since the right and left augmented co-sets are permuted transitively among themselves when they are multiplied in the given manner. When H coincides with G we obtain in this way the well known conjoints of an abstract group, and hence the given substitution groups may be called the *generalized conjoints of* G.

A necessary and sufficient condition that each of these generalized conjoints of G is simply isomorphic with G is that H does not involve any invariant subgroup of G besides the identity. In general, each of the generalized conjoints is simply isomorphic with the quotient group of G as regards the largest invariant subgroup of G contained in H. A necessary and sufficient condition that a generalized conjoint be transitive is that it be regular. The invariant substitutions of a generalized conjoint are common to the two generalized conjoints and their common substitutions are invariant under each. Two generalized conjoints whose order is not a prime number always generate an imprimitive group whose order is the square of the common order of these conjoints divided by the number of invariant operators in one of them.

One fundamental property which the conjoints and the generalized conjoints have in common is that each of them is composed of substitutions which are commutative with every substitution of the other. Each conjoint is composed of *all* the substitutions on these letters which are commutative with every substitution of the other, but a generalized conjoint does not necessarily have this property as may be seen directly when G is the holomorph of degree 6 of the cyclic group of order 6, and H is a non-invariant subgroup of order 2. In this case the generalized conjoints are clearly of degree 18, but they do not involve the substitutions of degree 6 which are commutative with every substitution of a transitive constituent of one of these generalized conjoints.

Über Wahrheit und Irrtum in der Mathematik.[1])

Von OSKAR PERRON in Tübingen.

Hochansehnliche Versammlung!

Unter allen Wissenschaften dürfte die Mathematik diejenige sein, welche es am wenigsten versteht, Interesse und Verständnis auf Seiten der Nichtfachmänner zu erwecken. Auf anderen Gebieten finden hervorragende Entdeckungen rasch den Weg in die Presse und werden

1) Akademische Antrittsvorlesung; Tübingen, 19. Jan. 1911.

dadurch in gewissem Sinne Allgemeingut; so weiß z. B. heute jedermann etwas über die Wirkung der Röntgenstrahlen oder des Radiums, ganz zu schweigen von Ehrlich-Hata 606. Wer aber hat je gehört, daß es stetige Funktionen gibt, die nirgends differenzierbar sind? Wer kann sich unter diesen Worten nur überhaupt etwas Vernünftiges vorstellen? Oder wer interessiert sich für die heute noch ungelöste Frage, ob die Riemannsche ξ-Funktion nur reelle Nullstellen hat?

Allerdings verfügt die Mathematik über einige wenige Probleme, die von jeher auch das Interesse der Nichtfachmänner erregt haben, und merkwürdigerweise waren es immer gerade die Unberufensten, die ihre Zeit nutzlos damit verschwendet haben. Ich erinnere an die Dreiteilung des Winkels und an die Quadratur des Kreises. Dabei dürften die allerwenigsten, die sich mit diesen Problemen befaßt haben und heute noch befassen, obwohl sie längst erledigt sind, imstande sein, überhaupt richtig anzugeben, worum es sich dabei eigentlich handelt. Und neuerdings ist auch der Fermatsche Satz in die Kategorie der populären Probleme eingerückt, nachdem der für die Lösung ausgesetzte Preis von 100000 ℳ bei allzu vielen einen nie geahnten „wissenschaftlichen" Eifer geweckt hat.

Von diesen vereinzelten Ausnahmen abgesehen sind aber die mathematischen Tagesfragen den Fernerstehenden völlig unbekannt, und dies kann schon aus dem rein äußerlichen Grunde gar nicht anders sein, weil eine Entdeckung oder ein Problem auf mathematischem Gebiet meist nur solchen verständlich gemacht werden kann, die die mathematische Terminologie und Formelsprache in einem Maße beherrschen, wie es eben bloß bei den Fachleuten der Fall ist.

Während nun das Verständnis und auch das Interesse für die Mathematik bei den Außenstehenden im allgemeinen gering ist, erfreut sich diese Wissenschaft doch insofern allseitiger höchster Wertschätzung, als jedermann zugibt, daß sie unter allen Wissenschaften diejenige ist, deren Ergebnisse am sichersten begründet sind. Da ist alles reine Wahrheit; es gibt keine unbewiesenen oder schlecht bewiesenen Hypothesen. Am *Nutzen* eines mathematischen Lehrsatzes kann man ja zweifeln, niemals aber an seiner *Wahrheit;* das liegt in der geradezu unfehlbaren mathematischen Methode. So glauben, wie gesagt, alle, oder doch die überwältigende Mehrheit.

Wie steht es nun in Wirklichkeit mit dieser vielgepriesenen Sicherheit der mathematischen Methode und ihrer Resultate? Diese Frage ist es, welche uns heute beschäftigen soll. Und gleich von vorne weg will ich es heraussagen: Diese vollkommene Zuverlässigkeit ist eine Illusion; sie existiert nicht, wenigstens nicht bedingungslos.

Wäre sie vorhanden, so müßte vor allem das, was die Mathematiker früherer Zeiten geschaffen haben, auch heute noch unbeschränkte Geltung besitzen. Dies ist aber nur zum kleinen Teil der Fall. Wir bewundern zwar noch immer den hohen Grad von logischer Exaktheit, den ein Euklid erreicht hat. Dennoch wissen wir jetzt, daß er weit von Vollkommenheit entfernt ist; fast auf jeder Seite könnte ihm ein strenger Kritiker von heute arge Fehler nachweisen. Wenn wir ferner das klassische Zeitalter mathematischer Entdeckungen überblicken, ich meine die rund 100 Jahre, welche der Erfindung der Infinitesimalrechnung folgten, so staunen wir bei den Mathematikern jener Zeit, bei einem Newton, Leibniz, Euler, den Bernoullis u. a. m. auch heute noch über den Reichtum ihrer Ideen, ihre geniale Erfindungsgabe, vermöge der sie immer neue und äußerst geistreiche Methoden ersannen, um alle Schwierigkeiten, die sich ihnen entgegenstellten, siegreich zu überwinden. Als richtig aber anerkennen wir heute meistens nur noch die Resultate, während wir den Beweismethoden, so genial sie sein mögen, ihre bindende Kraft absprechen müssen.

Freilich, wäre zu jener Zeit ein Moderner aufgetreten und hätte auf die Fehler aufmerksam gemacht, die Autoren wären wohl mit einem mitleidigen Lächeln darüber zur Tagesordnung übergegangen und wären schwerlich zur Einsicht gekommen. Daß aber ihre Methoden gleichwohl falsch sind, ergibt sich schon aus den allerdings sehr vereinzelten Fällen, in denen die falschen Methoden auch zu falschen Resultaten geführt haben. Und manchmal war es gerade dieser Umstand, der zur Einsicht führte, daß die Methode unrichtig ist; oder populär ausgedrückt: durch Schaden ist man manchmal klug geworden. Meistens allerdings, kann ich hinzufügen, hat es dieses Schadens nicht bedurft.

Aber auch, wenn wir moderne Arbeiten durchsehen, werden wir oft sehr enttäuscht sein, wenn wir etwa erwarten, bloß Einwandfreies zu finden. Da kommen vielfach Fehler ganz ähnlicher Natur, wie wir sie bei den älteren Autoren treffen; freilich wird man — so weit sind wir fortgeschritten — zum Unterschied gegen früher annehmen dürfen, daß heute ziemlich jeder, auf seine oft sehr versteckt liegenden Fehler aufmerksam gemacht, diese dann selber zugeben wird. Aber einen Zweig gibt es auch heute in der Mathematik, in dem die Ansichten sehr geteilt sind; da halten die einen für richtig, was die andern verwerfen. Es ist die sogenannte Mengenlehre, in der die Sicherheit mathematischer Deduktion völlig verloren zu gehen scheint.

Wie kommt es nun, daß die vermeintlich so sichere und unfehlbare Mathematik doch in solchem Maße Irrtümern und Zweifeln ausgesetzt ist? Ich will versuchen, die hauptsächlichsten Gründe dafür hier zu erörtern, indem ich die Natur der wichtigsten Fehlerarten einer kritischen Betrachtung unterwerfe. Worin bestehen diese Fehler, und wie lassen sie sich vermeiden?

Zunächst sind ja viele Fehler einfach Rechenfehler, wobei ich natürlich nur zum geringsten Teil an numerisches Rechnen denke. Diese Kategorie, die nur auf mangelnder Sorgfalt beruht und darum stets vermieden werden kann, bedarf keiner weiteren Ausführungen. Nächstdem aber erweist sich als eine sehr gefährliche Fehlerquelle die *Sprache*, wobei teils der Autor, der nicht immer den geschicktesten sprachlichen Ausdruck findet, teils aber auch die Sprache als solche zu belasten ist.

Hat man auf irgendeine Weise ein Resultat erlangt, das man später verwerten zu können glaubt, so wird man gut tun, dieses Resultat in einem Lehrsatz zu formulieren. Unterläßt man diese Formulierung, was ja häufig geschieht, so besteht die Gefahr, daß man später das Resultat nur ungenau im Kopfe hat und dann eine falsche Anwendung davon macht. Formuliert man aber den Satz, so macht man dies häufig so, daß man eine ganze Reihe von Voraussetzungen, die zur Gültigkeit des Satzes erforderlich sind, einfach wegläßt, weil sie nahezu selbstverständlich und bei allen Anwendungen, die man zu machen gedenkt, von selbst erfüllt sind. Aber eine solche reservatio mentalis ist doch höchst bedenklich, und sie ist schon mehr als einmal eine Quelle grober Irrtümer geworden. Häufig sucht man ja dadurch darüber hinwegzukommen, daß man sagt, der Satz ist „*im allgemeinen*“ richtig. Aber mit dieser sehr beliebten Redensart ist so gut wie nichts gebessert, solange nicht ausdrücklich gesagt wird, wie man im einzelnen Fall erkennen kann, ob er unter den Allgemeinen fällt oder nicht. Und wie oft wird dies unterlassen!

Um diese Fehlerquelle zu vermeiden, wird man also auf eine gewissenhafte Formulierung des Lehrsatzes Bedacht nehmen und alle einzelnen Voraussetzungen aufzählen müssen. Aber selbst dann ist man, ganz abgesehen davon, daß dadurch oft kaum übersehbare Satzungeheuer entstehen, vor Fehlern nicht geschützt. Die mögliche *Mehrdeutigkeit* eines in Worten formulierten Lehrsatzes kann noch verhängnisvoll werden. Oft wird man ja eine Mehrdeutigkeit leicht erkennen und dann den Ausdruck einfach ändern. Indes können sich auch Mehrdeutigkeiten einschleichen, die wir nicht bemerken, da es ja absolut kein Kriterium dafür gibt, ob ein in unserer Sprache formulierter Satz wirklich nur die eine Bedeutung hat, die wir ihm gerade beilegen. So kann es passieren, daß wir einem Satz, den wir jetzt für eindeutig halten, wenn wir ihn später wieder lesen, um davon eine Anwendung zu machen, dann eine andere seiner möglichen Bedeutungen beilegen, die wir zuerst gar nicht erkannt haben, während gleichzeitig die frühere Bedeutung uns jetzt entgeht.

Daraus ergibt sich mit Notwendigkeit, daß man sich überhaupt nie ganz auf die sprachliche Formulierung verlassen darf, die ein Lehrsatz schließlich gefunden hat. Es wird vielmehr notwendig sein, sich jederzeit die ganze Beweiskette zu vergegenwärtigen, die zu dem Satz geführt hat. Nur dann wird man über seinen wahren Sinn genau orientiert sein und falsche Anwendungen sicher vermeiden.

Ein anderer und wohl besserer Weg, derartigen Fehlern zu entgehen, besteht darin, daß man sich einer Sprache bedient, bei welcher Mehrdeutigkeiten ausgeschlossen sind. Aber woher eine solche nehmen? Die Antwort ist nicht allzuschwer. Wir pflegen ja in der Mathematik vieles überhaupt nicht in Worten, sondern in *Formeln* zu schreiben; diese sind eindeutig. Wenn es also gelingt, einen Lehrsatz in einer Formel niederzulegen ohne begleitende Worte, dann sind wir gesichert. Freilich ist dies mit der gewöhnlichen mathematischen Formelsprache oder besser Formelschrift nur in wenig Fällen möglich. Man hat aber in neuerer Zeit diese Formelschrift dahin zu erweitern versucht und mit Erfolg versucht, daß Worte tatsächlich entbehrt werden können, so daß man von den Nachteilen der Sprache völlig frei ist. Wie man in der gewöhnlichen mathematischen Formelschrift die arithmetischen Operationen durch gewisse Zeichen darstellt, wie $+$, $-$, $\int$ usw., so werden in diesen allgemeinen Formel- oder Begriffsschriften, um deren Ausbildung und nutzbringende Verwendung sich namentlich der Italiener Peano verdient gemacht hat, auch die logischen Operationen durch einfache Zeichen dargestellt, deren Verknüpfung ganz ähnlichen formalen Gesetzen unterworfen sind wie in der gewöhnlichen Arithmetik.

Übrigens sind es nicht nur Lehrsätze, die in gewöhnlicher Sprache mehrdeutig sein können, sondern, was mitunter sehr verhängnisvoll ist, auch *Definitionen.* Man hat ja früher für viele Begriffe, wie „stetig“, „konvergent“, „unendlich klein“ u. a. m. eine ausreichende Definition überhaupt unterlassen. So kam es, daß man diesen Begriffen manchmal Merkmale beilegte, die ihnen ursprünglich nicht zukamen. Auf diese einfache Weise erklären sich viele Fehler der vorhin genannten klassischen Periode. Aber als man unter Führung von Gauß, Cauchy, Abel allmählich als notwendig erkannte, daß bei einer logisch richtigen Beweisführung nur solche Eigenschaften eines Dinges benutzt werden dürfen, die in die Definition aufgenommen sind oder schon früher daraus gefolgert wurden; und als man in dieser Erkenntnis die fehlenden Definitionen gewissenhaft nachholte: da ergaben sich trotzdem noch

Fehler, die dann aus der mißverständlichen Formulierung einer Definition entsprangen.

Darauf ist es zum Beispiel zurückzuführen, daß man viele Jahre nicht zwischen den Begriffen „konvergent" und „gleichmäßig konvergent" unterscheiden konnte. Als nämlich Cauchy den Satz bewies, daß eine konvergente Reihe stetiger Funktionen wieder stetig ist, da passierte es ihm, daß er seine eigene Definition der Konvergenz mißverstand, und lange Zeit blieb dieser Fehler unbemerkt. Erst als durch Dirichlets Untersuchungen über die Fouriersche Reihe offenbar wurde, daß der Cauchysche Satz tatsächlich falsch war, kam man allmählich dahinter, und Seidel hat dann die Sache völlig aufgeklärt, indem er den Unterschied zwischen Konvergenz schlechthin und gleichmäßiger Konvergenz lehrte. Dies ist also zugleich ein Beispiel eines Falles, wo man, wie ich mich vorhin ausdrückte, durch Schaden klug geworden ist. Übrigens muß ich hier beifügen, daß Seidels Arbeit nicht direkt die Wirkung ausgeübt hat, die man erwarten sollte. Sie blieb unbeachtet, und wenn heute der so wichtige Begriff der gleichmäßigen Konvergenz Allgemeingut der Mathematiker ist, so ist das in erster Linie das Verdienst von Weierstraß.

Eine andere Klasse von Fehlern entspringt daraus, daß man irgend etwas für selbstverständlich hält, was in Wirklichkeit gar nicht richtig, geschweige denn selbstverständlich ist. So hielt man es lange Zeit für ganz selbstverständlich, daß bei mehrfachen Grenzprozessen die Reihenfolge gleichgültig ist. Damit hängt es zusammen, daß man beispielsweise den unendlichen Summen ganz unbedenklich die gleichen Eigenschaften zuschrieb wie den endlichen und insbesondere gliedweise Differentiation und Integration als zulässig betrachtete, ohne das Bedürfnis nach einem eigenen Beweis zu fühlen. Und doch hätte ein ganz neuer Beweis erbracht werden müssen, der sich wesentlich auf die *Definition* der unendlichen Summe stützt; aber das ist eben eine von den Definitionen, die man damals unterlassen hatte. Heute wissen wir, daß diese früher für selbstverständlich gehaltenen Dinge gar nicht richtig sind, daß vielmehr gliedweise Differentiation und Integration nur unter ganz bestimmten Voraussetzungen vorgenommen werden dürfen und, wenn diese nicht erfüllt sind, zu falschen Resultaten führen.

Aber nehmen wir ein anderes, allgemeiner verständliches Beispiel. Einer der größten Geometer, Jacob Steiner, wollte den Satz beweisen, daß unter allen ebenen geschlossenen Linien gleicher Länge die Kreislinie diejenige ist, die die größte Fläche umschließt, ein Satz, den ja wohl jeder geneigt ist, mindestens für wahrscheinlich zu halten. Steiner zeigte zu dem Zweck einwandfrei folgendes: „Wenn man irgendeine geschlossene Linie von der gegebenen Länge hat, und sie ist kein Kreis, dann läßt sich allemal eine andere ebenso lange Linie ermitteln, die eine größere Fläche umschließt." Nun sollte man meinen, daß damit die Sache erledigt ist, und Steiner selbst war dieser Meinung. Doch prüfen wir genauer, was er in Wirklichkeit bewiesen hat! Doch nur dieses: Eine vom Kreis verschiedene Linie kann sicher nicht die größte Fläche umschließen. Daraus folgt dann: *Wenn es überhaupt eine solche Linie gibt*, so kann es nur der Kreis sein. Steiner befand sich aber im Irrtum, wenn er glaubte, dargetan zu haben, daß der Kreis die größte Fläche umschließt. Dazu fehlte ihm noch der Nachweis, *daß eine Linie von dieser Eigenschaft überhaupt existiert.*

Gerade dies hielt er eben für *selbstverständlich*[1]), und gewiß werden ihm auch heute noch viele Unbefangene darin recht zu geben versucht sein. Aber es ist ein Fehler, der auch nicht dadurch aus der Welt geschafft wird, daß hier zufällig ein richtiges Resultat herauskam. Denn der Satz ist in der Tat richtig, wie sich aber erst aus den zahlreichen später gelieferten Beweisen ergibt, die von dieser Lücke frei sind.

Für den kritischen Mathematiker von heute darf nichts selbstverständlich sein, und tatsächlich kann in ganz ähnlich gelagerten Fällen etwas für selbstverständlich Gehaltenes total falsch sein. Dies dürfte man zum Beispiel schon aus der Gegenüberstellung der folgenden beiden Aufgaben erkennen. Die erste Aufgabe lautet: „Unter allen Flächeninhalten, die so klein sind, daß sie von einer Linie gegebener Länge ganz umschlossen werden können, soll der größte gesucht werden." Das ist die obige Steinersche Aufgabe. Daneben aber stellen wir eine ganz ähnliche zweite Aufgabe: „Unter allen Flächeninhalten, die so groß sind, daß sie von einer Linie derselben gegebenen Länge nicht mehr umschlossen werden können, soll der kleinste gesucht werden." Logisch wird man doch diese beiden so sehr miteinander verwandten

1) Steiner hat mehrere Beweise des fraglichen Satzes gegeben, die bekanntlich alle an dem gleichen Fehler leiden. Am schönsten dürfte der Beweis sein, der sich Bd. II, Seite 193 der gesammelten Werke findet; dort heißt es auch deutlich: „Wenn bei demselben gegebenen Umfang die Figuren ungleichen Inhalt haben können, dieser jedoch nicht beliebig groß sein kann (dies wurde in der Tat zuvor bewiesen), so muß es notwendig entweder *eine* Figur geben, die unter allen den größten Inhalt hat, oder es müssen mehrere verschieden geformte Figuren stattfinden, welche unter sich gleichen, aber größeren Inhalt haben als jede der übrigen." Einem in diesen Dingen Ungeübten mag dies als ein richtiger „Schluß" erscheinen. Aber mit dem gleichen Recht könnte man etwa schließen: „Weil die Reihe $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ für verschiedene positive Werte von x konvergiert, aber nicht für beliebig große, so muß es notwendig einen größten Wert geben, für den sie konvergiert." Was natürlich falsch ist.

bei d. endlich. vgl. [illegible]

Aufgaben für ganz gleichberechtigt ansehen müssen, und so gut man bei der einen die Existenz einer Lösung für selbstverständlich zu halten geneigt ist, wird man dies logischerweise auch bei der andern tun können. Aber dann ist man betrogen. Denn diese beiden Aufgaben stehen, wie sich ganz leicht beweisen läßt, in einer solchen Beziehung zueinander, daß, wenn die eine von ihnen eine Lösung zuläßt, die andere ganz unmöglich eine Lösung haben kann; aber eine von beiden muß eine Lösung haben, wie man ebenso leicht beweist.[1]) Nun scheint es mir doch keineswegs evident, daß gerade die erste Aufgabe diejenige ist, welche eine Lösung hat, wie Steiner dies annahm. Es könnte ebensogut die zweite Aufgabe, die ja ganz analog ist, eine Lösung zulassen, und dann hätte die erste eben keine. Jedenfalls ist das Gegenteil doch absolut nicht selbstverständlich, sondern durchaus eines Beweises bedürftig.

Sehr häufig ist es die *räumliche Anschauung*, welche uns dazu verleitet, etwas für selbstverständlich zu halten, und damit komme ich zu der wichtigsten und verbreitetsten Fehlerquelle: sie besteht in der Verwendung von Anschauung, Intuition, an Stelle von logischer Beweisführung. Das ist auch ein Hauptfehler der klassischen Periode. Nehmen wir gleich wieder ein einfaches Beispiel: Ein bekannter Lehrsatz aus der Funktionentheorie einer reellen Variabeln besagt: „Wenn eine stetige Funktion von x am Anfang und am Ende eines Intervalles entgegengesetzte Vorzeichen hat, so muß sie mindestens an einer Stelle des Intervalles den Wert Null haben.“ Anschaulich ist dieser Satz ja evident, indem das geometrische Bild einer stetigen Funktion allemal eine kontinuierliche Kurve ist. Man zeichnet daher einfach eine gerade Linie, die X-Achse, und eine kontinuierliche Kurve, die teils auf der einen, teils auf der andern Seite der Geraden verläuft. Niemand wird bezweifeln, daß die Kurve, die von der einen zur andern Seite der Geraden führt, diese irgendwo treffen muß; und das ist unser Lehrsatz. Oder eine noch einfachere Interpretation: Wenn man um 8 Uhr morgens eine Temperatur von 3° Kälte auf dem Thermometer abliest und um 3 Uhr nachmittags eine Temperatur von 3° Wärme, so wird jedermann einsehen, daß das Thermometer in der Zwischenzeit

1) Die Maßzahlen der umschließbaren Flächeninhalte bilden ein Kontinuum A von positiven Zahlen; die Maßzahlen der nicht umschließbaren ein Kontinuum B. Dabei ist jede Zahl von B größer als jede Zahl von A, und in A und B zusammen sind alle positiven Zahlen enthalten. Je nachdem nun die die beiden Kontinua trennende Zahl (der Schnitt (A, B)) zu A oder zu B gehört (worüber sich a priori nicht entscheiden läßt), hat die erste oder die zweite Aufgabe eine Lösung.

auch einmal 0^0 gezeigt haben muß. Aber dieses „anschaulich Einsehen" ist eben nicht „logisch beweisen". Wo wären dabei die einzelnen logischen Schlüsse, aus denen doch ein Beweis stets aufgebaut sein muß? Und vor allem ist hier einzuwenden, daß der Begriff der stetigen Funktion, der in unserm Satz vorkommt, und ihr geometrisches Abbild, die mathematische Kurve, in der Mathematik in ganz bestimmter Weise rein arithmetisch definiert wird, ohne auf irgendwelche Erscheinungen des geometrischen, empirischen Raumes oder sonstiger Erfahrungstatsachen Bezug zu nehmen. Allerdings hat man ja die Definition mit Willen derart vorgenommen, daß die mathematische Kurve in möglichster Übereinstimmung ist mit der anschaulichen, gezeichneten, empirischen Kurve; aber wie weit diese Übereinstimmung geht, darüber können wir nichts aussagen; und zwar deshalb nicht, weil die anschauliche Kurve eben als Objekt der Anschauung gar nicht arithmetisch definiert werden, und weil infolgedessen nicht das Geringste über sie bewiesen werden kann.

Es ist daher ganz unlogisch, wenn wir plötzlich dem in unserm Satz vorkommenden Begriff der stetigen Funktion, der mathematischen Kurve, diesem willkürlich von uns definierten und dadurch erschaffenen Begriff einen empirischen substituieren wie die anschauliche Kurve, oder gar wie bei der zweiten Interpretation, den Temperaturverlauf eines Tages. Man könnte dann ebensogut auch die Kursschwankungen eines Wertpapieres hernehmen; aber dann stimmt die Sache schon nicht. Ein jeder wird zwar zur Erklärung dieses Unterschiedes sogleich geltend machen, die Kurse ändern sich sprungweise, die Temperatur stetig. Aber was heißt „sprungweise"? Was heißt „stetig"? Man definiere. — Und sobald man definiert, hat man bereits den Boden der Anschauung verlassen und muß nun auf Grund der gegebenen Definition logisch beweisen.

Immerhin könnte jetzt ein unverbesserlicher Utilitarist geltend machen, daß doch der Erfolg für die Verwendung der Anschauung spricht; denn unser Lehrsatz über die stetige Funktion ist ja richtig. Obwohl ich es vom Standpunkt des Logikers ja gar nicht nötig hätte, mich mit solchen auseinanderzusetzen, will ich doch durch einige Beispiele darauf hinweisen, daß die Anschauung sehr wohl auch zu falschen Resultaten führen kann. Die Anschauung ist eben ein unvollkommenes, rohes Instrument, das uns die wahren Verhältnisse nur ungenau erkennen läßt. So werden wir durch sie ganz gewiß zu der Meinung verführt, daß jede Kurve in einem beliebigen ihrer Punkte, von vereinzelt auftretenden Wendepunkten abgesehen, entweder geradlinig, oder nach einer Seite konvex, nach der andern konkav ist. Aber die rechnende Mathematik lehrt uns, daß diese beiden Fälle noch lange keine vollständige Disjunktion bilden. Es gibt sogar Kurven, die in jedem ihrer Punkte weder gerade, noch auch nach einer Seite konvex oder konkav sind. Durch bloße Anschauung läßt sich die Existenz einer solchen Kurve wohl nie erkennen. Da müßten wir in der Lage sein, die Kurve mit Vergrößerungsgläsern von ganz beliebig großer Stärke zu betrachten, um die unsern groben Sinnen verborgenen Feinheiten der inneren Struktur gewahr zu werden. Diese Vergrößerungsgläser liefert uns eben die rechnende Mathematik, die Logik.

Vollends, eine Kurve, die durch alle Punkte eines Quadrates hindurchgeht, wird die Anschauung für ganz unmöglich halten; und dennoch gibt es solche Kurven, wie Peano gezeigt hat.[1])

Einem andern Fehler, der ebenfalls auf der Unzuverlässigkeit der Anschauung beruht, bin ich erst kürzlich in einer neueren Arbeit begegnet. Der Autor gründet dort eine längere Untersuchung auf einen geometrischen Hilfssatz, den er zwar nicht formuliert, der aber (etwas spezialisiert) folgendermaßen lauten würde: „Wenn eine unbegrenzte Serie von Punkten einer Ebene $P_1, P_2, P_3, \ldots$ derart gelagert ist, daß jeder folgende Punkt im Innern des Dreiecks der drei vorausgehenden liegt, und wenn jedes folgende Dreieck an Flächeninhalt höchstens halb so groß ist wie das vorausgehende, so haben die Punkte einen ganz bestimmten Grenzpunkt." Ein Beweis für diesen Satz war nicht mitgeteilt. Aber wenn man sich die Sache durch eine Zeichnung veranschaulicht, wird die Wahrheit ziemlich evident, so daß mancher vielleicht gar nicht das Bedürfnis nach einem Beweise verspürt. Der Autor hat dann wohl dem Talent seiner Leser so viel zugetraut, daß sie selbst den Beweis leicht erbringen können. Diesem Vertrauen auf das Können des Lesers begegnet man ja häufig in der mathematischen Literatur, und es ist in vielen Fällen im Interesse der Raum- und Zeitersparnis auch gewiß am Platze. Aber in diesem Falle hat der Autor es versäumt, die Richtigkeit seines Hilfssatzes, den ihm die Anschauung geliefert hat, selbst durch die Mittel der Logik zu kontrollieren. Er hätte sonst sicher bemerkt, daß der Satz gar nicht

1) In Wahrheit wird durch diese der Anschauung so paradox scheinenden Kurven natürlich nur bewiesen, wie wenig die durch den Begriff der stetigen Funktion definierte mathematische Kurve mit der anschaulichen Kurve in Übereinstimmung ist. Wenn ich oben sagte, man habe die Definition so einrichten wollen, daß eine ziemliche Konformität zwischen der mathematischen und der anschaulichen Kurve besteht, so sieht man jetzt, daß dieser Zweck nur sehr unvollkommen erreicht worden ist. Indessen hat sich die Definition so fruchtbar erwiesen, daß kein Anlaß vorliegt, sie zu ändern.

richtig ist[1]); auch die weiteren Sätze, die er daraus ableitete, sind teilweise unrichtig.

Endlich noch ein letztes Beispiel, das vielleicht am deutlichsten von allen zeigt, wie sehr man sich vor voreiligen, auf die Anschauung gegründeten Urteilen hüten muß. Wenn eine Funktion von zwei Veränderlichen, die wir als rechtwinklige Koordinaten in einer Ebene deuten wollen, an einer gewissen Stelle in jeder Richtung ein Maximum erreicht, so wird man glauben, daß sie dort überhaupt ein Maximum haben müsse. Der Satz erscheint anschaulich evident, wenn wir etwa folgende Überlegung anstellen. Von einem Punkte eines Berghanges denken wir uns nach allen Seiten horizontale gerade Linien ausstrahlen. Einige von diesen werden sogleich ins Berginnere eindringen; z. B. bei einem Nordabhang werden die nach Süden gerichtete Gerade und die in einer gewissen Nachbarschaft von ihr befindlichen dies tun. Die nach Norden gerichtete wird dagegen frei durch die Luft laufen und entweder gar nicht oder doch erst in einiger Entfernung ins Berginnere eindringen, nämlich in die gegenüberliegende Bergwand. Diese Entfernung kann natürlich auch sehr klein sein, wenn nämlich das zwischen den zwei Bergwänden liegende Tal sehr schmal ist.

Wenn wir nun aber einen Punkt der Bergoberfläche ins Auge fassen, der die Eigenschaft hat, daß *rings herum jede* von ihm ausstrahlende horizontale gerade Linie zuerst ein Stück frei durch die Luft geht (auch nicht an der Bergoberfläche entlang führt) und, wenn überhaupt, so erst in einiger Entfernung ins Berginnere eindringt, so ist die Aussicht nach allen Richtungen frei. Es geht von unserm Punkt aus in keiner Richtung aufwärts; nach allen Seiten muß man zuerst ein Stückchen abwärts, ehe man die Möglichkeit hat, wieder aufwärts steigen zu können, nämlich erst nach Überschreitung eines Tales an der gegenüberliegenden Bergwand. Wir werden also glauben, daß dieser Punkt des Berges höher sei als alle benachbarten in einer gewissen Umgebung, daß wir somit auf einem Gipfel angelangt sind. Kaum wird jemand einen Beweis dafür verlangen; so anschaulich und selbstverständlich ist die Sache.

Und doch befinden wir uns in einem Irrtum. Wenn alle von dem Punkt aus frei durch die Luft laufenden Geradenstücke größer als eine angebbare Strecke sind, dann allerdings haben wir recht. Das brauchen sie aber nicht zu sein, und dadurch kann es beispielsweise vorkommen, daß zwar jede *gerade* horizontale Linie erst in einiger Entfernung ins

1) Die Punkte können nämlich, wie man leicht sieht, so gelagert sein, daß sie keinen Grenz*punkt*, sondern eine Grenz*strecke* haben, die dann im Innern eines jeden Dreiecks liegt.

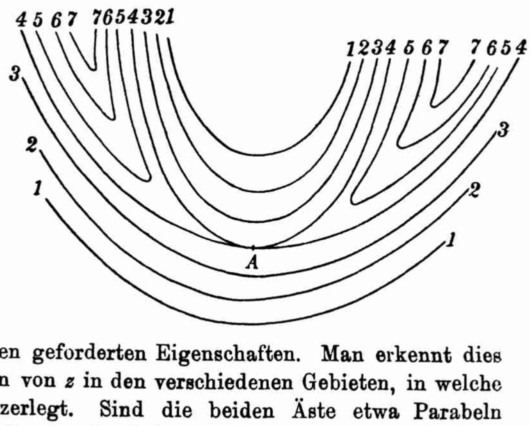
Berginnere eindringt, daß es aber trotzdem *krumme* horizontale Linien gibt, die dies sogleich tun, ohne zuerst ein Stück frei durch die Luft zu führen. Man kann dann von dem Punkt aus immer noch längs einer gebogenen Gratschneide aufwärts wandern; der Punkt ist noch kein Gipfel.[1])

An Hand einer Zeichnung oder eines Modelles wäre es, obwohl ein Modell die wahren Verhältnisse immer nur approximativ wiedergeben kann, gar nicht schwer, diese Sache so anschaulich darzulegen, daß sie jedem plausibel wird. Hier liegt also nicht einmal der Fall vor, daß etwas für die rohe Anschauung zu fein ist; vielmehr läßt sich dies, wie übrigens auch beim vorigen Beispiel, hinterher alles auch anschaulich begreifen. Aber die erste Anschauung hat uns dadurch getäuscht, daß sie uns eine Möglichkeit übersehen ließ. Gerade darin liegt eine besondere Tücke der Anschauung; ich könnte zahlreiche andere Beispiele dafür anführen, daß die Anschauung solche Fälle, die ihr selbst recht gut zugänglich sind, trotzdem übersehen läßt. Nur die Logik, die uns den Satz vom ausgeschlossenen Dritten zur Verfügung stellt, ist imstande, uns vor solchen Fehlern zu bewahren; niemals aber die Anschauung.

Ich möchte nun aber doch nicht den Anschein erwecken, als wollte ich durch meine Ausführungen der Anschauung das Todesurteil sprechen; davon bin ich weit entfernt. Denn trotz ihrer Nachteile ist sie für den Forscher unentbehrlich; *sie* ist es, die ihm neue Ziele zeigt. Anschauung und Phantasie sind das Werkzeug, mit dem man neue mathematische Wahrheiten *findet*. Doch spielt sich diese Seite der Forscher-

---

1) Eine solche Bergformation ist in untenstehender Terrainskizze mittels Isohypsen dargestellt; A ist der fragliche Punkt des Berges. Das Wesentliche dabei ist, daß die beiden Äste, aus denen die Isohypse 4 besteht, sich in A berühren, und daß beide nach derselben Seite (Norden) konkav sind. Es ist übrigens leicht, die Gleichung einer derartigen Bergoberfläche anzugeben. Legt man die XY-Ebene durch die Isohypse 4, und sind $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$ die Gleichungen der beiden Äste dieser Isohypse, so ist



$$z = (y - f(x))(\varphi(x) - y)$$

die Gleichung einer Fläche von den geforderten Eigenschaften. Man erkennt dies augenblicklich aus dem Vorzeichen von z in den verschiedenen Gebieten, in welche die Isohypse 4 die XY-Ebene zerlegt. Sind die beiden Äste etwa Parabeln ($f(x) = p^2x^2$, $\varphi(x) = q^2x^2$), so erhält man das bekannte Beispiel von Peano.

tätigkeit meistens sozusagen hinter den Kulissen ab; erst wenn die von Anschauung und Phantasie geborenen Sätze auch die Feuerprobe der Logik bestanden haben, dürfen sie das Licht der Öffentlichkeit erblicken. So ist die Logik meistens nur Taufpate, die wahre Mutter ist die Anschauung. Aber hier ist die Taufe allerdings unbedingt notwendig.

Aus meinen Ausführungen geht nun hervor, daß der mathematische Forscher auf seinen einsamen Pfaden fortwährend nicht nur Schwierigkeiten, sondern auch Gefahren ausgesetzt ist. Aber in der Erkenntnis eines Fehlers oder einer Fehlermöglichkeit ist meistens zugleich ein Mittel gegeben, den Fehler zu vermeiden. Ich habe ja schon immer Mittel und Wege angegeben, wie die einzelnen Fehlerarten, von denen ich sprach, vermieden werden können. Vor allem ist dem Mathematiker äußerster Skeptizismus vonnöten; nichts darf er unbewiesen hinnehmen, und wenn es noch so offenbar zu sein scheint. Für die Beweisführung selbst gilt dann als Hauptregel, daß man nie den Boden der Logik verlassen darf und insbesondere als Vordersätze eines Schlusses nur solche benutzen darf, die entweder in den Definitionen oder Voraussetzungen ausgesprochen, oder bereits auf Grund der Definitionen und Voraussetzungen bewiesen sind. Bei jedem einzelnen Schluß muß man sich fragen, welcher bereits bekannte Satz hierbei angewandt wird. Wenn man auf diese Frage keine klare Antwort hat, liegt ein Fehler vor; glaubt man aber eine Antwort zu haben, so muß man prüfen, ob die Voraussetzungen dieses Satzes wirklich im vorliegenden Falle alle erfüllt sind.

Diese Regel sieht nun sehr einfach aus, und in der Tat besitzen wir in ihr ein Mittel, um all die Fehler, von denen ich gesprochen, vermeiden zu können. Durch ihre Befolgung haben wir heute in vielen Teilgebieten der reinen Mathematik einen Grad der Zuverlässigkeit erreicht, der wohl nicht mehr übertroffen werden kann. Leider ist dies aber nicht auf allen Gebieten der Fall. In einem der jüngsten Zweige der Mathematik, in der Mengenlehre, scheint unsere Regel zur Vermeidung von Fehlern zu versagen. Dies möchte ich noch kurz erläutern.

Ich sagte ja, daß wir bei unsern Schlüssen stets die Definitionen und Voraussetzungen im Auge behalten müssen. Aber gerade diese sind es, die hier Schwierigkeiten machen. Wir müssen nämlich an den Anfang eines jeden mathematischen Lehrgebäudes eine Reihe von Begriffen stellen, die wir nicht definieren können, da ja in die Definition eines Begriffes stets wieder andere Begriffe eingehen werden. Solche undefinierte „Grundbegriffe“ sind heute in der Geometrie beispielsweise die Begriffe „Punkt“, „gerade Linie“, „zwischen“ u. a. m. Ebenso können wir nicht alle Sätze beweisen; einige wenige müssen unbewiesen übrig bleiben als Voraussetzungen, oder wie man sagt, als Axiome, Postulate. In der Geometrie zum Beispiel der Satz: „Durch zwei Punkte geht *eine* Gerade“.

Nun wird vielleicht ein Überskeptiker die Schwierigkeit darin erblicken wollen, daß die Axiome, weil nicht bewiesen, möglicherweise falsch sind, so daß auch die Folgerungen, also die ganze Mathematik, nichts taugen. Diese Gefahr liegt nun glücklicherweise nicht vor. Ein Axiom, es mag lauten wie es will, kann gar nicht falsch sein. Denn da wir auf eine Definition der Begriffe „Punkt“ und „Gerade“ verzichten, so ist beispielsweise der Sinn des Axioms „Durch zwei Punkte geht *eine* Gerade“ einfach der, daß wir unter Punkt und Gerade solche Dinge denken wollen, denen die durch das Axiom geforderte Eigenschaft zukommt. Der Satz „Durch zwei Punkte gibt es zwei Geraden“ wäre für sich allein als Axiom ebenso richtig; er würde eben besagen, daß wir uns unter Punkt und Gerade solche Dinge denken, denen diese neue Eigenschaft zukommt. Allerdings wäre eine derartige Geometrie nicht mit der empirischen in Übereinstimmung, aber doch an sich logisch richtig. Die Bedeutung der Axiome ist daher einfach die, daß sie die fehlende Definition der Grundbegriffe bis zu einem gewissen Grad ersetzen; man kann sagen, daß sie *implizit* diese Begriffe definieren. Eine eigentliche Definition (Nominaldefinition) ist dann lediglich ein Spezialfall eines Axioms, gewissermaßen in Form einer *aufgelösten Gleichung*, aufgelöst nach dem zu definierenden Begriff.

Hiernach ist also jedes Axiom an sich richtig. Freilich formulieren wir die Axiome der Geometrie meist absichtlich in der Weise, daß sie mit gewissen empirischen Tatsachen in Übereinstimmung sind, so daß wir sie also in letzter Linie der Anschauung entnehmen. Ob diese Übereinstimmung eine vollkommene ist, darüber wissen wir allerdings nichts und können auf mathematisch-logischem Wege auch nie das Geringste erfahren; dies zu untersuchen liegt daher überhaupt außerhalb der Aufgabe des Mathematikers, das ist Sache des Philosophen.

Die Schwierigkeit liegt nun also nicht in der möglichen Falschheit der Axiome; aber doch in einem ähnlichen Umstand. Wir werden nämlich für ein System von Grundbegriffen nicht nur ein einzelnes Axiom, sondern stets ein ganzes System von Axiomen postulieren. Da ist nun die Frage die, ob diese verschiedenen Axiome keinen Widerspruch einschließen. Es könnte ja sein, daß aus einigen der angenommenen Axiome sich das kontradiktorische Gegenteil zu einem andern angenommenen Axiom logisch deduzieren läßt. Solche Gruppen von Axiomen sind natürlich unbrauchbar; und somit stehen wir bei jedem angenommenen Axiomsystem vor der Aufgabe, zu untersuchen, ob es widerspruchsfrei ist; das gilt natürlich auch von den speziellen Axiomen, die wir Definitionen nennen. Solche Aufgaben sind im allgemeinen schwierig. Doch vermögen wir sie heute sowohl in der Geometrie wie in der Arithmetik bereits mit gutem Erfolg zu behandeln, wobei wir von dem Grundsatz ausgehen: „Ein System von postulierten Eigenschaften eines Dinges (Begriffsystems) ist widerspruchsfrei, wenn es ein Ding gibt, oder besser, wenn sich ein Ding herstellen läßt, das alle diese Eigenschaften hat.“[1])

Weniger glücklich sind wir bis jetzt in der Mengenlehre. Hier haben wir überhaupt noch kein vollständiges Begriff- und Axiomsystem aufgestellt, wenn auch Ansätze dazu vorhanden sind; geschweige denn, daß wir die Widerspruchslosigkeit bewiesen hätten. Zwar haben wir einige Begriffe, mit denen man zu operieren geneigt ist, als widerspruchsvoll erkannt und folglich von mathematischen Untersuchungen ausgeschlossen, so z. B. den Begriff „Menge aller Mengen“. Wer aber garantiert uns, daß gewisse andere Begriffe, mit denen wir ungeniert

1) Dies bedarf noch einer Erklärung. Denn da natürlich nicht ein *Herstellen* durch Handarbeit, sondern nur durch logische Operationen in Frage kommen kann, so muß man sich darüber klar sein, daß diese logischen Operationen an ein anderes Begriff- und Axiomsystem anknüpfen werden, das dann schon als widerspruchslos vorausgesetzt wird. So zum Beispiel beweist Hilbert die Widerspruchslosigkeit der Euklidischen Geometrie, indem er sie innerhalb eines andern Begriffsystems, der Arithmetik, herstellt (analytische Geometrie). Allgemein zu reden, wird man aber die Widerspruchslosigkeit des zweiten Begriff- und Axiomsystems auch erst beweisen müssen, wozu wieder ein drittes System gebraucht wird. Um diesem regressus in infinitum zu entgehen, kann man an folgenden Weg denken. Sei $a_1, a_2, \ldots a_n$ ein System von n bereits als widerspruchslos erkannten Axiomen. Um dann zu zeigen, daß ein $(n+1)$tes Axiom a_{n+1} mit diesen verträglich ist, sucht man *unter ausschließlicher Benutzung von* $a_1, a_2, \ldots a_n$ ein Begriffsystem herzustellen, dem die Eigenschaften $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ zukommen. Wie man leicht sieht, wird es auch genügen, wenn man unter Benutzung von $a_1, a_2, \ldots a_n, \overline{a_{n+1}}$ ein solches Begriffsystem bilden kann, wobei $\overline{a_{n+1}}$ das kontradiktorische Gegenteil von a_{n+1} bedeutet (dabei braucht man über die Verträglichkeit von $\overline{a_{n+1}}$ mit $a_1, a_2, \ldots a_n$ nichts zu wissen). So verfährt man zum Beispiel, wenn man die Widerspruchslosigkeit der Nichteuklidischen Geometrie dadurch beweist, daß man sie innerhalb der Euklidischen Geometrie auf eine der bekannten Arten realisiert; dabei ist dann a_{n+1} die Verneinung des Euklidischen Parallelenaxioms, also $\overline{a_{n+1}}$ dieses Axiom selbst, während $a_1, a_2, \ldots a_n$ die andern geometrischen Axiome bedeuten. Ebenso könnte man die Widerspruchslosigkeit der Euklidischen Geometrie dadurch beweisen, daß man sie innerhalb der Nichteuklidischen realisiert (auf der sogenannten Grenzkugel). Indes wird dieser Weg, wieder allgemein zu reden, wohl immer erst von einem gewissen n an möglich sein, während er für kleinere n versagt. Einen anderen, direkten Weg, der sich gerade für kleine n eignet, hat Hilbert für die Arithmetik skizziert (Verhandl. des 3. internat. Mathematikerkongresses, Seite 174ff.).