon berührte Antithese. Kein Kompromiß vermag diese Gegensätzlichkeit aus der Welt zu schaffen; es liegt hier eine der Natur der Sache nach unüberbrückbare Kluft vor. Die exakte Richtung will dasjenige Maß von Strenge, das seit Weierstraß nicht mehr nur Geheimnis der führenden Mathematiker ist, sondern zum allgemeinen guten mathematischen Ton gehört, gleich vom ersten Moment des mathematischen Lehrgangs an statuieren; in konsequenter Durchführung dieser Idee stellt sie diejenige Fundierung des Zahlbegriffs, die die heute gangbare Grundlage der tatsächlichen Forschung bildet, in der dazu nötigen Ausführlichkeit an die Spitze; sie gelangt dadurch zu einer gewissen Einheitlichkeit des Stils, zu einer gewissen ästhetischen Wirkung, auf diejenigen, die für diesen Gang der Dinge reif sind. Aber zwischen diesen sitzen die zahlreichen Studierenden, die eine solche Reife abstrakten Denkens in ihrer ersten Universitätsstunde noch *nicht* besitzen, dagegen einen Heißhunger nach intuitiven, nach produktiven Begriffen. Die anschauliche Richtung will diesen Heißhunger befriedigen. Kiepert-Stegemann in seinen ältesten Auflagen ist ein Musterbeispiel der reinen Durchführung einer solchen Tendenz; es muß ein Funke von wirklichem didaktischen Genius darin stecken, der den Erfolg dieses Werkes noch in seinen heutigen Abwandlungen bedingt. Der Vergleich mit den späteren Auflagen zeigt in diesem wie in einigen anderen berühmten Unterrichtswerken unseres Gegenstandes mit besonderer Deutlichkeit dasjenige, worauf es uns hier in erster Reihe ankommt, nämlich wie wenig jeder Versuch eines Kompromisses zwischen beiden Tendenzen die Sache fördert. In solchen späteren Auflagen — um ein Beispiel anzuführen — pflegen hinter der „intuitiven“ Definition der Reihenkonvergenz ein oder einige Paragraphen mit Feinheiten der Konvergenz eingeschoben zu werden, d. h. mit Sätzen, die sich mit wachsender Auflagenzahl asymptotisch ernsthaften Aussagen annähern. Das ist der Erfolg der schweren Vorwürfe, die von exakter Seite immer wieder erhoben worden sind. Gerade hier zeigt sich, wie sehr diese Ausbesserungsversuche am Kern der Sache vorbeigehen, und wie wenig auch die erhobenen Vorwürfe ins Schwarze getroffen hatten. Denn selbst wenn ein Leser diese eingeschobenen Paragraphen nicht überspringen sollte, so wäre er auf der Basis jener intuitiven Definition methodisch gar nicht darauf vorbereitet, irgend welche Feinheiten zu verstehen. Je exakter die Wortlaute, desto unverständlicher müssen sie ihm bleiben.

Es ist nun besonders wichtig, sich von der Vorstellung freizumachen, daß die viel umstrittene Antithese, von der dieses erste Moment handelte, die Hauptschwierigkeit sei, die unser ganzes Problem beherrscht. Gerade erst die Erkenntnis und die Bekämpfung auch der anderen ihm innewohnenden Schwierigkeiten wird uns auf den Weg führen, der uns nachträglich auch zur Bewältigung der unangreifbar scheinenden ersten gelangen läßt.

Ich erblicke ein *zweites Moment* in der doppelten Zielsetzung, die dieser Anfängervorlesung vorgesetzt ist und in dem Widerstreit, der zwischen beiden Zielsetzungen besteht. Das unmittelbare Ziel dieser Vorlesung ist es, den Unterbau für die späteren Kursusvorlesungen zu liefern, für die kompakteren mathematischen Theorien wie Funktionentheorie, Differentialgeometrie usw. Zunächst muß sie dazu sozusagen das mathematische Handwerkszeug, die Technik des Differenzierens und Integrierens herbeibringen, dann die Anwendung davon auf geometrische oder mechanische Aufgaben (der Ansatz davon will gelernt sein), endlich die Technik des sauberen Grenzbegriffs, die sogenannte Epsilontik. Aber neben dieses unmittelbare Ziel stellt sich ganz von selbst noch ein anderes: der junge Student, der sich für die Mathematik entschlossen hat und erst endgültig entschließen möchte, will wissen, inwiefern die Mathematik *spannend*, inwiefern sie *schön* ist, ob sie es lohnt ihr sein Leben zu widmen. Sprechen wir hier nicht von den wenigen Auserwählten, die das sozusagen von Natur wissen, die nichts anderes werden können als Mathematiker, den geborenen Stockmathematikern. Diese 5% der Hörer unserer Anfängervorlesung — ich rechne hoch — lernen solche Technik spielend, bedürfen dazu kaum der Vorlesung; ihretwegen brauchten wir das ganze Problem nicht zu erörtern. Aber gerade aus ihnen rekrutieren sich vorzugsweise die späteren Universitätsprofessoren, die den Unterricht gestalten und unwillkürlich dabei die Erinnerung an den eignen Werdegang leicht zu sehr im Bewußtsein haben. Es ist richtig: wenn wir den Unterricht auf das Niveau dieser 5% abstellen, so werden ganz gewiß noch einige andere mitgerissen und auf eine Höhe gezogen, die sie bei einem niedrigeren Niveau der ganzen Vorlesung nie erreichen würden. Aber diese Mitgezogenen — das lehren die Tatsachen — sind durchaus nicht alle und, was wichtiger ist, durchaus nicht alle gut veranlagten. Wie einem Klavierspieler beim Beginn seiner Lehrzeit durch überspannte Fingerübungen die ganze Lust an der Sache genommen werden kann, so kann eine Differentialrechnung, die die Handfertigkeit in apodiktisch hingestellten Regeln eindressiert, auch vielen Fähigen den Gegenstand verleiden, und es sind nicht die schlechtesten Naturen unter unseren Anfängern, die auch wissen wollen, *warum* die Dinge geschehen. Und das sei hier gleich eingangs präzisiert: nicht den 5% Stockmathematikern, die an sich jedes Integral herrlich finden, nicht den 50% der schlechtesten, die besser nicht auf unsere Hörerbänke gehörten, sondern den andern 45% guter, erfreulicher Hörer sollen diese Betrachtungen hier gelten.

Wenn nun also die Vorlesung über Infinitesimalrechnung diesem jetzt wohl bezeichneten Kreise von Hörern etwas von der wahren Natur der Mathematik offenbaren will, so steht sie vor einem unleugbaren Hindernis, denn es findet sich in ihr nichts von der straffen Linie, die etwa die Funktionentheorie durchzieht, nichts von dem Schwung der Galoisschen Theorie oder von den schweigenden Gipfeln der Idealtheorie. Es fehlen die spannenden Ereignisse, die durchschlagenden Tatsachen, die aufregenden Probleme. Der Philologe, der Historiker ist in dieser Beziehung besser daran; hier geht der Student vom ersten Semester an in *alle* Vorlesungen; und wenn ihm dabei die stufenweise, systematisch ansteigende Ausbildung mangelt, die wir in den Kollegs geben, so bietet sich ihm dafür doch bald der Gesamtaspekt seiner Wissenschaft dar. Selbst die analytische Geometrie, die andere mathematische Anfängervorlesung, ist etwas günstiger daran; wenn auch nicht gerade dramatische, so doch gewisse ästhetische Akzente können ihr bequem erteilt werden, sei es, daß man in die Eleganz homogener Koordinaten und Formen, sei es, daß man in das Ebenmaß projektiver Betrachtungen einlenkt. Ich glaube, es ist gut, die Schwächen der Infinitesimalrechnung in diesem Betracht einmal offen bei Namen zu nennen, um das vorliegende Problem klar zu erkennen.

Das *dritte Moment* ist neueren Datums. Das Eindringen der Infinitesimalrechnung in die höhere Schule, das den Kollegen von der Technischen Hochschule eine so erwünschte Entlastung bringt, ist für uns Universitätslehrer keine ganz ungetrübte Freude. Zunächst wird die Annehmlichkeit, daß ein erheblicher Teil unserer Hörer die Technik des Differenzierens und Integrierens schon mitbringt, dadurch beeinträchtigt, daß zwischen ihnen gymnasiale Studenten sitzen, die uns statt diesen wieder andere, im Grunde wichtigere Qualitäten darbieten. Aber entscheidender ist dieses: nur zu leicht glauben die Oberrealschüler, daß sie *alles*, was wir vortragen, schon auf der Schule gehabt haben, und zwar einfacher und besser, so daß sie gelangweilt von dannen laufen. Auf solcher Basis sind sie hernach unfähig, eine ernst einsetzende Funktionentheorie aufzufassen, und drücken deren Niveau. *Die Schule* vermag uns dieses Problem in keiner Weise zu erleichtern, und es ist gewiß nicht ihre Schuld. Denn *wenn* die Schule überhaupt Differentialrechnung lehrt — ich spreche im Augenblick *nicht* von der Frage, *ob* sie gut daran tut, dies überhaupt zu unternehmen — so muß sie es auf das *Gros* ihrer Schüler abstellen, die später nicht Mathematiker werden, und das ist ganz gewiß richtig, daß für dieses Gros keine Behandlung der Differentialrechnung in Betracht kommen kann, die eine günstige Basis für ein Universitätsstudium in Mathematik abgibt. Es wäre geradezu ein Verbrechen, wollte ein Lehrer einer höheren Schule eine solche Differentialrechnung produzieren vor Menschen, für die diese Kenntnis nie eine Erfüllung finden wird, wie sie unser Student dann in den höheren Vorlesungen genießt. Aber wie dem auch sei, für *uns* besteht das gekennzeichnete Problem und erfordert seine Lösung.

Den Vorschlag, den ich hier zur Bekämpfung aller dieser Schwierigkeiten vorbringe, habe ich seit 19 Jahren aus der Praxis der Vorlesung allmählich entwickelt und erprobt, und ich hoffe, ihn in absehbarer Zeit in der Form eines Lehrbuches vorlegen zu können; ich möchte ihn als die *genetische Methode* bezeichnen. Ich ging von dem zweiten der soeben geschilderten drei Momente aus und sagte mir: alle diese Gegenstände der Infinitesimalrechnung, die heute als kanonisierte Requisiten gelehrt werden, der Mittelwertsatz, die Taylorsche Reihe, der Konvergenzbegriff, das bestimmte Integral, vor allem der Differentialquotient selbst, und bei denen nirgends die Frage berührt wird: warum so? wie kommt man zu ihnen? alle diese Requisiten also müssen doch einmal Objekte eines spannenden Suchens, einer aufregenden Handlung gewesen sein, nämlich damals, als sie geschaffen wurden. Wenn man an diese Wurzeln der Begriffe zurückginge, würde der Staub der Zeiten, die Schrammen langer Abnutzung von ihnen abfallen, und sie würden wieder als lebensvolle Wesen vor uns erstehen. Und von da aus würde sich dann ein doppelter Weg in die Praxis darbieten: entweder man könnte den Studenten direkt die Entdeckung in ihrer ganzen Dramatik vorführen und solcherart die Fragestellungen, Begriffe und Tatsachen vor ihnen entstehen lassen — das würde ich die *direkte genetische Methode* nennen —, oder man könnte für sich selbst aus solcher historischer Analyse lernen, was der eigentliche Sinn, der wirkliche Kern jedes Begriffs ist, und könnte daraus Folgerungen für das Lehren dieses Begriffs ziehen, die als solche nichts mehr mit der Historie zu tun haben — die *indirekte genetische Methode.*

Von der *direkten genetischen Methode* will ich zuerst reden. Ich muß zwei Vorbemerkungen voranschicken, um Mißverständnisse auszuschließen. Die *eine* darüber, daß diese Idee nicht etwa an sich etwas neues darstellen will. F. Klein hebt gerade in der oben erwähnten Düsseldorfer Rede das biogenetische Grundgesetz hervor und Pringsheim karrikiert es in seiner Antwort; und ferner kennen Sie alle das Buch von G. Kowalewski über die klassischen Probleme der Analysis des Unendlichen. Klein stand in der Differentialrechnung, die er 1911 las, in der Idee wenigstens durchaus auf der Grundlage solcher Gedanken, und aus einigen damals mit ihm und auf seinen Rat mit Heinrich Burkhardt geführten Gesprächen habe ich einiges Wesentliche gelernt, nachdem ich schon vorher von mir aus seit 1907 die ganze Idee an anderen Gegenständen erprobt hatte. Aber Prioritäten sind hier, wo es sich nicht um mathematische Forschung handelt, ganz gewiß uninteressant. Die Vorlesungen, die tatsächlich heute gehalten werden, sind von solchen Ideen im allgemeinen nicht erfüllt, stehen ihnen zum Teil gänzlich fremd gegenüber; das ist der Umstand, der mich veranlaßt hier von den Dingen zu sprechen. Vor allem aber handelt es sich mir um die Art, wie diese Ideen so vertieft und so systematisch ausgestaltet werden können, daß sie ausreichen, um die oben vorgesteckten Ziele als Ganzes zu erreichen.

Die *andere* Vorbemerkung möchte dem Mißverständnis vorbeugen, daß es sich hier um eine „historische Methode“ handele. Dieses Schlagwort ist, nicht ohne Grund, unbeliebt; am Historischen haftet die Idee vom alten Zopf, den wir doch gerade abschneiden wollen, von den Umwegen, die die Forschung oft durchläuft, von der Subjektivität und Zufälligkeit der Entstehung wissenschaftlicher Entdeckungen. Es ist mir besonders wichtig, den Trennungsstrich nach dieser Seite zu ziehen.

Der Historiker, auch der der Mathematik, hat die Aufgabe, *alles* Gewesene, zu registrieren, ob es gut war oder schlecht. *Ich* will aus der Historie nur die Motive für *die* Dinge, die sich hernach bewährt haben, herausgreifen und will sie direkt oder indirekt verwerten. Nichts liegt mir ferner als eine Geschichte der Infinitesimalrechnung zu lesen; ich selbst bin als Student aus einer ähnlichen Vorlesung weggelaufen. Nicht um die *Geschichte* handelt es sich, sondern um die *Genesis* der Probleme, der Tatsachen und Beweise, um die entscheidenden Wendepunkte in dieser Genesis.

Es ist jetzt leicht aufzuweisen, in welcher Art ich mit dieser Idee die gesteckten Ziele zu erreichen versuche. Das *zweite* der genannten drei Momente, die Forderung von der Verlebendigung der Gegenstände, war mir der Ausgangspunkt gewesen. Es ist klar, das die direkte genetische Methode in den Gegenstand so viel Lichter, als überhaupt je darin gewesen sind, hineinsetzt. Handelt es sich, um nur ein Beispiel herauszugreifen, etwa um den Begriff der Summe einer unendlichen Reihe, so bringe ich erst die schönen, fruchtbaren Entdeckungen auf diesem Gebiet, die mit Nicolaus Mercator und Newton anheben, und die in die Berechnung der Logarithmen und in viele andere handgreifliche Aufgaben eine so überraschende Verbesserung bringen — natürlich nicht ohne hervorzuheben, welche Kühnheit in solchem Gebrauch unendlicher Reihen liegt; ich berichte dann von der Fülle der Eulerschen Endeckungen und von dem furchtbaren Chaos, in das Euler und die Bernoullis durch den Gebrauch divergenter Reihen geraten; ich schildere, wie sie schließlich nicht mehr aus und ein wissen, ob die eintretenden Widersprüche *daran* oder an dem gleichzeitigen Gebrauch der noch geheimnisvollen imaginären Größen liegen. Nun ist der Hörer reif für den Begriff der Reihenkonvergenz, den Begriff der allgemeinen Potenzreihe und ihres Konvergenzintervalls; er sieht deren Notwendigkeit ein, und er sieht, wie mit wenigen Federstrichen alle die vorher geschilderten wunderbaren Entdeckungen zu sauber bewiesenen Tatsachen werden — denn die Sanierung der *originalen* Methoden, nicht der heute unseligerweise eingerissenen mit dem Taylorschen Satz, ist in der Tat sehr leicht.

Wichtiger wird es sein, daß ich schildere, wie die scharfe Antithese des *ersten Moments* mit unserer Methode anzugreifen ist. Als unabänderliches Axiom sehe ich es dabei an, daß der Anfänger am Ende der zweisemestrigen Vorlesung das volle Verständnis und die volle Technik des epsilontischen Operierens erlernt haben muß, und daß er eine solche von der Schule nicht mitbringt. Die gewählte Formulierung legt bereits die Antwort nahe. Anstatt daß man gleich im

Anfang die epsilontische Methodik gleichsam mit dem vollen Werk, wie es bei der Orgel heißt, einsetzen läßt, führe man, wie der Organist in einem wohlaufgebauten Orgelstück die Register eines nach dem andern einsetzt, den Studenten allmählich in sanftem Anstieg auf die Höhe dieser Technik, und keinem von den oben erwähnten 45% wird sie dabei verschlossen bleiben. Man disponiere die Vorlesung nicht nach den materiellen Inhalten, sondern nach diesem methodischen Gesichtspunkt des Ansteigens; man spare Doppellimites mit den Gefahren der Nichtvertauschbarkeit als methodischen Höhepunkt für das Ende auf, anstatt sie schonungslos zu verwenden, wo der Gegenstand sie zufällig darbietet.

Was hat dies aber mit der genetischen Methode zu tun, werden Sie fragen. Die genetische Methode gibt den sichersten Wegweiser, um diesen sanften Anstieg, der gar nicht so leicht überall herauszuspüren ist, zu vollziehen. Denn wenn man die genetische Entwicklung, die die gesamte mathematische Menschheit gegangen ist, sinngemäß in ihrer großen, fortschreitenden Linie nimmt, so bemerkt man, daß sie im allgemeinen eben jenen sanften Anstieg vom Leichteren zum Schwereren genommen hat, und man kann die einzelnen oft explosiv vollzogenen großen Entwicklungen in der Regel als einen Fingerzeig für eine methodische Fortentwicklung nehmen. Unerschöpflich kann man so aus der Historie für die didaktische Methodik lernen.

Was nun das *dritte Moment* angeht, so ergibt es sich ganz selbstverständlich, daß die Hörer, denen die historische Seite der Sache fast durchweg neu zu sein pflegt, in diesem Gewande mit größerer Lust Dinge, die sie im Grunde schon einmal gelernt haben, über sich ergehen lassen und durch diese Beimischung ganz unvermerkt innerlich gerade auf *die* Punkte hingelenkt werden, die methodisch über ihren Schullehrgang hinausgreifen. Ich glaube sagen zu dürfen, daß sich dies bei meinen Hörern in den letzten Jahren, in denen es durch das rapide Eindringen der Differentialrechnung in die Schulen aktuell geworden ist, in vollem Maße bewährt hat.

Es kann nicht die Absicht dieses Berichts sein, die Frage der Infinitesimalrechnung auf der Schule als solche zu erörtern; nur die Abgrenzung wollte ich hier scharf markieren. Erlauben Sie mir, daß ich an dieser Stelle ein Wort über diese Abgrenzung einschalte. Die Frage, *ob* es gut ist, daß die Schule sich die Differentialrechnung einverleibt hat, lasse ich ganz beiseite. Sie ist nicht aktuell, denn es scheint mir, daß hier ein fait accompli vorliegt, ein irreversibler Prozeß, der bereits zu weit vorgeschritten ist, als daß man ihn zurücklaufen lassen könnte, selbst wenn man es wollte. Die Schule hat in der Fülle der Aufgaben des Differenzierens, des Integrierens und der Anwendungen davon ein Feld gefunden, das ihr reicher und mannigfaltiger, auch lebensvoller erscheint als die Dreieckskonstruktionen, in denen sie ehedem geatmet hat. Man kann fragen, ob es nicht schade ist, daß man ihr statt dessen nicht die Gefilde der synthetischen Geometrie erschlossen hat, und inwieweit man davon auch heute noch etwas in die Schule einführen könnte. Die Differentialrechnung ist da. Das heißt die formale Seite, die Technik des Operierens. Was nun die genetische Methode in diesem Zusammenhange betrifft, so könnte die *direkte* genetische Methode für die Schule nur eine begrenzte Bedeutung erlangen. Ich sehe das Hauptfeld der Schulmathematik prinzipiell in solchen Entwicklungen, die sich in Serien methodisch ansteigender Aufgaben auflösen lassen. Dramatische Darstellungen werden daneben auf der Schule immer eine sekundäre Rolle spielen. Auch auf den Universitäten werden sie übrigens nur dann gerechtfertigt und von Erfolg sein, wenn sie von einer danebenherlaufenden intensiven Ergänzung in den Übungen begleitet sind. Aber je gründlicher man das System der Übungen nun endlich bei uns auszubauen beginnt, desto eher wird man die Möglichkeit haben, die Vorlesung rein darstellerisch zu gestalten und in ihr die großen Hintergründe aufzuweisen. — Was aber sehr wohl für die Schule in Betracht kommt, das ist die indirekte genetische Methode, zu der ich mich jetzt ohnedies wenden muß.

Ich gehe sogleich in medias res; dabei wird sofort deutlich werden, wie ich den Begriff der *indirekten genetischen Methode* bestimmt denke.

Das bestimmte Integral ist vor der eigentlichen Differential- und Integralrechnung zu behandeln, lautet die erste These, *die die indirekte genetische Methode liefert.* Das ist, was Burkhardt vor 20 Jahren gelegentlich versucht hat, was Dirichlet nach einer Bemerkung, die Kronecker einmal im Colleg getan hat, bereits gemacht haben soll, was aber gewiß nicht geltendes Recht ist. Ein Blick auf die historische Entwicklung macht diese These selbstverständlich. Die Griechen haben das bestimmte Integral entdeckt, Archimedes hat es zur Höhe einer reifen Theorie emporgehoben; nur das Leibnizsche Zeichen fehlt, wie auch der Begriff der willkürlichen Kurve, der Begriff der Funktion. Die Neuzeit (Cavalieri, Fermat) fügt diesen in die Theorie ein, noch *ehe* die übrige Infinitesimalrechnung entdeckt wird. Die Lehre vom bestimmten Integral ist das primäre.

Die zweite These schließt unmittelbar daran an und nutzt die durch die erste gewonnenen Möglichkeiten eigentlich erst aus: *der Zusammenhang zwischen dem bestimmten Integral einerseits, der Differentialrechnung und der Lehre vom unbestimmten Integral andererseits ist der Kernpunkt der Infinitesimalrechnung, der als solcher mit möglichster Plastik* *herauszuarbeiten ist, anstatt daß er zugleich mit den Differentialen als möglichst banal unvermerkt eingeschmuggelt wird.* Das ist der Punkt, der F. Klein in seiner Vorlesung von 1911 mit großer Deutlichkeit herausgearbeitet hat. Es gibt eine Stelle in der Geschichte der Infinitesimalrechnung, die die Nichtselbstverständlichkeit dieses Zusammenhanges besonders eklatant zum Bewußtsein bringt: Fermat hat die Lehre vom bestimmten Integral außerordentlich gefördert; auf der anderen Seite besitzt er, ebenfalls natürlich in der Redeweise der Griechen, die ganze Differentialrechnung und löst Maximumaufgaben wie ein heutiger Primaner; aber er ahnt — das ist 1660 etwa — noch nichts davon, daß irgendeine Verbindung zwischen diesen beiden getrennten Sphären vorhanden sein könnte, wie sie acht Jahre danach Barrow bereits fertig vorlegt. Sie sehen in diesem Bereich deutlich den Unterschied von Genesis und Historie. Die Historiker stellen den leidigen Prioritätsstreit zwischen Newton und Leibniz in den Vordergrund der Entstehungsgeschichte der Infinitesimalrechnung; für die genetische Betrachtungsweise rücken ganz andere Momente in den Mittelpunkt des Interesses.

Die dritte These: *die Grundlagenfragen (Einführung des Zahlbegriffs) gehören an den Schluß der zweisemestrigen Vorlesung, nicht an den Anfang.* Daß die Mathematik diese Grundlegung a posteriore vollzogen hat, nicht a priori ist klar. Es bedarf trotzdem dazu eines Wortes der Erläuterung, da in diesem Falle auch historisch eine Komplikation vorliegt; und deren Aufdeckung gerade ergibt neues für die didaktische Seite der Sache. Dasjenige nämlich, was wir heute mit dem Namen Dedekindscher Schnitt verbinden, steht im wesentlichen im fünften Buch des Euklid, und die Forschung nimmt — mit Recht oder Unrecht — Eudoxus als den Autor davon an; es ist jedenfalls *spätestens* von Eudoxus, also um 360 v. Chr., geschaffen. Weshalb aber, werden Sie fragen, gehört das Ganze dann nicht doch an den Anfang der Anfängervorlesung? Und was, muß ich dann weiter fragen, ist eigentlich die Leistung von Dedekind? Er hat es selbst deutlich ausgesprochen, nicht in der Schrift über den Schnitt, sondern später in der Vorrede zu: „Was sind und was wollen die Zahlen?“ Er sagt dort ausdrücklich, der Schnitt stehe als solcher schon bei Euklid; aber daß $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$ ist, habe vor ihm niemand bewiesen. Also er selbst sieht nicht im Schnitt, in der Definition des Schnitts seine Leistung, sondern in der Etablierung der Rechenregeln. Hierin also liegt der ganze Unterschied des griechischen und des modernen Zahlbegriffs — woraus wir lernen, daß erst dieser Unterschied die eigentliche didaktische Schwierigkeit enthält, daß der Dedekindsche Schnitt selbst ein Schaustück ist, das der Anfangende in seiner Eleganz sehr leicht begreift, daß aber der Aufstieg zu den langwierigen Rechenregeln dann das Moment enthält, das die Kraft des Anfängers erlahmen läßt. Und hier liegt auch die Schwäche der Dedekindschen Leistung. Denn seine Schrift geht faktisch über diese Seite der Sache, die unbequem ist, mit Andeutungen hinweg und mit Konstruktionen, die im Grunde nichts als das Herüberwechseln in die Cantorsche Definition der irrationalen Zahlen bedeuten. Wir entnehmen dieser historischen Analyse also den Zusatz zur dritten These: *Die Cantorsche Definition der Irrationalzahlen verdient den Vorzug vor der Dedekindschen* — wofür sich übrigens auch noch andere Gründe anführen lassen.

Aus der Fülle der historischen Konsequenzen, die die indirekte genetische Methode liefert, will ich nur noch eine vierte These herausgreifen: *Falls man überhaupt den Begriff des Differentials in der Vorlesung gebrauchen will, muß man ihn auf den Begriff der rechnerischen Funktion, d. h. der Funktion als Rechenausdruck stützen.* Historisch sei dazu dies erläuternd bemerkt. Es ist wohlbekannt, welches Aufsehen Fourier erregt hat, und welchen schweren Kampf er gegen die Pariser Autoritäten zu bestehen hatte, um den Begriff der „willkürlichen" Funktion gegenüber dem Begriff der rechnerischen Funktion, der das ganze 18. Jahrhundert beherrscht hatte, zur Geltung zu bringen. Es ist aber bisher weniger beachtet worden, daß im 17. Jahrhundert diese beiden Abarten des Funktionsbegriffes sich ursprünglich ganz getrennt entwickelt haben, daß zuerst, von Cavalieri über Pascal zu Barrow, der Begriff der „willkürlichen" Funktion entsteht, und daß dann ganz unabhängig davon, aus der Linie Viëta-Descartes herkommend, Newton und Leibniz den Übergang zu der Funktion als Rechenausdruck vollziehen. Wieder gibt es eine Stelle in der geschichtlichen Entwicklung, die in eklatanter Weise den Unterschied aufweist, nämlich Barrow. Barrow besitzt die ganze Differential- und Integralrechnung, einschließlich des Zusammenhangs mit dem bestimmten Integral, alles in der Sprache der Griechen, jedoch für willkürliche Funktionen formuliert. Weshalb ist also nicht Barrow der Entdecker der Infinitesimalrechnung? Oder — um die Frage richtiger zu stellen — *inwiefern* ist er es nicht? Denn bis zu einem weiten Grade ist er es in Wirklichkeit. Das wesentlich Neue, was Newton und noch planmäßiger Leibniz bringen, ist eben nur die Wendung zum Begriff der rechnerischen Funktion und die Nutznießung der reichen Anwendungsmöglichkeiten, die sich daraus ergeben. Es ist nicht allein eine große moralische Geste, wenn Barrow sein Lehramt seinem Schüler Newton übergibt, um die früher begonnene theologische Karriere mühevoll wieder aufzunehmen. Unbewußt scheint in ihm das

Gefühl gelebt zu haben, daß eine neue Epoche anhebt, die der Sprache der Griechen das Rechnen gegenübersetzt, und das Gefühl, darin nicht aufgewachsen zu sein, so scheint es, läßt ihn sich abwenden, Verwaltungsbeamter werden und in seinen Mußestunden Euklid und Archimedes edieren. Die Historiker der Mathematik, völlig absorbiert von der Kontroverse Newton-Leibniz, haben es auch an dieser Stelle versäumt, das viel wichtigere Verhältnis Barrow-Newton klarzulegen, und Newtons Papiere sollen unbeachtet irgendwo in schlechtem Zustande herumliegen. Wie dem allem im einzelnen auch sei, es liegt genug davon klar, um daraus die vorangestellte These folgern zu können.

Ich glaube, durch solche Beispiele ist deutlich geworden, was ich mit der indirekten genetischen Methode meine: Aufhellung didaktischer Schwierigkeiten, ich möchte sagen didaktische Diagnose und Therapie auf Grund historischer Analysen, die nur dazu dienen, die Aufmerksamkeit auf die richtigen Punkte zu lenken.

Ich glaube, daß das hierin liegende Prinzip im Grunde genommen weit über das Thema hinausgreift, das ich mir heute gestellt habe. Ich habe außerdem dieses Thema ganz im Rahmen der realen Praxis behandelt, sozusagen induktiv. Es ist mir deshalb ein Bedürfnis, wenigstens zum Schluß der großen philosophischen Frage nicht auszuweichen, die im Hintergrunde von alledem steht, der Frage nach dem *Verhältnis von genetischer und normativer Auffassung der Mathematik.* Die Mathematik steht unter dem Bann der normativen Auffassung, unter dem Bann des Glaubens an ihre objektive Natur. Angefangen von der Darstellungsweise der mathematischen Arbeiten und Bücher leidet sie unter diesem Bann. Denn der Grund, warum wir alle, wenn wir es offen gestehen, immer nur den kleinsten Bruchteil der erscheinenden Arbeiten auffassen können, ist der, daß diese Arbeiten zumeist die *Motive,* von denen sie ausgehen, mehr verstecken als offenbaren. Es ist nicht Stil, Subjektives in der Mathematik zu sagen. Das herrschende Ideal ist die letzte, objektive Fundierung der Mathematik auf ein letztes Axiomsystem, aus dem alles der Reihe nach sozusagen selbstverständlich, zwangsläufig herausfällt.

Ich halte diesen Weg, das wahre Fundament der Mathematik zu suchen, für eine Chimäre, für einen Versuch, den Schnittpunkt zweier Parallelen zu finden, indem man nur immer weiter geht. Ich möchte diesem Weg, den schon Plato im sechsten Buch seiner Politeia skizziert hat, die schöne Denkweise seines Schülers Aristoteles entgegensetzen, der mit größtem Fleiß überall zusammenstellt, wie die Denker vor ihm über alle die Gegenstände gedacht haben, von denen er handelt, und wie aus solcher vergleichenden Betrachtung sich bessere Ansätze zu