Zur Funktionentheorie der Wellengleichung

Mit Anwendungen auf spezielle Reihen und Integrale mit Besselschen, Whittakerschen und Mathieuschen Funktionen

Von Peter Henrici, Washington, D. C.

Einleitung

1. Allgemeine Bemerkungen

1.1. Problemstellung

In zahlreichen neueren Arbeiten wurde von *Bergman*[1]), *Vekua*[2]) und andern die Existenz von Funktionaltransformationen nachgewiesen, durch welche die Klasse der in einem gegebenen Bereiche regulären Lösungen einer elliptischen partiellen Differentialgleichung mit zwei unabhängigen Variabeln und mit analytischen Koeffizienten eineindeutig auf die Klasse der in einem bestimmten Bereiche analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen abgebildet wird. Die vorliegenden Untersuchungen verdanken ihre Entstehung der Fragestellung, ob es möglich ist, diese Ergebnisse für die Theorie der speziellen Funktionen der mathematischen Physik nutzbar zu machen.

Auf manche dieser speziellen Funktionen wird man bekanntlich geführt, wenn man versucht, die sogenannte Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + k^2 v = 0$$

(oder, im Falle $k = 0$, die Potentialgleichung) in einem orthogonalen Koordinatensystem zu separieren. Sieht man vom Fall der cartesischen

---

[1]) *Bergman, S.*, Zur Theorie der Funktionen, die eine lineare partielle Differentialgleichung befriedigen, Rec. Math. Nouv. Ser. 2 (1937), S. 1169—1198. Functions satisfying certain partial differential equations of elliptic type and their representation, Duke Math. J. 14 (1947), S. 349—366. The Kernel Function and Conformal Mapping, Amer. Math. Soc. 1950. (Dort zahlreiche weitere Literaturangaben.)

[2]) *Vekua, I. N.*, Randwertaufgaben der Theorie der linearen elliptischen Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Veränderlichen, Mittg. Georgische Abt. Akad. Wiss. USSR 1, S. 29—34, 181—186, 497—500. (Jahrb. Fortschr. Math. 66 (1940), S. 456 ff.)

Koordinaten, der sich später gesondert erledigen wird, und von den allgemeinen ellipsoidischen Koordinaten, die auf die hier nicht behandelten Laméschen Wellenfunktionen führen, ab, so besteht der erste Schritt hiezu in der Einführung von Zylinderkoordinaten. Fordert man dann, daß v vom Polarwinkel ϑ nur durch den Faktor $e^{i\mu\vartheta}$ (μ beliebig komplex) abhängen darf, so ergibt sich die Gleichung

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial v}{\partial y} + \left(k^2 - \frac{\mu^2}{y^2}\right) v = 0 \ .$$

Diese Gleichung hat zwar die gewünschte zweidimensionale Gestalt; ihre auf $y = 0$ analytisch von x abhängenden Lösungen sind jedoch, wie ein Potenzreihenansatz zeigt, daselbst als Funktionen von y verzweigt. Diese für die spätere Theorie störende Komplikation wird vermieden, wenn an Stelle von v die Funktion $u = y^{-\mu} v$ betrachtet wird. Für diese ergibt sich mit $\nu = \mu + \frac{1}{2}$ die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{d x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{2\nu}{y}\frac{\partial u}{\partial y} + k^2 u = 0 \ . \tag{d_ν}$$

Indem wir für diese Gleichung Funktionaltransformationen der eingangs erwähnten Art angeben und diese in geeigneter Weise auf Lösungen der Gleichung anwenden, sind wir in der Lage, zahlreiche zum Teil neue Ergebnisse über diese Funktionen zu finden. Wir lassen dabei für die Wellenzahl k beliebige komplexe Werte zu, betrachten dagegen beim Parameter ν aus Gründen, die sich im Verlaufe der Arbeit manifestieren werden, nur die Fälle $\nu = 0$ und $\Re\nu > 0$. Die Resultate über spezielle Funktionen werden sich dann zum Teil durch analytische Fortsetzung auch für andere ν als richtig erweisen lassen.

1.2. Aufbau der Arbeit

Im ersten Teil der Arbeit werden drei Sätze angegeben, die die Probleme der Existenz und der analytischen Fortsetzung der regulären Lösungen von (d_ν) von verschiedenen Seiten her beleuchten. Es werden zu diesem Zwecke insbesondere zwei Integraloperatoren Ω_ν und Θ_ν aufgestellt, die analytischen Funktionen einer Variabeln Lösungen von (d_ν) zuordnen. Der Operator Ω_ν ist im Falle $\nu = 0$, den wir gesondert betrachten, identisch mit dem Bergmanschen Operator erster Art; er löst für die auf die charakteristischen Koordinaten $z = x + iy$, $z^* = x - iy$ transformierte Gleichung (d_ν) das charakteristische Anfangswertproblem. Die erwähnten Sätze bilden hier ein Beispiel zur Bergmanschen, gemäß einer kürzlichen Mitteilung des Autors durch Einführung der Riemannsche Funktionen vereinfachten Theorie dieses Operators[3]). Im Fall $\Re\nu > 0$ kann diese Theorie wegen des dann singulären Koeffizienten in (d_ν) nicht mehr angewandt werden. Wir lösen hier mit Hilfe des Operators Θ_ν, der eine auf diese Singularität zugeschnittene Neuschöpfung darstellt, zunächst das nichtcharakteristische, aber singuläre Anfangswertproblem der Gleichung (d_ν), das entsteht, wenn die Werte der Lösung auf $y = 0$ vorgeschrieben werden. Die Lösung des charakteristischen Anfangswertproblems wird damit auf die Lösung einer Volterraschen Integralgleichung zurückgeführt. Die Lösung dieser Gleichung läßt sich durch Anwendung des Kalküls der Differentiation gebrochener Ordnung aus der Lösung im nichtsingulären Falle $\nu = 0$ gewinnen. — Für alle Operatoren werden explizite analytische Ausdrücke angegeben.

Im zweiten Teil werden für die Lösungen von (d_ν) die Analoga zu den funktionentheoretischen Sätzen von Taylor und Runge aufgestellt. Die Rolle der Potenzen von z wird dabei von gewissen Kombinationen Besselscher und Gegenbauerscher Funktionen (B.-G.-Funktionen) übernommen. Insbesondere wird gezeigt, daß jede reguläre Lösung von (d_ν) in eine nach B.-G.-Funktionen fortschreitende Reihe (B.-G.-Reihe) entwickelt werden kann. Der Konvergenzbereich dieser Reihe bestimmt sich wie bei der Taylorreihe nach allgemeinen funktionentheoretischen Gesichtspunkten. Als Korollar ergibt sich die klassische Theorie der (verallgemeinerten) Neumannschen Reihen (in der Theorie der Besselschen Funktionen), zu denen damit ein von der traditionellen Herleitung mit Hilfe der Neumannschen Polynome völlig verschiedener Zugang gewonnen ist.

Im dritten Teil werden Anwendungen auf spezielle Funktionen gegeben. In einem ersten Abschnitt werden für alle regulären Lösungen von (d_ν), die durch Separation der Variabeln gewonnen werden können (es handelt sich, einem alten Satze von H. Weber[4]) zufolge, um Lösungen in genau vier verschiedenen Koordinatensystemen), die B.-G.-Reihen explizite angegeben. Im Falle der cartesischen und der elliptischen Koordinaten ergeben sich hierdurch bekannte Entwicklungen von Gegenbauer und Whittaker. In den beiden andern Koordinatensystemen ergeben sich dagegen neue Reihen, nämlich im Falle der parabolischen Koordinaten eine B.-G.-Reihe für das Produkt zweier Whittakerscher Funktionen, die als Spezialfälle Entwicklungen von Produkten Bessel-

---

[3]) Bergmans Integraloperator erster Art und Riemannsche Funktion, Z. angew. Math. Phys. 3 (1952), S. 228—232.

[4]) *Weber, H.*, Über die Integration der partiellen Differentialgleichung $\partial^2u/\partial x^2 + \partial^2u/\partial y^2 + k^2u = 0$, Math. Ann. 1 (1869), S. 1—36, insbes. S. 27 f.

scher, Laguerrescher und Hermitescher Funktionen enthält, und im Falle der Polarkoordinaten ein allgemeines Additions- und Multiplikationstheorem für Besselsche Funktionen, aus dem durch spezielle Wahl der Parameter die vier klassischen Additionstheoreme von Gegenbauer und Graf sowie die Multiplikationstheoreme von Schafheitlin abgeleitet werden können.

In der zweiten Hälfte des dritten Teils werden mit Hilfe des Operators Θ_ν verschiedene bestimmte Integrale ausgewertet. Es ergeben sich auf diese Weise u. a. Verallgemeinerungen der Poissonschen und Laplaceschen Integraldarstellungen Besselscher bzw. Legendrescher Funktionen, sowie Integralgleichungen vom Volterraschen Typus für Mathieusche Funktionen. Anhangsweise wird noch für Produkte Whittakerscher Funktionen mit Hilfe der Orthogonalitätseigenschaften der Gegenbauerschen Polynome ein Analogon zu einem bekannten Gegenbauerschen Integral für Zylinderfunktionen angegeben.

1.3. Verwandte Untersuchungen

Auf die Gleichung (d_ν) (mit halb- oder ganzzahligem ν) wird man auch geführt, wenn man im Raume von $p = 2\nu + 2$ Dimensionen diejenigen Lösungen der Wellengleichung

$$\sum_{n=1}^{p} \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} + k^2 u = 0$$

betrachtet, die nur von $x = x_1$ und $y = (x_2^2 + \cdots + x_p^2)^{\frac{1}{2}}$ abhängen. Durch Betrachtung dieser Gleichung haben schon Hobson [5]) und in neuerer Zeit Sommerfeld [6]) Resultate über spezielle Funktionen hergeleitet. Es handelt sich dabei um Spezialfälle der Entwicklungen (27) und (49). Im Falle $k = 0$ ist von diesem Gesichtspunkt aus (d_ν) als Gleichung der verallgemeinerten axialsymmetrischen Potentiale neuerdings von A. Weinstein und seinen Schülern eingehend [7]) untersucht worden. Insbesondere gibt Weinstein verschiedene Darstellungen für die Grundlösungen dieser Gleichung. Mit $k = 0$ hat (d_ν) auch abgesehen von der potentialtheoretischen Herkunft verschiedene physikalische Anwendungen. Die Gleichung beherrscht (mit $\nu = 3/2$) die Torsion des axialsym-

[5]) *Hobson, E. W.*, On Bessel's Functions and Relations connecting them with Hyperspherical and Spherical Harmonics, Proc. London Math. Soc. 25 (1894), S. 49—75.

[6]) *Sommerfeld, A.*, Die ebene und sphärische Welle im polydimensionalen Raum, Math. Ann. 119 (1943), S. 1—20.

[7]) *Weinstein, A.*, Discontinuous Integrals and Generalized Potential Theory, Trans. Amer. Math. Soc. 63 (1948), S. 342—354.

metrischen Stabes[8]) und (ebenfalls mit $\nu = 3/2$, in inhomogener Form) die Theorie der dicken Schraubenfeder[9]); auf sie kann ferner Tricomis bekannte Gleichung der Strömungen kompressibler Flüssigkeiten im Gebiete des Schalldurchganges zurückgeführt werden[10]).

Allgemeine Lösungen von Potential- und Wellengleichung, für letztere sogar im Falle nichtperiodischer Zeitabhängigkeit, die wie unsere Operatorenlösungen von einer willkürlichen Funktion abhängen, gaben Whittaker[11]) und in seinem Gefolge für den mehrdimensionalen Fall Bateman[12]). Da in den Beweisen dieser Autoren Potenzreihen verwendet werden, über deren Konvergenzbereich nichts bekannt ist, gelten ihre Darstellungen im Gegensatz zu unsern Resultaten in 1. nur im kleinen[13]). Zahlreiche Ergebnisse über die Gleichung (d_0) finden sich implizite in den zitierten Arbeiten von Bergman. Bergman gibt auch eine explizite Untersuchung[14]) und erzeugt mittels eines Operators aus analytischen Funktionen Lösungen von (d_0), ohne indessen an dieser Stelle die Existenz des inversen Operators zu beweisen. — Im allgemeinen Fall scheint die Gleichung (d_ν) noch nicht funktionentheoretisch untersucht worden zu sein.

Über Beziehungen unserer Resultate über spezielle Funktionen zu verwandten Untersuchungen werden wir an Ort und Stelle in den Abschnitten 2 und 3 berichten.

2. Technische Vorbemerkungen

2.1. Gebiete

Wir betrachten im folgenden Gebiete der reellen (x, y)-Ebene und der komplexen Ebene. Wie sich zeigen wird, bedeutet es keine Einschränkung der Allgemeinheit, anzunehmen, daß diese Gebiete zur x-Achse bzw. zur reellen Achse symmetrisch sind und den Nullpunkt enthalten. Um ferner gewissen Umständlichkeiten der Beweisführung, die mit dem eigent-

---

[8]) *Weinstein, A.*, On the Torsion of Shafts of Revolution, The Proceedings of the 7th International Congress for Applied Mathematics, Vol. 1, S. 108—119.

[9]) *Biezeno und Grammel*, Technische Dynamik, 1939, S. 317 ff.

[10]) *Weinstein, A.*, On Tricomi's Equation and Generalized Axially Symmetric Potential Theory, Acad. Royale Belgique, Cl. d. Sc., 5e Sér. 37 (1951), S. 348—358.

[11]) *Whittaker, E. T.*, On the partial differential equations of mathematical physics, Math. Ann. 57 (1902), S. 333—355, insbes. S. 342 ff.

[12]) *Bateman, H.*, Proc. Lond. Math. Soc. (2) 1 (1907), S. 451—458. Vgl. auch Partial Differential Equations of Mathematical Physics, New York 1944.

[13]) Im Falle der Whittakerschen Lösung der Potentialgleichung wurde dies von *Copson*, Proc. Roy. Soc. Edinbourgh 62 (1944), S. 31—36 hervorgehoben.

[14]) *Bergman, S.*, Über Kurvenintegrale von Funktionen zweier komplexer Veränderlicher, die die Differentialgleichung $\Delta V + V = 0$ befriedigen, Math. Z. 32 (1930), S. 386—406.

lichen Inhalt der Arbeit nichts zu tun haben, auszuweichen, beschränken wir uns auf konvexe Gebiete. Gebiete, die die genannten Voraussetzungen erfüllen, nennen wir zur Klasse K gehörig.

Wir betrachten ferner Gebiete des zweidimensionalen komplexen Raumes K^2. Diese werden stets die Struktur von Dizylindern haben, d. h. aus der Gesamtheit aller Punkte (z_1, z_2) mit $z_1 \in \mathfrak{G}_1$ und $z_2 \in \mathfrak{G}_2$ bestehen, wo $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ zwei feste Gebiete der z_1- bzw. z_2-Ebene bedeuten. Wir bezeichnen diese Gebiete mit $\mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2$.

2.2. Stetige Funktionaltransformationen

Definition. Es seien $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ offene Bereiche in nicht notwendig gleichartigen Räumen. Es seien Φ und Ψ lineare Mannigfaltigkeiten von in $\mathfrak{G}$ bzw. $\mathfrak{H}$ definierten komplexwertigen Funktionen[15]. Es sei Ω eine lineare funktionale Abbildung von Φ auf Ψ. Diese Abbildung nennen wir stetig, wenn durch sie jede in $\mathfrak{G}$ lokal (und darum in jedem abgeschlossenen Teilbereich von $\mathfrak{G}$) gleichmäßig konvergente Funktionenfolge in eine in $\mathfrak{H}$ lokal gleichmäßig konvergente Folge übergeführt wird.

Kriterium für Stetigkeit. Im folgenden wird meist die nachstehende Situation vorliegen: $\mathfrak{G}$ ist ein Gebiet $\in K$ und Ψ ist die Klasse der in $\mathfrak{G}$ analytischen Funktionen. $\mathfrak{H}$ ist ein elementares Gebiet des K^n $(n = 1, 2)$ mit dem allgemeinen Punkt $Q = (w_1, \ldots, w_n)$. Die funktionale Abbildung ist von der Form

$$\Psi(Q) = \Omega[\varphi] = \int_0^1 \varphi\big(t\, g(Q) + (1-t) f(Q)\big)\, K(Q, t)\, dt\,, \tag{1}$$

wo $K(Q, t)$ für jedes $t \in [0, 1]$ als Funktion von Q in $\mathfrak{H}$ regulär ist und $f(Q)$ und $g(Q)$ zwei analytische Funktionen von Q bedeuten, deren Funktionswerte für alle $Q \in \mathfrak{H}$ in $\mathfrak{G}$ liegen. Für die Stetigkeit von Ω ist dann, wie aus (1) unmittelbar folgt, hinreichend, daß

$$\int_0^1 | K(Q, t) |\, dt$$

in $\mathfrak{H}$ lokal gleichmäßig beschränkt ist.

Die in 2.1 erwähnten bei der Zulassung nicht konvexer Gebiete entstehenden Schwierigkeiten rühren davon her, daß dann in (1) nicht mehr für alle Q in der t-Ebene längs ein und desselben Weges integriert werden kann, was, falls $K(Q, t)$ nicht eine ganze analytische Funktion von t ist, die Abschätzung des Integrales kompliziert.

[15]) Im folgenden wird es sich stets um gewisse Klassen analytischer Funktionen einer oder zweier Variabeln handeln.

2.3. Bezeichnung der speziellen Funktionen

In der Bezeichnung der speziellen Funktionen folgen wir Magnus und Oberhettinger[16]) und Whittaker und Watson[17]), die in den meisten Fällen übereinstimmen. Eine Ausnahme machen wir bei der verallgemeinerten hypergeometrischen Reihe, die für beliebige komplexe

$$a_1, \ldots, a_p \quad \text{und} \quad b_1, \ldots, b_q \quad (b_i \neq 0, -1, -2, \ldots ; \quad p \leqq q+1)$$

definiert ist durch

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n (a_2)_n \ldots (a_p)_n}{(b_1)_n (b_2)_n \ldots (b_q)_n} \frac{z^n}{n!} ,$$

wo

$$(a)_n = a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1) , \qquad n = 1, 2, \ldots ,$$
$$(a)_0 = 1$$

das Pochhammersche Symbol bedeutet. Wir verwenden für diese Funktion Baileys[18]) Bezeichnung

$${}_pF_q \left[\begin{matrix} a_1, a_2, \ldots, a_p ; z \\ b_1, b_2, \ldots, b_q \end{matrix} \right]$$

und schließen uns auch Baileys Konvention an, im Falle $z = 1$ das Argument wegzulassen.

Ein häufig vorkommender Spezialfall der verallgemeinerten hypergeometrischen Reihe ist die mit den Besselschen Funktionen verwandte Funktion

$${}_0F_1[\nu ; z] = \Gamma(\nu) (i\sqrt{z})^{-\nu+1} J_{\nu-1}(2i\sqrt{z}) \; ^{19)} ;$$

sie ist (wie alle verallgemeinerten hypergeometrischen Reihen ${}_pF_q$ mit $p \leqq q$) eine ganze Funktion von z und genügt, wie man aus der erwähnten Verwandtschaft oder direkt durch Einsetzen der Potenzreihe beweist, der Differentialgleichung

$$zF'' + \nu F' - F = 0 .$$

---

[16]) *Magnus, W. und F. Oberhettinger,* Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der Mathematischen Physik. 2. Aufl. 1948.

[17]) *Whittaker, E. T. and G. N. Watson,* A Course of Modern Analysis. 4th. ed. 1943.

[18]) *Bailey, W. N.,* Generalized Hypergeometric Series. Cambridge 1935.

[19]) Diese Funktion ist auch verwandt mit der Schläflischen Funktion $F(a, z)$ (vgl. *Watson, G. N.,* A Treatise on the Theory of Bessel Functions, 2nd ed. 1944, S. 90); der Zusammenhang ist

$${}_0F_1[\nu ; z] = \Gamma(\nu) F(\nu - 1, z) .$$

1. Allgemeine Sätze über Existenz und analytische Fortsetzung der Lösungen von (d_ν)

11. Der reguläre Fall ($\nu = 0$)

Wir betrachten in diesem Abschnitt die aus (d_ν) durch $\nu = 0$ entstehende Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0 \tag{d_0}$$

und folgen dabei dem Wege unserer bereits zitierten Mitteilung. Wir haben dort gezeigt, wie die Theorie des ersten Bergmannschen Integraloperators mit Hilfe der Riemannschen Integrationsmethode hyperbolischer Gleichungen allein aus der Existenz der Grundlösung der betrachteten Gleichung heraus erschlossen werden kann. Für (d_0) ist eine Grundlösung bekanntlich gegeben durch die zur nullten Neumannschen Funktion $N_0(kr)$ proportionale Funktion

$$v(x, y; \xi, \eta) = J_0(kr) \log r + S(r) \quad ,$$
$$r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 \; ,$$

wo die nullte Besselsche Funktion $J_0(kr)$ und ebenso die uns nicht weiter interessierende Funktion $S(r)$ ganze Funktionen von r^2 und damit von x, y, ξ, η sind. Die formal hyperbolische Gleichung, in die (d_0) durch Einführung der Riemannschen Normalkoordinaten

$$\left.\begin{aligned} z &= x + iy \\ z^* &= x - iy \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

übergeht und auf die nachher die Riemannsche Integrationsmethode angewandt wird, ist mit $u(x, y) = U(z, z^*)$

$$D_0[U] = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial z^*} + \frac{k^2}{4} U = 0 \; . \tag{D_0}$$

11.1. Daß jede in einem Gebiete $\mathfrak{G}$ der reellen (x, y)-Ebene zweimal stetig differenzierbare Lösung von (d_0) daselbst reell-analytisch ist, ist ein alter, schon von H. Weber[20]) bewiesener Satz. Ist $\mathfrak{G}$ einfach zusammenhängend, so gilt der stärkere

Satz I_0. *Jede in einem einfach zusammenhängenden Gebiet $\mathfrak{G}$ der reellen (x, y)-Ebene zweimal stetig differenzierbare* (und daher nach dem Satz von

[20]) *Weber*, l. c., S. 3—6.

H. Weber reell-analytische) *Lösung* $u(x, y)$ *von* (d_0) *kann zu einer im Bereiche* $\mathfrak{G} \times \overline{\mathfrak{G}}$ [21]) *des komplexen* (z, z^*)*-Raumes eindeutigen und analytischen Funktion* $U(z, z^*)$ *fortgesetzt werden.* Mit andern Worten: Es gibt eine in $\mathfrak{G} \times \overline{\mathfrak{G}}$ analytische Lösung von (D_0) mit $U(z, \bar{z}) = u(x, y)$.

Beweis. Der Beweis arbeitet mit den gleichen Mitteln wie der des Satzes von H. Weber, nur wird die Analytizität der Grundlösung stärker ausgenützt. Es genügt, den Beweis für jeden abgeschlossenen Teilbereich $\mathfrak{G}'$ von $\mathfrak{G}$ zu führen, wobei der Rand $\partial\mathfrak{G}'$ von $\mathfrak{G}'$ (mit der Normalen n) noch als differenzierbar vorausgesetzt werden kann. Bezeichnet $Q = (\xi, \eta)$ den laufenden Punkt auf $\partial\mathfrak{G}'$, so gilt, wie mit Hilfe der Greenschen Formel leicht bewiesen wird, für $u(x, y)$ die bekannte Darstellung

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\partial\mathfrak{G}'} \left\{ \frac{\partial u_Q}{\partial n} v - \frac{\partial v}{\partial n} u_Q \right\} ds_Q . \tag{4}$$

Hier hängt auf der rechten Seite nur v von x und y ab. Bei Einführung der Normalkoordinaten (3) und mit $\zeta = \xi + i\eta$, $\zeta^* = \xi - i\eta$ geht v über in die Funktion

$$V(z, z^*; \zeta, \zeta^*) = R(z, z^*; \zeta, \zeta^*) \log\sqrt{(z - \zeta)(z^* - \zeta^*)} + S(z, z^*; \zeta, \zeta^*),$$

wo R und S wieder ganze Funktionen ihrer vier Argumente sind. Die einzigen Singularitäten von V (als Funktion von z und z^*) sind daher die Singularitäten des Logarithmus und mithin gegeben durch $z = \zeta$ oder $z^* = \zeta^*$. Für jedes feste $\zeta \in \partial\mathfrak{G}'$ kann also $V = V(z, z^*)$ und damit der Integrand in (4) in $\mathfrak{G}' \times \overline{\mathfrak{G}}'$ längs jeden Weges fortgesetzt werden und ist daher nach dem Monodromiesatz in $\mathfrak{G}' \times \overline{\mathfrak{G}}'$ eindeutig und analytisch[22]). Da außerdem der Integrand in jedem abgeschlossenen Teilbereich von $(\mathfrak{G}' - \partial\mathfrak{G}') \times (\overline{\mathfrak{G}}' - \partial\overline{\mathfrak{G}}')$ gleichmäßig in der Integrationsvariabeln beschränkt ist, ist nach einem bekannten Satz der Analysis auch das Integral eine im gleichen Bereich analytische Funktion.

11.2. Wir formulieren jetzt zwei Sätze, die sich fast unmittelbar ergeben, wenn auf die Gleichung (D_0) die Riemannsche Integrationsmethode angewandt wird und die Anfangsfunktionen in geeigneten Bereichen analytisch gewählt werden. Nach dem in unserer Mitteilung zitierten Satz von Hadamard (und wie in diesem speziellen Fall natürlich auch

[21]) $\overline{\mathfrak{G}}$ bedeutet das zu $\mathfrak{G}$ konjugiert komplexe Gebiet, $\mathfrak{G} \times \overline{\mathfrak{G}}$ das kartesische Produkt von $\mathfrak{G}$ und $\overline{\mathfrak{G}}$.

[22]) Hier wird der einfache Zusammenhang von $\mathfrak{G}$ benützt. Daß der Satz im Falle mehrfach zusammenhängender Bereiche nicht richtig bleiben kann, lehrt schon im Falle $k = 0$ die Funktion $\log r$.

sonst bekannt[23])) ist die Riemannsche Funktion von (D_0) identisch mit dem auf Normalkoordinaten transformierten Koeffizienten des logarithmisches Gliedes der Grundlösung von (d_0), also gleich

$$J_0(kr) = J_0(k\sqrt{(z-\zeta)(z^*-\zeta^*)})$$
$$= {}_0F_1\left[1\,;\, -\frac{k^2}{4}(z-\zeta)(z^*-\zeta^*)\right].$$

Löst man hiermit die beiden hyperbolischen Anfangswertprobleme

$$\mathrm{II}_0 \quad \begin{cases} D_0[U] = 0\ ; \\ U(z,0) = f(z)\ , \qquad U(0,z^*) = f^*(z^*) \\ (f(0) = f^*(0)) \end{cases}$$

und

$$\mathrm{III}_0 \quad \begin{cases} D_0[U] = 0\ ; \\ U(z,z^*) = U(z^*,z)\ ; \\ U(z,z) = g(z)\,, \end{cases}$$

wo f, f^* und g gegebene Funktionen bedeuten, durch die Riemannsche Formel, so ergeben sich die beiden folgenden Sätze:

Satz II_0. *Es sei $\mathfrak{G}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, das 0 enthält. Dann gibt es zu jedem Paar von in $\mathfrak{G}$ bzw. $\overline{\mathfrak{G}}$ analytischen Funktionen* $\{f(z), f^*(z^*)\}$ (mit $f(0) = f^*(0)$) *genau eine in $\mathfrak{G}\times\overline{\mathfrak{G}}$ analytische Lösung*

$$U(z,z^*) = \Omega_0[f, f^*\,; z, z^*]$$

des Problems II_0. Der Operator Ω_0 ist stetig (im Sinne von 2.2) *und wird explizite dargestellt durch*

$$\Omega_0[f, f^*\,; z, z^*] = {}_0F_1\left[1\,;\, -\frac{k^2}{4}zz^*\right]f(0) +$$
$$+\int_0^z {}_0F_1\left[1\,;\, \frac{k^2}{4}(t-z)\,z^*\right]\frac{df(t)}{dz}\,dt +$$
$$+\int_0^{z^*} {}_0F_1\left[1\,;\, \frac{k^2}{4}z\,(t-z^*)\right]\frac{df^*(t)}{dz^*}\,dt\,. \qquad (5)$$

Satz III_0. *Es sei $\mathfrak{G}$ ein einfach zusammenhängendes, zur reellen Axe symmetrisches Gebiet. Dann gibt es zu jeder in $\mathfrak{G}$ analytischen Funktion $g(z)$ eine in $\mathfrak{G}\times\mathfrak{G}$ analytische Lösung*

[23]) *Courant, R. und D. Hilbert,* Methoden der Mathematischen Physik, Bd. 2, 1937, S. 316 f.

$$U(z, z^*) = \Theta_0[g; z, z^*]$$

des Problems III_0. Der Operator Θ_0 ist stetig und wird explizite dargestellt durch

$$\Theta_0[g; z, z^*] = \tfrac{1}{2}(g(z) + g(z^*)) +$$
$$+ \frac{k^2}{8}(z - z^*) \int_{z^*}^{z} {}_0F_1\left[2; -\frac{k^2}{4}(z - t)(z^* - t)\right] g(t)\,dt\,. \quad (6)$$

Die Beweise dieser Sätze ergeben sich aus Riemanns Theorie wie folgt: Die rechten Seiten von (5) bzw. (6) lösen die Probleme II_0 bzw. III_0 zunächst für reelle Werte von z und z^*. Sie bleiben auch für beliebige Punkte $(z, z^*) \in \mathfrak{G} \times \overline{\mathfrak{G}}$ bzw. $\in \mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$ sinnvoll und stellen dort analytische Funktionen dar. Nach dem Prinzip der Permanenz der Funktionalgleichung genügen sie also auch dort den Bedingungen der Probleme II_0 bzw. III_0. Auch die Behauptungen über Stetigkeit und Eindeutigkeit folgen aus der Riemannschen Theorie.

Selbstverständlich können die Sätze auch elementar ohne Bezugnahme auf die Riemannsche Theorie bewiesen werden. Aus der Ganzheit der ${}_0F_1$ und den Voraussetzungen über $f(z)$ und $f^*(z^*)$ folgt zunächst die Analytizität von (5) bzw. (6) in $\mathfrak{G} \times \overline{\mathfrak{G}}$ bzw. $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$. Das Erfülltsein der Anfangsbedingungen läßt sich aus den Formeln leicht ablesen, während das Bestehen der Differentialgleichung $D_0[U] = 0$ durch Differentiation und Benützung von (2) verifiziert werden kann. Die Stetigkeit der Operatoren folgt daraus, daß diese auf die Form (1) gebracht werden können[24]). Die eindeutige Bestimmtheit von $U(z, z^*)$ läßt sich durch eine Potenzreihenmethode ähnlich der von uns in 12.1 benutzten beweisen.

Bemerkung. Satz II_0 gilt offenbar auch, wenn 0 nicht innerer Punkt, sondern Randpunkt von $\mathfrak{G}$ ist, sofern nur die Funktionen $f(z)$ und $f^*(z^*)$ so beschaffen sind, daß die rechte Seite von (5) sinnvoll bleibt.

11.3. Aus den Sätzen von 11.1 und 11.2 kann auf mehrere Arten auf das Bestehen von eineindeutigen, in beiden Richtungen stetigen Abbildungen zwischen verschiedenen Funktionenklassen geschlossen werden:

a) Die Sätze I_0 und II_0 ergeben eine solche Abbildung der Klasse aller

[24]) Daß $\mathfrak{G}$ hier noch nicht konvex vorausgesetzt wurde, bedeutet, da der Kern eine ganze Funktion auch von t ist, für die Anwendung des Kriteriums noch keine Schwierigkeit.

in einem elementaren, den Nullpunkt enthaltenden Gebiet $\mathfrak{G}$ reell-analytischen Lösungen von (d_0) auf die Klasse aller Paare (f, f^*) von in $\mathfrak{G}$ bzw. $\overline{\mathfrak{G}}$ analytischen Funktionen einer komplexen Variablen mit $f(0) = f^*(0)$;

b) Ist $\mathfrak{G} \in K$ und wird $U(z, z^*)$ durch die Forderung $U(z, 0) = U(0, z)$ symmetrisch gemacht, so liefern die Sätze I_0 und II_0 eine Abbildung aller in einem zur reellen Achse symmetrischen Gebiet reell-analytischen in y geraden Lösungen von (d_0) auf die Klasse aller in $\mathfrak{G}$ analytischen Funktionen einer Variabeln;

c) Da im allgemeinen $U(z, z) \not\equiv U(z, 0)$, ergeben die Sätze I_0 und III_0 eine von b) verschiedene Abbildung der in einem zur reellen Achse symmetrischen elementaren Gebiet reell-analytischen, in y geraden Lösungen von (d_0) auf die Klasse der in $\mathfrak{G}$ analytischen Funktionen einer Variabeln;

d) Aus den Abbildungen b) und c) folgt schließlich eine eineindeutige Abbildung der Funktionen $U(z, z)$ auf die Funktionen $U(z, 0)$ oder, da diese Funktionen beide in einem zur reellen Achse symmetrischen Gebiet $\mathfrak{G}$ analytisch, aber sonst beliebig gewählt werden können, der Klasse der in $\mathfrak{G}$ analytischen Funktionen auf sich selbst. Aus (5) (mit $z^* = z$) und (6) (mit $z^* = 0$) folgt, daß diese Abbildung dargestellt wird durch das Formelnpaar

$$\left.\begin{aligned} g(z) &= {}_0F_1\left[1; -\frac{k^2 z^2}{4}\right] f(0) + 2\int_0^z {}_0F_1\left[1; \frac{k^2}{4} z(t-z)\right] \frac{df}{dz}(t)\, dt \\ f(z) &= \tfrac{1}{2}(g(z) + g(0)) + \frac{k^2 z}{8}\int_0^z {}_0F_1\left[2; \frac{k^2}{4} t(z-t)\right] g(t) dt\,. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Das Bestehen jeder dieser Formeln zieht das Bestehen der andern nach sich. Während naturgemäß jede der Abbildungen a), b) und c) streng an den analytischen Charakter der darin verbundenen Funktionen geknüpft ist, ist dies für die Beziehungen (7), der Herkunft aus der Riemannschen Theorie gemäß, nicht der Fall; sofern man sich auf reelle Werte der Variabeln beschränkt, reicht für ihre Gültigkeit einmalige stetige Differenzierbarkeit von f und g hin.

12. Der allgemeine Fall ($\Re \nu > 0$)

Wir verallgemeinern in diesem Abschnitt die Sätze von 11. für den Fall der allgemeinen Gleichung (d_ν), die durch Einführung der Normalkoordinaten (3) in

$$D_\nu[U] \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial z^*} - \frac{\nu}{z - z^*}\left[\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial U}{\partial z^*}\right] + \frac{k^2}{4} U = 0 \qquad (D_\nu)$$

übergeht. Erst diese Verallgemeinerung wird uns eine volle Ausnützung der Operatorenmethode für die Zwecke der Theorie der speziellen Funktionen gestatten.

Leider kann in diesem allgemeinen Fall die Riemannsche Methode nicht ohne Modifikationen verwendet werden. Nicht nur verbietet der singuläre Koeffizient in (D_ν) die unbekümmerte Anwendung der Riemannschen Formel, sondern auch die Riemannsche Funktion selbst ist bei $z = z^*$ singulär und kann zudem im Falle $k \neq 0$ nur durch eine nach hypergeometrischen Funktionen fortschreitende Reihe, deren Konvergenz schwer zu überblicken ist, dargestellt werden[25]). Diese Umstände zwingen uns zu einer Umstellung der Beweisanordnung von 11.

12.1. **Satz III$_\nu$.** *Zu jeder in einem Gebiet $\mathfrak{G} \in K$ analytischen Funktion $g(z)$ existiert genau eine in $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$ analytische Lösung*

$$U(z, z^*) = \Theta_\nu[g\,; z, z^*]$$

von (D_ν) mit $U(z, z) = g(z)$; sie ist in z und z^* symmetrisch[26]).

Wir trennen, wie es in solchen Fällen üblich ist, Eindeutigkeits- und Existenzbeweis. Mit der Eindeutigkeit kann gleichzeitig die Symmetriebehauptung mitbewiesen werden.

12.11. Eindeutigkeitsbeweis

Wegen der Analytizitätsbehauptung genügt es, die nachstehenden Betrachtungen im Kleinen durchzuführen. Eine eventuell existierende analytische Lösung des Anfangswertproblems läßt sich in der Umgebung jedes Punktes von $\mathfrak{G}$, also auch in der Umgebung eines beliebigen Punktes $(x, 0) \in \mathfrak{G}$ in eine nach Potenzen von x und y fortschreitende Reihe entwickeln, die in der Form

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) y^n$$

geschrieben werden kann. Da $u(x, y)$ (d_ν) erfüllt, ist

25) Als heuristisches Hilfsmittel hat uns die Riemannsche Methode gleichwohl große Dienste geleistet.

26) Dieser Satz geht — für das hier vorliegende spezielle Problem — in doppelter Hinsicht über den klassischen Cauchy-Kowalewskischen Existenzsatz hinaus: Die Differentialgleichung ist auf der Anfangskurve singulär, und das Anfangswertproblem wird nicht nur für eine Umgebung der Anfangskurve, sondern im großen gelöst.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\{f_n''(x)y^n + n(n-1)f_n(x)y^{n-2} + 2\nu n f_n(x)y^{n-2} + k^2 f_n(x)y^n\} = 0$$

oder nach Zusammenfassung gleicher Potenzen von y

$$2\nu f_1(x) = 0\ , \tag{8}$$

$$f_n''(x) + (n+2)(n+1+2\nu)f_{n+2}(x) + k^2 f_n(x) = 0\ , \tag{9}$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

Aus (8) ergibt sich zunächst wegen $\nu \neq 0$ $f_1(x) = 0$ und damit wegen (9) $f_{1+2n}(x) = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, woraus folgt, daß $u(x, y)$ in y gerade und $U(z, z^*)$ somit in seinen beiden Argumenten symmetrisch ist. Ist weiter auch $f_0(x) = u(x, 0) = U(z, z) = 0$, so folgt aus (9) $f_{2n}(x) = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Zur Anfangsfunktion 0 gehört also nur die Lösung $u(x, y) = 0$, was mit der eindeutigen Bestimmtheit durch die Anfangsfunktion gleichbedeutend ist[27]).

12.12. Existenzbeweis

Wir beweisen, über die bloße Existenz hinausgehend, folgenden

Zusatz zu Satz III$_\nu$. *Der Operator Θ_ν ist stetig*[28]) *und wird dargestellt durch*

$$\Theta_\nu[g\,; z, z^*] =$$

$$\frac{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu)\,\Gamma(\frac{1}{2})}\int_{-1}^{1} {}_0F_1\left[\nu\,; \frac{k^2}{16}(z-z^*)^2(1-t^2)\right] g\left(z\frac{1+t}{2}+z^*\frac{1-t}{2}\right)(1-t^2)^{\nu-1}dt. \tag{10}$$

Wir werden zeigen, daß die Funktion auf der rechten Seite die verlangten Eigenschaften hat, in $\mathfrak{G}\times\mathfrak{G}$ analytisch zu sein, stetig von $g(z)$ abzuhängen, für $z^* = z$ mit $g(z)$ zusammenzufallen und (D_ν) zu befriedigen.

1. Analytizität. Ist $z \in \mathfrak{G}$ und $z^* \in \mathfrak{G}$, so liegen wegen der Konvexität von $\mathfrak{G}$ auch alle Zwischenpunkte

$$z\frac{1+t}{2} + z^*\frac{1-t}{2}\,, \qquad -1 \leqq t \leqq 1\ ,$$

---

[27]) Dieser Teil des Satzes wurde im Falle $k = 0$ als „Identifikationsprinzip" auf anderm Wege schon bei *A. Weinstein*, l. c. Trans. Am. Math. Soc. 63 (1948), S. 344, bewiesen.

[28]) *Courant und Hilbert* (l. c., S. 177) betonen die physikalische Unsachgemäßheit von Anfangswertproblemen bei elliptischen Differentialgleichungen, weil bei ihnen die Lösung im allgemeinen nicht stetig von den Daten abhängt. Unser Satz zeigt, unter welchen Bedingungen hier die stetige Abhängigkeit gesichert ist und warum sie bei dem l. c. angeführten Beispiel von *Hadamard* nicht besteht.

in $\mathfrak{G}$. Für jeden festen Zwischenwert t ist der Integrand eine analytische Funktion von z und z^*. Wegen der in jedem abgeschlossenen Teilbereich von $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$ in bezug auf t gleichmäßigen Beschränktheit des Integranden folgt dies nach einem bekannten Satz auch für das Integral.

2. Die Stetigkeit der funktionalen Abbildung Θ_ν ist eine unmittelbare Folge des Kriteriums von 02.2.

3. Für $z^* = z$ ergibt sich wegen ${}_0F_1[\nu\,;0] = 1$

$$\begin{aligned}\Theta_\nu[g\,;z,z] &= \frac{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu)\,\Gamma(\frac{1}{2})}\int_{-1}^{1} g(z)(1-t^2)^{\nu-1}dt\\ &= g(z)\ .\end{aligned}$$

4. Der Nachweis, daß die durch (10) definierte Funktion $U(z,z^*)$ (D_ν) befriedigt, erfordert einigen kalkulatorischen Aufwand. Wir setzen in diesem Abschnitt vorübergehend

$$z\,\frac{1+t}{2} + z^*\,\frac{1-t}{2} = X\ ,$$

$$\frac{k^2}{16}(z-z^*)^2(1-t^2) = Y\ ,$$

und schreiben zur Vereinfachung

$$g(X) = g\ ,\qquad \frac{dg}{dX} = g'\ ;$$

$${}_0F_1[\nu\,;Y] = F\ ,\qquad \frac{dF}{dY} = F'\ .$$

Dann folgt mit

$$c = \frac{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu)\,\Gamma(\frac{1}{2})}$$

aus (10) durch Differentiation unter dem Integralzeichen

$$\frac{\partial U}{\partial z} = c\int_{-1}^{1}\left\{\frac{1+t}{2}Fg' + \frac{k^2}{8}(z-z^*)(1-t^2)F'g\right\}(1-t^2)^{\nu-1}dt\ ,$$

$$\frac{\partial U}{\partial z^*} = c\int_{-1}^{1}\left\{\frac{1-t}{2}Fg' - \frac{k^2}{8}(z-z^*)(1-t^2)F'g\right\}(1-t^2)^{\nu-1}dt\ ,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial z^*} = c\int_{-1}^{1}&\left\{\frac{1-t^2}{4}Fg'' - \frac{k^2}{8}(z-z^*)t(1-t^2)F'g'\right.\\ &\left.- \frac{k^4}{64}(z-z^*)^2(1-t^2)^2F''g - \frac{k^2}{8}(1-t^2)F'g\right\}(1-t^2)^{\nu-1}dt\ .\end{aligned}$$

Setzt man dies in (D_ν) ein, so können wegen

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{z - z^*}{2} g'$$

die Ableitungen von g sukzessive durch partielle Integration weggeschafft werden. Hierdurch und unter Beachtung der von ${}_0F_1[\nu\,;\,Y]$ befriedigten Differentialgleichung (2) ergibt sich

$$4D_\nu[U] = 4\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial z^*} - \frac{4\nu}{z-z^*}\left\{\frac{\partial U}{dz} - \frac{\partial U}{dz^*}\right\} + k^2 U$$

$$= c\int_{-1}^{1}\Big\{(1-t^2)Fg'' + \Big[-\frac{k^2}{2}(z-z^*)t(1-t^2)F - 4\nu(z-z^*)^{-1}tF\Big]g'$$

$$+\Big[-\frac{k^2}{16}(z-z^*)^2(1-t^2)^2F'' - \frac{k^2}{2}(1-t^2)(1+2\nu)F' + k^2F\Big]g\Big\}\cdot(1-t^2)^{\nu-1}dt$$

$$= c\int_{-1}^{1}\Big\{-\frac{k^2}{4}(z-z^*)t(1-t^2)F'g' + \Big[-\frac{k^2}{16}(z-z^*)^2(1-t^2)^2F''$$

$$-\frac{k^2}{2}(1-t^2)(1+2\nu)F' + k^2F\Big]g\Big\}(1-t^2)^{\nu-1}dt$$

$$= ck^2\int_{-1}^{1}\Big\{-\frac{k^2}{16}(z-z^*)^2(1-t^2)F'' - \nu F' + F\Big\}g(1-t^2)^{\nu-1}dt$$

$$= ck^2\int_{-1}^{1}\{-\,YF'' - \nu F' + F\}g(1-t^2)^{\nu-1}dt$$

$$= 0\ .$$

12.2. **Satz I$_\nu$.** *Jede in einem Gebiet* $\mathfrak{G} \in K$ *reell-analytische* (und darum nach 12.11 in y gerade) *Lösung* $u(x, y)$ *von* (d_ν) *kann zu einer im Gebiete* $\mathfrak{G}\times\mathfrak{G}$ *des komplexen* (z, z^*)*-Raumes eindeutigen analytischen Funktion* $U(z, z^*)$ *fortgesetzt werden.*

Wegen Satz III$_\nu$ ist dieser Satz äquivalent mit dem folgenden

Satz I$_\nu'$. *Genügt* $u(x, y)$ *den Voraussetzungen von Satz* I_ν, *so kann die Funktion* $u(x, 0)$ *zu einer in* $\mathfrak{G}$ *analytischen Funktion* $g(z) = U(z, z)$ *fortgesetzt werden.*

Wegen Satz III$_\nu$ kann nämlich diese Funktion $g(z)$ zu einer in $\mathfrak{G}\times\mathfrak{G}$ analytischen Lösung von (D_ν) fortgesetzt werden, die wegen der Eindeutigkeit der Fortsetzung für $z^* = \bar{z}$ mit $u(x, y)$ übereinstimmen muß.

Zum Beweis von Satz I_ν' benötigen wir einige Eigenschaften der Neumannschen Funktion, die wir in Form eines Lemmas zusammenstellen.

12.21. **Lemma.** *Ist* $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + \eta^2}$ *und bedeutet* $N_\nu(r)$ *die Neumannsche Funktion der Ordnung* ν[29]*, so ist für* $\eta > 0$ *die Funktion*

$$v(\xi, \eta) = -\frac{\sqrt{\pi}\, k^\nu}{2^{\nu+1}\,\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}\, \eta^{2\nu} r^{-\nu} N_\nu(kr)$$

eine Lösung der zu (d_ν) *adjungierten Gleichung*

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} - \frac{2\nu}{\eta}\frac{\partial v}{\partial \eta} + \left(k^2 + \frac{2\nu}{\eta^2}\right) v = 0 \; . \qquad (\tilde{d}_\nu)$$

Es gilt in der Umgebung von $r = 0$

$$\left.\begin{aligned} v &= \frac{\Gamma(\nu)}{2\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}\, \frac{\eta^{2\nu}}{r^{2\nu}} \{1 + o(1)\} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} &= -\frac{\Gamma(\nu + 1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}\, \frac{\eta^{2\nu}\xi}{r^{2\nu+2}} \{1 + o(1)\} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{2\nu}{\eta} v &= -\frac{\Gamma(\nu + 1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}\, \frac{\eta^{2\nu+1}}{r^{2\nu+2}} \{1 + o(1)\} \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Daß v $(\tilde{d}_\nu)$ befriedigt, ist, wie eine kleine Rechnung zeigt, gleichbedeutend damit, daß die zu $r^{-\nu} N_\nu(kr)$ proportionale Funktion $\eta^{-2\nu} v$ (d_ν) befriedigt. Dies wird unabhängig von der gegenwärtigen Untersuchung in 2.21 nachgewiesen. Die Relationen (11) folgen aus den elementarsten Eigenschaften der Neumannschen Funktion[30].

12.22. Beweis von Satz I_ν'.

Ist allgemein

$$l(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + a\,\frac{\partial u}{\partial \eta} + b\,\frac{\partial u}{\partial \eta} + cu$$

ein linearer Differentialausdruck und

$$m(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} - \frac{\partial (av)}{\partial \eta} - \frac{\partial (bv)}{\partial \eta} + cv$$

---

[29]) Watson, l. c. S. 74, bezeichnet diese Funktion mit $Y_\nu(r)$.

[30]) Die Funktion $v(\xi, \eta)$ wird für die Punkte $(x, 0)$ als Grundlösung von (d_ν) dienen. Da (d_ν) auf $(x, 0)$ singulär ist, hat die Grundlösung in diesem Falle nicht die gewohnte logarithmische Singularität.

der zu ihm adjungierte Differentialausdruck, so gilt bekanntlich[31]) für ein beliebiges die Voraussetzungen des Gaußschen Integralsatzes erfüllendes Gebiet $\mathfrak{B}$, in welchem u und v beide zweimal stetig differenzierbar sind, die Beziehung

$$\int_{\mathfrak{B}} \{v\,l(u) - u\,m(v)\}\, df = \oint_{\partial\mathfrak{B}} \{X \cos(n,\xi) + Y \cos(n,\eta)\}\, ds\ ; \tag{12}$$

dabei ist

$$X = v\frac{\partial u}{\partial \xi} - u\frac{\partial v}{\partial \xi} + a\,uv\ ,$$

$$Y = v\frac{\partial u}{\partial \eta} - u\frac{\partial v}{\partial \eta} + b\,uv\ ,$$

$\partial\mathfrak{B}$ bedeutet den Rand von $\mathfrak{B}$ und n seine äußere Normale. Identifizieren wir in dieser Formel u und v mit den in Satz I_ν und im Lemma so bezeichneten Funktionen und $l(u) = 0$ mit (d_ν) und wählen wir als Gebiet $\mathfrak{B}$ den oberhalb $y = 0$ gelegenen Teil von $\mathfrak{G}$ mit Ausschluß eines kleinen Halbkreises k_ϱ vom Radius ϱ um den Punkt $(x, 0)$, so erhalten wir, da dann die linke Seite von (12) verschwindet,

$$\oint_{\partial\mathfrak{B}} \left\{\left[v\frac{\partial u}{\partial \xi} - u\frac{\partial v}{\partial \xi}\right]\cos(n,\xi) + \left[v\frac{\partial u}{\partial \eta} + u\left(\frac{2\nu}{\eta}v - \frac{\partial v}{\partial \eta}\right)\right]\cos(n,\eta)\right\} ds = 0\,.$$

Die längs der x-Achse erstreckten Bestandteile dieses Integrales verschwinden wegen (11). Das längs dem in $y \geqq 0$ gelegenen Teil von $\partial\mathfrak{G}$ erstreckte Integral ist also gleich dem negativen längs k_ϱ genommenen Integral. Ist $(x + \varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)$, $0 \leqq \varphi \leqq \pi$, der laufende Punkt auf k_ϱ, so erhalten wir hiefür wegen

$$u(x + \varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi) = u(x, 0) + o(1)$$

und unter Benützung der Relationen (11)

$$\int_0^\pi \left\{\left[v\frac{\partial u}{\partial \xi} - u\frac{\partial v}{\partial \xi}\right]\cos\varphi + \left[v\frac{\partial u}{\partial \eta} - u\left(\frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{2\nu}{\eta}v\right)\right]\sin\varphi\right\}\varrho\, d\varphi$$

$$= \int_0^\pi \left\{v\left[\frac{\partial u}{\partial \xi}\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial \eta}\sin\varphi\right] - u\left[\frac{\partial v}{\partial \xi}\cos\varphi + \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{2\nu}{\eta}v\right)\sin\varphi\right]\right\}\varrho\, d\varphi =$$

[31]) *A. Sommerfeld*, Partielle Differentialgleichungen der Physik, Leipzig 1947, S. 44 f.

$$= \int_0^\pi \left\{ o(1) + \left[u(x,0) + o(1) \right] \frac{\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} (\sin^{2\nu}\varphi \cos^2\varphi + \sin^{2\nu+2}\varphi) \cdot \left[1 + o(1) \right] \right\} d\varphi$$

$$= u(x, 0) \frac{\Gamma(\nu + 1)}{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^\pi \sin^{2\nu}\varphi d\varphi + o(1)\ ^{32)}$$

$$= u(x, 0) + o(1) .$$

Es existiert daher der Grenzwert $\varrho \to 0$ des Integrals über k_ϱ, und es ergibt sich

$$u(x, 0) = \int\limits_{\substack{\partial\mathfrak{G} \\ (\nu \geqq 0)}} \left\{ \left[u \frac{\partial v}{\partial \xi} - v \frac{\partial u}{\partial \xi} \right] \cos(n, \xi) + \left[u \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{2\nu}{\eta} v \right) - v \frac{\partial u}{\partial \eta} \right] \cos(n, \eta) \right\} ds .$$

Hier hängt aber auf der rechten Seite nur v von x ab, und es kann, da v als Funktion von x nur für Punkte $\epsilon\, \partial\mathfrak{G}$ singulär wird, mit Hilfe des Monodromiesatzes wie beim Beweis von Satz I_0 zu Ende geschlossen werden.

12.3. **Satz II_ν.** *Zu jeder in einem Gebiete $\mathfrak{G} \epsilon K$ analytischen Funktion $f(z)$ gibt es genau eine in $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$ analytische Lösung*

$$U(z, z^*) = \Omega_\nu[f; z, z^*]$$

der Differentialgleichung (D_ν) mit $U(z, 0) = f(z)$. Der Operator Ω_ν ist stetig.

Wegen 12.11 ist $U(z, z^*)$ in z und z^* symmetrisch und daher auch $U(0, z^*) = f(z^*)$. — Aus (10) erhalten wir mit $z^* = 0$

$$U(z, 0) = \Theta_\nu[g; z, 0]$$

$$= \frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{\Gamma(\nu)\,\Gamma(\frac{1}{2})} \int_{-1}^{1} {}_0F_1\left[\nu; \frac{k^2}{16} z^2(1 - t^2)\right] g\left(z \frac{1+t}{2}\right) \left(1 - t^2\right)^{\nu-1} dt . \quad (13)$$

Diese Gleichung kann als eine Integralgleichung für die Funktion $g(z)$ bei gegebener Funktion $U(z, 0) = f(z)$ aufgefaßt werden. Besitzt sie zu jeder vorgegebenen in $\mathfrak{G}$ analytischen Funktion $f(z)$ eine im selben Gebiete analytische Lösung $g(z)$, so existiert zu diesem $g(z)$ nach Satz III_ν eine Lösung $U(z, z^*)$ von (D_ν), welche vermöge ihrer Konstruktion auf $z^* = 0$ mit $f(z)$ zusammenfällt. Hängt $g(z)$ stetig von $f(z)$ ab, so gilt dies nach Satz III_ν auch für $U(z, z^*)$. Zum Beweis von Satz II_ν genügt daher der Beweis von

---

32) Integration und Grenzübergänge können vertauscht werden, da die o-Aussagen von (11) gleichmäßig in φ gelten.

Satz II$_\nu'$. *Die Integralgleichung* (13) *hat zu jeder in einem Gebiete* $\mathfrak{G} \in K$ *analytischen Funktion* $f(z)$ *genau eine im selben Gebiete analytische Lösung*

$$g(z) = \Omega_\nu[f\,; z, z] \;;$$

diese Lösung hängt stetig von $f(z)$ *ab.*

Wir trennen wieder Eindeutigkeits- und Existenzbeweis.

12.31. Eindeutigkeit

Es genügt, zu zeigen, daß zur Funktion $f(z) \equiv 0$ nur die Lösung $g(z) = 0$ gehört oder daß bei nicht identisch verschwindendem $g(z)$ auch $f(z)$ nicht identisch verschwinden kann. Wegen der Analytizität der betrachteten Funktionen genügt es außerdem, diesen Nachweis für eine Umgebung von $z = 0$ zu erbringen. Nun ist der Kern von (13) von der Gestalt

$$\frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{\Gamma(\nu)\,\Gamma(\frac{1}{2})}\,{}_0F_1\left[\nu\,; \frac{k^2}{16}\,z^2(1 - t^2)\right](1 - t^2)^{\nu-1} = c_0(1 - t^2)^{\nu-1} + O(z), c_0 \neq 0\,.$$

Ist daher

$$g(z) = c_m z^m + O(z^{m+1}) \;, \qquad c_m \neq 0 \;,$$

so folgt in der Tat

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_{-1}^{1}\left[c_0(1 - t^2)^{\nu-1} + O(z)\right]\left[c_m\left(z\,\frac{1+t}{2}\right)^m + O\,(z^{m+1})\right]dt \\ &= 2^{-m}c_m c_0 z^m \int_{-1}^{1}(1 + t)^m(1 - t^2)^{\nu-1}dt + O(z^{m+1}) \\ &= c_m'\,z^m + O(z^{m+1}) \;, \qquad c_m' \neq 0 \;, \end{aligned}$$

also $f(z) \not\equiv 0$.

12.32. Existenz

Nehmen wir auf der rechten Seite von (13) die Variabelntransformation

$$z\,\frac{1+t}{2} = \tau \;, \qquad dt = 2\,\frac{d\tau}{z}$$

vor, so folgt

$$z^2\,\frac{1 - t^2}{4} = \tau(z - \tau) \;, \qquad (1 - t^2) = 4\,\frac{\tau}{z}\left(1 - \frac{\tau}{z}\right) \;,$$

und es entsteht aus (13) die *Volterra*sche Integralgleichung

$$f(z)=\frac{2^{2\nu-1}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu)\,\Gamma(\frac{1}{2})}\int\limits_0^z {}_0F_1\left[\nu\,;\frac{k^2}{4}\tau(z-\tau)\right]g(\tau)\left[\frac{\tau}{z}\left(1-\frac{\tau}{z}\right)\right]^{\nu-1}\frac{d\tau}{z}\,. \quad (14)$$

Leider sind die allgemeinen Existenztheoreme über analytische Lösungen der Volterraschen Integralgleichung[33]) in unserem Fall nicht anwendbar, da sie sich nur auf reguläre Kerne beziehen und auch hier nur lokalen Charakter haben. Unsere Methode wird darin bestehen, die Gleichung durch Differentiation gebrochener Ordnung (oder, was dasselbe ist, durch Zwischenschaltung einer Abelschen Integralgleichung) auf den Fall $\nu = 0$ zurückzuführen, wo wir sie durch die in 11. entwickelte Theorie auflösen können. Wir formulieren zu diesem Zweck zunächst ein Lemma über die (komplexe) Abelsche Integralgleichung.

Lemma. *Es sei $f(z)$ eine in einem Gebiete $\mathfrak{G} \epsilon K$ analytische Funktion. Es seien ferner α und β zwei komplexe Zahlen mit $\Re\alpha > 0$ und $\Re(\beta - \alpha) > -1$. Dann hat die komplexe Abelsche Integralgleichung*

$$\varphi(z) = z^\beta f(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^z (z-\tau)^{\alpha-1}\chi(\tau)\,d\tau = I^\alpha[\chi] \quad (15)$$

genau eine Lösung von der Form

$$\chi(\tau) = \tau^{\beta-\alpha} g(\tau)\ ,$$

wo $g(\tau)$ in $\mathfrak{G}$ analytisch ist und stetig von $f(z)$ abhängt[34]).

Beweis. Daß nicht mehr als eine Lösung existieren kann, folgt wie für die in Satz $\text{II}_\nu{}'$ betrachtete Integralgleichung. Zum Beweis der Existenz einer Lösung geben wir eine solche explizite an. Es sei a diejenige positive ganze Zahl mit der Eigenschaft $a - 1 < \Re\alpha \leq a$[35]). Dann ist, wie wir behaupten, eine Lösung von (15) mit den verlangten Eigenschaften gegeben durch die Funktion

$$\chi(\tau) = I^{-\alpha}[\varphi] = \begin{cases} \dfrac{d^a\varphi}{d\tau^a}(\tau)\ , & \text{wenn}\quad \alpha = a\ , \\[2ex] \dfrac{1}{\Gamma(a-\alpha)}\,\dfrac{d^a}{d\tau^a}\displaystyle\int\limits_0^\tau (\tau - z)^{a-\alpha-1}\varphi(z)\,dz\ , & \\ & \text{wenn}\quad \alpha \neq a\ . \end{cases}$$

---

33) Enz. Math. Wiss. 2, 3^2, S. 1461.

34) Im Reellen ist (15) die auf *Riemann* (Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation, Ges. Werke S. 331—344) und *Liouville* zurückgehende Definition der Integration der gebrochenen Ordnung α, die von *Hadamard* (Essai sur l'étude des fonctions données par leur developpement de Taylor, Journ. Math. (4) 8 (1892), S. 101—186, insbes. S. 154 f.) auf das Komplexe ausgedehnt wurde.

35) oder $a = -[-\Re\,\alpha]$.

Da diese Funktion $\chi(\tau)$ sicherlich existiert und von der Gestalt $\tau^{\beta-\alpha}g(\tau)$ ist, wo $g(\tau)$ in $\mathfrak{G}$ analytisch ist und (nach dem Kriterium von 02.2) stetig von $f(z)$ abhängt, bleibt nur zu zeigen, daß die Gleichung

$$z^{\beta} f(z) = I^{\alpha} I^{-\alpha}[z^{\beta} f(z)]$$

für alle Funktionen $f(z) = z^m$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, erfüllt ist. Man findet leicht, zunächst im Falle $a \neq \alpha$,

$$\begin{aligned} I^{-\alpha}[z^{\beta+m}] &= \frac{1}{\Gamma(a-\alpha)} \frac{d^a}{d\tau^a} \int_0^{\tau} (\tau - z)^{a-\alpha-1} z^{\beta+m} dz \\ &= \frac{1}{\Gamma(a-\alpha)} \frac{d^a \tau^{a-\alpha+\beta+m}}{d\tau^a} \int_0^1 (1-t)^{a-\alpha-1} t^{\beta+m} dt \\ &= \frac{\Gamma(\beta+m+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+m+1)} \tau^{\beta-\alpha+m} , \end{aligned}$$

und dieses Resultat gilt offenbar auch, wenn $\alpha = a$. Damit ist

$$\begin{aligned} I^{\alpha} I^{-\alpha}[z^{\beta+m}] &= \frac{\Gamma(\beta+m+1)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta-\alpha+m+1)} \int_0^z (z-\tau)^{\alpha-1} \tau^{\beta-\alpha+m} d\tau \\ &= \frac{\Gamma(\beta+m+1)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta-\alpha+m+1)} z^{\beta+m} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^{\beta-\alpha+m} dt \\ &= z^{\beta+m} , \end{aligned}$$

womit das Lemma bewiesen ist.

Mit Hilfe dieses Lemmas ist es nun möglich, eine Lösung der zu (14) äquivalenten Gleichung

$$\begin{aligned} \varphi_\nu(z) &\equiv z^{2\nu-1} f(z) \\ &= \frac{2^{2\nu-1}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu)\,\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^z \Big[\tau(z-\tau)\Big]^{\nu-1} {}_0F_1\Big[\nu\,; \frac{k^2}{4}\tau(z-\tau)\Big] g(\tau)\, d\tau \end{aligned} \tag{16}$$

zu konstruieren. Wir definieren die Funktion $\varphi_0(z)$ als die Lösung der Gleichung

$$\varphi_\nu(z) = I^{\nu}[\varphi_0(z)] \; . \tag{17}$$

Weiter sei $g_0(z)$ definiert als die nach 11.3 (S. 12) existierende und eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung[36])

$$\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(2\nu)} z\varphi_0(z) = g_0(z) + \frac{k^2}{4} z \int_0^z {}_0F_1\Big[2\,; \frac{k^2}{4}\tau(z-\tau)\Big] g_0(\tau)\, d\tau \; . \tag{18}$$

---

[36]) An dieser Stelle greifen wir auf den Fall $\nu = 0$ zurück.

Dann ist die Lösung von (16), wie wir behaupten, *gegeben durch*

$$g(\tau) = \tau^{-\nu} g_0(\tau) \ . \tag{19}$$

Beweis. Wir zeigen zuerst, daß $g(\tau)$ in $\mathfrak{G}$ analytisch ist. Da $f(z)$ in $\mathfrak{G}$ analytisch ist, ist, wenn r_i $(i = 1, 2)$ in $\mathfrak{G}$ analytische Funktionen bedeuten, $\varphi_0(z) = z^{\nu-1} r_1(z)$ und nach (7) $g_0(\tau) = \tau^\nu r_2(\tau)$, also $g(\tau)$ in $\mathfrak{G}$ analytisch. Nun zeigen wir, daß $g(\tau)$ die gegebene Integralgleichung (16) befriedigt. Wir wenden hierzu auf die mit $\Gamma(\nu) z^{-1}$ multiplizierte Gleichung (18) die Operation I^ν an. Auf der linken Seite ergibt sich wegen (17)

$$\frac{\Gamma(\nu)^2}{\Gamma(2\nu)} \varphi_\nu(Z) = \frac{\Gamma(\nu)\,\Gamma(\frac{1}{2})}{2^{2\nu-1}\,\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \varphi_\nu(Z) \ .$$

Auf der rechten Seite erhält man durch Vertauschung der Integrationsreihenfolge und Verwendung der Reihendarstellung von ${}_0F_1$

$$\int_0^Z (Z - z)^{\nu-1} \left\{ \frac{g_0(z)}{z} + \frac{k^2}{4} \int_0^z \tau\, {}_0F_1\left[2\, ; \frac{k^2}{4}\, \tau(z - \tau)\right] \frac{g_0(\tau)}{\tau}\, d\tau \right\} dz$$

$$= \int_0^Z \frac{g_0(\tau)}{\tau} \left\{ (Z - z)^{\nu-1} + \frac{k^2\tau}{4} \int_\tau^Z (Z - \tau)^{\nu-1}\, {}_0F_1\left[2\, ; \frac{k^2}{4}\, \tau(z - \tau)\right] dz \right\} d\tau$$

$$= \int_0^Z \frac{g_0(\tau)}{\tau} \left\{ (Z - \tau)^{\nu-1} + \frac{k^2\tau}{4} \int_\tau^Z (Z - z)^{\nu-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left[\frac{k^2\tau(z-\tau)}{4}\right]^m}{m!\,(m+1)!}\, dz \right\} d\tau$$

$$= \int_0^Z \frac{g_0(\tau)}{\tau} \left\{ (Z - \tau)^{\nu-1} + \frac{k^2\tau}{4} (Z - \tau)^\nu \int_0^1 (1 - t)^{\nu-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left[\frac{k^2\tau(Z-\tau)t}{4}\right]^m}{m!\,(m+1)!}\, dt \right\} d\tau$$

$$= \int_0^Z \frac{g_0(\tau)}{\tau} (Z - \tau)^{\nu-1} \left\{ 1 + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu) \left[\frac{k^2\tau(Z-\tau)}{4}\right]^{m+1}}{(m+1)!\ \Gamma(\nu + m + 1)} \right\} d\tau$$

$$= \int_0^Z \frac{g_0(\tau)}{\tau} (Z - \tau)^{\nu-1}\, {}_0F_1\left[\nu\, ; \frac{k^2}{4}\, \tau(Z - \tau)\right] d\tau$$

$$= \int_0^Z [\tau(Z - \tau)]^{\nu-1}\, {}_0F_1\left[\nu\, ; \frac{k^2}{4}\, \tau(Z - \tau)\right] g(\tau)\, d\tau \ ,$$

also die mit $\Gamma(\nu)\,\Gamma(\frac{1}{2})/2^{2\nu-1}\,\Gamma(\nu + \frac{1}{2})$ multiplizierte rechte Seite von (16). Also löst die durch (17), (18) und (19) definierte Funktion $g(\tau)$ diese Integralgleichung. Daß $g(\tau)$ stetig von $f(z)$ abhängt, folgt aus der Stetigkeit der Operationen (17), (18) und (19). Dies schließt den Beweis von Satz II_ν' und damit von Satz II_ν ab.

Aus den Sätzen I_ν, II_ν und III_ν folgt das Bestehen der zu 11.3 *b), c) und d) analogen funktionalen Abbildungen für die Lösungen von* (D_ν).

2. Übertragung der Sätze von Taylor und Runge

21. Möglichkeit der Übertragung

Es ist für das folgende bequem, folgende Definitionen zu verwenden: Es sei Φ eine lineare Mannigfaltigkeit von in einem Gebiete $\mathfrak{G}$ definierten Funktionen. Wir nennen ein System von Funktionen φ_m $(m = 0, 1, 2, \ldots)$

α) eine Entwicklungsbasis bzw.
β) eine Approximationsbasis

in $\mathfrak{G}$, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Jedes φ_m gehört zu Φ;
2. Jede Funktion $\varphi \in \Phi$ kann
   α) in eine in $\mathfrak{G}$ lokal gleichmäßig konvergente Reihe
   $$\sum_{m=0}^{\infty} a_m \varphi_m$$
   entwickelt werden bzw.
   β) in $\mathfrak{G}$ durch ein lineares Aggregat
   $$\sum_{m=0}^{n} b_m \varphi_m$$
   von endlich vielen Funktionen des Systems lokal gleichmäßig approximiert werden.

Beispielsweise bilden für die Klasse der analytischen Funktionen einer Variabeln die Funktionen $\varphi_m = z^m$ eine Entwicklungsbasis in bezug auf die Kreise um 0 und (nach dem Satz von Runge[37]) eine Approximationsbasis in bezug auf die Klasse aller einfach zusammenhängenden Gebiete. Diese Tatsachen können mit Hilfe der Sätze von 1. und kraft des folgenden *Lemmas* (dessen Beweis unmittelbar aus der Definition der Stetigkeit folgt) zur Aufstellung ähnlicher Sätze für die Lösungen von (d_ν) ausgenützt werden:

Eine lineare, eineindeutige und in beiden Richtungen stetige Funktionaltransformation führt Basen in Basen über. Unter „Basis" kann dabei sowohl „Entwicklungsbasis" als auch „Approximationsbasis" verstanden werden.

---

[37]) *Bieberbach, L.*, Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. I, 2. Aufl., S. 296 f.

22. Aufstellung einer Basis

Das soeben angeführte Lemma besagt, daß die beiden Funktionensysteme

$$\varphi_m(z, z^*) = \Omega_\nu[z^m; z, z^*]$$

und

$$\Psi_m(z, z^*) = \Theta_\nu[z^m; z, z^*]\ , \qquad m = 0, 1, 2, \dots\ ,$$

Basen für die Klasse der analytischen Lösungen von (D_ν) darstellen, und zwar sowohl Entwicklungsbasen für die Gebiete $\mathfrak{K}\times\mathfrak{K}$, wo $\mathfrak{K}$ einen Kreis um O bedeutet, als auch Approximationsbasen für die Gebiete $\mathfrak{G}\times\mathfrak{G}$, wo $\mathfrak{G} \in K$. Es zeigt sich jedoch, daß sich nur das erste der angeführten Systeme durch bekannte Funktionen ausdrücken läßt. Wir berechnen diese Funktionen nicht konstruktiv durch Ausführung der Operationen (17), (18), (19) und (10), sondern direkter als gewisse Partikulärlösungen von (d_ν), von denen wir nachträglich zeigen, daß sie sich für $z^* = 0$ auf die Funktionen $c_m^\nu z^m$ $(c_m^\nu \neq 0)$ reduzieren.

22.1. Bessel-Gegenbauersche Funktionen

Wird in die durch $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$ auf Polarkoordinaten transformierte Gleichung (d_ν) der Ansatz $u = R(r)\,\Theta(\vartheta)$ eingeführt, so ergeben sich bei Durchführung des üblichen Separationsprozesses, wenn als Separationskonstante die Zahl $\mu(\mu + 2\nu)$ (mit dem freien Parameter μ) verwendet wird, für $R(r)$ und $\Theta(\vartheta)$ die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2\nu+1}{r}\frac{dR}{dr} + \left(k^2 - \frac{\mu(\mu+2\nu)}{r^2}\right) R = 0$$

und

$$\frac{d^2\Theta}{d\vartheta^2} + 2\nu\operatorname{ctg}\vartheta\frac{d\Theta}{d\vartheta} + \mu(\mu+2\nu)\Theta = 0\ .$$

Die erste Gleichung geht durch $R(r) = r^{-\nu}P(r)$ in

$$\frac{d^2P}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dP}{dr} + \left(k^2 - \frac{(\mu+\nu)^2}{r^2}\right) P = 0\ ,$$

also in eine Besselsche Differentialgleichung über; ihre allgemeine Lösung ist daher $r^{-\nu}\mathfrak{Z}_{\nu+\mu}(kr)$, wo $\mathfrak{Z}_{\nu+\mu}$ eine Zylinderfunktion der Ordnung $\nu + \mu$ bedeutet. Die zweite Gleichung geht durch Einführung der neuen Variabeln $t = \cos\vartheta$ mit $\Theta(\vartheta) = T(t)$ über in

$$\frac{d^2T}{dt^2} - \frac{(2\nu+1)t}{1-t^2}\frac{dT}{dt} + \frac{\mu(\mu+2\nu)}{1-t^2}T = 0\ .$$

Hiervon ist eine Lösung die durch

$$C_\mu^\nu(t) = \frac{\Gamma(\mu + 2\nu)}{\Gamma(\mu + 1)\,\Gamma(2\nu)}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}\mu + 2\nu,\ -\mu;\ \frac{1-t}{2}\\ \nu + \frac{1}{2}\end{matrix}\right] \tag{20}$$

definierte Gegenbauersche Funktion, die sich für nicht negatives ganzes $\mu = m$ auf ein Polynom reduziert. Lösungen von (d_ν) in Polarkoordinaten sind also die Funktionen

$$C_\mu^\nu(\cos\vartheta)\, r^{-\nu}\mathfrak{Z}_{\nu+\mu}(kr)\,^{38)}\ .$$

Setzen wir für die Zylinderfunktion die Besselsche Funktion ein und multiplizieren wir mit einer passenden Konstanten (damit die Funktion für $k = 0$ oder $\nu = 0$ nicht identisch verschwindet), so entsteht die Funktion

$$f_\mu^\nu(r, \vartheta; k) = k^{-\nu-\mu}\frac{\Gamma(\mu + 1)\,\Gamma(2\nu)}{\Gamma(\mu + 2\nu)}\,C_\mu^\nu(\cos\vartheta)\, r^{-\nu}\, J_{\nu+\mu}(kr)\ , \tag{21}$$

oder, durch Normalkoordinaten und hypergeometrische Reihen ausgedrückt,

$$F_\mu^\nu(z, z^*; k) = k^{-\nu-\mu}\frac{\Gamma(\mu + 1)\,\Gamma(2\nu)}{\Gamma(2\nu + \mu)}\,C_\mu^\nu\left(\frac{z + z^*}{2\sqrt{zz^*}}\right)(zz^*)^{-\frac{1}{2}\nu}\, J_{\nu+\mu}(k\sqrt{zz^*})$$

$$= \frac{(zz^*)^{\frac{1}{2}\mu}}{2^{\nu+\mu}\Gamma(\nu+\mu+1)}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}-\mu, \mu+2\nu; -\frac{(\sqrt{z}-\sqrt{z^*})^2}{4\sqrt{zz^*}}\\ \nu+\frac{1}{2}\end{matrix}\right]{}_0F_1\left[\nu+\mu+1; -\frac{k^2 zz^*}{4}\right] \tag{22}$$

Wir nennen die durch (21) oder (22) definierte Funktion Bessel-Gegenbauersche Funktion (B.-G.-Funktion) des Ranges[39] ν und der Ordnung μ. Sie ist für die betrachteten Werte von ν und für beliebige μ als Funktion von z und z^* eindeutig und analytisch im Bereiche $\mathfrak{E}\times\mathfrak{E}$, wo $\mathfrak{E}$ die längs der negativen reellen Achse aufgeschnittene Ebene bedeutet. Dort kann $(zz^*)^{\frac{1}{2}\mu}$ nämlich durch die Vorschrift

$$|\arg z| < \pi\ , \qquad |\arg z^*| < \pi$$

eindeutig gemacht werden; für den hypergeometrischen Faktor folgt die Behauptung aus dem Monodromiesatz, da man, wie eine leichte Rech-

[38]) Wegen $C_0^\nu(\cos\vartheta) = 1$ ergibt sich hieraus insbesondere auch die Behauptung des Lemmas in 12.2, daß $r^{-\nu}N_\nu(kr)$ eine Lösung von (d_ν) ist.

[39]) *Hobson*, l. c., bezeichnet in diesem Zusammenhang die Zahl $p = 2\nu + 2$ als „rank", *Sommerfeld*, l. c., $p = 2\nu$ als Dimension der betreffenden Wellenfunktion.

nung zeigt, bei der etwa von einem Punkte der positiv reellen Achse ausgehenden analytischen Fortsetzung mit der Variabeln

$$-(\sqrt{z}-\sqrt{z^*})^2/(2\sqrt{zz^*}) \quad \text{in} \quad \mathfrak{E}\times\mathfrak{E}$$

nicht auf einen der für die ${}_2F_1$ kritischen Punkte 1 und ∞ stößt.

Für $\mu = m = 0, 1, 2, \ldots$ ist[40])

$${}_2F_1\left[\begin{matrix}-m,\, m+2\nu\,; \dfrac{1-\cos\vartheta}{2}\\ \nu+\frac{1}{2}\end{matrix}\right] = \frac{\Gamma(2\nu)\Gamma(\nu+m)}{\Gamma(\nu)\Gamma(2\nu+m)}(2\cos\vartheta)^m\, {}_2F_1\left[\begin{matrix}-\dfrac{m}{2}, \dfrac{1-m}{2}\,; \dfrac{1}{\cos^2\vartheta}\\ 1-\nu-m\end{matrix}\right]$$

so daß mit

$$c_m^\nu = \frac{\Gamma(2\nu)}{2^{m+\nu}\,\Gamma(\nu)\,\Gamma(2\nu+m)(\nu+m)}\ (\neq 0)$$

auch gilt

$$F_m^\nu(z, z^*; k) = c_m^\nu (z+z^*)^m\, {}_2F_1\left[\begin{matrix}-\dfrac{m}{2}, \dfrac{1-m}{2}\,; \dfrac{4zz^*}{(z+z^*)^2}\\ 1-\nu-m\end{matrix}\right] {}_0F_1\left[\nu+m+1\,; -\frac{k^2zz^*}{4}\right]. \tag{23}$$

Da hier $(z+z^*)^m\,{}_2F_1$ ein Polynom ist, sind die Funktionen $F_m^\nu(z,z^*;k)$ ganze Funktionen von z und z^*. Wegen der aus (23) unmittelbar fließenden Beziehung

$$F_m^\nu(z, 0\,; k) = c_m^\nu z^m \tag{24}$$

sind diese Funktionen proportional zu den gesuchten Funktionen φ_m, und es gilt

Satz IV. *Die speziellen Bessel-Gegenbauerschen Funktionen*

$$F_m^\nu(z, z^*; k)\ , \quad m = 0, 1, 2, \ldots\ ,$$

bilden für die in z *und* z^* *symmetrischen, regulären Lösungen von* (D_ν) $(\nu = 0$ *oder* $\Re\nu > 0)$ *eine Entwicklungsbasis in bezug auf die Gebiete* $\mathfrak{K}\times\mathfrak{K}$ *und eine Approximationsbasis in bezug auf die Gebiete* $\mathfrak{G}\times\mathfrak{G}$, wo $\mathfrak{K}$ einen Kreis um 0 und $\mathfrak{G}$ ein Gebiet $\epsilon\, K$ bedeutet.

Die Funktionen $F_m^\nu(z, z^*; k)/c_m^\nu$ sind, wie ebenfalls aus (23) ersehen werden kann, außerdem analytische Funktionen von ν in jedem Gebiete der ν-Ebene, das die Punkte $\nu = -1, -2, \ldots$ nicht enthält. — Meist wird es nicht nötig sein, bei den B.-G.-Funktionen die Abhängigkeit von

[40]) *Magnus und Oberhettinger*, l. c. S. 99. Die Formel folgt aus (20) durch eine quadratische Transformation der hypergeometrischen Reihe.

k besonders hervorzuheben. Wir schreiben dann statt (21) und (22) kürzer $f^{\nu}_{\mu}(r, \vartheta)$ bzw. $F^{\nu}_{\mu}(z, z^*)$[41]).

22.2 Besondere Fälle der Bessel-Gegenbauerschen Funktion

a) *Besondere Werte der Variablen.* Aus (22) folgt

$$F^{\nu}_{\mu}(z, z\,; k) = k^{-\nu-\mu} z^{-\nu} J_{\nu+\mu}(kz) \;.$$

b) *Besondere Werte des Ranges.* Eine Kummersche quadratische Transformation der hypergeometrischen Reihe[42]) ist

$$_2F_1\left[\begin{matrix} -\mu, \mu + 2\nu\,; \dfrac{1-\cos\vartheta}{2} \\ \nu + \frac{1}{2} \end{matrix}\right] = (\cos\vartheta)^{\mu}\, _2F_1\left[\begin{matrix} -\dfrac{\mu}{2}, \dfrac{1-\mu}{2}\,; -\operatorname{tg}^2\vartheta \\ \nu + \frac{1}{2} \end{matrix}\right].$$

Man erhält hieraus durch geeignete Zusammenfassung der entstehenden hypergeometrischen Reihen

für $\nu = 0$:

$$\begin{aligned} _2F_1\left[\begin{matrix} \mu, -\mu\,; \dfrac{1-\cos\vartheta}{2} \\ \frac{1}{2} \end{matrix}\right] &= (\cos\vartheta)^{\mu}\, _2F_1\left[\begin{matrix} -\dfrac{\mu}{2}, \dfrac{1-\mu}{2}\,; -\operatorname{tg}^2\vartheta \\ \frac{1}{2} \end{matrix}\right] \\ &= (\cos\vartheta)^{\mu} \frac{(1+i\operatorname{tg}\vartheta)^{\mu} + (1-i\operatorname{tg}\vartheta)^{\mu}}{2} \\ &= \tfrac{1}{2}\,(e^{i\mu\vartheta} + e^{-i\mu\vartheta}) \\ &= \cos\mu\vartheta\,; \end{aligned}$$

für $\nu = 1$

$$\begin{aligned} _2F_1\left[\begin{matrix} \mu+2, -\mu\,; \dfrac{1-\cos\vartheta}{2} \\ \frac{3}{2} \end{matrix}\right] &= \cos^{\mu}\vartheta\, _2F_1\left[\begin{matrix} -\dfrac{\mu}{2}, \dfrac{1-\mu}{2}\,; -\operatorname{tg}^2\vartheta \\ \frac{3}{2} \end{matrix}\right] \\ &= \frac{\cos^{\mu}\vartheta}{2i(\mu+1)\operatorname{tg}\vartheta}\{(1+i\operatorname{tg}\vartheta)^{\mu+1} - (1-i\operatorname{tg}\vartheta)^{\mu+1}\} \\ &= \frac{1}{2i(\mu+1)\sin\vartheta}\{e^{i(\mu+1)\vartheta} - e^{-i(\mu+1)\vartheta}\} \\ &= \frac{\sin(\mu+1)\vartheta}{(\mu+1)\sin\vartheta}\,; \end{aligned}$$

---

[41]) Daß wir neben den Funktionen $f^{\nu}_{\mu}(r, \vartheta)$, die als Produkte zweier Funktionen je einer Variabeln geschrieben werden können, noch die scheinbar komplizierteren Funktionen $F^{\nu}_{\mu}(z, z^*)$ einführen, hat seinen Grund darin, daß im Polarkoordinatenraum die den Punkten $(z, 0)$ des Normalkoordinatenraumes entsprechenden Punkte fehlen. Mit $z = re^{i\vartheta}$, $z^* = r\,e^{-i\vartheta}$ folgt nämlich aus $z^* = 0$, da $e^{-i\vartheta}$ den Ausnahmewert 0 nicht annimmt, $r = 0$ und damit auch $z = 0$.

[42]) *Kummer, F.*, Über die hypergeometrische Reihe, Journ. reine angew. Math. 15 (1836), S. 39—83, insbes. S. 77.

also ist

$$F^0_\mu(z, z^*; k) = k^{-\mu} J_\mu(kr) \cos \mu \vartheta$$

$$F^1_\mu(z, z^*; k) = k^{-\mu-1} J_{\mu+1}(kr) \frac{\sin(\mu+1)\vartheta}{(\mu+1) r \sin\vartheta} .$$

Für $\nu = \frac{1}{2}$ ist

$${}_2F_1\left[\begin{matrix} -\mu, \mu+1; \frac{1-\cos\vartheta}{2} \\ 1 \end{matrix}\right] = P_\mu(\cos\vartheta) ,$$

wo P_μ die Kugelfunktion erster Art der Ordnung μ bedeutet; insbesondere erhält man für $\mu = m = 0, 1, 2, \ldots$ das m-te Legendresche Polynom, und somit

$$F^{\frac{1}{2}}_m(z, z^*; k) = k^{-m-\frac{1}{2}} r^{-\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}+m}(kr) P_m(\cos\vartheta) .$$

c) *Besondere Werte der Ordnung.* Für $\mu = 0$ und $\mu = -2\nu$ reduziert sich die hypergeometrische Funktion (20) auf die Konstante 1; damit ergibt sich unmittelbar

$$F^\nu_0(z, z^*; k) = (kr)^{-\nu} J_\nu(kr) ,$$

$$F^\nu_{-2\nu}(z, z^*; k) = k^\nu r^{-\nu} J_{-\nu}(kr) .$$

Hieraus folgt insbesondere für $\nu = \frac{1}{2}$

$$F^{\frac{1}{2}}_0(z, z^*; k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin kr}{kr} ,$$

$$F^{\frac{1}{2}}_{-1}(z, z^*; k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos kr}{r} .$$

d) *Besonderer Wert der Wellenzahl k.* Für $k \to 0$ reduziert sich der Besselsche Anteil in (21) auf $1/2^{\nu+\mu}\,\Gamma(\nu+\mu+1)$, und es bleibt

$$F^\nu_\mu(z, z^*; 0) = \frac{\Gamma(\mu+1)\,\Gamma(2\nu)}{2^{\nu+\mu}(\mu+\nu+1)\,\Gamma(2\nu+\mu)} r^\mu C^\nu_\mu(\cos\vartheta) .$$

23. Neumannsche Reihen

In diesem Abschnitt ist $k = 1$ gesetzt.

Als (verallgemeinerte) Neumannsche Reihen werden in der Theorie der Besselfunktionen Reihen von der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-\nu} J_{\nu+n}(z)$$

bezeichnet[43]). Hiefür können wir nach 22.2a) auch schreiben

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n F_n^{\nu}(z, z) \;.$$

Der folgende Hauptsatz über Neumannsche Reihen folgt (für $\nu = 0$ oder $\Re\nu > 0$) leicht als Korollar zu den Sätzen III$_\nu$ und IV:

Satz V. *Jede in einem Kreise um* 0 *analytische Funktion kann in eine in jedem abgeschlossenen Teilbereich des Kreises gleichmäßig konvergente Neumannsche Reihe entwickelt werden.*

Beweis. Es sei $f(z)$ die zu entwickelnde im Kreise $\mathfrak{K}$ reguläre Funktion. Dann gestattet die nach Satz III$_\nu$ in $\mathfrak{K} \times \mathfrak{K}$ analytische Lösung

$$\Theta_\nu[f\,; z, z^*] \quad \text{von} \quad (D_\nu)$$

nach Satz IV eine Entwicklung nach B.-G.-Funktionen; $z = z^*$ gibt die Behauptung.

Der folgende Satz ist gelegentlich bei der Untersuchung spezieller Funktionen ebenfalls nützlich (vgl. 31.3).

Satz VI (*Entfaltungssatz*). *Ist die Neumannsche Reihe*

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n F_n^{\nu}(z, z) \tag{25}$$

in einem Kreise $\mathfrak{K}$ *konvergent, so konvergiert*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n F_n^{\nu}(z, z^*)$$

in $\mathfrak{K} \times \mathfrak{K}$ *und stellt dort die Funktion* $\Theta_\nu[g\,; z, z^*]$ *dar.*

Beweis. Der stetige Operator Θ_ν kann auf die in jedem abgeschlossenen Teilbereich von $\mathfrak{K}$ gleichmäßig konvergente Reihe gliedweise angewandt werden. Es ist aber

$$\Theta_\nu[F_n^{\nu}(z, z\,; k)\,; z, z^*] = F_n^{\nu}(z, z^*\,; k) \;.$$

3. Anwendungen auf spezielle Funktionen

Die hier verwendete Methode rechtfertigt einige allgemeine Bemerkungen.

Mit Truesdell[44]) halten wir es für wünschenswert, beim Studium spe-

[43]) *Watson*, l. c., S. 522 ff. *Neumann* betrachtete nur den Fall $\nu = 0$; die Untersuchung des allgemeinen Falles geht auf Gegenbauer zurück.

[44]) *Truesdell, E.*, An Essay toward an Unified Theory of Special Functions, Princeton 1948, S. 7, S. 157.

zieller Funktionen mit möglichst allgemeinen Methoden zu arbeiten und nicht jeden besonderen Satz mit einem besonderen Kunstgriff zu beweisen. Eine solche Methode besteht beispielsweise darin, Funktionen zu betrachten, die einer gewissen Funktionalgleichung genügen. Truesdell arbeitet in seinem Essay mit der sogenannten F-Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, \alpha) = F(t, \alpha + 1) \; .$$

Es ist von Interesse, seine Methode mit der hier verwendeten, Lösungen einer gewissen partiellen Differentialgleichung zu betrachten, zu vergleichen. Der Anwendungsbereich der F-Gleichung erstreckt sich, wie Truesdell gezeigt hat, über eine weite Klasse spezieller Funktionen, und die Methode liefert dort eine große Zahl übersichtlicher Resultate. Dafür ist ihre Leistungsfähigkeit im einzelnen beschränkt[45]). Mit einer speziellen Gleichung wie (d_ν) wird dagegen der Anwendungsbereich naturgemäß eingeschränkt; dafür kann sich die Methode in einzelnen Fällen als leistungsfähiger erweisen.

Eine andere Methode in der Theorie der speziellen Funktionen besteht darin, den Betrachtungen eine Funktionaltransformation zugrunde zu legen und von den Eigenschaften der Objektfunktionen auf die der Bildfunktionen zu schließen. Das klassische Beispiel hiefür bildet die Methode der Laplacetransformation. Doetsch, Erdelyi, Tricomi und viele andere Autoren haben gezeigt, wie diese für verschiedene Klassen spezieller Funktionen oft in überraschender Weise nutzbar gemacht werden kann. Auch unsere Methode kann von diesem funktionalanalytischen Gesichtspunkt aus verstanden werden. Die Transformation Ω_ν (mit $z^* = z$) hat beispielsweise die Eigenschaft, die Potenzen von z auf die Besselschen Funktionen abzubilden.

Die anerkannten, „modernen" Beweise von Sätzen über spezielle Funktionen[46]) erfolgen gewöhnlich unter strengem Verzicht auf jedes Argument aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen. Solche Argumente werden höchstens als heuristisches Prinzip gelten gelassen. Nun ist zwar zuzugeben, daß es physikalische Autoren auf diesem Gebiet gelegentlich an genügender Strenge fehlen lassen[47]). Anderseits waren aber die klassischen Autoren[48]) beim Aufstellen von Sätzen über spe-

[45]) Sie bietet, um nur ein Beispiel zu nennen, keine entscheidenden Vorteile beim Beweis der verschiedenen Additionstheoreme der Besselschen Funktionen.

[46]) *Watson*, l. c.; *Whittaker und Watson*, l. c.

[47]) vgl. *Sommerfeld*, Jahresbericht der Dtsch. Math. Ver. 21 (1913), S. 309—353 und die Kritik dieser Arbeit bei *Carslaw*, Proc. Lond. Math. Soc. (2) 13 (1914), S. 239.

[48]) zu denen wir etwa *C. Neumann*, *Stokes*, *Rayleigh*, *Sommerfeld* zählen.

zielle Funktionen oft gerade durch „physikalische", das heißt der Theorie der partiellen Differentialgleichungen entstammende Vorstellungen inspiriert[49]). Wir hoffen, mit den nachfolgenden Beispielen den Nachweis zu erbringen, daß es in einzelnen Fällen weder trivial noch unmöglich ist, solche Überlegungen auf eine feste Basis zu stellen.

31. Bessel-Gegenbauersche Reihen spezieller Funktionen

Gleichung (d_ν) kann in genau vier Koordinatensystemen, nämlich in cartesischen, parabolischen, elliptischen und Polarkoordinaten separiert werden. Die entsprechenden Lösungen sind bekannte Funktionen. Wir geben im folgenden ihre Entwicklungen nach Bessel-Gegenbauerschen Funktionen (B.-G.-Reihen) an, wobei wir uns im wesentlichen der beiden folgenden Methoden bedienen:

A) *Methode der erzeugenden Funktion.* Die zu entwickelnde Lösung sei $F(z, z^*)$. Man betrachtet die „erzeugende Funktion" der B.-G.-Reihe

$$F(z, 0) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m ;$$

nach den Sätzen III und IV ist die B.-G.-Reihe dann gegeben durch

$$\Omega_\nu\left[\sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m ; z, z^*\right] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{c_m^\nu} F_m(z, z^*) ,$$

wo c_m^ν die S. 27 erklärte Bedeutung hat.

B) *Entfaltungsmethode.* Es sei von der zu entwickelnden Funktion für $z^* = z$ die Neumannsche Reihe

$$F(z, z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m F_m^\nu(z, z)$$

bekannt. Nach Satz VI ist dann

$$F(z, z^*) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m F_m^\nu(z, z^*) .$$

31.1. Cartesische Koordinaten

Der Bernoullische Ansatz ergibt die im ganzen (x, y)-Raum reguläre Lösung

$$u(x, y) = (k y \sin \alpha)^{-\nu+\frac{1}{2}} \; J_{\nu-\frac{1}{2}}(k y \sin \alpha)\, e^{ikx \cos \alpha} \qquad (26)$$

[49]) Es wiederholt sich also hier, natürlich in viel kleinerem Maßstabe, die Geschichte des Dirichletschen Prinzips.

mit dem Separationsparameter α. Wird $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$ gesetzt, so wird u eine symmetrische Funktion von α und ϑ. In der B.-G.-Reihe

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n F_n(z, z^*)$$

muß, da

$$F_n^\nu(z, z^*) = \frac{C_n^\nu(\cos\vartheta)}{C_n^\nu(1)}\, k^{-\nu-n}\, r^{-\nu}\, J_{\nu+n}(kr)$$

nur durch den Faktor C_n^ν (cos) von ϑ abhängt, aus Symmetriegründen auch

$$a_n = C_n^\nu(\cos\alpha)\, a_n'$$

sein, wo a_n' von α unabhängig ist. Zur Berechnung von a_n' kann deshalb $\alpha = 0$ gesetzt werden. Die erzeugende Funktion ist dann

$$e^{\frac{ikz}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{ik}{2}\right)^n}{n!} z^n$$

und es ergibt sich demnach

$$\begin{aligned} a_n' &= \frac{\left(\frac{ik}{2}\right)^n}{n!\, c_n^\nu\, C_n^\nu(1)} \\ &= 2^\nu\, \Gamma(\nu)\, (ik)^n\, (\nu + n)\ , \end{aligned}$$

so daß die gesuchte Entwicklung lautet

$$\begin{aligned} &(kr\sin\alpha\sin\vartheta)^{-\nu+\frac{1}{2}}\quad J_{\nu-\frac{1}{2}}(kr\sin\alpha\sin\vartheta)\, e^{ikr\cos\alpha\cos\vartheta} \\ &= 2^\nu\, \Gamma(\nu) \sum_{n=0}^{\infty} (ik)^n (\nu + n)\, C_n^\nu(\cos\alpha)\, F_n(z, z^*; k)\ , \end{aligned}$$

oder, wenn die B.-G.-Funktion durch Besselsche und Gegenbauersche Funktionen ausgedrückt wird,

$$\begin{aligned} &(kr\sin\alpha\sin\vartheta)^{-\nu+\frac{1}{2}}\quad J_{\nu-\frac{1}{2}}\,(kr\sin\alpha\sin\vartheta)\, e^{ikr\cos\alpha\cos\vartheta} \\ &= 2^\nu\Gamma(\nu) \sum_{n=0}^{\infty} i^n\, (\nu + n)\, \frac{C_n^\nu(\cos\alpha)\, C_n^\nu(\cos\vartheta)}{C_n^\nu(1)}\, (kr)^{-\nu} J_{\nu+n}(kr)\ ^{50)}\ . \qquad (27) \end{aligned}$$

31.2. Parabolische Koordinaten

31.21. Werden in (d_ν) die durch

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2) \\ y &= \xi\,\eta \end{aligned}$$

[50]) *Watson*, l. c., S. 370, wo auch Spezialfälle der Entwicklung angegeben sind. Die Entwicklung wurde als Verallgemeinerung der Jacobi-Angerschen Entwicklung, in die sie für $\nu = 0$ und $\alpha = 0$ übergeht, von *Gegenbauer* angegeben. Physikalische Beweise für ganz- und halbzahliges ν gaben *Hobson* und *Sommerfeld*.

definierten parabolischen Koordinaten (ξ, η) eingeführt, so geht die Gleichung mit $u(x, y) = v(\xi, \eta)$ über in

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \frac{2\nu}{\xi} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{2\nu}{\eta} \frac{\partial v}{\partial \eta} + k^2 (\xi^2 + \eta^2) v = 0 . \tag{28}$$

Eine (im (x, y)-Raum) ganze Lösung dieser Gleichung ist, wie wir behaupten,

$$v(\xi, \eta) = (k\,\xi\eta)^{-\nu-\frac{1}{2}} M_{\frac{\mu}{4ik}, \frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}} (i\,k\,\xi^2)\, M_{\frac{\mu}{4ik}, \frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}} (-\,i\,k\,\eta^2) , \tag{29}$$

wo

$$M_{\kappa, \lambda}(z) = z^{\lambda+\frac{1}{2}} e^{-\frac{z}{2}} {}_1F_1 \begin{bmatrix} \lambda + \frac{1}{2} - \kappa \, ; \, z \\ 2\lambda + 1 \end{bmatrix} \tag{30}$$

die Whittakersche konfluente hypergeometrische Funktion erster Art ist [51]).

Wir weisen zunächst nach, daß (29) die Gleichung (28) befriedigt. Mit $v(\xi, \eta) = \Xi(\xi) H(\eta)$ ergibt (28) bei Einführung der Separationskonstanten μ für Ξ und H die beiden Gleichungen

$$\frac{d^2 \Xi}{d\xi^2} + \frac{2\nu}{\xi} \frac{d\Xi}{d\xi} + (k^2\,\xi^2 + \mu)\, \Xi = 0 ,$$

$$\frac{d^2 H}{d\eta^2} + \frac{2\nu}{\eta} \frac{dH}{d\eta} + (k^2 \eta^2 - \mu)\, H = 0 ,$$

die sich, wenn neue unabhängige Veränderliche $s = i k \xi^2$, $t = -\,i k \eta^2$ und durch

$$\Xi(\xi) = s^{-\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}} X(s) , \quad H(\eta) = t^{-\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}} Y(t)$$

neue abhängige Veränderliche X und Y eingeführt werden, beide in die Gleichung der Whittakerschen Funktionen

$$\frac{d^2 W}{dz^2} + \left\{ -\frac{1}{4} + \frac{\kappa}{z} - \frac{\frac{1}{4} - \lambda^2}{z^2} \right\} W = 0$$

transformieren, wo $W = X$ bzw. Y, $z = s$ bzw. t und

$$\kappa = \frac{\mu}{4ik} , \qquad \lambda = \frac{\nu}{2} - \frac{1}{4} \tag{31}$$

gesetzt ist.

Um weiter die Ganzheit von $v(\xi, \eta)$ als Funktion von x und y (oder, was damit gleichwertig ist, als Funktion von z und z^*) nachzuweisen,

---

[51]) *Whittaker und Watson*, l. c., S. 337 f.

bemerken wir zunächst, daß sich die Faktoren $z^{\lambda+\frac{1}{2}}$ in (30) mit dem Faktor $(k\xi\eta)^{-\nu-\frac{1}{2}}$ in $v(\xi, \eta)$ wegheben. Die beiden Exponentialfunktionen ergeben zusammen die ganze Funktion

$$e^{-\frac{ik}{2}(\xi^2-\eta^2)} = e^{-ikx} .$$

Es bleibt noch das Produkt der beiden ${}_1F_1$. Aus der Definition der parabolischen Koordinaten folgt

$$\begin{aligned} \xi^2 &= \quad x + \sqrt{x^2+y^2} = \tfrac{1}{2}(\sqrt{z} + \sqrt{z^*})^2 \\ \eta^2 &= -x + \sqrt{x^2+y^2} = \tfrac{1}{2}(\sqrt{z} - \sqrt{z^*})^2 \end{aligned} \tag{32}$$

Da jede ${}_1F_1$ einzeln eine ganze Funktion ihres Argumentes ist, haben wir nur zu zeigen, daß das Produkt

$${}_1F_1\begin{bmatrix} -\kappa+\lambda+\frac{1}{2};\ \frac{ik}{2}(\sqrt{z}+\sqrt{z^*})^2 \\ 2\lambda+1 \end{bmatrix} {}_1F_1\begin{bmatrix} -\kappa+\lambda+\frac{1}{2};\ \frac{ik}{2}\sqrt{z}+\sqrt{z^*})^2 \\ 2\lambda+1 \end{bmatrix}$$

wurzelfrei ist. Der allgemeine beim Ausmultiplizieren der beiden Reihen entstehende Summand ist aber von der Form

$$\text{const } \{(\sqrt{z}+\sqrt{z^*})^{2n}(\sqrt{z}-\sqrt{z^*})^{2m} + (\sqrt{z}+\sqrt{z^*})^{2m}(\sqrt{z}-\sqrt{z^*})^{2n}\} ,$$

oder mit $n = m + n',\ n' \geqq 0$,

$$\begin{aligned} &\text{const } \{(\sqrt{z}+\sqrt{z^*})(\sqrt{z}-\sqrt{z^*})\}^{2m}\{(\sqrt{z}+\sqrt{z^*})^{2n'} + (\sqrt{z}-\sqrt{z^*})^{2n'}\} \\ &\qquad = \text{const } (z-z^*)^{2m}\ \{z^{2n'} + \tbinom{2n'}{2} z^{2n'-2} z^{*2} + \cdots\} , \end{aligned}$$

also wurzelfrei. Die Ganzheit ist damit bewiesen.

31.22. Zur Berechnung der Koeffizienten der B.-G.-Reihe

$$V(z, z^*) = v(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n F_n(z, z^*)$$

bedienen wir uns der Methode der erzeugenden Funktion. Es ist

$$V(z, 0) = e^{-\frac{ikz}{2}}\left\{ {}_1F_1\begin{bmatrix} -\kappa+\lambda+\frac{1}{2};\ \frac{ikz}{2} \\ 2\lambda+1 \end{bmatrix}\right\}^2$$

oder wegen[52])

$$e^{-\frac{ikz}{2}}\,{}_1F_1\begin{bmatrix} -\kappa+\lambda+\frac{1}{2};\ \frac{ikz}{2} \\ 2\lambda+1 \end{bmatrix} = {}_1F_1\begin{bmatrix} \kappa+\lambda+\frac{1}{2};\ -\frac{ikz}{2} \\ 2\lambda+1 \end{bmatrix},$$

[52]) *Whittaker und Watson*, l. c.

$$V(z,0) = {}_1F_1\left[\begin{matrix}-\kappa+\lambda+\frac{1}{2};\frac{ikz}{2}\\ 2\lambda+1\end{matrix}\right]{}_1F_1\left[\begin{matrix}\kappa+\lambda+\frac{1}{2};-\frac{ikz}{2}\\ 2\lambda+1\end{matrix}\right]$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-\varkappa+\lambda+\frac{1}{2})_m}{(2\lambda+1)_m}\frac{\left(\frac{ikz}{2}\right)^m}{m!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\varkappa+\lambda+\frac{1}{2})_n}{(2\lambda+1)_n}\frac{\left(-\frac{ikz}{2}\right)^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{ikz}{2}\right)^n\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m(-\kappa+\lambda+\frac{1}{2})_m(\kappa+\lambda+\frac{1}{2})_{n-m}}{m!(n-m)!(2\lambda+1)_m(2\lambda+1)_{n-m}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{ikz}{2}\right)^n\frac{(\kappa+\lambda+\frac{1}{2})_n}{n!(2\lambda+1)_n}\,{}_3F_2\left[\begin{matrix}-2\lambda-n,\lambda-\kappa+\frac{1}{2},-n;\\ -\lambda-\kappa-n+\frac{1}{2},2\lambda+1\end{matrix}\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

mit

$$b_n = \left(-\frac{ik}{2}\right)^n\frac{(\lambda+\kappa+\frac{1}{2})_n}{n!\,(2\lambda+1)_n}\,{}_3F_2\left[\begin{matrix}-2\lambda-n,\lambda-\kappa+\frac{1}{2},-n;\\ -\lambda-\varkappa-n+\frac{1}{2},2\lambda+1\end{matrix}\right].$$

Es folgt also nach 31. A) (S. 32)

$$a_n = \frac{b_n}{c_n^\nu} = 2^\nu\,\Gamma(\nu)\,\frac{(n+\nu)(\lambda+\kappa+\frac{1}{2})_n\,(2\nu)_n}{(2\lambda+1)_n}\,\frac{(-ik)^n}{n!}\,{}_3F_2\,,$$

wo die Argumente der ${}_3F_2$ der Kürze halber weggelassen wurden. Die gesuchte Entwicklung lautet also, wenn noch gemäß (31) ν durch λ ausgedrückt wird,

$$(k\,\xi\,\eta)^{-2\lambda-1}\,M_{\kappa,\lambda}\,(ik\,\xi^2)\,M_{\kappa,\lambda}\,(-ik\,\eta^2) = 2^{2\lambda+\frac{1}{2}}\,\Gamma(2\lambda+\tfrac{1}{2})$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2\lambda+\frac{1}{2})(\lambda+\kappa+\frac{1}{2})_n(4\lambda+1)_n}{(2\lambda+1)_n}\frac{(-ik)^n}{n!}\,{}_3F_2\left[\begin{matrix}-2\lambda-n,\lambda-\kappa+\frac{1}{2},-n;\\ -\lambda-\kappa-n+\frac{1}{2},2\lambda+1\end{matrix}\right]$$

$$\times\,F_n^{2\lambda+\frac{1}{2}}(z,z^*;k)\,. \tag{33}$$

Werden die B.-G.-Funktionen als Produkte Besselscher und Gegenbauerscher Funktionen geschrieben und die parabolischen Koordinaten gemäß der aus (32) folgenden Beziehungen

$$\xi^2 = 2r\cos^2\frac{\vartheta}{2}\,,$$

$$\eta^2 = 2r\sin^2\frac{\vartheta}{2}$$

durch Polarkoordinaten ausgedrückt, so lautet die Entwicklung [53])

[53]) Entwicklungen einer einzelnen Whittakerschen Funktion in Besselreihen wurden angegeben von *Abramowitz*, J. Math. Phys. 29 (1951), S. 303—308; *Buchholz*, Math. Z. 53 (1950), S. 387—402; *Karlin*, J. Math. Phys. 28 (1949), S. 43—44; *Tricomi*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 26 (1947), S. 141—175. In allen diesen Fällen sind die Koeffizienten der

$$(kr\sin\vartheta)^{-2\lambda-1} M_{\kappa,\lambda}\left(2ikr\cos^2\frac{\vartheta}{2}\right) M_{\kappa,\lambda}\left(-2ikr\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{kr}\right)^{2\lambda+\frac{1}{2}} \Gamma(2\lambda+\tfrac{1}{2}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n (n+2\lambda+\frac{1}{2})(\lambda+\kappa+\frac{1}{2})_n}{(2\lambda+1)_n}$$

$$\times {}_3F_2\left[\begin{matrix}-2\lambda-n,\ \lambda-\kappa+\frac{1}{2},\ -n\,;\\ -\lambda-\kappa-n+\frac{1}{2},\ 2\lambda+1\end{matrix}\right] J_{2\lambda+\frac{1}{2}+n}(kr)\, C_n^{2\lambda+\frac{1}{2}}(\cos\vartheta)\,. \quad (33')$$

31.23. Spezialfälle [54])

31.231. Während sich die gewöhnliche hypergeometrische Reihe vom Argument 1, wenn sie konvergiert, gemäß der Gaußschen Formel

$${}_2F_1\left[\begin{matrix}a,\ b\,;\\ c\end{matrix}\right] = \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)} \quad (34)$$

stets durch Γ-Funktionen ausdrücken läßt, ist bei der Reihe

$${}_3F_2\left[\begin{matrix}a,\ b,\ c\,;\\ d,\ e\end{matrix}\right]$$

soweit bis heute bekannt ist, diese Darstellung nur möglich, wenn die Parameter gewisse Nebenbedingungen erfüllen. Eine solche Nebenbedingung ist beispielsweise

$$d = 1 + a - b\,, \qquad e = 1 + a - c \quad (35)$$

und es ist in diesem Fall [55])

$${}_3F_2\left[\begin{matrix}a,\ b,\ c\,;\\ d,\ e\end{matrix}\right] = \frac{\Gamma(1+\frac{1}{2}a)\,\Gamma(1+a-b)\,\Gamma(1+a-c)\,\Gamma(1+\frac{1}{2}a-b-c)}{\Gamma(1+a)\,\Gamma(1+\frac{1}{2}a-b)\,\Gamma(1+\frac{1}{2}a-c)\,\Gamma(1+a-b-c)}\,. \quad (36)$$

Die Bedingung (35) ist für die in (33) auftretende (und, da abbrechend, eo ipso konvergente) ${}_3F_2$ im Falle $\kappa = 0$ erfüllt. Wegen [56])

$$M_{0,\lambda}(z) = 2^{2\lambda} e^{-i\lambda\frac{1}{2}\pi}\,\Gamma(\lambda+1)\, z^{\frac{1}{2}} J_\lambda(\tfrac{1}{2}iz) \quad (37)$$

degeneriert dabei gleichzeitig die linke Seite zu einem Produkt Bessel-

Reihenentwicklungen nur entweder durch erzeugende Funktionen (wie bei *Buchholz* und *Tricomi*) oder durch Rekurrenzformeln (wie bei *Abramowitz* und *Karlin*) definiert. Unsere Entwicklung (33) dürfte neu sein.

[54]) Spezielle Fälle von Formeln mit vielen Parametern sind gewöhnlich nur dann von Interesse, wenn sich dabei gleichzeitig mehrere der darin enthaltenen Funktionen auf einfachere Funktionen reduzieren. Die hier angeführten Fälle sind von dieser Art.

[55]) *Bailey*, l. c., S. 13 ff. Reihen vom Typus ${}_3F_2$, die die Bedingungen (35) erfüllen, werden als „well-poised" bezeichnet.

[56]) *Whittaker und Watson*, l. c.

scher Funktionen. Auf der rechten Seite ergibt (36)[57])

$$
\begin{aligned}
&{}_3F_2\left[\begin{matrix}-n,\,-2\lambda-n,\,\lambda+\frac{1}{2};\\ -\lambda-n+\frac{1}{2},\,2\lambda+1\end{matrix}\right]\\
&=\frac{\Gamma(1-\frac{1}{2}n)\,\Gamma(\frac{1}{2}-\lambda-n)\,\Gamma(2\lambda+1)\,\Gamma(\frac{1}{2}+\lambda+\frac{1}{2}n)}{\Gamma(1-n)\,\Gamma(\frac{1}{2}-\lambda-\frac{1}{2}n)\,\Gamma(2\lambda+1+\frac{1}{2}n)\,\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}\\
&=\begin{cases}0, & n=2m+1,\\ (-1)^m\dfrac{(2m)!}{m!}\,\dfrac{\Gamma(2\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}\,\dfrac{\Gamma(\frac{1}{2}-\lambda-2m)\,\Gamma(\frac{1}{2}+\lambda+m)}{\Gamma(\frac{1}{2}-\lambda-m)\,\Gamma(2\lambda+1+m)}, & n=2m,\quad m=0,1,2,\ldots\end{cases}
\end{aligned}
$$

Damit wird

$$
\begin{aligned}
a_{2m+1}&=0\,,\\
a_{2m}&=\sqrt{2\pi}\,\frac{\Gamma(2\lambda+1)}{[\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})]^2}\,\frac{(2\lambda+\frac{1}{2}+2m)\,\Gamma(\frac{1}{2}+\lambda+m)\,\Gamma(2\lambda+\frac{1}{2}+m)}{\Gamma(1+\lambda+m)}\,\frac{(-k^2)^m}{m!}
\end{aligned}
$$

und man erhält die ebenfalls neue Entwicklung

$$
\begin{aligned}
&(k\xi\eta)^{-2\lambda}\,J_\lambda(\tfrac{1}{2}k\xi^2)\,J_\lambda(\tfrac{1}{2}k\eta^2)=\frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\Gamma(2\lambda+1)}\\
&\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2\lambda+\frac{1}{2}+2n)\,\Gamma(\frac{1}{2}+\lambda+n)\,\Gamma(2\lambda+\frac{1}{2}+n)}{\Gamma(1+\lambda+n)}\,\frac{(-k^2)^n}{n!}\,F_{2n}^{2\lambda+\frac{1}{2}}(z,z^*;k)
\end{aligned}
$$

oder mit Berücksichtigung von (21) unter Verwendung von Polarkoordinaten

$$
\begin{aligned}
&(kr\sin\vartheta)^{-2\lambda}\,J_\lambda\left(kr\cos^2\frac{\vartheta}{2}\right)J_\lambda\left(kr\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)=\frac{\Gamma(2\lambda+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}\,(kr)^{2\lambda+\frac{1}{2}}}\\
&\times\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)_m\frac{(-1)^m(2\lambda+\frac{1}{2}+2m)\,\Gamma(\frac{1}{2}+\lambda+m)}{\Gamma(1+\lambda+m)\,\Gamma(2\lambda+1+m)}\,J_{2\lambda+\frac{1}{2}+2m}(kr)\,C_{2m}^{2\lambda+\frac{1}{2}}(\cos\vartheta). \qquad (38)
\end{aligned}
$$

31.232. Wird in (33) der Grenzübergang $k\to 0$ vollzogen, so entsteht auf der linken Seite wegen

$$
\begin{aligned}
\lim_{k\to 0}{}_1F_1\left[\begin{matrix}\lambda+\frac{1}{2}-\frac{\mu}{4ik};\,ik\xi^2\\ 2\lambda+1\end{matrix}\right]&=\lim_{k\to 0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\lambda+\frac{1}{2}-\frac{\mu}{4ik}\right)_n}{(2\lambda+1)_n}\,\frac{(ik\xi^2)^n}{n!}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{\mu\xi^2}{4}\right)^n}{n!\,(2\lambda+1)_n}\\
&=\Gamma(2\lambda+1)\left(\frac{\sqrt{\mu}\,\xi}{2}\right)^{-2\lambda}J_{2\lambda}(\sqrt{\mu}\,\xi)
\end{aligned}
$$

[57]) Bei der Anwendung von (36) muß vorübergehend n durch $n+\varepsilon$ ersetzt und der Grenzübergang $\varepsilon\to 0$ vollzogen werden.

und

$$\lim_{k\to 0} {}_1F_1\left[\begin{matrix}\lambda+\frac{1}{2}-\frac{\mu}{4ik};\,-ik\eta^2\\ 2\lambda+1\end{matrix}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{\mu\eta^2}{4}\right)^n}{n!\,(2\lambda+1)_n}$$

$$=\Gamma(2\lambda+1)\left(\frac{\sqrt{\mu}\,\eta}{2}\right)^{-2\lambda} I_{2\lambda}(\sqrt{\mu}\,\eta)$$

das von (38) verschiedene Produkt

$$[\Gamma(2\lambda+1)]^2\left(\frac{\mu\,\xi\,\eta}{4}\right)^{-2\lambda} J_{2\lambda}(\sqrt{\mu}\,\xi)\,I_{2\lambda}(\sqrt{\mu}\,\eta)$$

einer gewöhnlichen und einer modifizierten Besselschen Funktion. Auf der rechten Seite ergibt sich unter Benützung der Gaußschen Formel (34)

$$\lim_{k\to 0} a_n = 2^{2\lambda+\frac{1}{2}}\,\Gamma(2\lambda+\tfrac{1}{2})\,\frac{(n+2\lambda+\frac{1}{2})(4\lambda+1)_n}{(2\lambda+1)_n\,n!}$$

$$\times\lim_{k\to 0}\left(\lambda+\tfrac{1}{2}+\frac{\mu}{4ik}\right)_n(-ik)^n\,{}_3F_2\left[\begin{matrix}-n,-2\lambda-n,\lambda+\frac{1}{2}-\frac{\mu}{4ik}\\ -\frac{\mu}{4ik}-\lambda-n+\frac{1}{2},2\lambda+1\end{matrix}\right]$$

$$=2^{2\lambda+\frac{1}{2}}\,\Gamma(2\lambda+\tfrac{1}{2})\,\frac{(n+2\lambda+\frac{1}{2})(4\lambda+1)_n}{(2\lambda+1)_n}\,\frac{\left(-\frac{\mu}{4}\right)^n}{n!}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}-n,-2\lambda-n;\\ 2\lambda+1\end{matrix}\right]$$

$$=2^{2\lambda+\frac{1}{2}}\,\Gamma(2\lambda+1)\,\frac{\Gamma(2\lambda+\frac{3}{2}+n)}{\Gamma(2\lambda+1+n)}\,\frac{(-\mu)^n}{n!}\,.$$

Damit erhalten wir die Entwicklung

$$\left(\frac{\mu\xi\eta}{4}\right)^{-2\lambda} J_{2\lambda}(\sqrt{\mu}\xi)\,I_{2\lambda}(\sqrt{\mu}\,\eta)=\frac{2^{2\lambda+\frac{1}{2}}}{\Gamma(2\lambda+1)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(2\lambda+\frac{3}{2}+n)}{\Gamma(2\lambda+1+n)}\,\frac{(-\mu)^n}{n!}\,F_n^{2\lambda+\frac{1}{2}}(z,z^*;0)\,;$$

sie kann unter Verwendung von Polarkoordinaten und 22.3d) mit $\mu=1$ (was keinen Verlust an Allgemeinheit bedeutet) auch wie folgt geschrieben werden:

$$\left(\frac{r\sin\vartheta}{4}\right)^{-2\lambda} J_{2\lambda}\left(\sqrt{2r}\cos\frac{\vartheta}{2}\right) I_{2\lambda}\left(\sqrt{2r}\sin\frac{\vartheta}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{[\Gamma(2\lambda+1)]^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{r}{2}\right)^n}{(2\lambda+1)_n(4\lambda+1)_n}\,C_n^{2\lambda+\frac{1}{2}}(\cos\vartheta)\;. \tag{39}$$

Hievon ist der Spezialfall $\lambda=0$

$$J_0\left(\sqrt{2r}\cos\frac{\vartheta}{2}\right) I_0\left(\sqrt{2r}\sin\frac{\vartheta}{2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{r}{2}\right)^n}{(n!)^2}\,P_n(\cos\vartheta)$$

angeführt (aber nicht bewiesen) bei Truesdell[58]); aber auch die allgemeine Formel (39) ist nicht neu, sondern ihrerseits ein Spezialfall der Schläflischen Potenzreihenentwicklung des Produktes zweier Besselfunktionen von nicht notwendig gleicher Ordnung[59]).

31.233. Im Falle $\kappa = \lambda + \frac{1}{2}$ reduzieren sich die konfluenten hypergeometrischen Reihen in (30) auf 1, und es ist daher

$$v(\xi, \eta) = e^{-\frac{ik}{2}(\xi^2-\eta^2)} = e^{-ikx} .$$

Wegen der Eindeutigkeit der B.-G.-Reihe muß sich daher (33) auf die Gegenbauersche Verallgemeinerung (Fall $\alpha = 0$ in (27)) der Jacobi-Angerschen Reihe reduzieren. In der Tat erhalten wir mit $2\lambda + \frac{1}{2} = \nu$

$$\begin{aligned} a_n &= 2^\nu\, \Gamma(\nu) \frac{(n+\nu)(\nu+\frac{1}{2})_n (2\nu)_n}{(\nu+\frac{1}{2})_n} \frac{(-ik)^n}{n!}\, {}_3F_2\left[\begin{matrix} -n,\, 0,\, \frac{1}{2}-\nu-n\,; \\ -2\lambda-n,\, 2\lambda+1 \end{matrix}\right] \\ &= 2^\nu\, \Gamma(\nu)(n+\nu)(2\nu)_n \frac{(-ik)^n}{n!} \end{aligned}$$

und damit wieder die bekannte Gegenbauersche Entwicklung

$$e^{-ikx} = 2^\nu\, (kr)^{-\nu}\, \Gamma(\nu) \sum_{n=0}^{\infty} (n+\nu)\, i^{-n}\, J_{\nu+n}(kr)\, C_n^\nu(\cos\vartheta) .$$

31.234. *Produkte Hermitescher Polynome.* Für Für $\lambda = -\frac{1}{4}$ bzw. $\lambda = +\frac{1}{4}$ und $\kappa = \lambda + \frac{1}{2} + n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ ist[60])

$$M_{n+\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}}(z) = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(\frac{1}{2})_n} z^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}z} He_{2n}(2z) ,$$

$$M_{n+\frac{3}{4}, \frac{1}{4}}(z) = \frac{(-1)^n}{2^{2n+\frac{3}{2}}(\frac{1}{2})_{n+1}} z^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}z} He_{2n+1}(2z)$$

wo

$$He_n(z) = (-1)^n e^{\frac{1}{2}z^2} \frac{d^n}{dz^n}(e^{-\frac{1}{2}z^2})$$

das n-te Hermitesche Polynom bedeutet. Für die gleichen Werte der Parameter reduzieren sich gemäß 22.2b) in den B.-G.-Funktionen die Gegenbauerschen Polynome auf trigonometrische Funktionen. Drückt man die parabolischen Koordinaten durch Polarkoordinaten aus und beachtet man

$$\lim_{\nu \to 0} \frac{(m+\nu)\, \Gamma(2\nu+m)\, \Gamma(\nu)}{\Gamma(2\nu)} = \varepsilon_m\, m!\,[61]) ,$$

[58]) *Truesdell*, l. c., S. 2; die dortige Formel enthält einen Druckfehler.

[59]) *Watson*, l. c., S. 148.

[60]) *Magnus und Oberhettinger*, l. c., S. 105 f.

[61]) ε_m = Neumannsche Zahl $= \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 2, & m = 1, 2, \ldots \end{cases}$

so ergeben sich aus (33′) die beiden speziellen B.-G.-Entwicklungen

$$e^{-ikr\cos\vartheta}\, He_{2n}\left(2\sqrt{ikr}\cos\frac{\vartheta}{2}\right) He_{2n}\left(2\sqrt{-ikr}\sin\frac{\vartheta}{2}\right)$$

$$= \frac{(2n)!}{n!}\sum_{m=0}^{\infty}(-i)^m \varepsilon_m(\tfrac{1}{2}+m)_n\, {}_3F_2\left[\begin{matrix}-m, & -n, & \tfrac{1}{2}-m\,; \\ -m-n+\tfrac{1}{2}, & \tfrac{1}{2} & \end{matrix}\right] J_m(kr)\cos m\vartheta\,,$$

$$e^{-ikr\cos\vartheta}\, He_{2n+1}\left(2\sqrt{ikr}\cos\frac{\vartheta}{2}\right) He_{2n+1}\left(2\sqrt{-ikr}\sin\frac{\vartheta}{2}\right)$$

$$= 2\,\frac{(2n+2)!}{(n+1)!}\sum_{m=1}^{\infty}(-i)^{m-1}(\tfrac{1}{2}+m)_r\, {}_3F_2\left[\begin{matrix}-m+1, -n, \tfrac{1}{2}-m\,; \\ -m-n+\tfrac{1}{2},\ \tfrac{3}{2}\end{matrix}\right] J_m(kr)\sin m\vartheta\,,$$

aus deren erster für $n = 0$ wieder die Jacobi-Angersche Reihe hervorgeht.

31.235. *Produkte Laguerrescher Polynome.* Für $\lambda = 0$ ergeben sich aus $M_{\kappa,\lambda}(z)$ die Laguerreschen Funktionen im engern Sinn[62])

$$L_\mu(z) = z^{-\frac{1}{2}}\, e^{\frac{1}{2}z}\, M_{\frac{1}{2}+\mu,\,0}(z)\ ,$$

die für $\mu = m = 0, 1, 2, \ldots$ in die Laguerreschen Polynome übergehen. Gleichzeitig reduzieren sich gemäß 22.2b) in der B.-G.-Entwicklung die Gegenbauerschen Polynome auf Legendresche Polynome, und es ergibt sich aus (33′) die Entwicklung

$$e^{-ikr\cos\vartheta}\, L_\mu\left(2ikr\cos^2\frac{\vartheta}{2}\right) L_\mu\left(-2ikr\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi}{kr}}\sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n\,\frac{(n+\frac{1}{2})(\mu+1)_n}{n!}\, {}_3F_2\left[\begin{matrix}-n, -n, -\mu\,; \\ -n-\mu,\ 1\end{matrix}\right] J_{\frac{1}{2}+n}(kr)\, P_n(\cos\vartheta)\,.$$

Sie berührt sich bei $\mu = 0$ mit der Gegenbauerschen Entwicklung (27), wenn dort $\nu = \frac{1}{2}$, $\alpha = 0$ gesetzt wird; ein Spezialfall, der übrigens schon vor Gegenbauer von Bauer[63]) gefunden worden war.

31.236. Obwohl sich dadurch keine bedeutenden Vereinfachungen ergeben, sei wegen ihres physikalischen Interesses[64]) schließlich noch die sich aus (33′) durch $\vartheta = 0$ ergebende Neumannsche Reihe einer einzelnen Whittakerschen Funktion angeführt. Wegen $C_n^\nu(1) = (2\nu)_n/n\,!$ (oder

[62]) *Magnus und Oberhettinger*, l. c., S. 124.

[63]) J. reine angew. Math. 56 (1859), S. 104—106.

[64]) Die Funktion $z^{-\lambda-\frac{1}{2}} M_{\kappa,\lambda}(z)$ wird in der angelsächsischen Literatur als „Coulomb Wave Function“ bezeichnet; sie hängt mit den Lösungen der Schrödingergleichung im Falle des Coulombpotentials zusammen. Vgl. die Literaturangaben in der in [53]) zitierten Arbeit von *Abramowitz*.

auch aus (33) mit Berücksichtigung von 22.2a)) ergibt sich

$$(2ikr)^{-\lambda-\frac{1}{2}} M_{\kappa,\lambda}(2ikr) = \left(\frac{2}{kr}\right)^{2\lambda+\frac{1}{2}} \Gamma(2\lambda+\tfrac{1}{2})$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n (n+2\lambda+\frac{1}{2})(\lambda+\kappa+\frac{1}{2})_n (4\lambda+1)_n}{n!\,(2\lambda+1)_n} \, {}_3F_2\left[\begin{matrix}-2\lambda-n, \lambda-\kappa+\frac{1}{2}, -n\,; \\ -\lambda-\kappa-n+\frac{1}{2}, 2\lambda+1\end{matrix}\right] J_{2\lambda+\frac{1}{2}+n}(kr).$$

31.3 Elliptische Koordinaten

31.31. Durch Einführung der durch

$$x = h \operatorname{Cos} \xi \cos \eta$$
$$y = h \operatorname{Sin} \xi \sin \eta$$

($h = \text{const}$) definierten elliptischen Koordinaten (ξ, η) geht (d_ν) mit $u(x, y) = v(\xi, \eta)$[65]) in die separierbare Gleichung

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + 2\nu \operatorname{Ctg} \xi \frac{\partial v}{\partial \xi} + 2\nu \operatorname{ctg} \eta \frac{\partial v}{\partial \eta} + k^2 h^2 (\operatorname{Cos}^2 \xi - \cos^2 \eta)\, v = 0$$

über. Sie ergibt mit dem Ansatz

$$v(\xi, \eta) = \Xi(\xi) H(\eta)$$

für Ξ und H die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{d^2 \Xi}{d\xi^2} + 2\nu \operatorname{Ctg} \xi \frac{d\Xi}{d\xi} - (a - 2q \operatorname{Cos} 2\xi)\, \Xi = 0\,, \tag{40}$$

$$\frac{d^2 H}{d\eta^2} + 2\nu \operatorname{ctg} \eta \frac{dH}{d\eta} + (a - 2q \cos 2\eta)\, H = 0\,, \tag{41}$$

wo $q = \frac{1}{4} k^2 h^2$ gesetzt ist und a einen Separationsparameter bedeutet. Ihre allgemeinen Lösungen sind die sogenannten Sphäroidfunktionen. Für diese Funktionen haben sich noch keine einheitlichen Bezeichnungen eingebürgert und es sind noch nicht alle zu ihrer Theorie gehörigen Grundprobleme abgeklärt[66]). Gut untersucht sind dagegen die Spezialfälle $\nu = 0$ und $\nu = 1$, die auf Mathieusche Funktionen führen. Um Weitläufigkeiten zu vermeiden, beschränken wir uns auf diese beiden Fälle. Wir verwenden in diesem Abschnitt durchgehend die Bezeichnungen von McLachlan[67]).

---

[65]) Eine Verwechslung mit den Bezeichnungen von 31.2 ist wohl nicht zu befürchten.

[66]) Eine Übersicht über die bis heute bekannten Resultate gibt *J. Meixner*, Klassifikation, Bezeichnung und Eigenschaften der Sphäroidfunktionen, Math. Nachr. 5 (1951), S. 1—18.

[67]) Theory and Application of Mathieu Functions, Oxford 1947.

Wir befassen uns hier nur mit den in der ganzen Ebene regulären Lösungen von (d_ν). Diese Lösungen müssen in η notwendig periodisch sein. Zu gegebenem q besitzt (41) (mit $\nu = 0$) periodische Lösungen mit der Periode 2π nur, wenn a gewisse diskrete Werte $a_0, a_1, \ldots; b_1, b_2, \ldots$ annimmt. Die zugehörigen Lösungen werden mit $ce_n(\eta, q)$ bzw. $se_n(\eta, q)$ bezeichnet; sie sind für jedes q ganze Funktionen von η und besitzen Fourierentwicklungen der Form

$$ce_{2n}(\eta, q) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{(2n)} \cos 2r\,\eta$$

$$ce_{2n+1}(\eta, q) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r+1}^{(2n+1)} \cos (2r+1)\,\eta$$

$$se_{2n+1}(\eta, q) = \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+1}^{(2n+1)} \sin (2r+1)\,\eta$$

$$se_{2n+2}(\eta, q) = \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+2}^{(2n+2)} \sin (2r+2)\,\eta, \quad n = 0, 1, \ldots ,$$

wo die Koeffizienten A und B wohlbestimmte (und wohltabulierte) Funktionen von q bedeuten. Zugehörige (das heißt zu gleichen Werten von q und a gehörige) Lösungen von (40) sind, wie man durch Variabelntransformation leicht sieht, die Funktionen

$$Ce_n(\xi, q) = ce_n(i\,\xi, q), \qquad n = 0, 1, \ldots ,$$

und

$$Se_n(\xi, q) = -\,i\, se_n(i\,\xi, q), \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Ganze Lösungen von (d_0) in elliptischen Koordinaten sind daher die Produkte

$$v_n(x, y) = Ce_n(\xi, q)\, ce_n(\eta, q), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{42}$$

und

$$w_n(x, y) = Se_n(\xi, q)\, se_n(\eta, q), \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{43}$$

31.32. Wir berechnen die B.-G.-Entwicklungen dieser Funktionen mit der Entfaltungsmethode (S. 266). Die Funktionen v_n und w_n müssen dabei gesondert betrachtet werden.

31.321. Entwicklung von $v_n(x, y)$. Auf $y = 0$ ist $\eta = 0$ und daher

$$v_n(x, 0) = Ce_n(\xi, q)\, ce_n(0, q), \qquad x = h \operatorname{Cos} \xi .$$

Die Neumannsche Reihe von $Ce_n(\xi, q)$ kann auf elementarem Wege gewonnen werden[68]) und lautet

$$Ce_{2n}(\xi, q) = \frac{ce_{2n}(\frac{1}{2}\pi, q)}{A_0^{(2n)}} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r}^{(2n)} J_{2r}(kh \operatorname{Cos} \xi) ,$$

$$Ce_{2n+1}(\xi, q) = -\frac{2ce'_{2n+1}(\frac{1}{2}\pi, q)}{kh A_1^{(2n+1)}} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r+1}^{(2n+1)} J_{2r+1}(kh \operatorname{Cos} \xi) .$$

Der Entfaltungssatz (Satz VI) gibt unmittelbar

$$Ce_{2n}(\xi, q)\, ce_{2n}(\eta, q) = \frac{ce_{2n}(\frac{1}{2}\pi, q)\, ce_{2n}(0, q)}{A_0^{(2n)}} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r}^{(2n)} J_{2r}(kr) \cos 2r\vartheta , \tag{44}$$

$$Ce_{2n+1}(\xi, q)\, ce_{2n+1}(\eta, q) = -\frac{2ce'_{2n+1}(\frac{1}{2}\pi, q)\, ce_{2n+1}(0, q)}{hk A_1^{(2n+1)}} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r+1}^{(2n+1)} J_{2r+1}(kr) \cos(2r+1)\vartheta. \tag{45}$$

31.322. *Entwicklung der* $w_n(x, y)$. Die Funktionen $w_n(x, y)$ sind in η und damit y ungerade und unterwerfen sich damit nicht den angegebenen Entwicklungssätzen über die Gleichung (d_0). Dagegen ist die Funktion

$$\overline{w}_n(x, y) = \frac{1}{y} w_n(x, y) = \frac{Se_n(\xi, q)\, se_n(\eta, q)}{h \operatorname{Sin} \xi \sin \eta}$$

eine bei $y = 0$ reguläre in y gerade Lösung von (d_1). Zur Anwendung des Entfaltungssatzes haben wir wieder zunächst die Neumannreihe (mit dem Parameter $\nu = 1$) von

$$\overline{w}_n(x, 0) = \frac{Se_n(\xi, q)}{h \operatorname{Sin} \xi} se'_n(0, q)$$

zu gewinnen. Unter Anwendung elementarer Methoden[68]) findet man

$$\frac{Se_{2n+1}(\xi, q)}{h \operatorname{Sin} \xi} = \frac{2se_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)}{h B_1^{(2n+1)}} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r (2r+1) B_{2r+1}^{(2n+1)} \frac{J_{2r+1}(kh \operatorname{Cos} \xi)}{kh \operatorname{Cos} \xi} ,$$

$$\frac{Se_{2n+2}(\xi, q)}{h \operatorname{Sin} \xi} = \frac{4se'_{2n+1}(0, q)}{h^2 k B_2^{(2n+2)}} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r (2r+2) B_{2r+2}^{(2n+2)} \frac{J_{2r+2}(kh \operatorname{Cos} \xi)}{kh \operatorname{Cos} \xi} ,$$

und damit durch Entfaltung zunächst für $\overline{w}_n(x, y)$ wegen 22.2b)

$$\frac{Se_{2n+1}(\xi, q)\, se_{2n+1}(\eta, q)}{h \operatorname{Sin} \xi \sin \eta} = \frac{2se_{2n+1}(\frac{1}{2}\pi, q)\, se'_{2n+1}(0, q)}{h B_1^{(2n+1)}}$$

$$\times \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r (2r+1) B_{2r+1}^{(2n+1)} \frac{J_{2r+1}(kr)}{kr} \frac{\sin(2r+1)\vartheta}{(2r+1)\sin\vartheta} ,$$

---

[68]) *McLachlan*, l. c., S. 158 f.

$$\frac{Se_{2n+2}(\xi, q)\, se_{2n+2}(\eta, q)}{h \operatorname{Sin} \xi \sin \eta} = \frac{4[se'_{2n+2}(0, q)]^2}{h^2 k B_2^{(2n+2)}}$$

$$\times \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r (2r+2) B_{2r+2}^{(2n+2)} \frac{J_{2r+2}(kr)}{kr} \frac{\sin(2r+2)\vartheta}{(2r+2)\sin\vartheta}$$

und hieraus wegen $h \operatorname{Sin} \xi \sin \eta = r \sin \vartheta$ für $w_n(x, y)$

$$Se_{2n+1}(\xi, q)\, se_{2n+1}(\eta, q) = \frac{2se_{2n+1}(\frac{1}{2}\pi, q)\, se_{2n+1}(0, q)}{h k B_1^{(2n+1)}}$$

$$\times \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r B_{2r+1}^{(2n+1)} J_{2r+1}(kr) \sin(2r+1)\vartheta\,, \tag{46}$$

$$Se_{2n+2}(\xi, q)\, se_{2n+2}(\eta, q) = \frac{4[se'_{2n+2}(0, q)]^2}{h^2 k^2 B_2^{(2n+2)}}$$

$$\times \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r B_{2r+2}^{(2n+2)} J_{2r+2}(kr) \sin(2r+2)\vartheta\,. \tag{47}$$

Wir haben damit die vier bekannten Reihenentwicklungen (44), (45), (46) und (47), die in der Theorie der Mathieuschen Funktionen gewöhnlich mit Hilfe der von diesen Funktionen befriedigten Integralgleichungen (von Whittaker) bewiesen werden, aus unseren allgemeinen wellenfunktionentheoretischen Prinzipien hergeleitet.

31.4. Polarkoordinaten

Da (D_ν) gegenüber den Translationen $z' = z + \zeta$, $z^{*\prime} = z^* + \zeta$ invariant ist, ist mit der schon in 22.1 als Normallösung in Polarkoordinaten gewonnenen B.-G.-Funktion $F_\mu^\nu(z, z^*)$ auch $F_\mu^\nu(z + \zeta, z^* + \zeta)$ eine Lösung von (D_ν). Setzen wir $|\arg \zeta| < \pi$ voraus, so ist diese Lösung in der Umgebung von $z = z^* = 0$ regulär und kann also daselbst in eine B.-G.-Reihe entwickelt werden. Diese Reihe kann als ein allgemeines Additionstheorem für Besselsche Funktionen angesehen werden; sie enthält, wie sich zeigen wird, als Spezialfälle die Additionstheoreme von Graf-Sommerfeld und von Gegenbauer sowie die sogenannten Multiplikationstheoreme.

Zur Entlastung unserer Formeln betrachten wir die Fälle $k = 0$ und $k = 1$, auf die sich der allgemeine Fall zurückführen läßt, gesondert. Wir bedienen uns der Methode der erzeugenden Funktion.

31.41. $k = 0$. Aus der Definition (22) folgt

$$F_\mu^\nu(z+\zeta, z^*+\zeta; 0) = \frac{[(z+\zeta)(z^*+\zeta)]^{\frac{1}{2}\mu}}{2^{\nu+\mu}\,\Gamma(\nu+\mu+1)}\, {}_2F_1\left[\begin{matrix} -\mu, \mu+2\nu; -\dfrac{(\sqrt{z+\zeta}-\sqrt{z^*+\zeta})^2}{4\sqrt{(z+\zeta)(z^*+\zeta)}} \\ \nu+\frac{1}{2} \end{matrix}\right]$$

und die erzeugende Funktion ist daher

$$F_\mu^\nu(z+\zeta,\ \zeta;\ 0) = \frac{[(z+\zeta)\zeta]^{\frac{1}{2}\mu}}{2^{\nu+\mu}\,\Gamma(\nu+\mu+1)}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}-\mu,\ \mu+2\nu;\ -\dfrac{(\sqrt{z+\zeta}-\sqrt{\zeta})^2}{4\sqrt{(z+\zeta)\,\zeta}}\\ \nu+\frac{1}{2}\end{matrix}\right]$$

Unter Verwendung zweier quadratischer Transformationen der hypergeometrischen Reihe[69]) gewinnen wir hieraus

$$F_\mu^\nu(z+\zeta,\ \zeta;\ 0) = \frac{\zeta^\mu\left(1+\frac{z}{\zeta}\right)^{\frac{1}{2}\mu}}{2^{\nu+\mu}\Gamma(\nu+\mu+1)}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}-\dfrac{\mu}{2},\ \dfrac{1-\mu}{2};\ \dfrac{\left(\frac{z}{\zeta}\right)^2}{4\left(1+\frac{z}{\zeta}\right)}\\ \nu+\frac{1}{2}\end{matrix}\right]$$

$$= \frac{\zeta^\mu}{2^{\nu+\mu}\Gamma(\nu+\mu+1)}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}-\mu,\ \nu;\ -\dfrac{z}{\zeta}\\ 2\nu\end{matrix}\right] \tag{48}$$

Gliedweise Anwendung von Ω_ν (mit $k=0$) ergibt die Entwicklung

$$F_\mu^\nu(z+\zeta, z^*+\zeta; 0) = \frac{\left(\frac{\zeta}{2}\right)^\mu}{\Gamma(\nu+\mu+1)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\mu)_n\Gamma(\nu+n+1)}{n!}\left(\frac{2}{\zeta}\right)^n F_n^\nu(z, z^*; 0)$$

oder in reeller Schreibweise, wenn wir in Anlehnung an Watson die geometrisch leicht verständlichen Abkürzungen[70])

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\omega} &= \sqrt{(z+\zeta)(z^*+\zeta)} = \sqrt{\zeta^2+2\zeta r\cos\vartheta+r^2}\ ,\\ \cos\psi &= \frac{r\cos\vartheta+\zeta}{\tilde{\omega}}\end{aligned}\right\} \tag{49}$$

einführen,

$$\frac{\Gamma(\mu+1)\,\Gamma(2\nu)}{\Gamma(2\nu+\mu)}\,\tilde{\omega}^\mu C_\mu^\nu(\cos\psi) = \zeta^\mu\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\mu)_n}{(2\nu)_n}\left(-\frac{r}{\zeta}\right)^n C_n^\nu(\cos\vartheta)\ . \tag{50}$$

Da (48) für $|z|<|\zeta|$ analytisch ist, konvergiert diese Entwicklung für $|z|<|\zeta|$, $|z^*|<|\zeta|$ oder $|r\,e^{\pm i\vartheta}|<|\zeta|$. Sie geht im speziellen Fall $\mu=-2\nu$ und mit $t=-\dfrac{r}{\zeta}$ in die bekanntlich für beliebige Werte von ν gültige, gewöhnlich zur Definition der Gegenbauerschen Polynome benutzte Entwicklung

$$(1-2t\cos\vartheta+t^2)^{-\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n C_n^\nu(\cos\vartheta) \tag{51}$$

über.

---

[69]) *Kummer*, l. c.

[70]) *Watson*, l. c., S. 360. Die Watsonschen Größen $\tilde{\omega}$ und ψ sind identisch mit den unsrigen, wenn dort $Z=\zeta$, $z=r$ und $\varphi=\pi-\vartheta$ gesetzt wird. Zur geometrischen Illustration vgl. Fig. 28 von Watsons Treatise.

31.42. $k = 1$. Nach (22) ist die erzeugende Funktion von

$$F_\mu^\nu(z+\zeta, z^*+\zeta; 1)$$

gegeben durch

$$F_\mu^\nu(z+\zeta,\zeta;1)$$
$$=\frac{[(z+\zeta)\zeta]^{\frac{1}{2}\mu}}{2^{\nu+\mu}\Gamma(\nu+\mu+1)}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}-\mu,\mu+2\nu;-\dfrac{(\sqrt{z+\zeta}-\sqrt{\zeta})^2}{4\sqrt{(z+\zeta)\zeta}}\\ \nu+\frac{1}{2}\end{matrix}\right]{}_0F_1\left[\nu+\mu+1;-\frac{(z+\zeta)\zeta}{4}\right].$$

Wir berechnen die Koeffizienten ihrer Taylorreihe durch Multiplikation der Taylorreihen der beiden Faktoren $[(z+\zeta)\zeta]^{\frac{1}{2}\mu}{}_2F_1$ und ${}_0F_1$, wobei wir für den ersten Faktor auf das im vorhergehenden Abschnitt gefundene Resultat zurückgreifen können. Für den zweiten Faktor ergibt eine elementare Reihentransformation

$$\frac{1}{\Gamma(\nu+\mu+1)}\,{}_0F_1\left[\nu+\mu+1;-\frac{(z+\zeta)\zeta}{4}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left[-\frac{\zeta(z+\zeta)}{4}\right]^n}{n!\,\Gamma(\nu+\mu+n+1)}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-\frac{1}{4})^n z^m\zeta^{2n-m}}{m!\,(n-m)!\,\Gamma(\nu+\mu+n+1)}$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\frac{1}{4})^{k+m}\zeta^{2k}(\zeta z)^m}{m!\,k!\,\Gamma(\nu+\mu+k+m+1)}$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{\zeta z}{4}\right)^m}{m!\,\Gamma(\nu+\mu+m+1)}\,{}_0F_1\left[\nu+\mu+m+1;-\frac{\zeta^2}{4}\right]$$
$$=\left(\frac{2}{\zeta}\right)^{\nu+\mu}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{z}{2}\right)^m}{m!}J_{\nu+\mu+m}(\zeta)\,.$$

Damit ist die Taylorreihe der erzeugenden Funktion

$$F_\mu^\nu(z+\zeta,\zeta;1)=\zeta^\nu\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}-\mu,\nu;-\dfrac{z}{\zeta}\\ 2\nu\end{matrix}\right]\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{z}{2}\right)^m}{m!}J_{\nu+\mu+m}(\zeta)$$
$$=\zeta^{-\nu}\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}\frac{(-\mu)_n(\nu)_n}{(2\nu)_n}\left(\frac{2}{\zeta}\right)^n J_{\nu+\mu+m-n}(\zeta)\right\}\frac{\left(-\frac{z}{2}\right)^m}{m!}$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}\zeta^{-\nu}A_{\mu,m}^\nu(\zeta)\frac{\left(-\frac{z}{2}\right)^m}{m!},$$

wo

$$A_{\mu,m}^\nu(\zeta)=\sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}\frac{(-\mu)_n(\nu)_n}{(2\nu)_n}\left(\frac{2}{\zeta}\right)^n J_{\nu+\mu+m-n}(\zeta) \qquad (52)$$

gesetzt wurde. Wird hierauf beiderseits Ω_ν (mit $k = 1$) angewandt, so ergibt sich

$$F_\mu^\nu(z+\zeta, z^*+\zeta; 1) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2})^m}{m!\, c_m^\nu} \zeta^{-\nu} A_{\mu,m}^\nu(\zeta)\, F_m^\nu(z, z^*; 1)$$

$$= 2^\nu \Gamma(\nu) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (m+\nu)(2\nu)_m}{m!} \zeta^{-\nu} A_{\mu,m}^\nu F_m^\nu(z, z^*; 1) \quad (53)$$

oder in reeller Form (unter Verwendung der Bezeichnungen (48))

$$\tilde{\omega}^{-\nu} J_{\nu+\mu}(\tilde{\omega})\, C_\mu^\nu(\cos\psi) = \frac{2^\nu \Gamma(\nu)\, \Gamma(2\nu+\mu)}{\Gamma(2\nu)\, \Gamma(\mu+1)}$$

$$\times \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (m+\nu) \zeta^{-\nu} A_{\mu,m}^\nu(\zeta)\, r^{-\nu} J_{\nu+m}(r)\, C_m^\nu(\cos\vartheta) \; . \quad (53')$$

Dies ist die gesuchte Entwicklung in ihrer allgemeinsten Form. Sie konvergiert mit (48) für $|z| < |\zeta|$, $|z^*| < |\zeta|$; im speziellen Falle $\mu = m = 0, 1, 2, \ldots$ konvergiert sie, da (48) sich dann auf ein Polynom reduziert, für beliebige Werte von z und z^*. Wir leiten aus ihr im folgenden die verschiedenen speziellen Additions- und Multiplikationstheoreme über Besselsche Funktionen her.

31.421. Additionstheoreme von Gegenbauer. Die beiden Additionstheoreme von Gegenbauer sind äquivalent mit den Formeln[71])

$$\tilde{\omega}^{-\nu} J_\nu(\tilde{w}) = 2^\nu \Gamma(\nu) \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (m+\nu) \zeta^{-\nu} J_{\nu+m}(\zeta)\, r^{-\nu} J_{\nu+m}(r)\, C_m^\nu(\cos\vartheta) \quad (54)$$

und

$$\tilde{\omega}^{-\nu} J_{-\nu}(\tilde{\omega}) = 2^\nu \Gamma(\nu) \sum_{m=0}^{\infty} (m+\nu) \zeta^{-\nu} J_{-\nu-m}(\zeta)\, r^{-\nu} J_{\nu+m}(r)\, C_m^\nu(\cos\vartheta) \; . \quad (55)$$

Die erste dieser Formeln ergibt sich aus (53') durch $\mu = 0$. Für die linke Seite ist dies eine Konsequenz von 22.2c), und auf der rechten Seite ist, da in (52) nur der Term mit $n = 0$ nicht verschwindet,

$$A_{0,m}^\nu(\zeta) = J_{\nu+m}(\zeta) \; . \quad (56)$$

Die zweite Formel folgt aus (53') durch $\mu = -2\nu$. Für die linke Seite ist dies ebenfalls evident aus 22.2c). Auf der rechten Seite ergibt sich unter Verwendung der folgenden, leicht aus einer Formel von Watson herzuleitenden Beziehung[72])

---

[71]) *Watson*, l. c., S. 363 ff. Wegen der scheinbaren Nichtübereinstimmung in den Vorzeichen vgl. Anmerkung [70]).

[72]) Man setzte in Formel (1) von *Watson*, l. c., S. 143, $\mu = -\alpha$, $\nu = -\alpha - k$. Die Formel läßt sich leicht auch direkt beweisen.

$$\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}(\alpha)_p\left(\frac{2}{\zeta}\right)^p J_{-\alpha+k-p}(\zeta)=(-1)^k J_{-\alpha-k}(\zeta)\quad(k=0,1,2,\ldots)\tag{57}$$

mit $\nu=\alpha,\ k=m$

$$\begin{aligned}A^{\nu}_{-2\nu,m}(\zeta)&=\sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}(\nu)_n\left(\frac{2}{\zeta}\right)^n J_{-\nu+m-n}(\zeta)\\&=(-1)^m J_{-\nu-m}(\zeta)\,,\end{aligned}\tag{58}$$

woraus (55) unmittelbar folgt.

31.422. Additionstheoreme von Graf und Sommerfeld. Mit den Bezeichnungen (49) lauten die genannten Additionstheoreme [73])

$$J_\mu(\tilde{\omega})\cos\mu\,\psi=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m J_{\mu+m}(\zeta)\,J_m(r)\cos m\,\vartheta\tag{59}$$

und

$$J_\mu(\tilde{\omega})\sin\mu\,\psi=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^{m+1}J_{\mu+m}(\zeta)\,J_m(r)\sin m\,\vartheta\,.\tag{60}$$

Man erhält die erste Formel, wie dies für die linke Seite sofort aus 22.2b) folgt, aus (53′) als Grenzfall $\nu\to 0$. Unter Verwendung von (57) (mit $k=m$, $\alpha=-\mu$) und unter Beachtung von

$$\lim_{\nu\to 0}\frac{(\nu)_p}{(2\nu)_p}=\frac{1}{\varepsilon_p}\ \text{[61])}$$

ergibt (52) [74])

$$\begin{aligned}A^0_{\mu,m}(\zeta)&=\lim_{\nu\to 0}\sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}\frac{(-\mu)_n(\nu)_n}{(2\nu)_n}\left(\frac{2}{\zeta}\right)^n J_{\nu+\mu+m-n}(\zeta)\\&=\tfrac{1}{2}J_{\mu+m}(\zeta)+\tfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}(-\mu)_n\left(\frac{2}{\zeta}\right)^n J_{\mu+m-n}(\zeta)\\&=\tfrac{1}{2}\{J_{\mu+m}(\zeta)+(-1)^m J_{\mu-m}(\zeta)\}\,.\end{aligned}$$

Beachtet man noch

$$\lim_{\nu\to 0}\frac{2^\nu\,\Gamma(\nu)(m+\nu)\,\Gamma(m+2\nu)}{\Gamma(2\nu)\ m!}=\varepsilon_m\,,$$

so ergibt sich damit aus (53′) die zu (59) offenbar äquivalente Formel

$$J_\mu(\tilde{\omega})\cos\mu\,\psi=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\varepsilon_m}{2}\{J_{\mu+m}(\zeta)+(-1)^m J_{\mu-m}(\zeta)\}\,J_m(r)\cos m\,\vartheta\,.$$

---

[73]) *Watson*, l. c., S. 359 ff. Wegen der Vorzeichen beachte man wieder [70]).

[74]) Daß auf der rechten Seite von (53′) der Grenzübergang gliedweise vollzogen werden kann, folgt aus dem in 32. bewiesenen Satz VII.

Eine zu (60) gleichwertige Formel fließt aus (53′) mit $\nu = 1$. Auf der linken Seite ergibt sich wegen 22.2b)

$$\tilde{\omega}^{-1} J_{\mu+1}(\tilde{\omega}) \frac{\sin(\mu+1)\psi}{(\mu+1)\sin\psi} \,.$$

Auf der rechten Seite ergibt (52) wieder unter Benützung von (57) (mit $k = m + 1$, $\alpha = -\mu - 1$)

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\zeta} A^1_{\mu,m}(\zeta) &= \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} \frac{(-\mu)_n n!}{(n+1)!} \left(\frac{2}{\zeta}\right)^{n+1} J_{1+\mu+m-n}(\zeta) \\
&= \frac{1}{m+1} \sum_{n=0}^{m} \binom{m+1}{n+1} (-\mu)_n \left(\frac{2}{\zeta}\right)^{n+1} J_{1+\mu+m-n}(\zeta) \\
&= \frac{1}{(m+1)(\mu+1)} \left\{ J_{\mu+2+m}(\zeta) - \sum_{n=0}^{n+1} \binom{m+1}{n} (-\mu-1)_n \left(\frac{2}{\zeta}\right)^n J_{1+\mu+1+m-n}(\zeta) \right\} \\
&= \frac{1}{(m+1)(\mu+1)} \{ J_{\mu+2+m}(\zeta) + (-1)^m J_{\mu-m}(\zeta) \} \,.
\end{aligned}$$

Wegen $\tilde{\omega} \sin\psi = r \sin\vartheta$ liefert nun (53′) nach Multiplikation mit $(\mu+1) r \sin\vartheta$, wenn noch $\mu + 1$ durch μ ersetzt wird, die zu (60) gleichwertige Formel

$$J_\mu(\tilde{\omega}) \sin\mu\psi = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \{ J_{\mu+m}(\zeta) - (-1)^m J_{\mu-m}(\zeta) \} J_m(r) \sin m\vartheta .$$

31.423. Multiplikationstheoreme. In gleicher Weise, wie die Gegenbauerschen Additionstheoreme aus der allgemeinen Entwicklung (53) abgeleitet wurden, folgen die (im Prinzip von Lommel stammenden) sogenannten Multiplikationstheoreme aus einem allgemeinen Multiplikationstheorem, das aus (53) durch die folgende spezielle Wahl der Parameter entsteht:

$$z = (\lambda^2 - 1)\zeta \,, \qquad z^* = 0 \quad (|\lambda^2 - 1| < 1^{75}))$$

Auf der linken Seite von (53) entsteht so die Funktion

$$\begin{aligned}
& F^\nu_\mu((\lambda^2 - 1)\zeta + \zeta, \zeta; 1) = F^\nu_\mu(\lambda^2\zeta, \zeta; 1) \\
&= \frac{\zeta^\mu}{2^{\nu+\mu}\Gamma(\nu+\mu+1)} \, {}_2F_1\!\left[\begin{matrix}-\mu, \nu; 1-\lambda^2 \\ 2\nu\end{matrix}\right] {}_0F_1\!\left[\nu+\mu+1; -\frac{\lambda^2\zeta^2}{4}\right] \\
&= \lambda^{-\mu} \, {}_2F_1\!\left[\begin{matrix}-\mu, \nu; 1-\lambda^2 \\ 2\nu\end{matrix}\right] (\lambda\zeta)^{-\nu} J_{\nu+\mu}(\lambda\zeta) \,,
\end{aligned}$$

---

[75]) Im Falle $\mu = 0, 1, 2, \ldots$ fällt diese Voraussetzung dahin.

während sich rechts die B.-G.-Funktion reduziert auf

$$F^\nu_\mu((\lambda^2 - 1)\,\zeta, 0; 1) = \frac{\Gamma(2\nu)}{2^\nu(\nu + m)\,\Gamma(\nu)\,\Gamma(m + 2\nu)}\left[\frac{\lambda^2 - 1}{2}\zeta\right]^m .$$

Nach Multiplikation mit $(\lambda\,\zeta)^\nu$ lautet die Entwicklung demnach jetzt

$${}_2F_1\begin{bmatrix} -\mu, \nu; 1 - \lambda^2 \\ 2\nu \end{bmatrix} J_{\nu+\mu}(\lambda\,\zeta) = \lambda^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left[\frac{1-\lambda^2}{2}\zeta\right]^m}{m!} A^\nu_{\mu,m}(\zeta) .$$

Für $\mu = 0$ und $\mu = -2\nu$ ergeben sich hieraus wegen (56) bzw. (58) und im zweiten Fall wegen

$${}_2F_1\begin{bmatrix} 2\nu, \nu; 1 - \lambda^2 \\ 2\nu \end{bmatrix} = [1 - (1 - \lambda^2)]^{-\nu} = \lambda^{-2\nu}$$

die beiden bekannten Multiplikationstheoreme[76])

$$J_\nu(\lambda\,\zeta) = \lambda^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1-\lambda^2}{2}\zeta\right)^m}{m!} J_{\nu+m}(\zeta)$$

und

$$J_{-\nu}(\lambda\,\zeta) = \lambda^{-\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda^2-1}{2}\zeta\right)^m}{m!} J_{-\nu-m}(\zeta) .$$

32. Analytische Fortsetzung hinsichtlich ν

Die in 31. hergeleiteten Resultate über B.-G.-Reihen spezieller Lösungen $U^\nu(z, z^*)$ von (D_ν) sind insofern noch unbefriedigend, als abgesehen vom Falle $\nu = 0$ ihr Beweis auf den Bereich $\Re\nu > 0$ beschränkt blieb. Der folgende Satz gestattet, das Problem der analytischen Fortsetzung der B.-G.-Reihe einer Funktion $U^\nu(z, z^*)$ hinsichtlich ν auf die analytische Fortsetzung der Funktion $U^\nu(z, 0)$ zurückzuführen.

Satz VII. *Es bezeichne $\mathfrak{K}$ die Kreisscheibe $|z| < r$, wo r eine feste Zahl > 0 bedeutet, und es sei $\mathfrak{N}$ ein die Punkte $\nu = -1, -2, \ldots$ nicht enthaltendes Gebiet der ν-Ebene, dessen Durchschnitt mit $\Re\nu > 0$ nicht leer ist. Es sei die Funktion $U^\nu(z, 0)$ in $\mathfrak{K} \times \mathfrak{N}$ analytisch in z und ν. Dann können die (a priori nur in $\mathfrak{N} \cap \{\Re\nu > 0\}$ definierten) Glieder der B.-G.-Reihe*

$$\Omega_\nu[U^\nu(z, 0)] = U^\nu(z, z^*) = \sum_{n=0}^{\infty} a^\nu_n F^\nu_n(z, z^*) \tag{61}$$

analytisch in $\mathfrak{N}$ hinein fortgesetzt werden, und die Reihe (61) konvergiert in $\mathfrak{K} \times \mathfrak{K} \times \mathfrak{N}$ lokal gleichmäßig. Sie stellt deshalb dort die analytische Fortsetzung der Funktion $\Omega_\nu[U^\nu(z, 0)]$ dar.

---

[76]) *Watson*, l. c., S. 142.

Wir beweisen zunächst das folgende

Lemma. *Es sei* $0 < r' < r''$ *und* $|z| \leqq r'$, $|z^*| \leqq r'$. *Dann existiert bei festem* k *eine in* $\mathfrak{N}$ *lokal gleichmäßig beschränkte Zahl* m_0, *so daß für alle* $m > m_0$

$$\left| \frac{1}{c_m^\nu} F_m^\nu(z, z^*; k) \right| < 2K \left| \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu+m)} \right| m!\, r''^m ,$$

wo mit $\nu = \nu_1 + i\nu_2$ (ν_1, ν_2 *reell*)

$$K = \begin{cases} \left(1 + \dfrac{r'}{r''}\right)^{-2\nu_1} e^{\pi|\nu_2|}, & \nu_1 \leqq 0 \\ \left(1 - \dfrac{r'}{r''}\right)^{-2\nu_1} e^{\pi|\nu_2|}, & \nu_1 \geqq 0 \end{cases}$$

gesetzt ist.

Beweis des Lemmas. Wir benützen für die B.-G.-Funktion die Darstellung (23). Es ist eine einfache Folge aus einem bekannten Satz aus der Theorie der Besselfunktionen [77]), daß zu jedem $\nu \varepsilon \mathfrak{N}$ bei festem k ein in $\mathfrak{N}$ lokal gleichmäßig beschränktes m_1 existiert, so daß, falls $|zz^*| < r'^2$, für alle $m > m_1$

$$\left| {}_0F_1\left[\nu + m + 1\,; -\frac{k^2 zz^*}{4}\right] \right| < 2\,. \tag{62}$$

Zur Abschätzung der beiden ersten Faktoren in (23) gehen wir von (51) aus. Indem wir dort $t = \sqrt{zz^*}\,\tau$ setzen und für das Gegenbauersche Polynom die in (23) für $k = 0$ enthaltene Darstellung benützen, ergibt sich die für $|\tau| < 1/r'$ gültige Entwicklung

$$[(1-\tau z)(1-\tau z^*)]^{-\nu} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu+m)}{m!\,\Gamma(\nu)} (z+z^*)^m {}_2F_1\left[\begin{matrix} -\frac{m}{2}, \frac{1-m}{2}; \frac{4zz^*}{(z+z^*)^2} \\ 1-\nu-m \end{matrix}\right] \tau^m , \tag{63}$$

auf die wir jetzt die Cauchysche Koeffizientenabschätzung anwenden. Es ist für $|\tau| = 1/r''$

$$\left(1 - \frac{r'}{r''}\right)^2 \leqq |(1-\tau z)(1-\tau z^*)| \leqq \left(1 + \frac{r'}{r''}\right)^2,$$

$$|\arg[(1-\tau z)(1-\tau z^*)]| < \pi ,$$

und daher

$$\begin{aligned} |[(1-\tau z)(1-\tau z^*)]^{-\nu}| &= |e^{-\nu \log[(1-\tau z)(1-\tau z^*)]}| \\ &< |(1-\tau z)(1-\tau z^*)|^{-\nu_1} e^{\pi|\nu_2|} \\ &\leqq K . \end{aligned}$$

---

[77]) *Watson*, l. c., S. 44, Formel 1.

Damit folgt nach Cauchy unmittelbar

$$\left| \frac{\Gamma(\nu+m)}{m!\,\Gamma(\nu)} (z+z^*)^m \; {}_2F_1\left[\begin{matrix} -\frac{m}{2}, \frac{1-m}{2} \\ 1-\nu-m \end{matrix}; \frac{4zz^*}{(z+z^*)^2}\right] \right| < \frac{K}{(1/r'')^m} ,$$

woraus sich in Verbindung mit (62) die Behauptung des Lemmas ergibt.

Beweis von Satz VII. Es sei

$$U^\nu(z,0) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m^\nu z^m \tag{64}$$

Mit $U^\nu(z,0)$ sind die Koeffizienten b_m^ν in $\mathfrak{N}$ und damit wegen $a_m^\nu = b_m^\nu / c_m^\nu)$ nach der Bemerkung am Schluß von 22.1 die einzelnen Glieder von (61) in $\mathfrak{K} \times \mathfrak{K} \times \mathfrak{N}$ analytisch. Es sei $r' < r'' < r''' < r$. Dann gibt es ein in $\mathfrak{N}$ lokal gleichmäßig beschränktes m_2, so daß für $m > m_2$

$$\left| \frac{m!\,\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu+m)} \right| \left(\frac{r''}{r'''} \right)^m < 1 .$$

Wegen des Lemmas ist darum für $m > m_0 = \mathrm{Max}\,(m_1, m_2)$ und für $|z| \leqq r', |z^*| \leqq r'$

$$\left| a_m^\nu F_m^\nu(z,z^*) \right| < 2K \left| b_m^\nu \frac{m!\,\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu+m)} \right| r''^m < 2K \left| b_m^\nu \right| r'''^m .$$

Wegen der Stetigkeit von K (als Funktion von ν) und weil mit (64) auch $\sum_{m=0}^{\infty} |b_m^\nu| \, r'''^m$ in $\mathfrak{N}$ lokal gleichmäßig konvergiert, folgt damit die absolute und lokal gleichmäßige Konvergenz von (61).

Auf Grund von Satz VII können nun die Gültigkeitsbereiche der in 31. abgeleiteten Schlüsselformeln wie folgt angegeben werden:

(27): $\nu \neq -1, -2, \ldots$; r, α, ϑ beliebig;

(33′): $4\lambda \neq -2, -3, -4, \ldots$; r, κ, ϑ beliebig;

(53′): $2\nu \neq -1, -2, \ldots$; $2\nu + \mu \neq -1, -2, \ldots$; $|r e^{\pm i\vartheta}| < |\zeta|$.

33. Bestimmte Integrale

Die Ergebnisse der vorangegangenen Abschnitte führen auf zwei Wegen unmittelbar zu bestimmten Integralen mit speziellen Funktionen hin.

A) Die in 1. aufgestellten Operatoren Θ_ν und Ω_ν führen, auf spezielle Lösungen von (d_ν) angewandt, zu Integralbeziehungen für diese Lösungen;

B) Man gelangt zu bestimmten Integralen mit Gegenbauerschen Polynomen, die sich durch Besselfunktionen ausdrücken lassen, wenn man auf die (reell geschriebenen) B.-G.-Reihen von 31. die bekannten Orthogonalitätsrelationen der Gegenbauerschen Polynome[78])

$$\int_0^\pi C_m^\nu(\cos\varphi)\, C_p^\nu(\cos\varphi)\sin^{2\nu}\varphi\, d\varphi = \begin{cases} 0, & m \neq p \\ \dfrac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2\nu+m)}{2^{2\nu-1}(\nu+m)\, m!\,[\Gamma(\nu)]^2}, & m = p \end{cases} \tag{65}$$

anwendet.

Da nur die erste Methode mit dem Thema dieser Arbeit unmittelbar zu tun hat, führen wir nur diese in einiger Vollständigkeit durch. Wir beschränken uns dabei, da dies die übersichtlicheren Integrale liefert, auf den Operator Θ_ν. Für die Methode B) geben wir anhangsweise ein charakteristisches Beispiel.

33.1 Auswertung von Θ_ν für die Normallösungen von (d_ν)

33.11 Cartesische Koordinaten

Einsetzen der Lösung (26) in (10) ergibt wegen

$$u(x, 0) = \frac{1}{2^{\nu-\frac{1}{2}}\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} e^{ikx\cos\alpha}$$

die Integralbeziehung

$$(ky\sin\alpha)^{-\nu+\frac{1}{2}} J_{\nu-\frac{1}{2}}(ky\sin\alpha)\, e^{ikx\cos\alpha}$$

$$= \frac{1}{2^{\nu-\frac{1}{2}}\Gamma(\nu)\,\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^\pi e^{ik\cos\alpha\,(x+iy\cos\varphi)}\, {}_0F_1\left[\nu;\, -\frac{k^2y^2\sin^2\varphi}{4}\right] \sin^{2\nu-1}\varphi\, d\varphi\, .$$

Setzt man hier $x = 0$, schreibt man

$$ky\sin\alpha = Y\ ,\qquad ky\cos\alpha = X$$

und ersetzt man $\nu - \frac{1}{2}$ durch ν, so ergibt sich nach Multiplikation mit Y

$$J_\nu(Y) = \frac{\left(\frac{Y}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^\pi e^{-X\cos\varphi}\, {}_0F_1\left[\nu+\tfrac{1}{2};\, -\frac{X^2+Y^2}{4}\sin^2\varphi\right] \sin^{2\nu}\varphi\, d\varphi\, .$$

Erteilt man hier dem freien Parameter X den Wert iY, so ergibt dies das bekannte Poissonsche Integral

$$J_\nu(Y) = \frac{\left(\frac{Y}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^\pi e^{iY\cos\varphi} \sin^{2\nu}\varphi\, d\varphi\ .$$

---

[78]) *Bateman, H.*, On the inversion of a definite integral, Proc. London Math. Soc. (2) 4 (1906), S. 461—491, insbes. S. 472.

Für $X = 0$ erhalten wir dagegen, wenn wir die ${}_0F_1$ durch die entsprechende Besselfunktion ausdrücken,

$$J_\nu(Y) = \sqrt{\frac{Y}{2\pi}} \int_0^\pi J_{\nu-\frac{1}{2}}(Y \sin \varphi) \sin^{\nu+\frac{1}{2}} \varphi \, d\varphi \ .$$

Dies ist ein spezieller Fall des ersten endlichen Integrals von Sonine[79]).

33.12 Parabolische Koordinaten

Die Grundformel (10) liefert, auf die Lösung (29) angewandt, unmittelbar

$$(kr \sin \vartheta)^{-2\lambda-1} M_{\kappa,\lambda}\left(2ikr \cos^2 \frac{\vartheta}{2}\right) M_{\kappa,\lambda}\left(-2ikr \sin^2 \frac{\vartheta}{2}\right)$$

$$= \frac{\Gamma(2\lambda+1)}{\Gamma(2\lambda+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^\pi [2ikr (\cos \vartheta + i \sin \vartheta \cos \varphi)]^{-\lambda-\frac{1}{2}} M_{\kappa,\lambda}(2ikr (\cos \vartheta + i \sin \vartheta \cos \varphi))$$

$$\times {}_0F_1\left[2\lambda + \tfrac{1}{2}; -\frac{k^2 r^2 \sin^2 \varphi}{4}\right] \sin^{4\lambda} \varphi \, d\varphi \ .$$

Angesichts der ausgiebigen Behandlung der Spezialfälle der Whittakerschen Funktion in 31.2 begnügen wir uns damit, die folgenden speziellen Fälle dieser Formel niederzuschreiben:

$\kappa = 0$ ergibt (vgl. 31.231)

$${}_0F_1\left[\lambda + 1; -\frac{\left(kr \cos^2 \frac{\vartheta}{2}\right)^2}{4}\right] {}_0F_1\left[\lambda + 1; -\frac{\left(kr \sin^2 \frac{\vartheta}{2}\right)^2}{4}\right]$$

$$= \frac{\Gamma(2\lambda + 1)}{\Gamma(2\lambda + \frac{1}{2})\ \Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^\pi {}_0F_1\left[\lambda+1; -\frac{[kr(\cos\vartheta + i \sin\vartheta \cos\varphi)]^2}{4}\right]$$

$${}_0F_1\left[2\lambda + \tfrac{1}{2}; -\frac{(kr \sin \varphi)^2}{4}\right] \sin^{4\lambda} d\varphi \ ;$$

der Grenzübergang $k \to 0$ ergibt (vgl. 31.232)

$${}_0F_1\left[2\lambda + 1; -\frac{r \cos^2 \frac{\vartheta}{2}}{2}\right] {}_0F_1\left[2\lambda + 1; +\frac{r \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}{2}\right]$$

$$= \frac{\Gamma(2\lambda + 1)}{\Gamma(2\lambda + \frac{1}{2})\ \Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^\pi {}_0F_1\left[2\lambda + 1; -\frac{r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta \cos \varphi)}{2}\right] \sin^{4\lambda} \varphi \, d\varphi \ .$$

[79]) *Watson*, l. c., S. 373.

Hier können die Funktionen ${}_0F_1$ selbstverständlich durch Besselfunktionen ausgedrückt werden, was aber die Übersichtlichkeit der Formeln nicht erhöht.

33.13. Elliptische Koordinaten

Man wird auf bemerkenswerte Volterrasche Integralgleichungen für Mathieusche Funktionen zweiter Art geführt, wenn man Θ_0 auf die Funktionen $v_{2n}(x, y)$ und Θ_1 auf die Funktionen $\overline{w}_{2n+1}(x, y)$ von 31.3 anwendet und nachträglich $x = 0$ setzt[80]). Es ist, wie schon in 31.3 bemerkt,

$$v_{2n}(x, 0) = ce_{2n}(0, q)\, Ce_{2n}(\Xi, q) \ ,$$

$$\overline{w}_{2n+1}(x, 0) = \frac{se'_{2n+1}(0, q)\, Se_{2n+1}(\Xi, q)}{h \operatorname{Sin} \Xi} \ ,$$

wo

$$x = h \operatorname{Cos} \Xi\,(x) \ . \tag{66}$$

Wir haben $v_{2n}(iy, 0)$ bzw. $\overline{w}_{2n+1}(iy, 0)$ zu berechnen, wo $y = h \operatorname{Sin} \xi$. Aus (66) folgt

$$\Xi\,(x) = \operatorname{Ar} \operatorname{Cos} \frac{x}{h} = \log\left(\frac{x}{h} + \sqrt{\left(\frac{x}{h}\right)^2 - 1}\right)$$

und deshalb

$$\begin{aligned} \Xi\,(iy) &= \operatorname{Ar} \operatorname{Cos} \frac{iy}{h} \\ &= \log\left(\frac{iy}{h} + \sqrt{\left(\frac{iy}{h}\right)^2 - 1}\right) \\ &= \log i \left(\frac{y}{h} + \sqrt{\left(\frac{y}{h}\right)^2 + 1}\right) \\ &= i\,\tfrac{1}{2}\,\pi + \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} \frac{y}{h} \\ &= i\,\tfrac{1}{2}\,\pi + \xi\,^{81)} \ . \end{aligned}$$

Nun ist aber nach bekannten Eigenschaften der Mathieuschen Funktionen[82])

$$\begin{aligned} Ce_{2n}\left(i\,\frac{\pi}{2} + \xi, q\right) &= ce_{2n}\left(-\frac{\pi}{2} + i\,\xi, q\right) \\ &= ce_{2n}\left(-i\,\xi + \frac{\pi}{2}, q\right) \\ &= (-1)^n ce_{2n}(i\,\xi, -q) \\ &= (-1)^n Ce_{2n}(\xi, -q) \ . \end{aligned}$$

---

[80]) Die Funktionen v_{2n+1} und $\overline{w}_{2n+2}$ eignen sich hiefür nicht, da sie auf $x = 0$ verschwinden.

[81]) Die Vieldeutigkeit geht in der Periodizität der Mathieuschen Funktionen auf.

[82]) *MacLachlan*, l. c., S. 21 ff.

In gleicher Weise findet man

$$Se_{2n+1}\left(i\frac{\pi}{2}+\xi,q\right)=(-1)^n i\,Ce_{2n+1}(\xi,-q)\,^{83)}\ ,$$

ferner ist $\operatorname{Sin}\left(i\frac{\pi}{2}+\xi\right)=+i\operatorname{Cos}\xi$. Damit erhält man aus (6) bzw. (10) (mit $\nu=1$), wenn alles durch elliptische Koordinaten ausgedrückt und $\eta=\frac{\pi}{2}$ gesetzt wird,

$$Ce_{2n}(\xi,q)\,ce_{2n}\left(\frac{\pi}{2},q\right)=(-1)^n ce_{2n}(0,q)\{Ce_{2n}(\xi,-q)$$

$$-\frac{q\operatorname{Sin}\xi}{2}\int_0^{\xi}{}_0F_1[2\,;-q(\operatorname{Sin}^2\xi-\operatorname{Sin}^2\chi)]\,Ce_{2n}(\chi,-q)\operatorname{Cos}\chi\,d\chi\ ,$$

bzw.

$$Se_{2n+1}(\xi,q)\,se_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2},q\right)$$

$$=(-1)^n se_{2n+1}'(0,q)\int_0^{\xi}{}_0F_1[1\,;-q(\operatorname{Sin}^2\xi-\operatorname{Sin}^2\chi)]Ce_{2n+1}(\chi,-q)\,d\chi\,^{84)}\ .$$

33.14. Polarkoordinaten

Wendet man (10) auf die Funktionen $F_\mu^\nu(z,z^*;k)$ an, so ergibt sich mit $Z=\frac{1}{2}(z+z^*)+\frac{1}{2}(z-z^*)\cos\varphi$

$$F_\mu^\nu(z,z^*;k)=\frac{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu)\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^{\pi}{}_0F_1\left[\nu\,;\frac{k^2}{16}(z-z^*)^2\sin^2\varphi\right]F_\mu^\nu(Z,Z;k)\sin^{2\nu-1}\varphi\,d\varphi$$

oder in reeller Form unter Verwendung von Polarkoordinaten, wenn alles durch Besselsche und Gegenbauersche Funktionen ausgedrückt wird,

$$(kr)^{-\nu}J_{\nu+\mu}(kr)\,C_\mu^\nu(\cos\vartheta)=\frac{\Gamma(2\nu+\mu)\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{2^{1-\nu}\Gamma(\mu+1)\,\Gamma(2\nu)\,\Gamma(\frac{1}{2})}$$

$$\times\int_0^{\pi}[kr(\cos\vartheta+i\sin\vartheta\cos\varphi)]^{-\nu}J_{\nu+\mu}\big(kr(\cos\vartheta+i\sin\vartheta\cos\varphi)\big)$$

$$\times(kr\sin\vartheta\sin\varphi)^{-\nu+1}J_{\nu-1}(kr\sin\vartheta\sin\varphi)\sin^{2\nu-1}\varphi\,d\varphi\ . \qquad (67)$$

Wegen der Schnitte in der z-Ebene und in der z^*-Ebene von 0 bis $-\infty$ muß hier im Falle $\mu\neq 0,1,2,\ldots$ $\vartheta\neq\pi$ vorausgesetzt werden. Im

---

[83]) $Ce(\xi,q)$ und $Ce(\xi,-q)$ sowie $Se(\xi,q)$ und $Se(\xi,-q)$ verhalten sich zueinander wie die gewöhnliche und die modifizierte Besselfunktion.

[84]) Für $q\to 0$ ist $Ce_{2n}(\xi,q)\to\operatorname{Cos}2n\xi$ und $Se_{2n+1}(\xi,q)\to\operatorname{Sin}(2n+1)\xi$ und die beiden Integralgleichungen reduzieren sich auf triviale Identitäten zwischen trigonometrischen Funktionen.

Falle $|\vartheta| > \frac{\pi}{2}$ ist außerdem der Integrationsweg in der φ-Ebene nicht geradlinig, sondern so zu wählen, daß diese Schnitte gemieden werden[85]). Im Falle $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ergibt (67) eine bekannte Formel von Rutgers[86]). Multipliziert man (67) mit $(kr)^{-\mu}$ und läßt man dann k gegen 0 gehen, so ergibt sich die ebenfalls bekannte Integraldarstellung[87])

$$C_\mu^\nu(\cos\vartheta) = \frac{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\,\Gamma(2\nu+\mu)}{\Gamma(\nu)\,\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(2\nu)\,\Gamma(\mu+1)}\int_0^\pi (\cos\vartheta + i\sin\vartheta\cos\varphi)^\mu \sin^{2\nu-1}\varphi\, d\varphi$$

der Gegenbauerschen Funktionen.

33.2. Anwendung der Orthogonalitätseigenschaften der Gegenbauerschen Polynome

Wir geben für diese Methode (Methode B von S. 288), die bei den B.-G.-Reihen von 31.1 und 31.3 auf bekannte Integralformeln führt, nur ein Beispiel. Aus (33′) ergibt sich durch Multiplikation mit

$$(kr)^{2\lambda+1}\, C_m^{2\lambda+\frac{1}{2}}(\cos\vartheta)\sin^{4\lambda+1}\vartheta\ ,$$

Integration nach ϑ und Beachtung von (65)

$$\int_0^\pi M_{\kappa,\lambda}\left(2ikr\cos^2\frac{\vartheta}{2}\right) M_{\kappa,\lambda}\left(-2ikr\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right) C_m^{2\lambda+\frac{1}{2}}(\cos\vartheta)\sin^{2\lambda}\vartheta\, d\vartheta$$
$$= \frac{2^{-2\lambda+\frac{1}{2}}}{\Gamma(2\lambda+\frac{1}{2})}\,\frac{(-i)^m}{m!}\,\frac{(\lambda+\kappa+\frac{1}{2})_m\,\Gamma(4\lambda+1+m)}{(2\lambda+1)_m}\,{}_3F_2[\ldots](kr)^{\frac{1}{2}} J_{2\lambda+\frac{1}{2}+m}(kr)\,, \tag{68}$$

wo ${}_3F_2$ die gleichen Argumente wie in (33) hat. Diese Formel vertritt für Produkte Whittakerscher Funktionen die Rolle des Gegenbauerschen Integrals bei Zylinderfunktionen[88]). Sie kann im Falle $m = 0$ auch sehr elegant mit Hilfe der Laplacetransformation gewonnen werden[89]). Die den Entwicklungen (38) und (39) entsprechenden Spezialfälle dieser Formel sind

$$\int_0^\pi J_\lambda\left(kr\cos^2\frac{\vartheta}{2}\right) J_\lambda\left(kr\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right) C_{2m}^{2\lambda+\frac{1}{2}}(\cos\vartheta)\sin^{2\lambda+1}\vartheta\, d\vartheta$$
$$= \frac{(-1)^m\,\Gamma(\frac{1}{2}+\lambda+m)\,\Gamma(\frac{1}{2}+2\lambda+m)}{m!\,\Gamma(2\lambda+\frac{1}{2})\,\Gamma(1+\lambda+m)}(kr)^{-\frac{1}{2}} J_{2\lambda+\frac{1}{2}+2m}(kr) \tag{69}$$

[85]) Dies ist stets möglich, wie eine elementare Überlegung zeigt.

[86]) *Watson*, l. c., S. 374, Formel 4. Auf der linken Seite dieser Formel fehlt der Faktor 2.

[87]) *Magnus und Oberhettinger*, l. c., S. 99.

[88]) *Watson*, l. c., S. 367.

[89]) *Doetsch, G.*, Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, Berlin 1937, S. 310. Das Integral kann dann als Faltung geschrieben werden.

und

$$\int_0^{\pi} J_{2\lambda}\left(\sqrt{2r}\cos\frac{\vartheta}{2}\right) I_{2\lambda}\left(\sqrt{2r}\sin\frac{\vartheta}{2}\right) C_n^{2\lambda+\frac{1}{2}}(\cos\vartheta)\sin^{2\lambda+1}\vartheta\, d\vartheta$$

$$= \frac{(-1)^n r^{2\lambda+n}}{2^n n!\,(2\lambda+1)_n\,\Gamma(4\lambda+1)(2\lambda+\frac{1}{2}+n)}\,.$$

Für (69) hat im Falle $m = 0$ auch Watson[90]) einen Beweis angegeben.

LITERATURVERZEICHNIS

(Nur gelegentlich zitierte Werke und Abhandlungen sind hier nicht angeführt.)

Bailey, W. N., Generalized Hypergeometric Series. Cambridge 1935.

Courant, R. und *D. Hilbert*, Methoden der Mathematischen Physik, Band 2, Berlin 1937.

Doetsch, G., Theorie und Anwendung der Laplacetransformation. Berlin 1937.

Magnus, W. und F. Oberhettinger, Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der Mathematischen Physik, 2. Aufl. Berlin, Göttingen, Heidelberg 1948.

McLachlan, N. W., Theory and Application of Mathieu Functions. Oxford 1947.

Sommerfeld, A., Partielle Differentialgleichungen der Physik. Leipzig 1947.

Watson, G. N., Treatise on the Theory of Bessel Functions. 2nd ed. Cambridge and New York 1944.

Whittaker, E. T. and G. N. Watson, A Course on Modern Analysis. 4th ed., Cambridge and New York 1943.

(Eingegangen den 25. November 1952.)

[90]) *Watson*, l. c., S. 375, Formel 1.