Zur Erinnerung an Karl Georg Christian von Staudt.[1])

Von MAX NOETHER in Erlangen.

Karl Georg Christian von Staudt.

Im Beginn des Jahres 1821 stand ein Komet an unserem Abendhimmel, in scheinbar langsamer Bewegung im Sternbild des Pegasus, in Wirklichkeit aber rasch sich der Sonne nähernd und an Licht zunehmend, bis er in der ersten Märzhälfte dem freien Auge sichtbar wurde wie ein Stern dritter Größe, mit einem mehrere Grade langen Schweife, dann sich zeitweilig hinter Wolken verbarg und zuletzt in den Strahlen der Sonne verschwand, um erst im April auf der südlichen Halbkugel aus ihnen wieder aufzutauchen. Der seine Bahn festlegte, war ein junger Göttinger Student, der Rothenburger K a r l G. C h r. v. S t a u d t. Und auch diejenige Wissenschaft, welcher derselbe Forscher ein Vierteljahrhundert später, als Professor an der Universität Erlangen, das Recht der Selbständigkeit und Unabhängigkeit gab, d i e G e o m e t r i e d e r L a g e, feiert in diesem Jahre das achtzigste Erinnerungsfest an ihre Entstehung.[2]) So wird es denn gerade an dieser Stelle angebracht sein, wiederum einen Blick auf den Mann zu werfen, den man schon bei seinem Ableben, wenn auch in noch unbestimmter Erkenntnis der Be-

1) Abgedruckt aus der Festschrift der Universität Erlangen zur Feier des achtzigsten Geburtstages des Prinzregenten Luitpold von Bayern. Erlangen und Leipzig 1901, A. Deichert Nachf.

2) J. V. Poncelets „Traité des propriétés projectives des figures" ist zwar 1822 erschienen, aber 1820 der Pariser Acad. des Sciences im Hauptteil vorgelegt worden (Cauchys Rapport ist vom 5. Juni 1820 datiert). Die erste Konzeption der Ideen dieser Wissenschaft im Geiste des französischen Offiziers geht freilich auf dessen Gefangenschaft in Rußland, 1813—1814, zurück.

deutung des einsamen Denkers, der ein geometrisches System geschaffen, den modernen „Euklid" genannt hat[1]) und dessen Ruhm im fachlich-mathematischen Kreise seitdem nur immer tiefer gegründet worden ist. Aber es möge nicht nur versucht werden, die Würdigung der fundamentalen Bedeutung v. Staudts auch einem etwas ferner stehenden Kreise näher zu bringen; es möge zugleich seine Persönlichkeit und sein Verhältnis zur Universität Erlangen dargelegt werden; und endlich werde auch die Gelegenheit nicht versäumt, auf fachlichem und zwar zahlentheoretischem Gebiete für Staudt weitere wissenschaftliche Ansprüche geltend zu machen, als ihm bisher, aus Unkenntnis einer seiner Arbeiten, zuerkannt worden sind.[2])

1) cf. Bauernfeind in dem nachfolgend unter 4. verzeichneten Nekrolog.

2) Die bisherige biographische Literatur über K. G. Chr. v. Staudt besteht in folgendem:

1. Grabrede, gehalten den 4. Juni 1867 vom Universitätsprediger, Professor G. Thomasius [auf Grund persönlichen Umgangs und einer Familienaufzeichnung]. Als Erlanger Universitätsschrift erschienen.
2. Nekrolog in der Allgem. Ztg., Hptbl. Nr. 158, Jahrg. 1867; und ein wissenschaftlicher Nachruf in derselben Zeitung, Außerord. Beilage Nr. 201, Jahrg. 1867 [dieser von Gugler].
3. Kurzer Nachruf in Crelles Journal, Bd. 67, S. 217 Anm., 1867 [von C. W. Borchardt].
4. Nekrolog auf K. G. Chr. v. Staudt, geh. in der öffentl. Sitzung der K. bayer. Akad. d. Wiss. vom 28. März 1868 vom Sekretär der math.-phys. Klasse, K. F. Ph. v. Martius [geborener Erlanger]. Mit wissenschaftlichen Würdigungen durch L. Seidel [in analytischer Hinsicht] und Karl M. Bauernfeind [in geometrischer Hinsicht]. Sitzungsberichte der Akad., Jahrg. 1868, Bd. 1. Abgedruckt in Grunerts Archiv, Bd. 49.
5. Artikel in Poggendorffs Biogr.-Liter. Handwörterbuch, Bd. 2 und 3, und in der Allgem. Deutschen Biographie [letzterer von M. Cantor].
6. „C. G. C. v. Staudt ed i suoi lavori." Studio di Corrado Segre [als Einleitung zu einer italienischen Übersetzung von Staudts „Geometrie der Lage", durch M. Pieri, bei Fratelli Bocca, Turin 1888, erschienen; 17 SS.].

5. ruht ganz auf 4. 4. und 6. gehen im biographischen Teil wesentlich auf 1. und 2., und die daselbst schon benutzten Familienmitteilungen, zurück. Jedoch stützt sich 6. ferner auf Erinnerungen von Prof. K. Rudel, Nürnberg, und auch der Verf. des vorliegenden Aufsatzes konnte einige Notizen liefern.

6. enthält aber weiter noch eine eingehende und treffende rein-fachliche Würdigung der wissenschaftlichen Leistungen Staudts und das bibliographische Material, dieses allerdings nicht ganz lückenlos Trotzdem sei auf dasselbe verwiesen, da hier nur die Ergänzungen gegeben werden.

Der Verf. hat außer diesem gedruckten Material noch die Akten der Universitäten Erlangen und Würzburg benutzen können. Für Mitteilung neuerer Familienaufzeichnungen ist er der Frau Forstmeister Ed. v. Staudt, Witwe des Sohnes K. v. Staudts, zu Dank verpflichtet.

Karl G. Chr. v. Staudt ist am 24. Januar 1798 in Rothenburg ob der Tauber geboren, als Sohn des Ratskonsulenten Johann Christian[1]) v. Staudt und seiner Ehefrau Sabina Maria, Tochter des reichsstädtischen Revisionssekretärs Daniel Augustin Albrecht, der jüngste von drei Söhnen, die unter sieben Kindern ein höheres Alter erreichten. Sowohl der Vater als die Mutter gehörten den wenigen „regierenden" Familien der damals noch freien Reichsstadt an; vier Jahre darauf sollte sie ihre 630 Jahre lang in ruhmvoller reicher Geschichte bewahrte Existenz als selbständige Republik verlieren, um, infolge des Luneviller Friedens, dem Kurfürstentum Bayern einverleibt zu werden. Beide Familien haben einen ziemlich gleichartigen Ursprung und Geschichte aufzuweisen[2]); sie gehören nicht den ältesten Patrizierfamilien Rothenburgs an, vielmehr erscheinen sie um Mitte des 15. Jahrhunderts als Handwerker und Bürger, zu der Zeit, wo sich diese unter die „Ehrbaren" mischten, die Mitglieder des „äußeren Rats" werden konnten. Im folgenden Jahrhundert drangen diese Elemente, mit wissenschaftlicher Bildung versehen, auch in die, bisher ausschließlich aus den alten Familien hervorgegangenen Geschlechter des „inneren", des regierenden Rates. Insbesondere stammt die Staudtsche Familie aus dem im vormaligen Rothenburgischen Landgebiet gelegenen, jetzt württembergischen Dorfe Schmerbach von einem um 1402 dort ansässigen Peter St., 1452 erwirbt sie Bürgerrechte in Rothenburg, gegen Ende des Jahrhunderts ist ein Leonhard St. Stadtwerkmeister. Dessen Enkel Leonhard war es, der 1576 in den äußeren, 1577 in den inneren Rat kam, dem 1596 von Kaiser Rudolf II. ein Wappen verliehen und dessen Urenkeln 1700 von Kaiser Leopold I. der Adelsbrief erteilt wurde; von ihm stammt in direkter Linie Karl v. Staudt ab, dessen Geburtsstätte auch das heute noch im Besitz der Familie befindliche schöne Stammhaus in der Herrenstraße — einst Hohenlohescher Sitz — war. Im 17. Jahrhundert war aus der alten Ratsherrnwürde ein Amt geworden, die Stellen, im halbjährigem Turnus wechselnd, kamen in die Hände weniger Familien, die nur untereinander heirateten und sich gegen die übrige Bürgerschaft abschlossen. Daß trotzdem nicht eigentlich eine Verknöcherung des inneren Lebens des kleinen Staates eintrat, dafür sorgte einmal die für die Ämter nötige juristisch-wissenschaftliche Vor-

1) Die Grabrede und die übrigen genannten Schriften geben irrtümlich den Namen „Georg".

2) Nach H. W. Bensen, Kurze Beschreibung und Geschichte der Stadt Rothenburg ob der Tauber, Erlangen 1856; v. Winterbach, Geschichte der Stadt Rothenburg a. d. Tauber, Rothenburg 1826, 1827; sowie nach Familienaufzeichnungen.

bildung, vor allem aber die häufige Verwicklung in die großen religiösen, politischen und kriegerischen Angelegenheiten des Reiches; und so gab es unter den fast souveränen Geschlechtern dieser aristokratischen Republik immer einige Männer von festestem Charakter und hoher Bildung. Zu ihnen gehörten die Staudts und die Albrechts; sie fungieren im ganzen 17. und 18. Jahrhundert immer wieder als Ratsherren und als regierende Bürgermeister; sie treten in derselben Zeit, und noch weiter herauf, zahlreich als juristische und theologische Schriftsteller auf, in den kriegerischen Wirren des 18. Jahrhunderts erscheinen die v. Staudts mehrmals als Hauptleute im Kontingent der Reichsstadt oder des fränkischen Kreises; und weiterhin haben beide Familien auch dem bayerischen Staate im militärischen und Beamtenstand hochangesehene Männer gegeben. Auch der Vater, Joh. Chr. v. Staudt, übernahm 1805 die Stelle eines K. b. Stadtgerichtsrats, in der er 1828 verstarb; seine Witwe überlebte ihn noch bis 1857, und bis dahin suchte der pietätvolle Sohn immer wieder in dem Elternhause sein Ferienheim.

Karl v. Staudt konzentrierte in sich das Erbe seiner Ahnen in Charakter und geistiger Kraft. Nach sorgfältiger Erziehung seitens der Eltern, besonders der trefflichen Mutter, welche auf sein ganzes Leben bestimmend wirkte, durchlief Staudt von 1814 an das Ansbacher Gymnasium. Nach Absolvierung desselben mit besonderer Auszeichnung wandte er sich 1817, seiner schon früher bewiesenen Neigung folgend, ganz den mathematischen Studien auf der Göttinger Hochschule zu, angezogen von Karl Friedrich Gauß' einzigem Namen. Es war weniger die, äußerlich nicht große, Lehrtätigkeit von Gauß, die ihn bis zum Schluß seiner akademischen Studien, 1822, dort festhielt, als die persönliche Beziehung, in die er, einer von wenigen, zu dem Princeps Mathematicorum treten durfte. Auf Gauß geht, in noch höherem Grade, als bisher geschildert worden ist, die Richtung des ganzen mathematischen Denken Staudts zurück; Gauß war es auch, der ihn zunächst zu wissenschaftlichem Schaffen in einem Gebiet bestimmte, das dem abstrakten Charakter seiner späteren Lebensarbeit fern zu liegen scheint: zu Rechnungen im Gebiete der Anwendung der Mathematik auf Astronomie, und der selbst die Veröffentlichung in die Hand nahm. Da die hierauf bezüglichen Zeugnisse in den bisherigen biographischen Mitteilungen über Staudt gänzlich übersehen sind, so mögen sie hier beigebracht werden.

Zunächst schreibt Gauß bei Gelegenheit der Mitteilung seiner auf der Göttinger Sternwarte mit einem neuen Reichenbachschen Meridiankreis gemachten Marsbeobachtungen in den Gött. Gel. Anzeigen vom

5. Juni 1820[1]): „Die Vergleichung dieser Beobachtungen mit den Marstafeln des Herrn v. Lindenau wurde durch Herrn v. Staudt gemacht, welcher sich gegenwärtig bei uns mit ausgezeichnetem Eifer und Erfolg dem Studium der mathematischen und astronomischen Wissenschaften widmet.“ Bald darauf, unter dem 3. September 1820, sendet er an das Bodesche Astronomische Jahrbuch für 1823, erschienen 1820, eine Mitteilung[2]), mit dem ähnlichen Zusatze[3]): „Ihrem Wunsche zufolge übersende ich Ihnen hier die Ephemeride für den Lauf der Pallas während ihrer Sichtbarkeit im Jahre 1821. Sie ist diesmal von Herrn v. Staudt berechnet, einem jungen Manne von ausgezeichneten Talenten, welcher sich hier dem Studium der Mathematik und Astronomie widmet.“

Die umfassendste astronomische Berechnung führte Staudt im Frühjahr 1821 aus. Sie bezog sich auf eine definitive Bahnbestimmung des von Nicollet und Pons gleichzeitig am 21. Januar 1821 entdeckten Kometen „von 1821“, und sie gibt für die durch Gauß von 1821 Januar 30 bis März 5 gemachten Beobachtungen die Ausgleichung in der wahrscheinlichsten parabolischen Bahn. Indem Gauß unter dem 17. März 1821 diese Beobachtungen und die von Staudt berechneten Bahnelemente an die Gött. Gel. Anzeigen[4]) mitteilt, fügt er bei: „Herr v. Staudt, von dessen ausgezeichneter Geschicklichkeit im astronomischen Calcul wir schon öfters Proben mitgeteilt haben, gründete auf diese Beobachtungen folgende parabolische Elemente . . . Diese Elemente stellen die sämtlichen uns bekannt gewordenen Beobachtungen so schön dar, daß keine weitere Verbesserung, und noch weniger eine Bestimmung der Elliptizität, gemacht werden kann, wenn nicht noch viel spätere gute Beobachtungen von anderen Orten bekannt werden.“ Und nochmals wird die Äußerung durch eine Mitteilung an das Astronomische Jahrbuch unter dem 26. Dezember 1821[5]) bekräftigt.

In der Tat wichen auch die von Nicolai, Rümker, Bessel, Encke und Rosenberger berechneten Bahnelemente des Kometen, von denen die letzteren auch noch auf die nach dem Perihel stattgefundenen südamerikanischen Beobachtungen gestützt waren, nur ganz unwesentlich von denjenigen ab, welche schon Staudt rasch und sicher gelie-

1) S. 912; Werke VI, S. 433. Cf. auch „Briefwechsel zwischen C. F. Gauß und H. C. Schumacher“, Altona 1860, Brief von Gauß vom 4. März 1821, S. 215.

2) S. 227—228: „Geocentrischer Lauf der Pallas vom 31. Januar bis 30. Juli 1821, berechnet vom Herrn v. Staudt in Göttingen.“

3) S. 228: „Astronomische Beobachtungen im Jahre 1820.“ Werke VI, S. 433.

4) S. 769—771. Werke VI, S. 438.

5) Jahrb. für 1825, S. 103. Werke VI, S. 440.

fert hatte. Wenn Staudt auch diese astronomische Richtung weiterhin nicht mehr verfolgt hat, so sollte sie doch eines der Motive werden für seine spätere Berufung nach Erlangen, und eine Grundlage seiner Wirksamkeit an dieser Hochschule in allgemeinen Vorträgen über Astronomie. —

Nach seiner Studienzeit promovierte Staudt 1822 an der Erlanger philosophischen Fakultät, wie es scheint ohne besondere Dissertation, wohl unter Anrechnung seiner astronomischen Arbeiten.[1]) Infolge einer im selben Jahre in München glänzend bestandenen Lehramtsprüfung wurde der junge Kanditat sogleich, schon unter dem 24. Oktober 1822, zum Professor der Mathematik an den vier Gymnasialklassen der Studienanstalt Würzburg, zwei Jahre darauf auch an der neugegründeten Lyzealklasse, ernannt. Da die Anstellung seiner Absicht, sich in Erlangen zu habilitieren, zuvorgekommen war, so richtete sich sein Drang nach akademischer Wirksamkeit nun auf Würzburg, und er wandte sich behufs Zulassung als Privatdozent direkt an die Regierung. In der Tat stieß das Gesuch bei der philosophischen Fakultät der Universität auf energischen Widerstand: es sollte ihm — wie ihm schon früher einmal, als er die Absicht geäußert, in Würzburg zu promovieren, vorgegehalten worden war — da er in Göttingen keine Kollegien über Philosophie gehört, die notwendige allgemeine Bildung abgehen: die zweierlei Tätigkeiten seien unverträglich miteinander; vor allem: man bedürfe keiner weiteren Lehrkraft für Mathematik. Trotz dieser Einsprache, und ohne daß Staudt eine Habilitationsschrift eingereicht hätte, erfolgte im September 1824 die Allerhöchste Genehmigung der Zulassung. Nur war ein Vorbehalt daran geknüpft: „daß durch die Erlaubnis das Verhältnis und die dermalige Stellung des Professors v. Staudt, welcher an der Universität nur in der Eigenschaft eines Privatdozenten erscheint, zum Gymnasio und dem Gymnasialrektorate nicht verändert werden, und jede eintretende Kollision die Zurücknahme gegenwärtiger Bewilligung zur Folge haben würde . . . daß Staudt überhaupt für jede Anforderung, welche der Betrieb des Gymnasialstudiums mit sich bringe, unweigerlich bereit und verwendbar bleibe“. Diese Bestimmung wurde auch von der Fakultät sehr bald als Hebel zur Herbeiführung eines Konflikts benutzt; und da dessen Verlauf auf den Charakter v. Staudts Licht wirft, so wollen wir genauer darauf eingehen.

Staudt las in den Sommersemestern 1825 und 1826 niedere Geometrie und Trigonometrie, Kollegien, welche, mit elementarer Größenlehre und Algebra, damals zu den Pflichtkollegien aller Studierenden

1) Ein Fakultätsakt über diese Promotion konnte leider nicht mehr aufgefunden werden; bestätigt ist sie durch Würzburger Akten.

vor Zulassung zum Fachstudium ihrer Fakultät gehörten; und er machte dabei den beiden Professoren Schön und Metz mit seinen mehr als 70 Hörern siegreiche Konkurrenz. Das für die geringe Zahl von Kameralisten jeden Sommer zu lesende Examenskolleg über „Höhere Analysis und Geometrie“ drohte nun 1826 auszufallen, da der mit astronomischen und geschichtlichen Vorlesungen vielbeschäftigte Ordinarius der Mathematik, Schön, die Übernahme geweigert und sich höchstens zu einem Privatissimum mit fest garantiertem hohem Honorar erboten hatte. v. Staudt, an den sich die Studenten in ihrer Not gewandt, erklärte sich, nachdem er erst wegen Geschäftsüberhäufung abgelehnt, ihnen und dem Dekan gegenüber zum Versuch bereit; brach aber das Kolleg, als er schon nach dem ersten Vortrag erkannte, daß er es ohne Schädigung seiner Gymnasialverpflichtungen und seiner Gesundheit nicht fortsetzen könne, ohne weiteres wieder ab.

Nun schien der Kollisionsfall gegeben. Seitens der Fakultät, des Senats und der k. Universitätskuratel (der k. Regierung in Würzburg) ergingen im Laufe des Semesters Ermahnungen, unter Berufung auf seine große Hörerzahl in dem allgemeinen Kolleg, „das von ihm gar nicht notwendig zu geben war“, auf seine Verpflichtung als Privatdozent, „die vorzüglich der Aushilfe wegen bestimmt seien“, auf seine Zulassung für ein Fach, „wo man ihm gar nicht benötigte“; aber Staudt entgegnet nur in wenigen würdevollen Worten, indem er ruhig die genannten Gründe angibt; und selbst als man im Juli bis zu der Drohung des Antrags vorschritt: „daß er die Stelle verlieren solle, wenn er nicht unverzüglich pariere“, antwortet er einfach:

„Da die Pflichten, die ich als Gymnasiallehrer habe, allen anderen Verbindlichkeiten vorgehen, und ich nach meiner Überzeugung ohne Vernachlässigung derselben das Kollegium über höhere Analysis und Geometrie nicht übernehmen kann, so muß ich bei den bereits gegebenen Erklärungen beharren, und habe wohl nicht zu fürchten, daß die Allerhöchste Stelle die mir Allergnädigst erteilte Bewilligung deswegen zurücknehmen werde, weil ich den Bedingungen, unter denen sie mir erteilt ward, Folge zu leisten suchte. Eine Bescheinigung obiger Gründe, die mich von der Übernahme des fraglichen Kollegiums abhalten, kann ich darum nicht beibringen, weil es nur meiner eigenen Beurteilung überlassen bleiben muß, ob ich bei den Geschäften, die bereits meine Kräfte in Anspruch nehmen, noch weiteren Arbeiten mich unterziehen kann.“

Darauf folgte zwar der Antrag auf Entfernung; indessen endete die Angelegenheit noch relativ günstig für den Privatdozenten, indem ihm nach Allerhöchster Entschließung vom 15. September 1826 nur die Eröffnung zu machen war, „daß in dem nicht zu erwartenden Falle der Wiederholung eines eben so gesetz- als anstandswidrigen Benehmens die augenblickliche Zurücknahme der ihm erteilten Erlaubnis ... eintreten werde". Aber man ließ ihn weiterhin unbelästigt, und im Sommer 1827 übernahm Schön wieder das Kolleg.

Es tritt an diesem Vorgang nicht nur die Charakterfestigkeit des Mannes hervor, sondern auch voll die Unabhängigkeit und Unbeugsamkeit seines Urteils, ein Element, das auch für sein späteres selbständiges geistiges Schaffen eine unentbehrliche Voraussetzung ist. Auch mag der Konflikt beigetragen haben, ihm die Würzburger Stellung, in der er 1826/27 nur noch ein kleines Kolleg über die Exponentialgrößen las, zu verleiden und den Wunsch des Rektors Roth, ihn an die Nürnberger Studienanstalt herüberzuziehen, willkommen zu machen. Mit Reskript vom 25. Oktober 1827 wurde Staudt dahin ernannt, und bald darauf hatte er die Befriedigung, zugleich an der damaligen Nürnberger polytechnischen Schule als Lehrer wirken zu dürfen. Auch Erlanger Studierende der Mathematik kamen gelegentlich nach Nürnberg herüber, um Staudt zu hören.

In diese Nürnberger Zeit fällt auch seine Gründung eines Hausstandes: Oktober 1832 vermählte er sich mit der, 1809 geborenen Tochter Jeanette des Patrimonialrichters Ernst Konr. Drechsler in Nürnberg. Aus dieser höchst glücklichen Ehe, welche aber schon 1848 durch den Tod der Gattin getrennt wurde, waren noch in Nürnberg zwei Kinder hervorgegangen, treue Stützen ihres Vaters: Eduard v. Staudt, ein tüchtiger Beamter, zuletzt Forstmeister in Regensburg († 1899), und eine sehr begabte Tochter Mathilde, spätere Gattin des damaligen Erlanger Bürgermeisters, späteren Regierungsrates, Dr. Aug. Papellier († 1885); und acht Enkel führen den Namen des Großvaters weiter.

Die wissenschaftliche Betätigung Staudts beschränkte sich seit seiner Anstellung bis zum Abschluß der Nürnberger Zeit auf zwei Programmveröffentlichungen, eine algebraisch-zahlentheoretische zum Jahresberichte der Studienanstalt Würzburg von 1825, und eine synthetisch-geometrische zu dem der Studienanstalt Nürnberg von 1831. Die erstere[1]) schließt ganz an Gauß an und hat den doppelten Zweck: dessen Sätze über die Reduktion der Gleichungen, die bei der Teilung des Kreises in eine Primanzahl gleicher Teile entstehen, möglichst direkt und einfach zu beweisen, und ferner die elementaren Sätze über Teilbarkeit der ganzen Zahlen und über Kongruenzen einmal zu sammeln:

1) „Möglichst einfache Entwicklung des Gaußischen Theorems, die Teilung des Kreises betreffend."

eine wuchtige Zusammenfassung auf wenigen Seiten in lauter kurzen Paragraphen, kein überflüssiges Wort, keine Beispiele, aber auch ohne weitere äußere Gliederung des Stoffes.

Das zweite Programm[1]) zeigt den angehenden Geometer. Staudt erkennt die ganze Bedeutung der „in neuester Zeit im Gebiete der Geometrie gemachten Entdeckungen", er schließt sich eng an Poncelets Projektionsmethoden an, ohne diesen ausdrücklich zu nennen, und gelangt so zu einer großen Reihe neuer Sätze, ein Beweis, daß er nicht nur über ungemeine Schärfe des Denkens, sondern auch über eine fruchtbare, mit der Steiners wetteifernden Phantasie, verfügen konnte. Damals war es noch die Leichtigkeit der Übertragung der Eigenschaften vom einfachen Bild, wie Kreis, auf allgemeinere Figuren, was Staudt an der Perspektivität anzog, die Richtung vom Besonderen auf das Allgemeine hin.

Obwohl diese Arbeiten noch nicht durchaus originaler Natur waren, zeigten sie doch in Stil und Schärfe der Anlage schon die Kennzeichen des späteren Forschers und genügten, um seinen wissenschaftlichen Ruf zu begründen. Als im Sommersemester 1835 Joh. Wilh. Pfaff, der Vertreter der Mathematik an der Erlanger Hochschule, starb, richtete sich das Augenmerk der Fakultät in erster Linie auf Karl Chr. v. Staudt. Die Mitvorgeschlagenen waren keine schwachen Konkurrenten: Martin Ohm, der schon 1811—1817, ein Semester lang (1812) zugleich mit seinem noch berühmteren Bruder G. Sim. Ohm, als Privatdozent der Mathematik in seiner Geburtsstadt Erlangen gewirkt und nun als Professor an der Universität, Kriegs- und Ingenieurschule in Berlin sich durch seine Lehrtätigkeit und seine systematischen Werke einen bedeutenden Namen erworben hatte; und der Professor M. W. Drobisch in Leipzig. Was für Staudt entschied, war nicht nur der Ruf des ausgezeichneten Lehrers, der sowohl einen engeren Kreis für rein-wissenschaftliche Lehre und Forschung zu interessieren und anzuleiten und im anregenden klarsten Vortrage auch auf ein großes Auditorium zu wirken verstehe, sondern vor allem der, für die zukünftige allgemeinere Wirksamkeit wichtige Umstand, daß er als Schüler von Gauß sowohl die reine, als auch die angewandte Mathematik beherrsche, wie durch seine astronomischen Rechnungen und durch Gauß' Zeugnis bewiesen sei. Auch die Charaktereigenschaften des „vir bonus", und die moralische Verpflichtung, einem Manne, der sich schon längst nach einem seiner Begabung angemessenen akademischen Wirkungskreise gesehnt, zu einer freien Entfaltung zu verhelfen, spielten eine Rolle; und

1) „Über die Kurven II. Ordnung."

so konnte Staudt unter dem 23. August 1835 auf den 1. Oktober zum ordentlichen Professor der Mathematik an der Universität Erlangen ernannt werden. Staudt war am Ziele seiner Wünsche; dem gegenüber trat, da auch seine Vermögensverhältnisse nicht ungünstig waren, der Umstand zurück, daß er an Gehalt sich schlechter als in Nürnberg stellte: auf 1200 fl., wovon noch 100 fl. auf Naturalbezug berechnet wurden. Die Honorare kamen ja dabei, trotz sehr guten Besuches der allgemeinen Kollegien Staudts, nicht besonders in Betracht, da zudem die Beheizung der Hörsäle damals von den Professoren, von denen nur den Senatsmitgliedern ein Holzbezug statutenmäßig zukam, selbst bestritten werden mußte. Übrigens wurde sein Gehalt 1852 und später um etwas aufgebessert, zuletzt 1861 auf 1600 fl.

Staudt übernahm in Erlangen mathematische Verhältnisse, die sich wenig von denen der übrigen deutschen Hochschulen zur damaligen Zeit unterschieden. Im Anfang des jetzt verflossenen Jahrhunderts waren bei den philosophischen Fakultäten die utilitarischen Bestrebungen ganz in den Vordergrund getreten. Selbst ausgeartet aus den ursprünglich humanistischen Bestrebungen, allen ein gleiches Maß von philosophischer Grundlegung zuzuführen, verwechselte diese Richtung nun das Allgemeine mit dem Elementaren und verflachte die Bildung, indem sie von den Studierenden nichts weiter als die niedrigsten Kenntnisse in Mathematik, Physik und Philosophie forderte und selbst im Promotionsrigorosum sich mit schriftlichen Fragen begnügte, wie sie heute jeder Gymnasialschüler beantworten muß. Dem Vertreter der Mathematik wurde es noch dadurch besonders erschwert, ein wissenschaftliches Ziel ins Auge zu fassen, daß von ihm auch ein Teil der Anforderungen der Kameralisten in technologischen Kenntnissen und in Feldmeßkunst zu befriedigen war. Traditionell für Erlangen war einmal die rein technologische Richtung, die von dem Physiker Joh. Tobias Mayer (dem Jüngeren, 1786 bis 1799, nachher Professor der Physik in Göttingen), dann von dem Technologen K. C. v. Langsdorf (1796—1804, nachher Professor der Mathematik in Heidelberg) eifrig gepflegt worden war. Es entstand ein „mathematisch-technologisches Kabinett", dessen technologischer Apparat, hauptsächlich aus der Zuweiweisung des Ministers v. Hardenberg herrührend, Modelle zum Maschinenwesen und zur Baukunst, zum Bergbau und zur Landwirtschaft enthielt, während der mathematische sich auf Instrumente zum Feldmessen beschränkte. Mit dem Nachfolger Langsdorfs, Heinr. August Rothe (1804—1824, † 1841), zog sodann auch die kombinatorisch-mathematische Richtung in Erlangen ein; der Schüler Hindenburgs und Verfasser der „Theorie der kombinatorischen Integrale", 1819, ist als Hauptförderer dieser Richtung anzusehen, welche ursprünglich große Hoffnungen erweckte, aber in ihrer formalen Haltung zur Unfruchtbarkeit verurteilt war. Auch sein Schüler, Mart. Ohm, gehörte ihr an: sowohl dieser als Staudt haben „Systeme" aufgestellt; aber während das des Kombinatorikers rasch der Zeit verfiel, ist das des Geometers zu einem der Fundamente der Wissenschaft geworden. Joh. Wilh. Pfaff — der Bruder des berühmteren Mathematikers Joh. Friedrich Pfaff in Halle — seit 1818 als Professor in Erlangen wirkend und 1824 Nachfolger Rothes bei dessen Quieszierung, neigte wieder mehr der astronomisch-angewandten Richtung zu, auf welchem Gebiete er aus seiner Dorpater Zeit beachtete Arbeiten aufzuweisen hatte, während er sich späterhin in mystische Schriften über Astrologie und in Hieroglyphik verlor.

Staudts Spezialismus war eine notwendige Reaktion gegen jene praktischen Tendenzen. Nicht, daß er den Blick auf sein engstes Fach beschränkt hätte: die allgemeine Bildung suchte auch er, der in Erlangen neben bedeutenden humanistischen Lehrern wirkte, zu heben, indem er in gern gehörten Vorlesungen die Grundlagen der Astronomie vortrug, von umfassenden Gesichtspunkten aus, denen er die einzelnen großen Errungenschaften einordnete, und indem er selbst die Sätze der Mechanik in einfachster Behandlung klar zu legen wußte, immer auf Schärfung der Begriffe und Ordnung des Denkens bedacht.[1] Auch das Kombinatorische übernahm er als Erbe, nur in einem höheren Sinne: als Schüler von Gauß in der Richtung auf das Zahlentheoretische. Dagegen ließ er, wie übrigens schon Pfaff, den mathematisch-technologischen Apparat verfallen und löste ihn, als veraltet, 1857 völlig auf. Mit ihm beginnt in Erlangen die rein-geometrische Richtung, welche statt des Apparates nur des Begrifflichen und der inneren Anschauung bedarf; für sie wirken gezeichnete Figuren, selbst schematisch, indem sie nur einen Teil des Begrifflichen wiedergeben und den logischen Gang verdunkeln, nur beunruhigend und von dem Wesentlichen abziehend, sie mögen von dem Lernenden, der seine Vorstellungskraft entwickeln will, selbst gezeichnet werden. Für seine engeren mathematischen Schüler ging er den langsamen Gang vom Speziellen zum Abstrakteren, um sie durch ruhiges Fortschreiten in den geometrischen und analytischen Grundbegriffen und Methoden selbst auf die Höhe der freien Übersicht und der allgemeinen Gesichtspunkte zu heben, welche ein dauernder Besitz bleiben. Nach solcher innerlichen Aneignung des mathematischen Stoffes wird dann auch die Einsicht in die technischen Anwendungen leicht und lehrreich zugleich.

1) Siehe v. Staudts Beitrag zu „Zum Studium der allgemeinen Wissenschaften", Erlangen 1850 [eine Anleitung für Studierende der Universität Erlangen].

Übrigens war auch die Zahl der speziell mathematischen Hörer Staudts verhältnismäßig nicht klein; war ja doch die Zahl der Studierenden der philosophischen Fakultät 1844/45 auf 8 gesunken, und das Verzeichnis von 1858/59 zählt unter 19 solchen Studierenden 6 für das Fach der Mathematik auf. Die Vorlesungen umfaßten regelmäßige ausführliche Kurse über Elementarmathematisches, Analytische Geometrie, Differential- und Integralrechnung, Mechanik und Astronomie, von 1842/43 an auch über das Spezialfach Staudts, die „Neuere Geometrie", von 1861 an als „Geometrie der Lage", in meistens vierstündigen Kollegien. Dazu kamen in den 50er Jahren zahlreiche speziellere Vorlesungen: aus der Theorie der algebraischen Gleichungen, der Zahlentheorie, der Wahrscheinlichkeitsrechnung, und über einzelne Teile der Analysis, wie Reihenlehre. In den Jahren 1849—50 und 1855—56 fungierte v. Staudt als Dekan der Fakultät, wobei in dem ersteren Amtsjahr sein Eintreten für die Abstreifung der Zwangskurse mit den zugehörigen Prüfungen, auf die nach einer kurzen freieren Periode 1838 mit dem philosophischen Biennium wieder zurückgegriffen worden war und unter denen Lehrer und Studierende verkümmerten, für die Freiheit seiner Anschauungen zeugt. Auch seine Tätigkeit in der an der Erlanger Universität hochentwickelten Selbstverwaltung war nicht unbedeutend, nachdem er erst einmal, 1845, sich entschlossen hatte, in engere Fakultät und Senat einzutreten, was dem Usus gemäß durch Vortrag und besondere Schrift zu geschehen hatte: von seiner langjährigen Tätigkeit bei Prüfungskommissionen und als Mitglied der Bibliothekskommission abgesehen, fungierte er die fünfziger Jahre hindurch als Mitglied der Honorarienkommission und in der Verwaltung wohltätiger Stiftungen, längere Zeit als Beisitzer des ehemaligen „Universitäts-Polizei-Direktoriums", kurze Zeit auch im Verwaltungsausschusse der Universität selbst. In den sechziger Jahren verbot ihm, der 1864 auch Senior seiner Fakultät geworden war, Alter und Kränklichkeit diese und teilweise auch die Vorlesungstätigkeit.

Die wissenschaftliche Forschung Staudts wandte sich in Erlangen, soweit sie äußerlich in die Erscheinung trat, zunächst der Analysis zu, und zwar der Theorie der Bernoullischen Zahlen: diese verdankt ihm ihren ersten und wichtigsten zahlentheoretischen Satz, den „Staudt-Clausenschen Satz", der 1840 von Staudt veröffentlicht wurde[1]), als Clausen eine Abhandlung über den Gegenstand angezeigt hatte, aber schon einige Jahre vorher von jenem an Gauß mitgeteilt

1) „Beweis eines Lehrsatzes, die Bernoullischen Zahlen betreffend", Journ. f. Math. XXI, vom 16. August 1840 datiert.

worden war. Der Satz betrifft die nach Jakob Bernoulli (1713) benannten Zahlen, kompliziert zusammengesetzte Bruchzahlen, welche in den Summenformeln für die ganzen positiven (n^{ten}) Potenzen der natürlichen Zahlen ($1^n + 2^n + 3^n + \cdots + x^n$) zuerst aufgetreten und von dieser Seite her auch von Staudt angefaßt worden sind. In die ausgedehnte Literatur, die sich seit Euler um diese merkwürdigen, durch ihre häufige Wiederkehr in mannigfachen analytischen Entwicklungen interessanten Zahlen gebildet hatte, griff auch die Erlanger kombinatorische Schule ein, indem Rothe zu den schon bekannten ersten 15 Zahlen die 16 folgenden hinzuberechnet hatte.[1]) Aber in ihre zahlentheoretische Zusammensetzung war kein Licht gedrungen, bis Staudt durch seinen Satz die Gesetzmäßigkeit der Bildung wenigstens der Nenner darlegte: eine solche Zahl B_n unterscheidet sich von einer ganzen Zahl um eine Reihe von Brüchen, je mit dem Zähler 1, und mit Nennern, welche die sämtlichen „Staudtschen Primzahlen" sind, d. h. die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ von der Eigenschaft, daß $\alpha_1 - 1, \alpha_2 - 1, \ldots$ in $2n$ ohne Rest aufgehen. Aber eine ganze Reihe weiterer Fortschritte für die Theorie dieser Zahlen findet sich in den beiden akademischen Schriften, welche v. Staudt bei seinem Eintritt in Senat und Fakultät 1845 vorgelegt hat, Schriften, für deren Verbreitung der bescheidene Mann nicht gesorgt hat, so daß sie fast unbekannt und unbeachtet geblieben sind.[2]) Nicht nur, daß Staudt in der ersteren der beiden No-

1) 10 derselben sind in der Allgem. Lit. Ztg. von Halle, 1817; 6 durch M. Ohm im Journ. f. Math. XX, 1839 mitgeteilt. 31 weitere Zahlen sind später durch den Astronomen J. C. Adams auf Grund des Staudtschen Satzes berechnet worden (Journ. f. Math. Bd. 85, 1877).

2) 1. „De numeris Bernoullianis." Loci in senatu academico rite obtinendi causa commentatus est D. Carol. G. Chr. de Staudt, Math. prof. publ. ordin. Erlangae 1845. (17 Artikel auf 13 SS. kl. 8°, datiert 25. Juli 1845; mit Einladung zur Antrittsrede auf den folgenden Tag.)

2. „De numeris Bernoullianis", Commentationem alteram pro loco in facultate philosophica rite obtinendo seripsit D. Carol. G. Christ. de Staudt, etc. Erlangae 1845. (24 Artikel auf 14 S. kl. 8°.)

Diese Schriften finden sich nur bei L. Seidel in den Sitzungsberichten der K. bayr. Akad. d. Wiss. von 1877, S. 165 Anm., und bei R. Lipschitz, Journ. f. Math. Bd. 96, 1883, zitiert. Weder die denselben Gegenstand behandelnden Arbeiten von Arndt, Raabe, Kummer, Sylvester, Kronecker, Worpitzky etc. kennen sie, noch die Monographie über die Bernoullischen Zahlen von L. Saalschütz, Berlin 1893, obwohl dieselbe die genannten Arbeiten von Seidel und Lipschitz ausführlich erörtert, noch die jetzt erscheinende „Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften". Auch in Segres Skizze (s. die Literaturzusammenstellung am Anfang), fehlen diese Arbeiten, gleich den astronomischen.

Übrigens hat ja auch v. Staudt selbst seine Vorgänger nie zitiert.

ten einen neuen, höchst einfachen Beweis seines Satzes, abgeleitet aus den Ausdrücken der Zahlen durch die Anfangsglieder der Differenzreihen jener höheren arithmetischen Reihe, gibt; diese Note enthält auch schon wenigstens einige Funktionalbetrachtungen. Sie enthält ferner die Umwandlung der Potenzreihen in x in Reihen, die nach Binomialkoeffizienten von x fortlaufen, die zweite Note auch die interpolatorische Darstellung und, daraus abgeleitet, die independente Darstellung der Bernoullischen Zahlen: Entwicklungen, die späterhin irrtümlich mit dem Namen Kroneckers belegt worden sind.[1]) Gerade daraus erschließt Staudt Kongruenzbeziehungen zwischen verschiedenen Bernoullischen Zahlen, deren Indizes n eine arithmetische Reihe erster Ordnung bilden, wie sie später von analytischer Seite her durch Kummer wiedergefunden worden sind[2]), mit Kongruenzsätzen für die Zähler der Zahlen. Das Hauptziel ist aber ein Satz über diese bis dahin so geheimnisvollen Zähler: „Wenn n durch p^μ teilbar ist, wo p eine von den „Staudtschen" verschiedene Primzahl ist, so ist auch der Zähler der Zahl B_n durch p^μ teilbar." Die ganzzahligen Bestandteile der Zahlen zu verfolgen und deren Zusammenhang mit dem Gesetz der Primzahlen zu erkennen, blieb Hermite und Lipschitz vorbehalten, wohl weil der Standpunkt der analytischen Funktion dem Arithmetiker und Geometer Staudt fern gelegen hat.

Im selben Jahre finden wir Staudt auch algebraisch tätig, an einer Darstellung[3]) des Gaußschen zweiten, des rein algebraischen Beweises von 1815 für den Fundamentalsatz, daß jede algebraische Gleichung $\varphi(x) = 0$ eine Wurzel hat. Der Hauptvorzug der Darstellung ist die Einfachheit und Kürze, bei Unabhängigkeit von allen vorauszusetzenden Kenntnissen; der eigentliche, in den Nummern 11 und 12 enthaltene Beweis nimmt nur eine Seite ein. Begrifflich liegt der Beweis schon in derselben Richtung, welche auch späterhin von einem der Erlanger Nachfolger Staudts, P. Gordan, eingeschlagen worden ist[4]), indem jener die Resultante von $\varphi(x+h)$ und $\varphi(x-h)$, dieser diejenige von $\varphi(x)$ und $\frac{1}{h}\,[\varphi(x+h) - \varphi(x)]$ betrachtet.

Inzwischen reifte in stiller einsamer Forschung das Lebenswerk des Geometers langsam heran: 1847 erschien die „Geometrie der

1) Saalschütz a. a. O., S. 102, 138.

2) Journ. f. Math. Bd. 41, 1850; Saalschütz a. a. O., S. 158.

3) „Beweis des Satzes, daß jede algebraische rationale ganze Funktion von einer Veränderlichen in Faktoren vom ersten Grade aufgelöst werden kann", Journ. f. Math. XXIX, 1845 (6 S.).

4) Math. Annalen X, 1876.

Lage", 1856, 1857, 1860 folgten die drei Hefte „Beiträge zur Geometrie der Lage".[1])

Wenn in den bisherigen geometrischen und algebraischen Arbeiten die zusammenfassende Tätigkeit, die Richtung auf die stoffliche Ordnung vorherrschte, so tritt nun ganz und gar die Durchforschung und Kritik der Grundbegriffe selbst, die Entwicklung des Systems aus den notwendigsten Voraussetzungen, das Prinzipielle in den Vordergrund.

Poncelet war von den ersten Elementen der Raumvorstellung, Punkt, Gerade, Ebene, ausgegangen und hatte zwei ebene Figuren durch die einfachste Konstruktion in Beziehung gesetzt: durch die Perspektive, bei welcher nur in einem Punkt (dem Augenpunkt) zusammenlaufende Raumgerade benutzt werden und aus dem über der einen Figur stehenden Kegel die andere als ebener Schnitt ausgeschnitten wird. Die Eigenschaften, welche dabei immer den beiden Figuren gemeinsam bleiben, sind die sog. „projektiven Eigenschaften"; sie übertragen sich von der einen auf die andere Figur, und so treten in den bisher isolierten Sätzen die für sie wesentlichen Eigenschaften der Figuren hervor und erlauben, sie in höherer Einheit zusammenzufassen. Poncelet übertrug in dieser Weise bekannte Eigenschaften der einfachen metrischen Figuren, wie Kreis und Parallelogramm, auf höhere Figuren, wie Kegelschnitt und vollständiges Vierseit; und unter Hinzunahme eines weiteren „Prinzips", das der „Kontinuität" — das darin bestand, Eigenschaften, die nur innerhalb bestimmter Grenzen der Variabilität der Figuren unmittelbar anschaulich oder erkannt waren, auch über diese Grenzen hinaus fortbestehend anzunehmen; so Beziehungen von Kreis zu schneidenden Geraden auf Kreis und Geraden, die einander nicht mehr schneiden — erlangte das geometrische Gebiet zugleich einen immer größeren Umfang und eine Einordnung unter wenige Prinzipien, die das Ganze mit einem Schlage übersichtlich machten. Auf diesem Standpunkt steht noch das oben erwähnte Staudtsche Programm von 1831; und Steiner hat bezüglich des Grundbegriffes seines Werkes von 1832[2]), des Begriffes der projektiven Beziehung zweier Geraden aufeinander, die Festlegung der Punkte durch Abstände und die Ableitung jenes Begriffes aus Abstandsbeziehungen mittels Perspektive für unumgänglich gehalten, während freilich dieses Werk weiterhin, obwohl es nur einen von fünf ursprünglich in Aussicht genommenen

1) Nürnberg bei Bauer und Raspe (Julius Merz). Ersteres Werk mit 216 S., die 3 Hefte mit 396 S.

2) „Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten voneinander. Erster Teil."

Teilen vorstellt, die systematische Betrachtung der Erzeugung der Figuren aus bloß projektiven Zuordnungen aufs wesentlichste gefördert hat.

Indem diese Richtung die projektiven Eigenschaften der Figuren von den Maßeigenschaften, welch letztere durch Projektion, d. h. eine Folge von perspektiven Umformungen, geändert werden, trennen lehrte, entstand, ohne daß es ihr bewußt wurde, ein eigentümliches Mißverhältnis. Das System der projektiven Geometrie enthielt nur reine Schnittpunktsätze, also solche, in denen nachzuweisen war, ob gewisse Punkte und Geraden ineinander liegen, und bei denen Größenbeziehungen, Gleichheit von Längen und Winkeln, keinerlei Rolle spielten. In der Figur eines beliebigen vollständigen Vierseits mit seinen drei Eckpaaren und drei Diagonalen haben schon die auf jeder der Diagonalen liegenden vier Punkte die projektive Eigenschaft der „harmonischen Lage"; es waren aber noch überdies die Begriffe des Parallelismus und des Längenmaßes einzuführen, um diese Eigenschaft aus dem Parallelogramm ableiten zu können. Umgekehrt wiederum wird durch Zufügung dieser Begriffe die Maßfigur aus der allgemeineren ausgesondert, und unter diesen weiteren Voraussetzungen ergeben sich ihre Eigenschaften nun wieder als Spezialisierung der allgemeinen. So diente das Metrische erst in den Beweisen als Grundlage, dann wurde es wieder im Stoff dem Projektiven eingeordnet, als Anwendung desselben; das als projektiv gleich zu Betrachtende, das Unveränderliche, wurde auf Figuren gestützt, die im metrischen Ausgangspunkt als ungleich, als veränderlich angesehen wurden. Durch diesen Kreisschluß war das innere Wesen der projektiven Geometrie verdeckt und ihre grundlegende Bedeutung am Entfalten gehindert.

Staudt war es, der diesen methodischen Mangel erkannt hat; ihn mit schöpferischer Kraft durch einen, von den einfachsten Elementen der Raumanschauung aus auf logischem Wege fast lückenlos zu dem umfassendsten System aufsteigenden Gang ersetzt zu haben, ist das fundamentale Verdienst des Verfassers der „Geometrie der Lage". Staudt benutzt von den geometrischen Grundeigenschaften keinen der Größen- und Kongruenzsätze, keine Bewegung der Figuren aus ihrer Lage heraus unter dabei gedachter Erhaltung von Abständen und Winkeln, d. h. nicht die Größenpostulate, welche bloß Erfahrungstatsachen zusammenfassen, sondern nur die Konstruktionen von Verbindungslinien und Schnittpunkten bei fester Lage der Figuren. Nur führt er noch — wie sich später gezeigt hat, eine unwesentliche Voraussetzung — das Euklidische Parallelenpostulat ein: daß zu einer gegebenen Geraden durch einen gegebenen Punkt eine Parallele gehe, oder daß, nach seinem Ausdruck, die Gerade einen „uneigentlichen“ Punkt (nämlich den „unendlich-fernen“) besitze.

Gerade diese Herausnahme eines Teiles der Eigenschaften, welche Euklid seiner Geometrie zugrunde gelegt hat, vereinfacht nun auf der einen Seite ungemein den Gang und erlaubt ein weit umfassenderes Vordringen zu höheren Gebilden, wie ja bei jeder Wissenschaft mit der Minderung der Voraussetzungen die Anwendbarkeit wächst. Auf der anderen Seite bringt sie aber den abstrakten Charakter des Staudtschen Systems schon in der „Geometrie der Lage“ mit sich: war es doch der natürliche historische Weg, von allen Erfahrungstatsachen auszugehen, so sehr, daß es zwei Jahrtausende bedurft hat, um die Trennung zu bewirken.

Im einzelnen sei über den Staudtschen Weg hier berichtet: die Vierseitkonstruktion liefert ihm zunächst zu drei Punkten einer Geraden, in fester Ordnung genommen, eindeutig den vierten harmonischen Punkt, und die Fortsetzung dieser Operation alle Punkte der Geraden — wobei nur in der Stetigkeitsbetrachtung eine kleine Lücke bleibt. Da hierdurch auch der das System beherrschende Satz: daß eine projektive Zuordnung zweier Geraden durch drei entsprechende Punktpaare festgelegt ist, bewiesen wird, so ist jene Konstruktion die eigentliche Grundlage des Werkes; sie dient zur involutorischen Zuordnung einer Geraden zu sich, bei der die Punkte wechselseitig einander entsprechen, ferner zu der projektiven Zuordnung der Elemente zweier Ebenen zueinander: den sog. Kollineationen, in denen gleichartige, und den Reziprozitäten, in denen ungleichartige Elemente sich entsprechen; insbesondere zu der Aufstellung des ebenen „Polarsystems“ — einer reziproken Zuordnung der Ebene zu sich selbst, bei der ein in sich übergehendes Dreieck existiert. Dieses Polarsystem dient durch seine „Ordnungskurve“, den Ort entsprechender Punkte und Geraden, welche zugleich ineinanderliegen, zur vollständigen Theorie der Kegelschnitte. Dabei ist überall ein imaginäres, „konjungiertes“ Punktepaar einer Geraden durch eine reelle (elliptische) Involution ersetzt gedacht, für welche jenes Paar die Ordnungselemente vorstellt, eine „imaginäre Ellipse“ durch ein reelles Polarsystem.

Außer dem prinzipiellen Wert zeigt dieser Gang der „Geometrie der Lage“ noch mancherlei wichtige Vorzüge. Einmal kommt die von vornherein und durchgängig eingehaltene Dualität der Ebene, welche überall Punkte und Geraden vertauschen läßt, in der Theorie der nichtzerfallenden Kurven II. Ordnung zur Geltung, während vom Steinerschen Standpunkt der Erzeugung durch zwei projektive Geradenbüschel oder Punktreihen die Punkt- und die Linienkurve zunächst als zwei verschiedenartige Gebilde auftreten. Ferner wird auch die imaginäre Kurve durch ihr Polarsystem in gleicher Weise, wie die reellen, geliefert. Hauptsächlich aber zu beachten ist, daß die für die Ebene geführten Betrachtungen in demselben Sinne, wie Staudt zeigt, auf den Raum von drei Dimensionen auszudehnen sind und hier zur Theorie aller Flächenarten II. Ordnung, und außerdem zu der der (Möbiusschen) „Nullsysteme" führen; ja, daß dieselbe Betrachtungsweise auch ohne weiteres die Theorie der Gebilde II. Ordnung in dem Raum von beliebig vielen Dimensionen liefern würde. Endlich läßt diese Auffassung auch, wie man heute weiß, eine Anwendung auf alle ebenen algebraischen Gebilde höherer Ordnung zu — Tatsachen, welche für die Steinersche Erzeugung nicht zutreffen. Eine für das Werk charakteristische Eigenschaft mag noch erwähnt werden: die Durchflechtung aller projektiven Schnittsätze mit solchen aus der „Analysis situs", welche die Teilung der Ebene durch Gerade oder durch die Ordnungskurve betreffen, Betrachtungen, in welchen sich Staudt mit Möbius berührt. Gerade aus diesen letzteren Gedanken ist nicht nur in neuerer Zeit mannigfache Anregung zu Untersuchungen über paare und unpaare Kurvenzüge usw. entstanden, sie haben auch Staudt selbst, durch Einführung des „Sinnes" bei Punktreihe und Involution, zu einem der größten Fortschritte der neueren Geometrie geführt, zu seiner rein-geometrischen Interpretation des einzelnen „imaginären Punktes" und zu dessen Einführung als eines mit dem reellen Punkte gleichberechtigten Elementes. Diesem Fortschritt ist das erste und ein Teil des zweiten Heftes der „Beiträge" gewidmet.

Wenn es für die Theorie der Ordnungskurven von reellen Polarsystemen genügen konnte, nur Paare konjungierter Punkte durch das reelle Substrat einer Involution einzuführen, und wenn schon mit dieser Ausdrucksweise Vereinfachung und einheitlichere Zusammenfassung in die Schnittpunktsätze gebracht werden konnte, so war es doch eine fundamentalere Aufgabe, auch dem einzelnen imaginären Element selbst, das bisher nur in der Algebra existierte, von vornherein ein solches geometrisches Substrat zu geben, dem alle Grundeigenschaften des reellen Elements zukommen, der Art, daß es in allen Konstruktionen genau so benutzt werden konnte, wie das reelle Element und die Ausdehnung der ganzen Theorie der Projektivität zuließ. Staudts „imaginärer Punkt" ist ein aus „Sinn" und „Involution" zusammengesetzter Begriff: aus dem durch drei Elemente bestimmten „Sinne ABA_1" (beim konjungierten Punkte dem „Sinne A_1BA") und der Involution mit den Paaren AA_1, BB_1; und zwar tritt zuerst der Begriff „Sinn", dann erst der der „Trennung des Paares AA_1 durch das Paar BB_1" auf. Durch eine in ihrer Folgerichtigkeit bewundernswerte Entwicklung, hauptsächlich unter Vermittlung des Geradensystems der Regelfläche II. Ordnung, werden diese Begriffe nach und nach projektiv festgelegt und, mit allen früheren projektiven Theorien, auf die imaginären Elemente der reellen Träger (Heft 1), dann auf die von imaginären Trägern (Heft 2) ausgedehnt. Es entsteht der Begriff des „Wurfes" — des Inbegriffs von irgend vier Elementen des Elementargebildes; der der „Kette" — des Inbegriffs aller Elemente des Gebildes, welche mit dreien einen Wurf bilden, der zu dem aus den vier konjungierten Elementen gebildeten projektiv ist, einen sog. „neutralen Wurf" — usw. Aber zu bemerken ist, daß in diesem begrifflichen Verfahren doch nicht mehr alle Definitionen der „Geometrie der Lage" beibehalten werden konnten, so nicht mehr die der Projektivität aus Folge von harmonischen Beziehungen; daß vielmehr überall noch eine auf den „Sinn" bezügliche Ergänzung hinzutreten mußte.

Man hat diesem Aufbau den Vorwurf des Künstlichen gemacht; und in der Tat erfordern schon Sätze, wie der, daß jeder „Punkt einer Geraden" auch in jeder „durch diese Gerade gehenden Ebene" liege, weitläufige Betrachtungen. Aber der Vorwurf verschwindet gegenüber einer Theorie, welche die Gaußschen Züge trägt: nichts unbewiesen zu lassen und nur mit reinen, aus der Natur der Sache geschöpften Mitteln zu arbeiten; und gegenüber der Tragkraft eines Systems, das die Grenzen der reinen Geometrie weit hinausgerückt hat. Daß das Werk nur langsam in größere Kreise vorgedrungen ist und vordringt, beruht auf anderen Eigenschaften: auf der Euklidischen Art der Darstellung, bei der das starke Gerüst, die logische Strenge zum Vorschein kommen, aber die Flüssigkeit der Betrachtung und die Einsicht in die Entwicklung des Gedankengangs leiden; sodann auf der aufs höchste ausgebildeten konzisen Sprache, welche die kompliziertesten Verbindungen von Tatsachen mit außerordentlicher Kraft in kürzeste Aussprüche zusammendrängt, ohne der Anschauung irgendein Hilfsmittel zu konzedieren.

Staudt selbst hat noch einen bedeutenden — auch in philosophischer Hinsicht von Wichtigkeit gewordenen — Schritt getan, an dem sich jene Tragkraft seines Systems ermessen läßt: er hat (Beiträge, 2. Heft) wenigstens das Material dazu geliefert, um auf der Grundlage der projektiven Geometrie die Elemente seiner Geraden auch durch Zahlen festzulegen, die reellen Elemente durch die reellen, die imaginären durch die komplexen Zahlen der gewöhnlichen Algebra. Ohne Streckenverhältnisse einzuführen, rechnet Staudt mit Würfen, wie man mit Zahlen rechnet: er definiert geometrische Operationen, welche den Gesetzen der Addition und Multiplikation genügen, und ihre Umkehrungen, und gelangt so bis zur reellen Versinnlichung von Wurzeln aus Würfen durch Würfe. Aber während bis dahin nur projektive Begriffe benutzt werden, schreitet nun Staudt behufs Einführung der Zahl nicht, wie es möglich ist, in demselben Sinne weiter, sondern er nimmt sowohl den unendlich-fernen Punkt, als auch den Begriff des Abstandsverhältnisses der gewöhnlichen Euklidischen Metrik zu Hilfe. Hierauf nun stützt Staudt die Darstellung der komplexen Zahl, als Erweiterung der Gaußschen Darstellung, und die Einführung der projektiven Koordinaten in Ebene und Raum durch Wurfwerte, und damit die analytische Geometrie. Aus der Bemerkung Staudts, daß diese die Zahlen einführenden Paragraphen, „da sie den Begriff der Größe voraussetzen, als Anhang zu betrachten sind", geht aber hervor, daß er sich der Bedeutung, welche seine Forschung erlangen sollte, nicht bewußt war: der Möglichkeit des Aufbaus der Metrik selbst auf rein-projektiver Grundlage. Und der unmittelbare Nachfolger Staudts in Erlangen, Hermann Hankel (1867—68), ein im Zahlen- und Funktionengebiet, wie in geschichtlicher Forschung fein-methodischer Geist, hat noch in seinem posthumen Werke[1]) diese Bedeutung so weit verkennen können, daß er in Staudts System eine sich selbst rächende Einseitigkeit sah, einen Versuch, „verschiedene untrennbare Eigenschaften und einander bedingende Begriffe zu zerreißen" und diese mannigfaltige Natur in einen abstrakten Schematismus zu zwängen.

Einem anderen Nachfolger v. Staudts, Felix Klein (1872—75 in Erlangen), war es vorbehalten, die Bedeutung der Reinheit des Systems Staudts gerade für die Metrik zu würdigen. Schon 1853 hatte Laguerre den Euklidischen Winkelbegriff als Logarithmus eines gewissen Doppelverhältnisses metro-projektiv gefaßt, und 1859 hatte Cayley diese Auffassung auch auf den Distanzbegriff erweitert, den Doppelverhältnissen eine allgemeinere feste („absolute") Fläche II. Ordnung zugrunde gelegt, und so gefunden, daß sich für den ganzen Raum eine Metrik herstellen lasse, die der Euklidischen analog, aber allgemeiner ist als diese. Indem Klein diese Maßbestimmung als eine Behandlung des Raumes unter der speziellen Gruppe von projektiven Umwandlungen, welche ein im Raum enthaltenes Gebilde, die absolute Fläche, festlassen, auffaßte, erkannte er die Identität derselben mit derjenigen Metrik, welche die seit Gauß entstandene sog. Nicht-Euklidische Geometrie forderte.[2]) Und indem er dann die bei Staudt

1) „Die Elemente der projektivischen Geometrie", Leipzig 1875, Erlanger und Tübinger Vorlesungen.

2) Math. Annalen IV, 1871.

durch Würfe zu definierenden Elemente zunächst auf reelle beschränkte und dessen ursprüngliches Verfahren der Folge von harmonischen Beziehungen wieder benutzte, und weiter durch Beschränkung auf das endliche Gebiet die Einführung des Parallelenpostulates als unwesentlich ersah, erkannte er auch den rein-projektiven Charakter der Einführung der Zahl in die Geometrie.[1]) Damit war zunächst die Errungenschaft der Nicht-Euklidischen Geometrie in einem prinzipiellen Punkt an Staudts Werk geknüpft.

Mit der Unterordnung des Metrischen unter das Projektive ist aber auch allgemein eine Richtung der Entwicklung der Geometrie zum Abschluß gebracht, welche eine lange Reihe von Phasen durchlaufen hat, und welche, wie kaum eine andere Erscheinung, die bei allen Wandlungen herrschende Kontinuität der mathematischen Wissenschaft zum Ausdruck bringt. Vor mehr als zweitausend Jahren in der alexandrinischen Schule mit der Alleinherrschaft beginnend, erzeugte das Metrische aus sich selbst das Projektive in wechselnder Stärke, daß dieses oft und oft bald unter dem Schutze seines Urhebers mächtig emporbrach, bald — wie im 18. Jahrhundert — ganz zurücktrat, bis es im 19. Jahrhundert wieder erst die analytische Geometrie äußerlich zu überwuchern drohte und endlich, gestärkt durch den Geist der analytischen Kritik, sich unabhängig zu machen wußte. Es ist der Kampf zwischen den beiden Grundbeziehungen der Dinge, in deren Behandlung schon nach den Definitionen von Aristoteles und Descartes die Wissenschaft der Mathematik überhaupt besteht: Maß und Ordnung. Daß das Messen selbst von der bloßen Ordnung des Räumlichen abhängig gemacht werden kann, das ist der Markstein der Entwicklung, auf dem der Name der Universität Erlangen verzeichnet ist.

Es war Staudt beschieden, noch die Vollendung eines Kreislaufs anderer Art an sein Werk geknüpft zu sehen. Bei Monge hervorgegangen aus den Problemen der Technik, war die Wissenschaft der projektiven Geometrie zwar in enger Fühlung mit der deskriptiven Geometrie geblieben, aber unabhängig fortgeschritten, und nun konnte sie nach und nach auch dieser angewandten Wissenschaft reiche Anregungen und neue Grundlagen zurückgeben. In Staudt war die abstrakt-logische, scheinbar der Anwendung abgeneigte Richtung auf ihren Gipfelpunkt gestiegen; und gerade auf seine Geometrie sollte eines der wichtigsten Instrumente der heutigen Technik zuerst aufgebaut werden: die „graphische Statik“[2]), welche dem Ingenieur die in

1) Ibid. und Bde. VI 1872, VII 1874.

2) Culmann, Lehrbuch der graphischen Statik, Zürich 1866.

Trägerwerken wirksamen Kräfte durch einfache geometrische Konstruktionen liefert.

So bewährt sich an der Entwicklung der neueren Geometrie, daß ein Eintauchen in die Anwendung zu einem Jungbrunnen werden kann, wenn der Geist nicht darin haften bleibt und erstarrt, sondern frühzeitig sich erhebt, sich auf seine eigene Angabe besinnt und aus sich selbst seine Ideen und Ziele schöpft; je höher und reiner, um so tiefer wirkend können sie einmal aus ihrer Isoliertheit in den Zusammenhang alles Realen treten. Staudts Bedeutung für unsere mathematische Kultur besteht darin, daß er, als einer der Frühesten in Deutschland, die abstrakttheoretische, die grundlegende, Seite vertrat und dabei Begriffe aufstellte, welche, über ihren unmittelbaren Gegenstand hinaus, im ganzen Gebiet des Logischen und des Ausgedehnten, und in den Anwendungen, zu verwerten sind.

Wenn Staudt hierin Nachfolger von Gauß war, so war er es nicht in bezug auf eine andere Eigenschaft seines Lehrers: die ungeheuere Vielseitigkeit und das Ineinandergreifen aller Gedankenarbeit. Die beiden von Staudt verfolgten Wege der Mathematik: kombinatorische Zahlenlehre und reine Geometrie, laufen bei ihm ohne Vermittlung nebeneinander her und greifen noch nirgends in andere Gebiete ein. Wie der Funktionentheorie, so stand Staudt auch der modernen, durch die algebraische Geometrie und Formenalgebra bezeichneten Entwicklung noch völlig fremd gegenüber: seine Stärke lag in der Einseitigkeit.

Der Abschluß der „Beiträge" traf mit dem 25jährigen Professorenjubiläum v. Staudts an der Erlanger Hochschule zusammen. Wenn man auch in dem Kollegenkreis das bahnbrechende Verdienst des Forschers damals noch nicht in vollstem Umfang würdigen konnte, so war man sich doch seiner großen menschlichen Eigenschaften bewußt. Man verehrte in ihm den Gelehrten, der, still und unermüdlich weiter arbeitend, seine eigenen strengen und einsamen Wege ging, den bedeutenden hingebenden Lehrer, der der Universität zum Ruhme gereichte; man bewunderte den durchdringenden, klaren, in Rat und Tat ruhig-sicheren Verstand; und die Reinheit und Redlichkeit seines Charakters, in dem Pflichttreue und gerader Sinn mit Milde und Nachsicht gegen andere eine wohltuende Einheit bildeten, seine Anspruchslosigkeit im Leben, bei ernstem schweigsamem Wesen doch ein Sinn für gesellige Heiterkeit im engen Kreise — boten das in sich geschlossene Bild eines Weisen. Als der Senat der Universität ihm, in einem August 1860 nach Kissingen gerichteten Glückwunschschreiben, in diesem Sinne für sein Wirken dankte, zeigt sich Staudt in seinem Antwort-