

Werk

Titel: Kritische Betrachtungen zur theoretischen Statistik

Autor: Bortkewitsch, L. von

Ort: Jena

Jahr: 1894

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?345616359_0063|log124

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

V.

Kritische Betrachtungen zur theoretischen Statistik.

Von

Dr. L. von Bortkewitsch.

Erster Artikel.

Es wird die Aufgabe der vorliegenden Studie sein, die Bedingungen der Anwendbarkeit der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Lehre von den sozialen Massenerscheinungen etwas eingehender, als es gewöhnlich geschieht, zu prüfen und speziell zu zeigen, daß die Grenzen für jene Art der Behandlung statistischer Ergebnisse nach bestimmten Richtungen hin zu eng gesteckt worden sind, während zugleich die praktische Bedeutung der Wahrscheinlichkeitsrechnung für die Statistik vielfach überschätzt wurde.

Meine Untersuchung stützt sich, abgesehen von den Klassikern der Wahrscheinlichkeitsrechnung, auf die Schriften von W. Lexis und J. von Kries, auf die ich schon hier ganz allgemein verwiesen haben möchte, um etwaigen Mißverständnissen vorzubeugen. Denn solche könnten sich leicht in Fällen einstellen, wo ich, auf einen der genannten Autoren Bezug nehmend, es für überflüssig erachtete, die eine oder die andere der originellen Anschauungen, an denen ihre Werke so reich sind, des näheren zu erörtern ¹⁾.

Die erste Frage, welche hier zur Sprache gebracht werden soll, ist nun die: Was folgt für die wahrscheinlichkeitsrech-

1) Von den Schriften Lexis' kommt in erster Linie in Betracht „Zur Theorie der Massenerscheinungen in der menschlichen Gesellschaft“, 1877. Außerdem sind zu nennen: das Schlusskapitel der „Einleitung in die Theorie der Bevölkerungsstatistik“, 1875; ferner die Artikel „Gesetz“, „Geschlechtsverhältnis bei Geborenen und Gestorbenen“, „Anthropologie und Anthropometrie“ im Handwörterbuch der Staatswissenschaften. In diesen Jahrbüchern siehe „Das Geschlechtsverhältnis der Geborenen und die Wahrscheinlichkeitsrechnung“ (1876), „Ueber die Theorie der Stabilität statistischer Reihen“ (1879) und „Ueber die Wahrscheinlichkeitsrechnung und deren Anwendung auf die Statistik“ (1886).

Johannes von Kries, Die Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung, eine logische Untersuchung. 1886.

Dritte Folge Bd. VIII (I.XIII).

nerische Behandlung einer statistischen Verhältniszahl aus dem Umstande, daß letztere als eine Durchschnittswahrscheinlichkeit anzusehen ist?

Begriff und Wesen der Durchschnittswahrscheinlichkeit ergeben sich aus nachstehenden Betrachtungen.

Denkt man sich eine Gesamtheit von z gleichmöglichen¹⁾ Fällen, bei der die Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines bestimmten Ereignisses p ist, in eine Anzahl von Teilgesamtheiten, die aus je $z_1, z_2, z_3 \dots$ Fällen bestehen, zerlegt und ist dann die Wahrscheinlichkeit des Eintretens des in Frage stehenden Ereignisses bei der ersten Teilgesamtheit p_1 , bei der zweiten p_2 , bei der dritten p_3 u. s. f., so ergibt sich offenbar die Beziehung

$$p = \frac{z_1}{z} p_1 + \frac{z_2}{z} p_2 + \frac{z_3}{z} p_3 + \dots$$

Unter diese Form gebracht, wird die Größe p als eine Totalwahrscheinlichkeit und im Gegensatz zu ihr die Summanden $\frac{z_1}{z} p_1, \frac{z_2}{z} p_2, \frac{z_3}{z} p_3 \dots$ als Partialwahrscheinlichkeiten bezeichnet.

Es fehlt indessen an bestimmten Terminis, um das eigentümliche Verhältnis der Wahrscheinlichkeit p zu den Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, p_3 \dots$ zu charakterisieren. Man wolle die erste eine Generalwahrscheinlichkeit und die letzteren Spezialwahrscheinlichkeiten nennen.

Es ist zunächst klar, daß die Zerlegung einer Totalgesamtheit von z Fällen in so und so viele Teilgesamtheiten in sehr verschiedener Weise durchgeführt werden kann, und zwar, nicht nur wenn die Zugehörigkeit jedes Einzelfalles zu der einen oder der anderen Teilgesamtheit durch Zufall bestimmt wird, sondern unter Umständen auch dann, wenn die Zerlegung planmäßig, d. h. auf Grund bestimmter, an den Einzelfällen zur Wahrnehmung gelangender Unterscheidungsmerkmale erfolgt.

Sodann aber leuchtet es ein, daß die Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, p_3 \dots$, die sich nach der durchgeführten Zerlegung herausgestellt haben, sich durch fortgesetzte Zerlegung ihrerseits unter die Form von Generalwahrscheinlichkeiten in vielen Fällen würden bringen lassen und daß diese Operation noch weiter verfolgt werden kann.

Die Art der Zusammensetzung einer Generalwahrscheinlichkeit

1) v. Kries hat im Kap. III (besonders § 6) der „Prinzipien“ gezeigt, daß die übliche Annahme der Gleichmöglichkeit aller Fälle, deren Zahl als Nenner im Wahrscheinlichkeitsbruch erscheint, weder für die Fixierung des Begriffs der Wahrscheinlichkeit und die Ableitung der Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung notwendig ist, noch auf die Fälle der Erwartungsbildung bei Zufallsspielen paßt. Seinen auf diesen Punkt sich beziehenden geistvollen und höchst wichtigen Ausführungen kann ich meinerseits nur beipflichten. Wenn ich aber trotzdem an der überlieferten Hypothese der Gleichmöglichkeit der in Betracht kommenden Fälle im Text festhielt, so geschah dies nur, um das Verständnis des dort Entwickelten durch Einführung einer noch wenig verbreiteten, zumal etwas komplizierten Anschauung nicht zu erschweren.

aus Spezialwahrscheinlichkeiten ist somit keine objektiv feststehende Thatsache, sondern vielmehr das Ergebnis einer Operation oder einer Reihe von Operationen, bei deren Ausführung die Willkür nicht ausgeschlossen ist.

Eine sehr einfache Erwägung zeigt aber, daß es auf die Verschiedenheit bestimmter Arten der Zusammensetzung in solchen Fällen nicht ankommt, wo einige der Größen $p_1, p_2, p_3 \dots$ einander gleich sind. Denn ob man z. B. bei $p_1 = p_2$,

$$p = \frac{z_1}{z} p_1 + \frac{z_2}{z} p_2 + \frac{z_3}{z} p_3 + \dots$$

oder aber

$$p = \frac{z_1 + z_2}{z} p_1 + \frac{z_3}{z} p_3 + \dots$$

schreibt, ist für die Zwecke der Erkenntnis irrelevant, da ja der obere Ausdruck im Vergleich zum unteren unser Wissen über die in Frage stehende Erscheinung in nichts zu bereichern vermag.

Ein überaus wichtiger Fall liegt vor, wenn alle Größen $p_1, p_2, p_3 \dots$ einander gleich sind. Wir wollen dieses Verhalten so ausdrücken, daß wir sagen: Die Wahrscheinlichkeit p verhält sich in Bezug auf die vorgenommene Zerlegung indifferent. Damit ist aber nicht gesagt, daß sich bei einer anderen Art der Zerlegung das gleiche Resultat herausstellen würde. Jede gegebene Wahrscheinlichkeit wird sich vielmehr in Bezug auf sehr viele Arten der Zerlegung indifferent verhalten, auf andere aber reagieren.

Für den Fall nun, wo sich eine Wahrscheinlichkeit p auf sämtliche denkbaren Arten der Zerlegung indifferent verhält, wollen wir ihr mit v. Kries eine definitive Bedeutung zusprechen¹⁾. Hat man es mit solch einer Wahrscheinlichkeit zu thun, so ist offenbar jede Zerlegung zwecklos, weil deren Ergebnis im voraus bekannt ist.

Es fragt sich aber, wie man zu der Ueberzeugung gelangt, daß einer Wahrscheinlichkeit definitive Bedeutung zukomme.

Bei Wahrscheinlichkeiten a priori geschieht es auf die Weise, daß man die Zerlegung in Teilgesamtheiten bis zur äußersten Grenze verfolgt, und diese Grenze ist erst dann erreicht, wenn man so viele Teilgesamtheiten gebildet hat, als Einzelfälle vorliegen. M. a. W. löst man die Totalgesamtheit in Einzelfälle auf. Findet man dann, daß für jeden Einzelfall der Wahrscheinlichkeitsansatz der gleiche sein muß, so ist damit die Bedingung der definitiven Bedeutung der Generalwahrscheinlichkeit erfüllt, weil man gewiß ist, daß bei beliebiger Zusammenfassung der Einzelfälle sich stets Teilgesamtheiten mit gleicher Wahrscheinlichkeit ergeben werden. Daher kann man sagen, daß der Generalwahrscheinlichkeit dort eine definitive Bedeutung zukommt, wo die „Chancengleichheit der Einzelfälle“ (v. Kries) statthat.

Hat man es aber mit einer Wahrscheinlichkeit a posteriori zu

1) Prinzipien S. 110—112.

thun, so ist dasselbe einfache und sichere Kriterium nicht mehr anwendbar. Stellt hier p' den aus der Erfahrung — also etwa aus n Versuchen — ermittelten Nährungswert der in Frage stehenden Wahrscheinlichkeit p dar und setzt sich die Totalgesamtheit der beobachteten Fälle n in ähnlicher Weise wie vorhin die Totalgesamtheit aller möglichen Fälle z , die in Teilgesamtheiten $z_1, z_2, z_3 \dots$ zerfiel, aus entsprechenden Teilgesamtheiten, auf die je $n_1, n_2, n_3 \dots$ Einzelfälle oder Versuche entfallen, zusammen, so besteht die Gleichung

$$p' = \frac{n_1}{n} p'_1 + \frac{n_2}{n} p'_2 + \frac{n_3}{n} p'_3 + \dots$$

wo $p'_1, p'_2, p'_3 \dots$ die aus der Erfahrung bestimmten Werte für $p_1, p_2, p_3 \dots$ zu bedeuten haben. Sollte nun die Zerlegung nach einem Prinzip erfolgt sein, dem gegenüber sich die Wahrscheinlichkeit p indifferent verhält, so brauchen die Größen $p'_1, p'_2, p'_3 \dots$ darum nicht einander gleich zu sein. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung stellt aber Regeln auf, nach denen aus dem gegenseitigen Verhalten der Größen $p'_1, p'_2, p'_3 \dots$ darauf zu schliessen ist, ob die Abweichungen letzterer Größen von p' etwaigen Differenzen zwischen $p_1, p_2, p_3 \dots$ und p oder aber der Wirkung „zufälliger Ursachen“ zuzuschreiben seien. Die erwähnten Regeln sind jedoch nur unter der Bedingung anwendbar, daß die Zahlen $n_1, n_2, n_3 \dots$ bereits „große“ Zahlen seien, und vollends unbrauchbar werden diese Regeln, wenn sich jene Zahlen auf 1 reduzieren. Es ist dabei zu beachten, daß in der Gesamtheit beobachteter Einzelfälle n möglicherweise nicht alle möglichen Fälle, die der Gesamtheit z angehören, vertreten sind. Daher steht das bei Wahrscheinlichkeiten a priori zur sicheren Ueberzeugung von der definitiven Bedeutung der betreffenden Generalwahrscheinlichkeit führende Mittel — nämlich die Auflösung der Totalgesamtheit in Einzelfälle — für den in Frage stehenden Fall nicht zur Verfügung, und es bleibt hier nichts anderes übrig, als die Totalgesamtheit der beobachteten Fälle nach verschiedenen Richtungen hin in Teilgesamtheiten zu zerlegen und jedesmal zu prüfen, ob die Differenzen zwischen $p'_1, p'_2, p'_3 \dots$ und p' die für die Wirkung zufälliger Ursachen maßgebenden Spielräume nicht überschreiten. Mühsam wie sie ist, vermag eine solche Prüfungsmethode niemals die volle Sicherheit zu gewähren, daß man durch Zerlegung den Zustand der Chancengleichheit der Einzelfälle innerhalb der erhaltenen Teilgesamtheiten herbeigeführt hat, weil man sich dem Zweifel nicht wird verschliessen können, ob nicht vielleicht bei Zusammenfassung der Einzelfälle nach einem neuen Prinzip — und die Zahl der Prinzipien, die sich in Anwendung bringen lassen, hat nur an der Zahl der Unterscheidungsmerkmale, die an den Einzelfällen wahrgenommen werden können, eine Grenze — sich Differenzen zwischen den für einzelne neu gebildete Teilgesamtheiten zu erhaltenden Wahrscheinlichkeiten ergeben würden, die nicht mehr auf die Wirkung des Zufalls zurückzuführen wären¹⁾.

1) Ueber die Prüfung der Chancengleichheit bei aposteriorischen Wahrscheinlichkeiten bei v Kries, Kap. VI, § 6. Auch Lexis, Einleitung in die Theorie § 79.

Speziell also in der Statistik, die ihrer Methode gemäß niemals in die Lage kommt, Wahrscheinlichkeiten „anzusetzen“, sondern solche erst a posteriori zu ermitteln sucht, wird man den Fall von Wahrscheinlichkeiten, denen definitive Bedeutung zukommt — man wolle solche Wahrscheinlichkeiten Elementarwahrscheinlichkeiten¹⁾ nennen — stets als Ausnahmefall anzusehen haben.

Man wird hingegen sagen dürfen, daß den normalen Fall für die Statistik Wahrscheinlichkeiten darstellen, denen definitive Bedeutung nicht zukommt²⁾. In folgendem werde ich solche Wahrscheinlichkeiten als Durchschnittswahrscheinlichkeiten bezeichnen. Es ist wohl denkbar, daß der Mannigfaltigkeit des Geschehens auf dem Gebiete der sozialen Massenerscheinungen Elementarwahrscheinlichkeiten zu Grunde liegen. Ich meine nur, daß die Statistik ihre Methoden auf Durchschnittswahrscheinlichkeiten einzurichten hat, denn vorausgesetzt sogar, daß es ihr einmal gelingen wäre, durch geeignete Abgrenzung eine Masse herzustellen, innerhalb deren die Bedingung der Chancengleichheit der Einzelfälle erfüllt wäre (eine absolut gleichartige Masse), so würde sie nach den vorstehenden Ausführungen schwerlich — vielleicht überhaupt nicht — imstande sein, eine feste Ueberzeugung davon zu gewinnen.

Die üblichste Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Statistik besteht in der Berechnung der sog. Präcision einer Wahrscheinlichkeitsgröße, als welche eine statistische Verhältniszahl betrachtet wird.

Unter Präcision versteht man eine Konstante h , die, mit der positiven Größe a multipliziert, das Argument in der Tabelle der Werte der Funktion F_u ³⁾ ergibt, welche letztere Funktion die Wahrscheinlichkeit für den a posteriori zu ermittelnden Wert p' der Wahrscheinlichkeit p , in den Grenzen von $p - a$ bis $p + a$ enthalten zu sein, ausdrückt.

Die Größe h steht mit dem sog. mittleren Fehler f , d. h. mit der Quadratwurzel aus der mathematischen Erwartung des Quadrates der Abweichung a in der Beziehung

$$f = \frac{1}{h\sqrt{2}} \quad ^4)$$

1) Lexis, ebenda §§ 93 u. 94, führt den Ausdruck „Elementarmassen“ für solche Gesamtheiten ein, bei denen die Chancengleichheit der Einzelfälle Platz greift.

2) Vgl. A. Cournot, Grundlehren der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Deutsch von Schnuse, 1849, S. 152.

3) Die numerische Auswertung der Funktion $F_u = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-t^2} dt$ findet man in den meisten Lehrbüchern der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

4) Der „mittlere Fehler“ in dem im Text angegebenen Sinn ist von der „erreur moyenne“ bei Laplace u. a. wohl zu unterscheiden. Laplace versteht darunter die mathematische Erwartung ϵ der positiven Abweichung $p' - p$ (die math. Erwartung der negativen Abweichung $p' - p$ ist $-\epsilon$). Es ist $\epsilon = \frac{1}{2h\sqrt{\pi}}$, daher $\epsilon = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f$.

Ist der Wahrscheinlichkeitswert p' aus n Versuchen ermittelt worden und stellt n eine große Zahl dar, so gelten die Gleichungen

$$h = \sqrt{\frac{n}{2pq}} \text{ resp. } f = \sqrt{\frac{pq}{n}},$$

wo $q = 1 - p$.

Die Berechnung der Präcision oder des mittleren Fehlers bezweckt den Spielraum für die Wirkung zufälliger Ursachen zu bestimmen.

Hat man z. B. bei einer statistischen Masse von n Fällen m Mal das Eintreten eines Ereignisses beobachtet, mithin $\frac{m}{n} = p'$ als empirischen Wert der gesuchten Wahrscheinlichkeit p gefunden, bei einer anderen Masse aber von n' Fällen dasselbe Ereignis m' Mal eintreten sehen, somit $\frac{m'}{n'} = p''$ als zweiten empirischen Wert für die Wahrscheinlichkeit des Eintretens desselben Ereignisses ermittelt, so fragt es sich, ob die so erhaltene Differenz $\frac{m}{n} - \frac{m'}{n'}$ aus der Wirkung zufälliger Ursachen zu erklären ist oder nicht. Im ersten Fall wäre anzunehmen, daß den empirischen Wahrscheinlichkeiten p' und p'' ein und dieselbe abstrakte Wahrscheinlichkeit p zu Grunde liegt. Im zweiten Fall aber wäre solch eine Annahme nicht mehr zulässig und man müßte für eine jede der beobachteten Massen eine besondere abstrakte Wahrscheinlichkeit statuieren.

Die Rechnung zeigt nun, daß für den Fall, wo sowohl bei der ersten als bei der zweiten Masse die abstrakte Wahrscheinlichkeit p gelten würde, eine bestimmte Wahrscheinlichkeit F_u für die zu erhaltende Differenz $\frac{m}{n} - \frac{m'}{n'}$ in den Grenzen von $-a$ bis $+a$ enthalten zu sein, resp. diese Grenzen nicht zu überschreiten vorhanden wäre. Man hat hierbei $u = h'a$ zu setzen und die Konstante h'' , die in analoger Weise als Präcision der Differenz $p' - p''$ bezeichnet werden mag, berechnet sich aus der Formel

$$h'' = \frac{hh'}{\sqrt{h^2 + h'^2}}$$

wo h resp. h' die Präcisionen von p' resp. p'' bedeuten.

Bei großem n und n' ist es eine erlaubte Annäherung,

$$h = \sqrt{\frac{n}{2\frac{m}{n}\left(1 - \frac{m}{n}\right)}} \text{ resp. } h' = \sqrt{\frac{n'}{2\frac{m'}{n'}\left(1 - \frac{m'}{n'}\right)}}$$

zu setzen, und man kommt schließlich auf die Formel

$$h'' = \frac{nn' \sqrt{nn'}}{\sqrt{2 \{ m(n-m)n'^3 + m'(n'-m')n^3 \}}}$$

So ließe sich leicht an der Hand einer Tabelle der Werte F_u die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmen, daß eine gegebene Differenz $\frac{m}{n} - \frac{m'}{n'}$ auf die Rechnung zufälliger Ursachen zu setzen sei ¹⁾.

Hat man aber statt zwei Verhältniszahlen eine ganze Reihe $p', p'', p''' \dots$ solcher Zahlen zu vergleichen, die einer Reihe nach einem bestimmten Prinzip unterschiedener Massen entsprechen, also z. B. so, daß jede Masse die Fälle eines bestimmten Jahrganges umfaßt, so gilt es auch hier, sich ein Urteil darüber zu bilden, ob die Schwankungen, welche die ermittelten Zahlenwerte aufweisen, aus der Wirkung zufälliger Ursachen zu erklären seien oder nicht. Bleibt nämlich bei einer Anzahl λ von Versuchsreihen, die aus je n Einzelversuchen bestehen, die abstrakte Wahrscheinlichkeit p dieselbe, so ist nach dem Vorstehenden zu erwarten, daß sich die zu ermittelnden empirischen Wahrscheinlichkeitswerte, nach ihrer Größe geordnet, in einer bestimmten Weise um p gruppieren werden. Denn es besteht eine angebbare Wahrscheinlichkeit F_u für einen empirischen Wert der gesuchten Wahrscheinlichkeit innerhalb der Grenzen $p - a$ und $p + a$ zu liegen und demgemäß drückt das Produkt λF_u die Zahl der Versuchsreihen, bei denen diese Fehlergrenzen erwartungsmäßig nicht überschritten werden. Zur Bestimmung der erwartungsmäßigen Gruppierung der empirischen Wahrscheinlichkeitswerte um den abstrakten Wahrscheinlichkeitswert p ist die Kenntnis der Größe p und der Präcision h , die ihrerseits von p abhängt, erforderlich. Man hilft sich hierbei mit der Annäherung, die darin besteht, die Unbekannte p durch einen Mittelwert p_0 aus den erhaltenen Werten $p', p'', p''' \dots$ zu ersetzen ²⁾. Die so gewonnene erwartungsmäßige Gruppierung ist nun der effektiven, die in der Reihe $p', p'', p''' \dots$ ihren Ausdruck findet, gegenüberzustellen, was selbstverständlich nur dann einen Sinn hat, wenn λ eine nicht zu kleine Zahl ist.

Zeigt sich dann eine befriedigende Uebereinstimmung der effektiven Gruppierung mit der erwartungsmäßigen, so ist es ein Zeichen dafür, daß die in Frage stehende abstrakte Wahrscheinlichkeit konstant ist und die Schwankungen der empirischen Wahrscheinlichkeitswerte auf die Wirkung des Zufalls zurückzuführen sind. Dies ist nach Lexis der Fall der normalen Dispersion.

Lexis greift ferner aus allen denkbaren Arten des Verhaltens der Zahlenwerte $p', p'', p''' \dots$ zwei für die Theorie wichtige Fälle heraus, die er mit den Namen *unternormale Dispersion* und *übernormale Dispersion* bezeichnet.

Unternormale Dispersion ist vorhanden, wenn sich die Zahlenwerte $p', p'', p''' \dots$ der Funktion F_u entsprechend um p_0 gruppieren,

1) Näheres darüber findet sich bei Lexis, Einleitung in die Theorie der Bev.-Statistik, im letzten Kapitel, und bei Westergaard, Grundzüge der Theorie der Statistik.

2) Das nähere darüber findet sich unten.

jedoch so, daß die Präzisionskonstante h in F_u nicht mehr gleich, sondern größer ist als die erwartungsmäßige Präzisionskonstante

$$\sqrt{\frac{n}{2pq}} \text{ resp. } \sqrt{\frac{n}{2p_0 q_0}}, \text{ wo } q_0 = 1 - p_0.$$

Bei übernormaler Dispersion hingegen ist für die Reihe $p', p'', p''', \dots$ ebenfalls die Funktion F_u maßgebend, nur daß für h statt der erwartungsmäßigen Präzisionskonstante $\sqrt{\frac{n}{2p_0 q_0}}$ ein kleinerer Wert zu setzen ist.

Deutet eine unternormale Dispersion darauf hin, daß eine Ursache oder ein Ursachenkomplex im Spiel sein muß, der auf die Schwankungen der empirischen Wahrscheinlichkeitswerte ausgleichend einwirkt, so ist andererseits eine übernormale Dispersion am besten aus der Annahme erklärlich, daß den einzelnen Versuchsreihen verschiedene abstrakte Wahrscheinlichkeiten entsprechen, die sich jedoch so verhalten, als stellten sie mit zufälligen Fehlern behaftete Ausdrücke einer gemeinsamen abstrakten Wahrscheinlichkeit dar.

Sämtliche Fälle nun, die weder unter die Form der normalen, noch der unternormalen oder übernormalen Dispersion zu bringen sind, werde ich als Fälle unregelmäßiger Dispersion bezeichnen. Letztere ist nur mit der Vorstellung vereinbar, daß die den Zahlenwerten $p', p'', p''', \dots$ zu Grunde liegende abstrakte Wahrscheinlichkeit sich von Versuchsreihe zu Versuchsreihe ändert, und zwar nicht mehr „zufällig“, wie es bei übernormaler Dispersion der Fall ist. Hier bilden die Werte $p', p'', p''', \dots$ nach Lexis eine symptomatische Reihe¹⁾. *«Symptomatische Reihe»*

Ob man es also bei zwei Verhältniszahlen oder aber bei einer längeren Reihe solcher Zahlen zu prüfen unternimmt, inwiefern die zu Tage tretenden numerischen Differenzen resp. Schwankungen dem Zufall zuzuschreiben seien, beide Male kommt es auf die Berechnung der erwartungsmäßigen Präzisionskonstante an. Die Folge einer unrichtigen Berechnung wird nun verschieden sein, je nachdem man die Präzision zu hoch oder zu niedrig veranschlagt hat. Im ersten Fall wird man geneigt sein, die Differenzen zwischen zwei empirisch gewonnenen Wahrscheinlichkeitswerten oder die Schwankungen bei einer Anzahl solcher Werte auf Ungleichheit der in Frage stehenden abstrakten Wahrscheinlichkeiten, die den einzelnen zu vergleichenden statistischen Massen entsprechen, schon dann zurückzuführen, wenn jene Differenz oder diese Schwankungen bei korrekter Berechnung der Präzision noch als Wirkung zufälliger Ursachen erscheinen würden. Im zweiten Fall dagegen wird man dazu verleitet sein können, als zufällige solche Differenzen oder Schwankungen anzusehen, die bei korrekter Berechnung der Präzision auf Ungleichheit der abstrakten Wahrscheinlichkeiten hindeuten würden.

So ist denn die Eingangs gestellte Frage²⁾ dahin zu präzisieren,

1) Für weitere Ausführungen siehe Lexis, Zur Theorie der Massenerscheinungen.
2) S. 641—42.

ob in der Statistik bei Bestimmung der Spielräume für die Wirkung zufälliger Ursachen nicht dadurch Irrtümer entstehen mögen, daß bei Berechnung der Präzisionskonstanten von dem Durchschnittscharakter der in Frage stehenden Wahrscheinlichkeiten abgesehen wird.

Ich erinnere an die früheren Bezeichnungen, wonach einem aus n Versuchen ermittelten Wahrscheinlichkeitswert

$$p' = \frac{n_1}{n} p'_1 + \frac{n_2}{n} p'_2 + \frac{n_3}{n} p'_3 + \dots$$

die abstrakte Wahrscheinlichkeit

$$p = \frac{z_1}{z} p_1 + \frac{z_2}{z} p_2 + \frac{z_3}{z} p_3 + \dots$$

entspricht.

Es ist aber vorhin nicht näher angegeben worden, in welcher Beziehung die Totalgesamtheit n der beobachteten Fälle hinsichtlich ihrer Zusammensetzung aus einzelnen Teilgesamtheiten zu der Totalgesamtheit z aller möglichen Fälle steht. Es kommt nämlich in Betracht, ob die n Versuche mit oder aber ohne Rücksicht auf den Umstand vorgenommen werden, daß die Totalgesamtheit z in Teilgesamtheiten mit ungleichen Spezialwahrscheinlichkeiten ($p_1, p_2, p_3 \dots$) zerfällt.

Solch eine Rücksichtnahme auf die Ungleichartigkeit der in Frage stehenden Masse findet z. B. statt, indem im voraus bestimmt wird, es sollen an jeder einzelnen Teilgesamtheit möglicher Fälle $z_1, z_2, z_3 \dots$ so viele, nämlich $n_1, n_2, n_3 \dots$ Versuche gemacht werden, als sich aus den Proportionen

$$\frac{n_1}{n} = \frac{z_1}{z}, \quad \frac{n_2}{n} = \frac{z_2}{z}, \quad \frac{n_3}{n} = \frac{z_3}{z} \dots$$

ergibt. So werden die Näherungswerte $p'_1, p'_2, p'_3, \dots$ der Spezialwahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, p_3, \dots$ ermittelt und der Ausdruck

$$\frac{z_1}{z} p'_1 + \frac{z_2}{z} p'_2 + \frac{z_3}{z} p'_3 + \dots = p'$$

erscheint als empirischer Wert der in Frage stehenden Wahrscheinlichkeit p . Setzt man

$$\frac{z_1}{z} = g_1, \quad \frac{z_2}{z} = g_2, \quad \frac{z_3}{z} = g_3 \dots,$$

so erhält man

$$p' = g_1 p'_1 + g_2 p'_2 + g_3 p'_3 + \dots$$

Bei einer zweiten und dritten Reihe von je n Versuchen würde man, wenn man ähnlich verführe, auf empirische Spezialwahrscheinlichkeiten $p''_1, p''_2, p''_3 \dots$ und $p'''_1, p'''_2, p'''_3 \dots$ und auf empirische Generalwahrscheinlichkeiten

$$p'' = g_1 p''_1 + g_2 p''_2 + g_3 p''_3 + \dots$$

und

$$p''' = g_1 p'''_1 + g_2 p'''_2 + g_3 p'''_3 + \dots$$

kommen. Wie man sieht, unterscheiden sich die einzelnen empirischen Werte der Generalwahrscheinlichkeit p von einander durch die empirischen Werte der Spezialwahrscheinlichkeiten, von denen sie abhängen und die unter der Wirkung zufälliger Ursachen sich von Versuchsreihe zu Versuchsreihe ändern. Dagegen bleiben die Koeffizienten $g_1, g_2, g_3 \dots$ bei jeder Versuchsreihe dieselben und da nun letztere Zahlenreihe nichts anderes als die Art der Zusammensetzung der in Frage stehenden Generalwahrscheinlichkeit aus Spezialwahrscheinlichkeiten ausdrückt, so nenne ich in diesem Fall die Generalwahrscheinlichkeit p mit Bezugnahme auf die Art ihrer aposteriorischen Ermittlung eine konstant zusammengesetzte Durchschnittswahrscheinlichkeit.

Wenn nun aber die Bestimmung des Näherungswertes von p aus der Erfahrung ohne Rücksicht auf die Zusammensetzung der Totalgesamtheit aller möglichen Fälle z aus Teilgesamtheiten $z_1, z_2, z_3 \dots$ erfolgt, mithin so, daß die n Versuche unmittelbar an der Totalgesamtheit aller möglichen Fälle z gemacht werden, so ist es im voraus nicht bekannt, auf welche Teilgesamtheit aller möglichen Fälle sich jeder Einzelversuch bezieht, und die Zerlegung der Totalgesamtheit n der beobachteten Fälle in Teilgesamtheiten $n_1, n_2, n_3 \dots$ kann erst nachträglich durchgeführt werden. Nach demselben Prinzip kann auch die Gesamtzahl m der dem Eintreten des Ereignisses günstigen Fälle in Teilgesamtheiten $m_1, m_2, m_3 \dots$ zerlegt werden. Es sei den früheren Bezeichnungen analog

$$\frac{m}{n} = p', \quad \frac{m_1}{n_1} = p'_1, \quad \frac{m_2}{n_2} = p'_2, \quad \frac{m_3}{n_3} = p'_3 \dots$$

Auch hier besteht die Gleichung

$$p' = \frac{n_1}{n} p'_1 + \frac{n_2}{n} p'_2 + \frac{n_3}{n} p'_3 + \dots$$

aber es leuchtet ein, daß den Gleichungen

$$\frac{n_1}{n} = \frac{z_1}{z}, \quad \frac{n_2}{n} = \frac{z_2}{z}, \quad \frac{n_3}{n} = \frac{z_3}{z} \dots$$

nur mit einer gewissen Annäherung, die um so größer sein wird, je zahlreicher die Versuche sind, die auf jede Teilgesamtheit entfallen, entsprochen wird. Die Verhältniszahlen

$$\frac{n_1}{n} = g'_1, \quad \frac{n_2}{n} = g'_2, \quad \frac{n_3}{n} = g'_3 \dots$$

stellen vielmehr in diesem Fall empirische Wahrscheinlichkeitswerte dar, denen die abstrakten Wahrscheinlichkeiten

$$g_1 = \frac{z_1}{z}, \quad g_2 = \frac{z_2}{z}, \quad g_3 = \frac{z_3}{z} \dots$$

zu Grunde liegen. Bei einer zweiten resp. dritten Reihe von n Versuchen würde man statt $g'_1, g'_2, g'_3 \dots$ abweichende Zahlenwerte $g''_1, g''_2, g''_3 \dots$ resp. $g'''_1, g'''_2, g'''_3 \dots$ und statt

$$p' = g'_1 p'_1 + g'_2 p'_2 + g'_3 p'_3 + \dots$$

eine neue Größe

$$p'' = g''_1 p''_1 + g''_2 p''_2 + g''_3 p''_3 + \dots$$

resp.

$$p''' = g'''_1 p'''_1 + g'''_2 p'''_2 + g'''_3 p'''_3 + \dots$$

erhalten. Somit sind die numerischen Unterschiede zwischen den einzelnen Werten der Generalwahrscheinlichkeit p sowohl durch die zufälligen Aenderungen, denen die empirischen Werte der betreffenden Spezialwahrscheinlichkeiten unterliegen, als auch durch ähnliche Aenderungen in den Werten der Koeffizienten, mit denen die ersteren versehen sind, bedingt. Eine Generalwahrscheinlichkeit, deren aposteriorische Bestimmung in gezeigter Weise erfolgt, nenne ich eine Durchschnittswahrscheinlichkeit im eigentlichen Sinn.

Die soeben erörterte Einteilung der Durchschnittswahrscheinlichkeiten in zwei Arten darf nicht als eine erschöpfende angesehen werden. Denn als Einteilungsgrund diente mir dabei die Thatsache der Berücksichtigung oder der Nichtberücksichtigung der Zusammensetzung der Totalgesamtheit aller möglichen Fälle aus Teilgesamtheiten, denen verschiedene Spezialwahrscheinlichkeiten zukommen. Nun braucht aber die Rücksichtnahme auf letzteren Umstand nicht notwendig in der für den Begriff der konstant zusammengesetzten Durchschnittswahrscheinlichkeit maßgebenden Form zum Ausdruck zu kommen. Es sind vielmehr sehr viele Modalitäten des Verfahrens denkbar¹⁾, auf die ich vorläufig nicht näher eingehen werde. Ein Fall ist jedoch schon hier besonders hervorzuheben. Man stelle sich nämlich vor, daß bei jedem Versuch, die Teilgesamtheiten $z_1, z_2, z_3 \dots$ aller möglichen Fälle getrennt vorliegen und daß jedesmal durch Auslosung bestimmt wird, an welcher Teilgesamtheit aller möglichen Fälle der nächste Einzelversuch vorzunehmen sei, wobei $g_1, g_2, g_3 \dots$ die bei jedem Einzelversuch geltenden Wahrscheinlichkeiten für die Teilgesamtheiten $z_1, z_2, z_3 \dots$ durch das Los getroffen zu werden, darstellen. Es bedarf kaum des Beweises (vgl. unten), daß sich in diesem Fall kein anderes Resultat herausstellen kann, als in dem anderen Fall, wo jeder Einzelversuch sich unmittelbar auf die Totalgesamtheit aller möglichen Fälle bezieht, und man kann wohl sagen, daß hier eine bloß scheinbare Rücksichtnahme auf den ungleichartigen Charakter der Totalgesamtheit z stattfindet. Darum hört eine mittels des geschilderten Verfahrens zur aposteriorischen Bestimmung gelangende Durchschnittswahrscheinlichkeit nicht auf, eine solche im eigentlichen Sinne zu sein.

Nun gilt es zu zeigen, wie die Präcision resp. der mittlere Fehler bei einer jeden der beiden charakterisierten Arten der Durchschnittswahrscheinlichkeit zu berechnen sei. Dem Wesen der Aufgabe wird hierbei die Annahme entsprechen, daß die in Frage stehenden Spezialwahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, p_3 \dots$ zugleich Elementarwahrscheinlichkeiten seien. Auch sollen die oben angeführten Formeln der Präcision

1) v. Kries, Prinzipien S. 105 ff.

und des mittleren Fehlers vorläufig als solche angesehen werden, die bloß für Elementarwahrscheinlichkeiten Giltigkeit haben.

Bezeichnet man mit $f_1, f_2, f_3 \dots$ die mittleren Fehler der aus $n_1, n_2, n_3 \dots$ Versuchen ermittelten Wahrscheinlichkeitswerte, denen die abstrakten Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, p_3 \dots$ entsprechen, und setzt man $1 - p_1 = q_1, 1 - p_2 = q_2, 1 - p_3 = q_3 \dots$, so erhält man die Formeln

$$f_1 = \sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1}}, \quad f_2 = \sqrt{\frac{p_2 q_2}{n_2}}, \quad f_3 = \sqrt{\frac{p_3 q_3}{n_3}} \dots$$

Man nenne ferner f_0 den mittleren Fehler der konstant zusammengesetzten Durchschnittswahrscheinlichkeit

$$p = g_1 p_1 + g_2 p_2 + g_3 p_3 + \dots$$

Die Koeffizienten $g_1, g_2, g_3 \dots$ sind hier als konstante Größen zu betrachten und für diesen Fall wird in der Wahrscheinlichkeitsrechnung die Formel abgeleitet

$$f_0 = \sqrt{g_1^2 f_1^2 + g_2^2 f_2^2 + g_3^2 f_3^2 + \dots},$$

die sich in

$$f_0 = \sqrt{\left(\frac{n_1}{n}\right)^2 \frac{p_1 q_1}{n_1} + \left(\frac{n_2}{n}\right)^2 \frac{p_2 q_2}{n_2} + \left(\frac{n_3}{n}\right)^2 \frac{p_3 q_3}{n_3} + \dots}$$

und schließlich in

$$f_0 = \sqrt{\frac{g_1 p_1 q_1 + g_2 p_2 q_2 + g_3 p_3 q_3 + \dots}{n}}$$

verwandelt.

Die angedeutete Art der Ableitung letzterer Formel setzt voraus, daß nicht nur die Zahl n , sondern auch die Zahlen $n_1, n_2, n_3 \dots$ bereits große Zahlen seien. Indessen erweist sich dieselbe Formel in Poisson's Darstellung als unabhängig von jener Voraussetzung, indem nämlich den Ausgangspunkt der Betrachtung bei ihm der Fall bildet, wo die Teilgesamtheiten $n_1, n_2, n_3 \dots$ aus je einem Versuch bestehen, so daß beim ersten Versuch die Elementarwahrscheinlichkeit c_1 gilt, bei dem zweiten c_2 , bei dem dritten $c_3 \dots$, bei dem n^{ten} c_n . Poisson entwickelt die Formel

$$f_0 = \sqrt{\frac{c_1(1-c_1) + c_2(1-c_2) + \dots + c_n(1-c_n)}{n^2}},$$

aus der die vorhin angeführte Formel direkt ableitbar ist¹⁾.

Hätte man nun den mittleren Fehler von p ohne Rücksicht darauf berechnet, daß man es hier mit einer konstant zusammengesetzten Durchschnittswahrscheinlichkeit zu thun hat, so würde sich der Ausdruck

1) Poisson, Recherches sur la probabilité des jugements, 1837, No. 94—95, und Lexis, Einleitung in die Th. der Bev.-Statistik, § 80, Formel μ .

$$f = \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

ergeben haben. Es gilt nunmehr f_0 mit f zu vergleichen.

Zunächst ist es ein Leichtes, sich von der Richtigkeit folgender Gleichungen zu überzeugen

$$\begin{aligned} p_1 q_1 &= pq + (p-q)(p-p_1) - (p-p_1)^2 \\ p_2 q_2 &= pq + (p-q)(p-p_2) - (p-p_2)^2 \\ p_3 q_3 &= pq + (p-q)(p-p_3) - (p-p_3)^2 \\ &\dots \end{aligned}$$

Multipliziert man sodann die erste Gleichung mit g_1 , die zweite mit g_2 , die dritte mit g_3 und addiert einmal die linken und ein anderes Mal die rechten Seiten sämtlicher Gleichungen, so erhält man

$$g_1 p_1 q_1 + g_2 p_2 q_2 + g_3 p_3 q_3 + \dots = pq - \{g_1(p-p_1)^2 + g_2(p-p_2)^2 + g_3(p-p_3)^2 + \dots\}$$

Der in Klammern eingeschlossene Ausdruck ist aber auf jeden Fall positiv, es sei denn, dass die Bedingung

$$p_1 = p_2 = p_3 = \dots = p$$

erfüllt ist, für welchen Fall der gesagte Ausdruck sich in Null verwandeln würde. Dann aber wäre p keine Durchschnittswahrscheinlichkeit mehr, sondern eine Elementarwahrscheinlichkeit. Mithin hat man ganz allgemein

$$g_1 p_1 q_1 + g_2 p_2 q_2 + g_3 p_3 q_3 + \dots < pq$$

und folglich

$$f_0 < f.$$

Einer konstant zusammengesetzten Durchschnittswahrscheinlichkeit kommt also ein kleinerer, mittlerer Fehler, resp. eine grössere Präcision zu, als einer Elementarwahrscheinlichkeit von gleicher numerischer GröÙe bei gleicher Zahl von Versuchen entsprechen würde. Eine Reihe empirischer Werte einer konstant zusammengesetzten Durchschnittswahrscheinlichkeit würde daher eine unternormale Dispersion aufweisen, falls jedem einzelnen jener Werte die gleiche abstrakte Wahrscheinlichkeit zu Grunde gelegen hätte¹⁾.

Geht man nun zu dem Fall einer Durchschnittswahrscheinlichkeit im eigentlichen Sinne über, so gebührt Poisson das Verdienst, gezeigt zu haben, daß in diesem Fall genau dieselbe Formel der Präcision gilt, wie bei einer Elementarwahrscheinlichkeit, und darin eben besteht die Verallgemeinerung, die er dem Theorem Jacob Bernoulli's zu Theil werden ließ. In dieser Verallgemeinerung ist letzterer Satz als „Gesetz der großen Zahlen“ von Poisson verkündet worden und kann wie folgt formuliert werden:

¹⁾ Cournot, Die Grundlehren der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Siebentes Kapitel, §§ 77—78; v. Kries, Prinzipien S. 108—109.

„Kommt dem Eintreten des Ereignisses E eine Wahrscheinlichkeit p zu, so wird bei n Versuchen das Verhältnis der dem Eintreten von E günstigen Fälle m zu der Gesamtzahl der beobachteten Fälle, also das Verhältnis $\frac{m}{n}$ um so weniger von der Größe p erwartungsmäßig abweichen, je größer n ist, und zwar besteht eine angebbare Wahrscheinlichkeit F_u für $\frac{m}{n}$ in den Grenzen von

$$p - \frac{u \sqrt{2pq}}{\sqrt{n}} \text{ bis } p + \frac{u \sqrt{2pq}}{\sqrt{n}}$$

enthalten zu werden, mag dabei p eine Elementarwahrscheinlichkeit oder aber eine Durchschnittswahrscheinlichkeit im eigentlichen Sinne sein ¹⁾.“

Kaum dürfte es einen anderen Lehrsatz geben, der so vielfach auf Widerspruch gestoßen ist, wie das Gesetz der großen Zahlen namentlich in der ihm von Poisson verliehenen Ausdehnung auf den Fall einer Durchschnittswahrscheinlichkeit im eigentlichen Sinne. Und doch beruhen jene Angriffe meistens auf Mißverständnissen und Mißdeutungen, die sich als solche erweisen müssen, sobald man den wahren Sinn des in Frage stehenden Lehrsatzes und einiger mit demselben zusammenhängenden Begriffe richtig und zwar an der Hand der Poisson'schen Darstellung selbst erkannt hat.

Zuvörderst sind die Ausdrücke „Chance“ und „Ursache“ (cause), die bei Poisson überall vorkommen, wo es sich um eine Durchschnittswahrscheinlichkeit i. eig. S. handelt, zu erklären. Es genügt vorläufig zu sagen, daß unter Chance dasjenige zu verstehen ist, was ich Elementarwahrscheinlichkeit genannt habe. Wäre nun die Teilgesamtheit aller möglichen Fälle, auf die sich der vorzunehmende Einzelversuch jeweils bezieht, im voraus bekannt, so erschiene die Chance als alleinbestimmender Faktor für die auf Eintreten oder Nicht-eintreten des Ereignisses E gerichtete Erwartungsbildung. Stellt man sich aber als eine ungewisse — bloß mehr oder weniger wahrscheinliche — Thatsache vor, ob der zu beobachtende Einzelfall zu der einen oder der anderen Teilgesamtheit aller möglichen Fälle gehöre, so gewinnt diese Zugehörigkeit mit Rücksicht auf die Ungleichheit der Chancen, die den einzelnen Teilgesamtheiten zukommen, die Bedeutung eines zweiten, die Erwartungsbildung mitbedingenden Faktors und wird in diesem Sinne als „Ursache“ bezeichnet.

1) Bewiesen ist der Satz im 4. Kapitel der „Recherches sur la probabilité des jugements“, speziell in No. 109. Die Präzisionsformel für den Fall einer Durchschnittswahrscheinlichkeit ist auf S. 297 (S. 257 der deutschen Ausgabe von Schnuse) angeführt und stimmt mit der in No. 82—83, S. 209 (deutsch S. 175) erhaltenen für den Fall einer Elementarwahrscheinlichkeit überein. S. auch Lexis, Einleitung u. s. w. § 81. Die Zahlen der Versuche, die im Fall einer Durchschnittswahrscheinlichkeit im eig. S. auf einzelne Teilgesamtheiten entfallen, brauchen, genau so wie im Fall einer konstant zusammengesetzten Durchschnittswahrscheinlichkeit, nicht groß zu sein, sondern können sich auf 1 und 0 reduzieren. Vergl. Cournot, Grundlehren S. 115.

Der für den Begriff der Durchschnittswahrscheinlichkeit i. eig. S. maßgebende Vorgang läßt sich demnach in Poisson's Ausdrucksweise so charakterisieren: das Ereignis E kann einer der Ursachen $C_1, C_2, C_3 \dots$ sein Eintreten verdanken, und zwar tritt bei jedem Einzelversuch eine und nur eine der genannten Ursachen in die Erscheinung. Es ist ferner p_1 die Chance, die unter der Wirkung der Ursache C_1 für das Eintreten von E besteht, ähnlich entsprechen den Ursachen $C_2, C_3 \dots$ die Chancen $p_2, p_3 \dots$. Ob aber die eine oder die andere Ursache bei einem gegebenen Einzelversuch zur Geltung kommt, ist im voraus nicht bekannt, sondern mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit anzunehmen. Stellen $g_1, g_2, g_3 \dots$ die Wahrscheinlichkeiten des Eintretens der Ursachen $C_1, C_2, C_3 \dots$ dar, so ergibt sich

$$p = g_1 p_1 + g_2 p_2 + g_3 p_3 + \dots$$

als Ausdruck der in Frage stehenden Durchschnittswahrscheinlichkeit.

Die Reihe der Worte $g_1, g_2, g_3 \dots$ drückt nach Poisson das „Wahrscheinlichkeitsgesetz der Ursachen“ (la loi de probabilité des causes) aus und wird als ungeändert für den ganzen Verlauf der n Versuche angenommen. (Ebenso sind die den einzelnen Ursachen entsprechenden Chancen als constant gedacht¹⁾.) Dies ist namentlich denjenigen gegenüber hervorzuheben, die da meinen, daß bei Poisson die Veränderungen der Chancen von Versuch zu Versuch ganz regellos vor sich gehen oder die bei einzelnen Versuchen in die Erscheinung tretenden Ursachen in absolut unbestimmter Weise aufeinanderfolgen dürften. Eine scheinbare Stütze finden dahin gehende Behauptungen in einigen Stellen der „Recherches“, wo thatsächlich von „Regellosigkeit“ in der Aufeinanderfolge der Ursachen die Rede ist²⁾. Allein damit wird nur gemeint, daß jene Aufeinanderfolge durch Zufall regiert wird, und so der Gegensatz dieses Falles zu jenem markiert, wo entweder die Aufeinanderfolge der Chancen resp. der Ursachen oder doch die Zahlen der Versuche, die unter der Wirkung der einzelnen Ursachen vorzunehmen sind, im voraus festgesetzt werden (der vorhin erörterte Fall einer konstant zusammengesetzten Durchschnittswahrscheinlichkeit).

Daß die hier dem Gesetz der großen Zahlen gegebene Deutung der Auffassung Poisson's selbst genau entspricht, geht aus den zwei sich bei ihm vorfindenden Beispielen mit hervor³⁾.

1) S. No. 54, S. 143—144, auch S. 139 und 314, wo die im Text namhaft gemachten Bedingungen ausdrücklich ausgesprochen sind. Für das richtige Verständnis des Gesetzes der großen Zahlen ist der letzte Teil des 2. Kapitels (No. 51—65), der wohl auch dem nicht mathematischen Leser keine Schwierigkeiten bieten dürfte, von größter Wichtigkeit.

2) S. 13 behauptet Poisson, sein „Gesetz der großen Zahlen“ sei auf Dinge anwendbar, „qui ont, en général, des chances continuellement variables, le plus souvent dans aucune régularité“; ähnlich auf S. 7: „des causes qui varient irrégulièrement“, oder noch S. 147: „ces chances varient d'une épreuve à une autre, et le plus souvent aussi, d'une manière tout-à-fait irrégulière.“

3) No. 55—56.

Im ersten Beispiel hat man eine Anzahl von Urnen $C_1, C_2, C_3 \dots C_v$, die mit weißen und schwarzen Kugeln gefüllt sind, und es soll c_1 die Chance dafür angeben, daß bei einer aus der Urne C_1 vorgenommenen Ziehung eine weiße Kugel erscheinen wird; desgleichen ist c_2 die Chance, eine weiße Kugel zu erhalten, wenn man aus der Urne C_2 eine Kugel zieht $\dots$ schließlich ist c_v die der Urne C_v entsprechende Chance der Ziehung einer weißen Kugel. Man greift aufs Geratewohl eine Urne aus der ganzen Reihe heraus und ersetzt sie durch eine ähnliche Urne, d. h. durch eine Urne, welche die gleiche Chance der Ziehung einer weißen Kugel aufweist. Dann nimmt man in der nämlichen Weise eine zweite Urne heraus und ersetzt sie ebenfalls durch eine ihr ähnliche Urne, dann eine dritte u. s. f. also immer in der Weise, daß das Urnensystem $C_1, C_2, C_3 \dots C_v$ unverändert bleibt. (Das entspricht der Bedingung des Konstantbleibens des Wahrscheinlichkeitsgesetzes der Ursachen.) So bildet man eine unbestimmt fortgesetzte Urnenreihe $B_1, B_2, B_3 \dots$, die nur die gegebenen Urnen $C_1, C_2, C_3 \dots$ in mehr oder weniger häufiger Wiederholung enthalten wird. Es sei b_1 die Chance der Ziehung einer weißen Kugel aus B_1 , b_2 die Chance bei B_2 , b_3 bei B_3 u. s. f. Als dann wird die unbestimmt fortgesetzte Reihe $b_1, b_2, b_3 \dots$ nur die Chancen $c_1, c_2, c_3 \dots$ enthalten, wobei wiederum die Glieder der zweiten Reihe mehr als einmal in der ersten werden vorkommen können. Man ziehe nun eine Kugel aus B_1 , eine zweite aus B_2 , eine dritte aus B_3 u. s. w. bis auf die Urne B_μ inclusive. Führt man nun die zwei Bezeichnungen ein

$$\frac{1}{\mu}(b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_\mu) = \beta$$

und

$$\frac{1}{v}(c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_v) = \gamma$$

und setzt m für die Zahl der Fälle, in denen eine weiße Kugel erschienen ist, so ergibt sich bei sehr großem μ mit großer Annäherung

$$\frac{m}{\mu} = \beta, \quad (1)$$

dann aber auch

$$\frac{m}{\mu} = \gamma \quad (2)$$

Den Gleichungen (1) und (2) kommt aber ein verschiedener Grad der Annäherung zu, und zwar dürfte man einsehen, schon ohne die Hilfe der Rechnung in Anspruch zu nehmen, daß die Abweichung der Relation $\frac{m}{\mu}$ von β erwartungsmäßig kleiner sein muß als von γ (immer in der Voraussetzung, daß die Chancen $c_1, c_2, c_3 \dots$ nicht einander gleich sind). Ein genaues Maß für diesen Unterschied giebt die Präzisionskonstante ab, die sich bei β auf

$$\sqrt{\frac{\mu}{2 \{b_1(1-b_1) + b_2(1-b_2) + \dots\}}} = h_\beta$$

und bei γ auf

$$\sqrt{\frac{\mu}{2\gamma(1-\gamma)}} = h_\gamma$$

stellt. Es wäre ein Leichtes, an der Hand eines früher bewiesenen Satzes zu zeigen, daß der obere Ausdruck erwartungsmäßig größer ist als der untere. Der Wahrscheinlichkeit β mit der Präzision h_β einerseits und der Wahrscheinlichkeit γ mit der Präzision h_γ andererseits entsprechen zwei verschiedene Spielmodi. Damit nämlich bei einer Anzahl von Versuchsreihen, die je aus μ Versuchen bestehen und bei denen die Zahlen der gezogenen weißen Kugeln $m, m', m'' \dots$ sind, erwartet werden kann, daß die Relationen $\frac{m}{\mu} \frac{m'}{\mu} \frac{m''}{\mu} \dots$ gegen β konvergieren und eine der Präzision h_β entsprechende Dispersion aufweisen, wäre bei jeder Versuchsreihe an dem Urnensystem $B_1, B_2, B_3 \dots$ festzuhalten und stets aus einer jeden der genannten Urnen je eine Kugel zu ziehen. Soll hingegen die Wahrscheinlichkeit γ und die Präzision h_γ als maßgebend für die zu erwartenden Resultate erscheinen, so muß das Spiel dergestalt eingerichtet werden, daß bei der zweiten Versuchsreihe nicht mehr das Urnensystem $B_1, B_2, B_3 \dots$, sondern ein neues Urnensystem $B'_1, B'_2, B'_3 \dots$, das in ähnlicher Weise wie das erstere aus dem Urnensystem $C_1, C_2, C_3 \dots$ abzuleiten wäre, bei der dritten Versuchsreihe ein analoges Urnensystem $B''_1, B''_2, B''_3 \dots$ u. s. f. benutzt wird. Nur der zuletzt erwähnte Spielmodus ist dazu angethan, das Gesetz der großen Zahlen in der ihm von Poisson gegebenen Erweiterung zu exemplifizieren, während es sich beim ersten Spielmodus um eine konstant zusammengesetzte Durchschnittswahrscheinlichkeit handeln würde. Es ist kaum notwendig beizufügen, daß in dem angeführten Poisson'schen Beispiel für jede einzelne Urne dieselbe Wahrscheinlichkeit, nämlich $\frac{1}{\gamma}$, bei jedem Versuch besteht, getroffen zu werden und daß im Fall, wo diese Bedingung nicht erfüllt wäre, der Ausdruck für γ eine entsprechende Modifikation zu erfahren hätte.

In dem zweiten Poisson'schen Beispiel handelt es sich um eine sehr große Anzahl von 5-Francsstücken — es seien dies $A_1, A_2, \dots, A_v$ — die in die Luft aufgeworfen werden und dann entweder mit der Kopf- oder mit der Schriftseite nach oben gekehrt auf die Erde zurückfallen. Es sei bei einem beliebigen Stück A_i die Chance des Erscheinens von „Kopf“ a_i . Die in Betracht kommende mittlere Chance ist

$$\alpha = \frac{1}{v} (a_1 + a_2 + \dots + a_v)$$

und bei einer sehr großen Zahl μ von Würfeln bestimmt sich α mit großer Wahrscheinlichkeit aus

$$\alpha = \frac{m}{\mu},$$

wo m die Zahl der Fälle angiebt, bei denen „Kopf“ erschienen ist. „Wirft man nun“, sagt Poisson, „dieselben 5 Francsstücke oder allgemeiner μ' andere, aber gleich geartete 5-Francsstücke auf, die aus derselben Fabrikation hervorgegangen sind, so wird man mit großer Wahrscheinlichkeit

$$\frac{m'}{\mu'} = \frac{m}{\mu}$$

erhalten müssen.“ Hier ist m' die Zahl der Fälle, bei denen im zweiten Fall „Kopf“ erschienen ist. „Aber diese Relationen $\left(\frac{m}{\mu} \text{ und } \frac{m'}{\mu'}\right)$ werden im allgemeinen nicht einander gleich sein, wenn die in einer jeden der beiden Versuchsreihen benutzten Münzstücke verschiedener Art oder aus verschiedener Fabrikation hervorgegangen sein würden.“

Sind in diesem Beispiel die Bedingungen, an welche die Anwendbarkeit des Gesetzes der großen Zahlen geknüpft ist, nicht ganz streng formuliert worden, so darf man doch Poisson nicht vorwerfen, im gegebenen Fall die einzuhaltenden Schranken überschritten zu haben. Denn der wahrscheinlichkeitsrechnerische Ausdruck für die „gleiche Fabrikation“ liegt auf der Hand. Lassen sich nämlich nach dem numerischen Werte der einem jeden Münzstücke zukommenden Chance a_i verschiedene Kategorien von 5-Francsstücken unterscheiden, so ist bei jedem herzustellenden oder hergestellten Münzstück mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit zu erwarten, daß dasselbe der einen oder der anderen Kategorie angehöre. Die Reihe solcher Wahrscheinlichkeiten drückt eben das hier in Betracht kommende „Wahrscheinlichkeitsgesetz der Ursachen“ aus und unter gleicher Fabrikation ist offenbar nichts anderes zu verstehen als das Konstantbleiben der Zahlenwerte, die die genannte Reihe bilden.

So würde sich auch dieses zweite Beispiel unter das allgemeine Schema bringen lassen, und es dürfte im allgemeinen klar sein, welchen Sinn Poisson selbst dem Gesetz der großen Zahlen beigelegt hat.

Indessen wird das Gesetz der großen Zahlen sogar in Werken hervorragender, zumal mathematisch gebildeter Autoren — von „gemeinen“ Statistikern nicht zu reden — nur gar zu oft in schiefer Beleuchtung vorgeführt und dadurch der Name Poisson in Mißkredit gebracht.

Gegen jede Erwartung findet sich z. B. bei Quetelet an der maßgebenden Stelle seiner „Lettres sur la théorie des probabilités“¹⁾ eine Darlegung des Gesetzes der großen Zahlen, die von einer restringierten Auffassung des Poisson'schen Lehrsatzes zu zeugen scheint.

1) Lettres sur la théorie des probabilités appliquée aux sciences morales et politiques. Bruxelles 1846. 30^e lettre, p. 213—215.

An das zuletzt erwähnte Beispiel Poisson's anknüpfend, sucht Quetelet das Gesetz der großen Zahlen wie folgt verständlich zu machen.

„Hat man“, meint er, „eine Münze 1000mal in die Höhe geworfen und sind dabei die Fälle, bei denen „Kopf“ zu den Fällen, bei denen „Schrift“ erschienen ist, ein Zahlenverhältnis 3:2 vorgekommen, so wird man auf Grund des Bernoulli'schen Lehrsatzes bei weiteren mit derselben Münze vorzunehmenden Versuchen dasselbe Verhältnis zu erwarten berechtigt sein.“ Dies würde, nach dem Poisson'schen Lehrsatz, auch dann noch der Fall sein, wenn die Versuche, statt mit demselben, mit verschiedenen Münzstücken gemacht würden, dabei aber die den einzelnen Münzstücken zukommenden Wahrscheinlichkeiten des Eintretens von „Kopf“ und „Schrift“ um die mittleren, durch die Herstellungsart und die physische Beschaffenheit der Münzstücke determinierten Wahrscheinlichkeiten, die sich im gegebenen Fall auf $\frac{3}{5}$ und $\frac{2}{5}$ stellen, leicht variieren würden. Daß das Bernoulli'sche Prinzip auch hier anwendbar sei, sei von Poisson mit Hilfe einer gelehrten Analyse bewiesen worden. „Zum Glück“, fährt Quetelet fort, „bedarf es der Hilfe der Mathematik nicht, um zu begreifen, daß die kleinen Aenderungen, die man beim Uebergang von dem einen Münzstück zu dem anderen wahrnimmt, unter die Wirkungen zufälliger Ursachen, die sich auf die Dauer, bei ausreichender Vermehrung der Versuche gegenseitig aufheben, eingereiht werden können, so daß sich ähnliche Ergebnisse herausstellen müssen, als wenn man sämtliche Versuche tatsächlich mit ein und demselben Münzstück gemacht hätte. In dem uns beschäftigenden Fall sind die Versuche sehr zu vermehren: und das ist der Grund, weshalb Poisson die Ausdehnung des Bernoulli'schen Prinzips das Gesetz der großen Zahlen genannt hat.“

Während also bei Poisson, sowohl im allgemeinen, wie im Beispiel mit den 5-Francsstücken, „das Wahrscheinlichkeitsgesetz der Ursachen“ eine beliebige Form annehmen darf, unterwirft es Quetelet einer bestimmten Bedingung, der zufolge die in Betracht kommenden Chancen nur in gewissen Grenzen, und zwar um einen gegebenen Mittelwert zu schwanken haben. Diese durch den wirklichen Sachverhalt nicht gebotene Einschränkung des Poisson'schen Lehrsatzes brachte es mit sich, daß letzterer in die Ausführungen über die Art der Wirkung zufälliger Ursachen, wohin er gar nicht gehört, von Quetelet eingeführt worden ist.

Auch in einer anderen Beziehung hat sich Quetelet eine irrtümliche Auffassung des Gesetzes der großen Zahlen zu Schulden kommen lassen. Er glaubt nämlich, daß unter solchen Bedingungen des Spieles oder der Erfahrung, wie sie der Poisson'sche Lehrsatz in der ihm eigentümlichen Erweiterung voraussetzt, sich größere Schwankungen resp. eine kleinere Konstanz der Resultate, d. h. der bei einzelnen Versuchsreihen zu erhaltenden empirischen Werte der gesuchten Wahrscheinlichkeit, herausstellen müßte als unter Bedingungen, die dem Bernoulli'schen Theorem entsprechen würden. Dies trifft aber nicht

zu, weil die in Betracht kommende Präcision nur von der Zahl der Versuche und von dem Wert der betreffenden abstrakten Wahrscheinlichkeit, einerlei, ob letztere Elementar- oder Durchschnittswahrscheinlichkeit ist, abhängt¹⁾.

Quetelet dürfte mit seiner Restriktion des Poisson'schen Lehrsatzes eine ganz exklusive Stellung einnehmen. Sonst besteht die Tendenz, dem Gesetz der großen Zahlen eine viel größere Tragweite beizulegen, als der Auffassung dessen Urhebers entspricht.

So liest man bei Bertrand²⁾ folgendes: „Lorsque la probabilité d'un évènement est variable d'une épreuve à l'autre, le théorème de Bernoulli n'est plus applicable. La généralisation proposée par Poisson sous le nom de loi des grands nombres manque non seulement de rigueur, mais de précision. Les conditions supposées dans l'énoncé échappent par le vague à toute appréciation mathématique.“

Der von Bertrand erhobene Einwand wird aber hinfällig, sobald man sich vergegenwärtigt, daß, seiner Behauptung zum Trotz, die in Frage stehende Wahrscheinlichkeit sich von Versuch zu Versuch bei Poisson nicht ändert. Es wechseln nur die Chancen, die bei jedem Versuch in Betracht kommen, während die Wahrscheinlichkeit, mit der vor jedem Versuch das Eintreten des betreffenden Ereignisses zu erwarten ist, stets dieselbe bleibt.

Um so befremdender erscheint die citierte Aeüßerung Bertrand's, als Poisson selbst mehr als einmal Veranlassung gefunden hat, dies zu betonen³⁾.

Dürfte nicht vielmehr die Frage am Platze sein, ob denn der Poisson'sche Lehrsatz eine Verallgemeinerung des Bernoulli'schen wirklich darstelle und ob der Fall einer Durchschnittswahrscheinlichkeit im eigentlichen Sinne eine besondere Beweisführung auch thatsächlich erheische⁴⁾?

Der Urheber des Gesetzes der großen Zahlen hat selbst den Einwand vorgesehen und ihn so zu beseitigen geglaubt. Auf das angeführte Beispiel mit den Urnen Bezug nehmend, behauptet Poisson, daß, bevor

1) o. c. S. 213. „Les petites variations qui altèrent une cause et qui ne s'exercent que dans des limites très étroites, peuvent être regardées comme les effets de causes accidentelles qui, déjà, pouvaient influer sur le résultat final. De sorte qu'en définitive, la cause variable peut être considérée comme constante, et les causes accidentelles, devenues plus nombreuses et plus variées, font osciller le résultat cherché entre des limites d'erreur plus larges.“ Quetelet scheint hier den Fall übernormaler Dispersion angedeutet zu haben. Diesem Fall würde jedoch nicht die von Poisson im Beispiel mit 5-Francsstücken angenommene Einrichtung des Spieles entsprechen, sondern die folgende: es wären etwa 1000 Versuche mit der Münze A_1 , dann 1000 Versuche mit A_2 , 1000 mit A_3 u. s. f. zu machen. Uebernormale Dispersion wäre zu erwarten, wenn die Chancen $a_1, a_2, a_3, \dots$ das sog. Gauss'sche Fehlergesetz erfüllen würden (vergl. oben S. 648).

2) J. Bertrand, Calcul des Probabilités, 1889, p. 94.

3) S. 139—140 der „Recherches“, wo P. sein Gesetz der großen Zahlen unter das Bernoulli'sche Theorem subsumiert. Vergl. auch S. 146—147.

4) Bertrand (o. c., Préface, S. XXXI—XXXII) citiert die von Poisson gegebene Formulierung des Gesetzes der großen Zahlen und fügt hinzu: „Tel est le résumé fait par Poisson lui-même d'une découverte qui se distingue bien peu des lois connues du hasard, et à laquelle il a, à peu près seul je crois, attaché une grande importance.“

man das System $B_1, B_2, B_3 \dots$ gebildet hat, die Wahrscheinlichkeit des Erscheinens einer weißen Kugel bei irgend einer Ziehung gleich γ sei und für alle Ziehungen konstant bleibe. „Mais quoique elle soit la même pour tous les tirages, et que leur nombre μ fût aussi grand qu'on voudra, nous ne serions pas autorisés à en conclure, en vertu de la seule règle du n° 49 (das Theorem Bernouilli's), que le nombre m des extractions de boules blanches, des urnes B_1, B_2, B_3 etc. devra s'écarter très probablement fort peu du produit $\mu\gamma$; car on ne doit pas perdre de vue que cette règle est fondée sur la chance propre de l'événement que l'on considère, et non sur sa probabilité, ou la raison que nous pouvons avoir de croire qu'il arrivera¹⁾.“

Poisson scheint hier zwischen Chance und Wahrscheinlichkeit einen begrifflichen Unterschied statuieren zu wollen, der sich vielleicht mit den Bezeichnungen „objektiv“ und „subjektiv“ am besten charakterisieren ließe, und außerdem anzunehmen, daß es sich bei Bernouilli um eine „objektive“ Wahrscheinlichkeit handle.

Ohne auf den letzten Punkt näher eingehen zu wollen, erinnere ich daran, daß jene Unterscheidung zwischen „objektiven“ und „subjektiven“ Wahrscheinlichkeiten anerkanntermaßen nicht stichhaltig ist, weil jede gegebene Wahrscheinlichkeit einen bestimmten Wissens- oder Unwissenheitszustand voraussetzt und in diesem Sinn notwendig subjektiv ist²⁾. Mit dem Ausdruck Chance wollte Poisson offenbar den von v. Kries strenger definierten Begriff einer Wahrscheinlichkeit, der eine definitive Bedeutung zukommt — einer Elementarwahrscheinlichkeit — treffen. Denn jede Elementarwahrscheinlichkeit bezieht sich auf einen Wissenszustand, den man, nach gegebenen Bedingungen des Spieles oder der Erfahrung, nicht zu überschreiten vermag, und besitzt somit die Eigenschaft der Allgemeingiltigkeit, daher auch den Schein objektiven Bestehens, während bei einer Durchschnittswahrscheinlichkeit das Gegenteil statthat. Letztere, oder allgemeiner gefaßt, eine Generalwahrscheinlichkeit bezieht sich notwendigerweise auf einen anderen Wissenszustand, als die Spezialwahrscheinlichkeiten, aus denen sie zusammengesetzt ist. So ist im ersten Poisson'schen Beispiel bei der auf das Erscheinen einer weißen Kugel gerichteten Erwartungsbildung

1) Recherches, p. 147.

2) v. Kries, Principien, Kap. IV, § 7 und Kap. V, besonders § 6: Die logische Gleichartigkeit aller numerischen Wahrscheinlichkeiten. Vergl. auch S. 275: „Nicht selten wurden, in direktem Widerspruch mit dem allgemeinen Prinzip, [diese oder ähnliche] Wahrscheinlichkeiten als den betreffenden Ereignissen als solchen, ohne jede Rücksicht auf unseren Wissenszustand, zukommende erklärt. Als Beleg hierfür möge die folgende Stelle aus Poisson's Recherches dienen, in welchen der Unterschied zwischen „chance“ und „probabilité“ in einer, wie man wohl sagen darf, sehr wunderlichen Weise erörtert wird.“ Diese Stelle lautet: „Dans le langage ordinaire les mots chance et probabilité sont à peu près synonymes. Le plus souvent nous emploierons indifféremment l'un et l'autre; mais lorsqu'il sera nécessaire de mettre une différence entre leurs acceptions, on rapportera, dans cet ouvrage, le mot chance aux événements en eux-mêmes et indépendamment de la connaissance que nous en avons, et l'on conservera au mot probabilité sa définition précédente. Ainsi, un événement aura, par sa nature, une chance plus ou moins grande, connue ou inconnue; et sa probabilité sera relative à nos connaissances en ce qui le concerne“ (Recherches, p. 31). Siehe noch v. Kries, Ueber Poisson, S. 261.

die Wahrscheinlichkeit γ für denjenigen maßgebend, dem das Urnensystem $C_1, C_2, C_3 \dots$ bekannt ist, ohne daß oder bevor er davon, aus welcher Urne die Ziehung zu erfolgen hat, Kenntnis erlangt hat. Sobald aber letzteres geschehen, muß die Größe γ einer der Größen $c_1, c_2, c_3 \dots$ weichen. Ganz ähnlich verhält es sich mit dem zweiten Beispiel Poisson's und überhaupt mit allen Fällen, wo es sich um eine Generalwahrscheinlichkeit, resp. eine Durchschnittswahrscheinlichkeit handelt. In solchen Fällen springt der subjektive Charakter des Wahrscheinlichkeitsansatzes in die Augen.

Soviel zur Erklärung des citierten Passus aus Poisson. Es würde also nach dem Vorstehenden grundfalsch sein, sich mit Poisson einzubilden, er hätte einen Satz, der zuerst nur für „objektive“ Wahrscheinlichkeiten galt, auf „subjektive“ Wahrscheinlichkeiten ausgedehnt. Das Irrtümliche solch einer Auffassung soll an einem neuen Beispiel, das ich sofort folgen lasse, noch deutlicher dargethan werden. Dasselbe Beispiel wird uns, wie ich glaube, dazu führen, eine befriedigende Antwort auf die Frage zu geben, was denn das quid proprium der Erweiterung sei, die Poisson dem Bernoulli'schen Theorem zu teil werden ließ¹⁾.

Die Urne U ist mit s schwarzen, r roten, b blauen Kugeln gefüllt und es ist

$$z = s + r + b + \dots$$

die Gesamtzahl der in U enthaltenen Kugeln. Es sind ferner unter den schwarzen σ , unter den roten ϱ , unter den blauen $\beta \dots$ und im ganzen ζ massive und $s - \sigma$, resp. $r - \varrho$, resp. $b - \beta \dots$ und im ganzen $z - \zeta$ hohle Kugeln da. Zieht man nun eine Kugel aus U , wobei die Ziehung jeder Kugel als gleichmäßig gedacht werden soll, so ergibt sich $\frac{\zeta}{z} = p$ als Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit des Erscheinens einer massiven Kugel. Andererseits werden die Größen

$$g_1 = \frac{s}{z}, \quad g_2 = \frac{r}{z}, \quad g_3 = \frac{b}{z} \dots$$

die Wahrscheinlichkeiten des Erscheinens einer schwarzen, einer roten, einer blauen Kugel angeben. Dementsprechend werden die Resultate bei einer Reihe von n Ziehungen nach zwei verschiedenen Richtungen hin ins Auge gefaßt werden können: einmal nämlich wird es sich um die Zahlen der gezogenen massiven und hohlen Kugeln, ein zweites Mal um die Verteilung der gezogenen Kugeln nach den einzelnen Farbenkategorien handeln.

1) Indem ich hier und an anderen Stellen das Gesetz der großen Zahlen dem Bernoulli'schen Theorem gegenüber stelle, sehe ich ganz davon ab, daß bei Bernoulli das Abhängigkeitsverhältnis zwischen der oberen Grenze der Abweichung eines a posteriori zu ermittelnden Wertes einer Wahrscheinlichkeit von dem apriorischen Werte dieser Wahrscheinlichkeit und der Höhe der Wahrscheinlichkeit, mit der eine jene Grenze nicht überschreitende Abweichung zu erwarten sei, nicht durch die Funktion F_u (s. S. 645 Anm. 3) ausgedrückt wird, sondern sich ganz anders an der Hand etwas komplizierter Ungleichungen bestimmt. Vgl. Anm. 1, S. 654.

In erster Beziehung wird man bei großem n für das Verhältnis der gezogenen massiven Kugeln zu der Gesamtzahl der gezogenen Kugeln einen von p wenig abweichenden Zahlenwert erwarten müssen. Dabei wird es erlaubt sein, vollständig davon abzusehen, daß es unter den Kugeln schwarze, rote, blaue ... giebt, obzwar die Wahrscheinlichkeit p sehr wohl unter die Form einer Durchschnittswahrscheinlichkeit gebracht werden kann. Führt man nämlich die Bezeichnungen

$$\frac{\sigma}{s} = p_1, \frac{q}{r} = p_2, \frac{\beta}{b} = p_3 \dots$$

ein, so geben $p_1, p_2, p_3 \dots$ die Wahrscheinlichkeiten an für eine gezogene Kugel, von der man weiß, daß sie schwarz, oder roth, oder blau ist, zugleich massiv zu sein. Demnach hätte man

$$p = g_1 p_1 + g_2 p_2 + g_3 p_3 + \dots$$

Aehnlich würde in zweiter Beziehung keine Beeinflussung der Ergebnisse durch die Thatsache zu erwarten sein, daß es unter den Kugeln massive und hohle giebt, obschon auch hier die Wahrscheinlichkeiten $g_1, g_2, g_3 \dots$ als Durchschnittswahrscheinlichkeiten sich darstellen ließen.

Im Gegensatz zu beiden Beispielen Poisson's ist in meinem Beispiel der Durchschnittscharakter der in Frage stehenden Wahrscheinlichkeiten sozusagen verborgen, gleichsam latent, würde aber etwa in folgender Weise an den Tag gebracht werden können.

Was p betrifft, so denke man sich neben dem Beobachter A , der die Kugeln aus der Urne zieht und jeweils in ein und demselben Augenblick gewahr wird, daß die gezogene Kugel eine massive oder eine hohle ist und daß sie eine bestimmte Farbe hat, einen zweiten Beobachter B , der dem Spiele bloß zuschaut und ehe er durch die Vermittelung von A oder durch eigene Empfindung sich davon überzeugt, daß die Kugel eine massive oder eine hohle ist, die Farbe der gezogenen Kugel zu sehen bekommt. Die auf das Erscheinen einer massiven oder einer hohlen Kugel gerichtete Erwartungsbildung des B wird sich offenbar vor und nach dem Zeitpunkt, wo er die Farbeempfindung hat, verschieden gestalten, und zwar ist für den ersten Fall die Größe p , für den zweiten aber eine der Größen $p_1, p_2, p_3 \dots$ maßgebend. Bei den Wahrscheinlichkeiten $g_1, g_2, g_3 \dots$ hätte man sich den Vorgang so vorzustellen, daß A die Kugel mit geschlossenen Augen zieht und auf diese Weise zuerst in die Lage gesetzt wird zu bestimmen, ob die gezogene Kugel eine massive oder eine hohle sei und erst nachher deren Farbe wahrnimmt.

Trotzdem man nun in meinem Beispiel zweifelsohne mit Durchschnittswahrscheinlichkeiten zu thun hat, so ließe dasselbe sich doch unter den dem Bernouilli'schen Theorem entsprechenden allgemeinen Fall bringen, ohne daß es einer besonderen Beweisführung bedürfte, weil, wie gesagt, von dem den Durchschnittscharakter der in Frage stehenden Wahrscheinlichkeiten bedingenden Umstände — d. h. von der Ungleichartigkeit der in Betracht kommenden Totalgesamtheit aller möglichen Fälle — jeweils abgesehen werden kann.

Um nun recht anschaulich zu zeigen, worin der Unterschied zwischen den Poisson'schen Beispielen und dem meinen liegt, werde ich das letztere so modifizieren, daß daraus ein den ersteren gleichartiger Fall wird.

Zu dem Zweck nehme man eine zweite, dieselben Füllungsverhältnisse wie U aufweisende Urne und verteile die darin enthaltenen Kugeln unter so viele Urnen $S, R, B \dots$ als Farben vertreten sind, wobei jede Urne nur gleichfarbige Kugeln enthalten soll: S die schwarzen, R die roten, B die blauen $\dots$. Alsdann werden die Größen $p_1, p_2, p_3 \dots$ die Wahrscheinlichkeiten des Erscheinens einer massiven Kugel bei einer Ziehung aus $S, R, B \dots$ darstellen. Nun ziehe man eine Kugel aus der Urne U . Je nachdem eine schwarze, oder eine rote, oder eine blaue Kugel erschienen ist — welche Ereignisse mit den Wahrscheinlichkeiten $g_1, g_2, g_3 \dots$ zu erwarten sind — nehme man eine Ziehung aus der Urne S oder R oder $B \dots$ vor und merke sich, ob man dabei eine massive oder eine hohle Kugel erhalten hat. Wiederholt man n Mal diesen aus zwei Ziehungen bestehenden Versuch — wobei die gezogene Kugel jedesmal wieder in die betreffende Urne zu legen ist — so wird mancher im Zweifel sein, ob über das zu erwartende Verhältnis der Zahl der erschienenen massiven Kugeln m zu n auf Grund des Bernoulli'schen Theorems allein eine bestimmte Aussage zulässig sei. Der Fall erfüllt aber in aller Strenge die Bedingungen, welche dem Poisson'schen Lehrsatz in der ihm eigentümlichen Erweiterung entsprechen und so erscheint die Behauptung begründet, daß bei großem n die Relation $\frac{m}{n}$ erwartungsmäßig nahe p

sein wird und zwar gleich große Abweichungen $\frac{m}{n} - p$ in diesem Fall mit gleichen Wahrscheinlichkeiten als bei derjenigen Einrichtung des Spieles, die der ursprünglichen Form meines Beispiels entspricht, zu erwarten sein werden.

Allgemein gesprochen besteht die Eigentümlichkeit meines modifizierten Beispiels (und auch der beiden Beispiele Poisson's) im Gegensatz zum ursprünglichen darin, daß, während in diesem jeder Versuch sich unmittelbar auf die in Betracht kommende Totalgesamtheit aller möglichen Fälle bezieht, in jenem die Teilgesamtheiten aller möglichen Fälle, von denen jeder einzelnen eine andere Spezialwahrscheinlichkeit zukommt, getrennt vorliegen, wodurch eine (allerdings nur scheinbare) Rücksichtnahme auf den ungleichartigen Charakter der genannten Totalgesamtheit stattfindet.

Von den zwei in gekennzeichnete Weise unterschiedenen Arten der Durchschnittswahrscheinlichkeit i. eig. S. verlangt höchstens die zuletzt charakterisierte eine besondere Behandlung, die dazu dient, die Anwendbarkeit des Bernoulli'schen Theorems auf diesen Fall zu demonstrieren, was sich hinsichtlich jener anderen Art der Durchschnittswahrscheinlichkeit i. eig. S. aus bloßer Anschauung ergibt¹⁾.

1) Vgl. oben S. 651.

Ist bis hierher stets vorausgesetzt worden, daß die Spezialwahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, p_3 \dots$, aus denen die Durchschnittswahrscheinlichkeit

$$p = g_1 p_1 + g_2 p_2 + g_3 p_3 + \dots$$

zusammengesetzt ist, zugleich Elementarwahrscheinlichkeiten seien, so darf man nun jene Voraussetzung fallen lassen und demnach annehmen, daß $p_1, p_2, p_3 \dots$ selbst wiederum Durchschnittswahrscheinlichkeiten i. eig. S. sind. Man könnte so Durchschnittswahrscheinlichkeiten verschiedener Ordnungen unterscheiden und zwar wären als Durchschnittswahrscheinlichkeiten erster Ordnung solche die unmittelbar aus Elementarwahrscheinlichkeiten, als Durchschnittswahrscheinlichkeiten zweiter Ordnung solche, die unmittelbar aus Durchschnittswahrscheinlichkeiten erster Ordnung u. s. f. zusammengesetzt sind zu bezeichnen¹⁾.

Auf jeden Fall vermag die Thatsache, daß eine gegebene Wahrscheinlichkeit als Durchschnittswahrscheinlichkeit i. eig. S., gleichgiltig welcher Ordnung, zu betrachten ist, keinen Unterschied in der Berechnung der Präcision resp. des mittleren Fehlers eines a posteriori ermittelten Wertes jener Wahrscheinlichkeit zu begründen²⁾.

1) Wäre p eine Durchschnittswahrscheinlichkeit n ter Ordnung, so würde sie sich allerdings unter die Form $p = \gamma_1 \pi_1 + \gamma_2 \pi_2 + \gamma_3 \pi_3 + \dots$ bringen lassen, bei welcher $\pi_1, \pi_2, \pi_3 \dots$ Elementarwahrscheinlichkeiten sind, aber die Koeffizienten $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \dots$ würden dann Wahrscheinlichkeiten zusammengesetzter und zwar aus je n einfachen Ereignissen zusammengesetzter Ereignisse resp. Wahrscheinlichkeiten des Zusammentreffens n verschiedener Merkmale darstellen. Sagt man, daß eine Durchschnittswahrscheinlichkeit unmittelbar aus gegebenen Spezialwahrscheinlichkeiten zusammengesetzt ist, so will es nichts anderes heißen, als daß die Koeffizienten, mit denen jene Spezialwahrscheinlichkeiten versehen sind, Wahrscheinlichkeiten einfacher Ereignisse resp. Merkmale angeben.

2) Die Bezeichnung des erweiterten Theorems J. Bernouilli's als „Gesetz der großen Zahlen“ wird von zwei verschiedenen Gesichtspunkten aus beanstandet.

Zunächst kann der nicht ganz gewöhnliche Gebrauch des Wortes „Gesetz“ für etwas, was, wie v. Kries treffend bemerkt, „im Grunde ein Theorem der Kombinationslehre ist“, sehr leicht zur unerwünschten Verkennung der mathematischen (unempirischen) Natur des Lehrsatzes und zur Vorstellung, daß sich derselbe auf das wirkliche Verhalten der Dinge beziehe, verleiten. (Darüber sehr gut v. Kries, Prinzipien, Kap. IV § 5, auch die Anm. auf S. 91, vergl. noch S. 293 gegen Windelband und S. 168—169.) Von solch einer „physikalischen“ Deutung des Gesetzes der großen Zahlen ist Poisson selbst nicht freizusprechen, was sich aus Mangel an erkenntnistheoretischer Einsicht erklärt (Recherches, S. 7, 144—145).

Sodann aber pflegen namentlich die Statistiker daran Anstand zu nehmen, ein „Gesetz“ anzuerkennen, das nur für große Zahlen von Fällen Gültigkeit hätte, auf Einzelfälle aber oder kleine Zahlen keine Anwendung fände. Wollen die Statistiker darin einen Widerspruch mit dem Wesen eines „Gesetzes“ erblicken und weisen sie mit Vorliebe auf jenen Widerspruch hin, so scheinen sie in dem Irrtum begriffen zu sein, das Gesetz der großen Zahlen als Naturgesetz aufzufassen. Betrachtet man aber den Poisson'schen Lehrsatz als Ausdruck eines neben dem Prinzip der Kausalität bestehenden Erwartungsprinzips („das Prinzip der Spielräume“ nach v. Kries), so wird man nicht leugnen können, daß, obschon die Zahl der Fälle keinen prinzipiellen Unterschied in der Erwartungsbildung herbeizuführen vermag, das Prinzip namentlich dort eine besondere Bedeutung erlangt, wo die Erwartung auf die Gesamtergebnisse eine Reihe sehr vieler

Nun gilt es die angeführten und erläuterten Sätze über Präzisionsbestimmungen einmal bei konstant zusammengesetzten Durchschnittswahrscheinlichkeiten und ein anderes Mal bei Durchschnittswahrscheinlichkeiten i. eig. S. für die Statistik zu verwerten.

Es fragt sich vor allem, welchem von jenen zwei Typen die statistischen Verhältniszahlen, die den Charakter empirischer Werte von Durchschnittswahrscheinlichkeiten haben, angehören.

Die in der Formel der empirischen Durchschnittswahrscheinlichkeit vorkommenden Koeffizienten $\frac{n_1}{n}, \frac{n_2}{n}, \frac{n_3}{n} \dots$ sind Ausdrücke für

die relativen Anteile, die in bestimmter Weise unterschiedene Teilmassen an einer Totalmasse ausmachen, also z. B. Bruchteile, mit denen verschiedene Kategorien der Bevölkerung in der Gesamtbevölkerung vertreten sind. Damit eine statistische Verhältniszahl als empirischer Wert einer konstant zusammengesetzten Durchschnittswahrscheinlichkeit betrachtet werden kann, müssen solche Bruchteile nicht ihrerseits als empirische Werte bestimmter Wahrscheinlichkeiten, sondern als im voraus festgesetzte Zahlenwerte erscheinen.

Man stelle sich z. B. eine Einrichtung vor, der zufolge in einem Staate die Präsenzstärke des Heeres in Prozenten der Gesamtbevölkerung gesetzlich vorgeschrieben ist. Faßt man in so einem Staate die Selbstmordfrequenz, die bekanntlich eine sehr viel größere bei der Militärbevölkerung als bei der Civilbevölkerung ist, ins Auge, so wird der Quotient, der sich aus der Division der Zahl aller lebenden Personen in die Zahl der etwa in einem Jahr vorgekommenen Selbstmorde ergibt, als empirischer Wert einer konstant zusammengesetzten Durchschnittswahrscheinlichkeit aufzufassen sein und demnach wird jenem Quotienten eine höhere Präzision beizulegen sein, als die, welche dem Fall gleicher Selbstmordfrequenz in beiden Bevölkerungsteilen entsprechen würde. Blicke das Zahlenverhältnis, in dem die Militärbevölkerung zur Gesamtbevölkerung steht, für eine Reihe von Jahren

Fälle gerichtet ist, weil nur unter dieser Bedingung sich hohe, der Gewißheit nahekommende Wahrscheinlichkeiten ergeben (s. v. Kries, S. 264—265 und 155).

Außerdem ist die Forderung einer großen Zahl von Fällen oder Versuchen (n) rechnerisch darin begründet, daß die in der Poisson'schen Fassung des Gesetzes der großen Zahlen (S. 654) vorkommende analytische Beziehung zwischen den bewußten Fehlergrenzen und der ihnen entsprechenden Wahrscheinlichkeit unter Benützung der Stirling'schen Näherungsformel, die ein großes n voraussetzt, abgeleitet wird.

Eine ganz andere Erwägung hat aber Poisson veranlaßt, seinem Lehrsatz die in Frage stehende Benennung zu geben, worüber eine übrigens wenig überzeugende Stelle auf S. 146—147 der „Recherches“ Aufschluß giebt. Poisson wollte nämlich, indem er seine „loi des grands nombres“ dem Theorem J. Bernoulli's gegenüberstellte, mit jener Bezeichnung speziell den Fall wechselnder Chancen (den Fall der Durchschnittswahrscheinlichkeit im eig. S.) treffen. So verstanden, ist die Benennung mit aus dem Grunde nicht gutzuheißen, weil sie den falschen Schein zu erwecken imstande ist, als wäre im Falle wechselnder Chancen im Gegensatz zu dem Fall einer konstanten Chance (Elementarwahrscheinlichkeit) eine größere Zahl von Versuchen nötig, damit in beiden Fällen mit gleicher Wahrscheinlichkeit ein von dem apriorischen Wert der in Frage stehenden Wahrscheinlichkeit nicht mehr als um einen bestimmten Betrag abweichender empirischer Wert erwartet werden könnte. (Vgl. S. 659—660, Text und Anm. über Quetelet.)

unverändert, und behaupteten sich die abstrakten Wahrscheinlichkeiten, einen Selbstmord zu begehen, sowohl für einen Angehörigen der Civil- als für einen Angehörigen der Militärbevölkerung stets auf gleicher Höhe, so wäre eine Reihe von Werten des genannten Quotienten mit unternormaler Dispersion zu erwarten.

Man wird aber wohl sagen dürfen, daß im allgemeinen solche konstanten Relationen zwischen Teilmassen gar nicht anzunehmen sind, es sei denn, daß eben durch Gesetz oder Verordnung für deren Aufrechterhaltung gesorgt wird.

Dem Statistiker werden aber derartige besondere Verhältnisse, wenn sie bei der ihn beschäftigenden Massenerscheinung ausnahmsweise vorliegen, sicher bekannt sein und man kann daher im gekennzeichneten Umstande eine Quelle falscher Präzisionsberechnungen kaum erblicken.

Stellen aber die Relativzahlen, welche die numerischen Anteile einzelner Teilmassen an einer Totalmasse ausdrücken, empirische Wahrscheinlichkeitswerte^{1) 2)} dar, so lassen sich den Durchschnittswahrscheinlichkeiten resp. ihren empirischen Werten, in denen jene Relativzahlen als Koeffizienten bei empirischen Werten von Elementarwahrscheinlichkeiten oder von Durchschnittswahrscheinlichkeiten niedriger Ordnung auftreten, genau dieselben Spielräume für die Wirkung zufälliger Ursachen zuweisen, wie im Fall von Elementarwahrscheinlichkeiten gleicher Höhe. Man ist, m. a. W., vollkommen dazu berechtigt, vom Durchschnittscharakter der betreffenden Wahrscheinlichkeiten bei Präzisionsbestimmungen abzusehen. Die Untersuchung der Dispersionsverhältnisse bei statistischen Reihen ist also genau in gleicher Weise zu führen, einerlei, ob den Gliedern, die die Reihe bilden, Elementarwahrscheinlichkeiten oder Durchschnittswahrscheinlichkeiten beliebiger Ordnung zu Grunde liegen³⁾.

Insbesondere darf aber aus dem Umstande, daß eine Reihe

1) S. Lexis, Zur Theorie . . . S. 29, Anm.

2) Es soll hier, wie im folgenden, mit der Anwendung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs auf statistische Relativzahlen nicht die Vorstellung verbunden werden, daß es sich um feste — in der Zeit unveränderliche — Wahrscheinlichkeiten dabei handle. Die einer statistischen Relativzahl zu Grunde liegende abstrakte Wahrscheinlichkeit ist vielmehr wie die Erfahrung lehrt, in den meisten Fällen als eine historische oder „singuläre“ (nicht ganz in dem von v. Kries diesem Ausdruck beigelegten Sinne, Prinzipien, S. 129) zu betrachten. Wenn Lexis, ohne die logische Berechtigung zu dieser Betrachtungsweise in Abrede zu stellen, dennoch behauptet, es sei „mit solcher Einführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes wenig gewonnen“ (Zur Theorie . . . S. 91) und wenn v. Kries, sich Lexis anschließend, meint, daß im Gebiete der Massenerscheinungen der menschlichen Gesellschaft eine zutreffende Angabe numerischer Wahrscheinlichkeit fast nirgends gemacht werden kann“ (Prinzipien, S. 239), so sind die angeführten Äußerungen dahin zu deuten, daß eine singuläre Wahrscheinlichkeit keine Uebertragung auf nicht beobachtete Fälle und insofern keine Voraussagen zuläßt.

3) „Daß die aus vielen Versuchsreihen abgeleiteten Möglichkeitskoeffizienten die Annahme einer konstanten Totalwahrscheinlichkeit rechtfertigen, ist ganz in derselben Weise erfahrungsmäßig nachzuweisen, wie wenn man eine einfache Wahrscheinlichkeit voraussetzt, und auch die oben aufgestellten Kriterien zur Klassifizierung der Massenerscheinungen bleiben bei beiden Anschauungen ungeändert.“ (Lexis, Zur Theorie u. s. w., S. 29.)

normale Dispersion aufweist, nicht der Schluß gezogen werden, daß der in Frage stehenden Verhältniszahl eine Elementarwahrscheinlichkeit entspreche. So ist der bis jetzt fast allein dastehende Fall solchen Verhaltens einer statistischen Größe — nämlich der Fall des Geschlechtsverhältnisses bei den Geburten — sehr wohl mit Thatsachen und Ansichten vereinbar, die die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt bei verschiedenen Kategorien von Geburten nicht gleich hoch erscheinen lassen. Es sei p diese Wahrscheinlichkeit bei der Gesamtzahl der Geburten und p_1 resp. p_2 bei ehelichen resp. unehelichen Geburten. Bezeichnet man ferner mit g_1 die Wahrscheinlichkeit für eine Geburt ehelich und mit g_2 unehelich zu sein, so ergibt sich die Beziehung

$$p = g_1 p_1 + g_2 p_2.$$

Man nehme nun an, daß eine Reihe empirischer Werte des p , die etwa einer Reihe von Jahrgängen entsprechen, normale Dispersion aufweisen; darum brauchte offenbar p_1 nicht $= p_2$ zu sein, aber wenn bei p_1 und p_2 sich ebenfalls normale Dispersion zeigen würde, müßte das gleiche von g_1 resp. g_2 angenommen werden¹⁾.

Faßt man die Gruppe der ehelichen Geburten für sich ins Auge und stellen sich hier für einzelne Kategorien von Ehen verschiedene Werte $p_1, p_2, p_3 \dots$ der Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt heraus, so würde für die Gesamtzahl der Ehen die Wahrscheinlichkeit

$$p = g_1 p_1 + g_2 p_2 + g_3 p_3 + \dots$$

gelten, wo $g_1, g_2, g_3 \dots$ die Wahrscheinlichkeiten für einen Geborenen, aus einer Ehe bestimmter Kategorie hervorgegangen zu sein, angeben würden. Wenn hier, ähnlich wie vorhin, sowohl die empirischen Werte von p als die von $p_1, p_2, p_3 \dots$ normale Dispersion hätten, so wäre bei $g_1, g_2, g_3 \dots$ ebenfalls normale Dispersion zu erwarten²⁾.

Die in den angeführten Beispielen angedeutete Operation, die, allgemein gesprochen, darin besteht, Durchschnittswahrscheinlichkeiten

1) Es ist leicht möglich, daß in Wirklichkeit sich sowohl bei p als bei p_1 und p_2 eine der normalen sehr nahe kommende Dispersion wahrnehmen ließe und trotzdem die empirischen Werte der Wahrscheinlichkeit g_2 (die Relativzahlen der unehelichen Geburten) übernormale oder gar unregelmäßige Dispersion liefern würden. Dann wäre anzunehmen, daß letzteres wegen der Kleinheit der Differenz $p_1 - p_2$ und namentlich auch der Größe g_2 das Verhalten der empirischen Werte des p nicht in nennenswerter Weise zu beeinflussen vermocht habe. — Siehe zur Frage des Geschlechtsverhältnisses bei den Geburten namentlich von der hier in Betracht gezogenen Seite den Artikel von Lexis im Handwörterbuch der Staatswissenschaften, bes. S. 819 Kol. 2 und vergl. die früheren daselbst genannten Schriften desselben Verfassers, wo er den Standpunkt der (wenigstens näherungsweise) Chancengleichheit der Geburtsfälle oder richtiger der Befruchtungsfälle in Bezug auf das zu erwartende Geschlecht der Geborenen mit größerer Bestimmtheit vertritt.

2) Es kommt aber nicht, wenigstens in erster Linie nicht auf das Zahlenverhältnis der Ehen verschiedener Kategorien zu der Gesamtzahl der Ehen — es seien $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \dots$ die diesen Zahlen zu Grunde liegenden Wahrscheinlichkeiten — wie es Lexis (l. c.) anzunehmen scheint, sondern eben auf die Größen $g_1, g_2, g_3 \dots$. Bezeichnet man mit $w_1, w_2, w_3 \dots$ die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Kategorien der Ehen, etwa im Laufe eines Jahres eine Geburt zu liefern, so hätte man

$$g_i = \frac{\gamma_i w_i}{\gamma_1 w_1 + \gamma_2 w_2 + \gamma_3 w_3 + \dots}$$

woraus nur bei $w_1 = w_2 = w_3 = \dots$ sich $g_i = \gamma_i$ ergibt.

höherer Ordnungen in solche niederer Ordnungen aufzulösen, ist besonders dazu geeignet, über statistische Zusammenhänge Aufschlüsse zu geben, und verliert nichts an Interesse dadurch, daß die Durchschnittswahrscheinlichkeit höherer Ordnung, von der ausgegangen wird, in ihren empirischen Werten normale Dispersion aufweist. Ich kann mich daher unmöglich der Ansicht Prof. Westergaard's anschließen, wonach die Spezialisierung des Materials bei ihrem Ziel angelangt sei, wo man auf Verhältniszahlen mit normaler Dispersion gekommen ist. „Hat man“, meint der genannte Forscher, „den festen Punkt gefunden, um welchen die Zahlen analog den Glücksspielerfahrungen oscillieren, so wird das weitere Suchen nach Ursachen zwar zu neuen Resultaten führen können, z. B. wenn man das Material neu bearbeitet, man darf jedoch auch ohne solche Bearbeitung bei den gewonnenen Resultaten stehen bleiben. Wenn dagegen die Abweichungen größer sind, als die für Glücksspiele gefundenen, so ist dies ein Zeichen dafür, daß das Material noch nicht genügend bearbeitet worden ist, und daß, bevor eine Vorausberechnung vorgenommen werden darf, die betreffenden Ursachen weiter isoliert werden müssen¹⁾.“

Uebrigens glaube ich, daß die im letzten Satz des citierten Passus ausgesprochene Hoffnung, durch fortgesetzte Zerlegung des Materials auf Verhältniszahlen zu kommen, die von einer Zeitperiode zur anderen nur in Grenzen schwanken würden, welche für die Wirkung zufälliger Ursachen maßgebend sind, hinsichtlich der meisten Massenerscheinungen des sozialen Lebens nicht realisierbar sei. In der Statistik wird die Spezialisierung in der Bildung immer enger determinierter Menschengruppen oder Gruppen menschlicher Handlungen bzw. Ereignisse ihren Ausdruck finden. Zwei solche Gruppen, die durch einen gemeinsamen Komplex von Merkmalen determiniert sind, sich aber auf zwei verschiedene Zeitperioden beziehen, werden jedoch nur äußerst selten in demselben Sinne miteinander vergleichbar sein, wie etwa zwei Reihen von Ziehungen aus einer Urne, weil, während hier bei beiden Versuchsreihen die Allgemeinbedingungen des Spieles dieselben sind, dort die Allgemeinbedingungen der Erfahrung sich höchstens als analoge, weil in gleicher Weise für beide Gruppen umschriebene, darstellen würden. Es wäre durchaus irrtümlich, einen hohen Grad der Genauigkeit bei solcher Umschreibung, d. h. die Aufzählung sehr vieler Merkmale, für eine bestimmte Angabe des Inhalts jener Allgemeinbedingungen zu halten, und stets wird verschiedener Inhalt mit gleicher Umschreibung, mag diese noch so detailliert sein, Hand in Hand gehen können.

Eine beschränkte Geltung hat Prof. Westergaard's Behauptung von dem Zweck der Spezialisierung und dem von ihr zu erwartenden Erfolg bei Untersuchung der Dispersionsverhältnisse statistischer Reihen allerdings, was ich Gelegenheit haben werde, an einem interessanten Beispiel zu zeigen, wo bei den empirischen Werten der Durchschnittswahrscheinlichkeit höherer Ordnung unregelmäßige Dispersion obwaltet.

1) Grundzüge der Theorie der Statistik S. 55.

Ehe ich mich aber diesem Fall zuwende, möchte ich die übrigen Fälle noch kurz erörtern.

Um nochmals auf den Fall normaler Dispersion zurückzukommen, so ließe sich eine solche bei empirischen Werten der Durchschnittswahrscheinlichkeit p nicht nur in der vorhin angenommenen Weise erklären, sondern es wäre auch denkbar, daß bei den empirischen Werten der Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, p_3 \dots$ unternormale Dispersion vorliegt, während die empirischen Werte der Wahrscheinlichkeiten $g_1, g_2, g_3 \dots$ übernormale Dispersion aufweisen oder umgekehrt. Sollte eine dieser zwei Möglichkeiten in Erfüllung gehen, so wäre es freilich als „Zufall“ zu betrachten.

Aus unternormaler resp. übernormaler Dispersion bei den empirischen Werten von p wäre auf unternormale resp. übernormale Dispersion bei den empirischen Werten der Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, p_3 \dots$ oder der Wahrscheinlichkeiten $g_1, g_2, g_3 \dots$ zu schließen, wobei im ersten Fall die empirischen Werte der $g_1, g_2, g_3 \dots$ und im zweiten Fall die empirischen Werte der $p_1, p_2, p_3 \dots$ unternormale, normale oder übernormale Dispersion aufweisen könnten.

Schließlich deutet der praktisch wichtigste Fall unregelmäßiger Dispersion der empirischen Werte von p auf das Vorhandensein unregelmäßiger Dispersion entweder in den empirischen Werten der Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, p_3 \dots$, bei beliebiger Dispersion der Werte von $g_1, g_2, g_3 \dots$ oder auf das Vorhandensein unregelmäßiger Dispersion in den empirischen Werten der Wahrscheinlichkeiten $g_1, g_2, g_3 \dots$ bei beliebiger Dispersion der Werte von $p_1, p_2, p_3 \dots$ hin¹⁾. In der großen Mehrzahl der Fälle liefert die Beobachtung unregelmäßige Dispersion der empirischen Werte sowohl der Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, p_3 \dots$ als der Wahrscheinlichkeiten $g_1, g_2, g_3 \dots$. Um so interessanter muß daher ein Fall erscheinen, wo sich für die Werte von p eine unregelmäßige, höchstens übernormale Dispersion zeigt, während man nach erfolgter Zerlegung des Materials in zwei Gruppen für die Werte von p_1, p_2 oder wenigstens für einen derselben eine normale Dispersion erhält.

Die in dem nunmehr folgenden Beispiel vorkommenden absoluten Zahlen und die meisten Berechnungen entnehme ich Westergaard's „Theorie der Statistik“²⁾. Es handelt sich um das verhältnismäßige Vorkommen der Selbstmorde durch Erhängen in Dänemark in der Periode von 1861—1886 inkl. Es sei für einen bestimmten Jahrgang die Gesamtzahl der vorgekommenen Selbstmorde n und m die Zahl der durch Erhängen erfolgten. Summiert man die Zahlen der 21 Jahrgänge, so erhält man Σn als Zahl sämtlicher innerhalb jenes Zeitraums vorgekommener Selbstmorde und Σm als Zahl derjenigen Menschen, die sich im selben Zeitraum erhängt haben. Besteht eine feste Wahrscheinlichkeit p für einen Selbstmord, durch Erhängen zu erfolgen, so wäre $\frac{\Sigma m}{\Sigma n} = p'$ als der genaueste aus den Daten zu ermittelnde Nähe-

1) Vgl. Cournot, Grundlehren der Wahrscheinlichkeitsrechnung S. 152.

2) S. 44—46.

rungswert für p zu betrachten ¹⁾. Nun handelt es sich darum, zu untersuchen, ob die Verhältniszahlen $\frac{m}{n}$ der einzelnen Jahrgänge nur solche Schwankungen aufweisen, die durch die Wirkung zufälliger Ursachen zu erklären sind. Man berechnet zu dem Zweck die Reihe der Zahlen $m' = np'$, welche die erwartungsmäßigen Zahlen der Erhängten für einzelne Jahrgänge sind, bildet ferner die Differenzen $+ m' + m = a$ und schließlich die Quotienten $\frac{a}{f}$, wobei a stets positiv genommen werden muß und f den mittleren Fehler $= \sqrt{np'(1-p')}$ bezeichnet. Der mittlere Fehler ist wegen der wechselnden Zahl n für jeden Jahrgang ein anderer. Die Theorie zeigt dann, welcher Teil jener Quotienten innerhalb bestimmter Grenzen enthalten werden müßte, falls die Abweichungen a zufälliger Natur wären ²⁾. Folgende Tabelle giebt die Resultate der Berechnungen wieder.

$\frac{a}{f}$	Entsprechende Zahl der Jahrgänge	
	Theorie	Erfahrung
1	2	3
unter 0,3	6	3
„ 0,5	10	5
„ 0,7	13	9
„ 1,1	18	15
„ 1,5	22	19
„ 2,1	25	24

An der Hand dieser von mir berechneten Tabelle sieht man sofort, daß die Ergebnisse der Erfahrung von den Erwartungen der Theorie nicht unbedeutend divergieren, und man darf daher mit großer Sicherheit schließen, daß die Schwankungen der Verhältniszahl $\frac{m}{n}$ nicht durch Zufall allein zu erklären sind, sondern die in Frage stehende Wahrscheinlichkeit eine in der Zeit veränderliche ist. Ob hier unregelmäßige oder vielleicht übernormale Dispersion vorliegt, kann man dahingestellt sein lassen.

Es liegt aber nahe, zu einer detaillierteren Ausbeutung des Materials zu schreiten, und zwar die Selbstmorde nach dem Geschlecht besonders ins Auge zu fassen. Es sei g_1 die Wahrscheinlichkeit für

1) Vgl. oben S. 647, das nähere über das im Text angewandte Verfahren folgt im zweiten Artikel.

2) In Westergaard's Grundzügen der Theorie der Statistik findet man auf S. 64 eine Reihe von Werten angeführt, die die Funktion F_u (siehe oben S. 645 Anm. 3) bei

$u = \frac{a}{f\sqrt{2}}$ annimmt (der Bezeichnung f entspricht bei Westergaard die Bezeichnung μ).

einen Selbstmord von einem Mann und g_2 von einer Frau begangen zu werden, p_1 die Wahrscheinlichkeit für einen Selbstmord bei einem Mann und p_2 bei einer Frau durch Erhängen zu erfolgen.

Demnach hat man

$$p = g_1 p_1 + g_2 p_2$$

und es gilt nun die Stabilität der Größen g_1 und g_2 und dann der Größen p_1 und p_2 gesondert zu prüfen¹⁾. Beides hat Prof. Westergaard durchgeführt und die Ergebnisse seiner Berechnungen lassen sich so zusammenfassen.

$\frac{a}{f}$	Entsprechende Zahl der Jahrgänge: Erfahrung bei			
	Theorie	g_2	p_1	p_2
1.	2.	3.	4.	5.
unter 0,3	6	3	4	6
„ 0,5	10	6	8	11
„ 0,7	13	10	12	12
„ 1,1	18	15	17	18
„ 1,5	22	21	20	23
„ 2,1	25	24	24	24

Stellt man die Zahlen der 3. Kol. den Zahlen der 2. Kol. gegenüber, so wird man einer nicht unbeträchtlichen Divergenz zwischen Theorie und Erfahrung gewahr²⁾. Dagegen zeigt sich eine befriedigende Uebereinstimmung der Zahlen der 4. Kol. und noch mehr der 5. Kol. mit den Zahlen der 2. Kol.

Die vorhin erhaltene unregelmäßige Dispersion für das Verhältnis der Erhängten zu der Gesamtzahl der Selbstmörder läßt sich also mit einiger Sicherheit aus der Hypothese erklären, daß jener Verhältniszahl zwei getrennte, jedoch konstante Wahrscheinlichkeiten, von denen die eine für das männliche, die andere für das weibliche Geschlecht gilt, zu Grunde liegen³⁾, während die Verteilung der Selbst-

1) Die aus den Daten für den ganzen 26-jährigen Zeitraum ermittelten Näherungswerte der betreffenden Wahrscheinlichkeiten sind: $p = 0,769$, $p_1 = 0,829$, $p_2 = 0,560$, $g_1 = 0,777$, $g_2 = 0,223$.

2) Prof. Westergaard scheint aber keine zu strengen Ansprüche an die Ergebnisse zu stellen, wenn er zu den Zahlenreihen in Kol. 2 und 3 sagt: „Die wirklichen und berechneten Zahlen stimmen recht gut überein.“ (S. 44.) Vgl. auch Lexis im Art. „Gesetz“ im Handwörterbuch der Staatswissenschaften, III. Bd., S. 848, Kol. 2.

3) Eigentlich wäre ich geneigt, nur beim weiblichen Geschlecht (Kol. 5) normale Dispersion anzuerkennen, während die auf das männliche Geschlecht bezüglichen Zahlen (Kol. 4) mich nicht in vollem Maße zu befriedigen vermögen. Uebrigens bleibt die Beurteilung notwendigerweise subjektiv, wenn die Zahl der Versuchsreihen, wie hier, ziemlich klein ist. Es kommt auch darauf an, wie man die Spielräume abgrenzt. So würde eine leise Modifikation in dieser Beziehung die Zahlen der Tabelle auf S. 671 in noch weniger günstigem Licht für die Hypothese einer konstanten Wahrscheinlichkeit (p) erscheinen lassen. Setzt man nämlich in Kol. 1 die Grenze 1,0 statt 1,1 und 2,0 statt 2,1, so erfahren dadurch die Zahlen in Kol. 2 keine Veränderung; dagegen würde sich in der Kol. 3 die Zahl 15 in 13 und 24 in 23 verwandeln. — Es kann daher bei derartigen Untersuchungen nicht genug empfohlen werden, in der von Lexis vorgeschlagenen Weise die Präcision oder den mittleren Fehler einmal nach „kombinatorischer“ und ein

mörder nach Geschlechtern von Jahr zu Jahr solche Schwankungen aufweist, die mit der Annahme einer auch dieser Verhältniszahl zu Grunde liegenden festen Wahrscheinlichkeit unvereinbar erscheinen dürfte, zumal solch eine Annahme die Dispersionsverhältnisse, die sich bei Zusammenziehung beider Geschlechter herausstellen, nicht zu erklären vermöchte.

An dem angeführten Beispiele zeigt sich deutlich, daß die Zerlegung einer statistischen Masse in Teilmassen bei der Untersuchung

anderes Mal nach „physikalischer“ Methode zu berechnen und die beiden so erhaltenen Werte mit einander zu vergleichen. Dann kommt man auf einen einheitlichen numerischen Ausdruck für das Maß der Abweichung der effektiven Dispersion von der normalen. Die Lexis'sche Methode kann jene andere, von Westergaard durchweg benützte, freilich nicht ersetzen, weil sie zu summarisch ist und in noch geringerem Maße dazu geeignet erscheint, darüber Aufschluß zu geben, ob im gegebenen Fall übernormale oder unregelmäßige Dispersion vorliegt, denn das Charakteristikon ist das gleiche für beide Fälle. Es wäre also anzuraten, in Ergänzung solcher tabellarischer Darstellungen, wie sie sich bei Westergaard und anderswo finden, das Verhältnis der einen Präzision zur anderen oder des einen mittleren Fehlers (des effektiven) zu dem anderen (dem erwartungsmäßigen) zu ermitteln (dieses kombinierte Verfahren wendet Lexis in § 43 der Schrift „Zur Theorie . . .“ an). Hat man aber bei Aufstellung der Tabelle die Veränderlichkeit der Zahl der Versuche (Fälle), aus denen jede einzelne Zahl der Reihe entstanden ist, berücksichtigt und so etwa einem jeden Jahrgang einen besonderen mittleren Fehler zu Grunde gelegt, so kann man von der Berechnung eines gemeinschaftlichen mittleren Fehlers nach „kombinatorischer“ Methode absehen und wie folgt erfahren: Man bilde die Quadrate der auf den jeweiligen mittleren Fehler reduzierten Abweichungen, d. h. die Größen

$\left(\frac{a}{f}\right)^2$, addiere dieselben und dividiere die Summe durch die Zahl der Versuchsreihen (also

z. B. in unserem Fall durch 26). Aus dem so erhaltenen Quotienten ist die Quadratwurzel zu ziehen. Man würde im Endresultat 1 oder eine von 1 wenig abweichende Größe erhalten, wenn die Dispersion eine normale wäre. Bei der Wahrscheinlichkeit p (Tabelle auf S. 671) erhält man den unechten Bruch 1,25. Der effektive mittlere Fehler übertrifft also um $\frac{1}{4}$ den erwartungsmäßigen, oder es verhalten sich die nach „kombinatorischer“ und die nach „physikalischer“ Methode berechneten Präzisionen zu einander, wie 5 zu 4. Trotz der verhältnismäßig kleinen Differenz zwischen den Präzisionen läßt sich eine übernormale Dispersion kaum annehmen: denn reduziert man die Abweichungen

$\frac{a}{f}$ im Verhältnis von 5 zu 4, so erhält man für die 3. Kol. der Tab. auf S. 671 die Zahlenreihe: 3, 8, 10, 16, 23, 26, aus der sich nur schließen läßt, daß sehr große Abweichungen — d. h. solche, die das $1\frac{1}{2}$ -fache resp. das 2-fache des mittleren Fehlers übertreffen, sehr selten vorkommen, aber bis zur $1\frac{1}{2}$ -fachen Größe des mittleren Fehlers scheint zwischen der Größe der Abweichung und der Häufigkeit ihres Vorkommens die erwünschte Beziehung nicht obzuwalten. Dies erhellt auch aus folgender Zusammenstellung. Die erste Zeile der nachstehenden Tabelle giebt die Grenzen der Abweichungen an, wobei die letzten auf den mittleren Fehler reduziert sind. Die übrigen Zeilen enthalten die Zahlen der Jahrgänge, deren Ergebnisse in die angegebenen Fehlergrenzen fallen, und zwar entsprechen die Zahlen der 2. Zeile den Erwartungen der Theorie, die der 3. und 4. den Resultaten der Erfahrung, wobei den Zahlen der 3. Zeile der nach „kombinatorischer“ Methode, den Zahlen der 4. Zeile der nach „physikalischer“ Methode berechnete mittlere Fehler zu Grunde gelegt wurde.

1.	0,0—0,4	0,4—0,8	0,8—1,2	1,2—1,6	1,6—2,0
2.	8	7	5	3	1
3.	4	5	7	6	3
4.	5	7	6	5	1

der Stabilität statistischer Verhältniszahlen wesentliche Dienste zu leisten imstande ist¹⁾ 2).

Ich glaube jedoch, daß diese Funktion der Spezialisierung keine so allgemeine ist, wie es z. B. Prof. Westergaard annimmt, wovon bereits die Rede war.

An einer anderen Stelle der „Grundzüge“ finde ich aber dieselbe Frage von einem Standpunkt aus behandelt, der mir einen unlösbaren Widerspruch zu jener oben erörterten Ansicht des Verfassers zu enthalten scheint.

Westergaard will ganz allgemein der Teilung des Materials die Eigentümlichkeit vindizieren, „den zufälligen Ursachen einen etwas engeren Spielraum anzuweisen“³⁾ und erläutert diesen Gedanken an einer Reihe von Beispielen, von denen ich eins anführen werde. Es ist dies der soeben besprochene Fall der Selbstmorde durch Erhängen in etwas modifizierter Gestalt. „Unter 500 Selbstmördern“, führt Westergaard aus, „sind durchschnittlich 100 Frauen und 400 Männer. Unter den männlichen Selbstmördern werden sich gewöhnlich $\frac{4}{5}$ erhängen, unter den weiblichen $\frac{3}{5}$; die durchschnittliche Zahl der Erhängten ist also 380. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Zahl zwischen 360 und 400 fallen wird⁴⁾?“ Um diese Frage zu lösen, ist die Präcision oder der mittlere Fehler f zu berechnen, und zwar das Produkt np , wo

$$p = g_1 p_1 + g_2 p_2$$

und $g_1 = \frac{4}{5}$, $g_2 = \frac{1}{5}$, $p_1 = \frac{4}{5}$, $p_2 = \frac{3}{5}$, bei einer Zahl von Ver-

suchen $n = 500$. Man hat nun $f = \sqrt{np(1-p)}$ oder $f = \sqrt{500 \cdot \frac{19}{25} \cdot \frac{6}{25}} = \sqrt{91,2}$. Westergaard will aber anders verfahren: er berechnet erst den mittleren Fehler f_1 für die Zahl der sich zu erhängenden Männer und dann f_2 für die Zahl solcher Frauen, und zwar nach den

1) Darin ist allerdings der Hauptwert der Spezialisierung nicht gelegen: letztere hat vielmehr eine viel allgemeinere Bedeutung und ich muß mich an dieser Stelle Prof. Westergaard gegenüber (s. seine gegen mich gerichtete Bemerkung in diesen Jahrbüchern, Dritte Folge VI Bd., 3. Heft, S. 328–329) dagegen verwahren, die Wichtigkeit jener Operation irgendwann in Abrede gestellt zu haben. Freilich bot mir das in der „Mittleren Lebensdauer“ behandelte Thema wenig Gelegenheit dazu, die Bedeutung der Spezialisierung zu betonen. Vergl. dagegen „Ueber das Moment des Berufes in der preussischen Statistik der Bevölkerungsbewegung“ im Bericht über die Thätigkeit des statistischen Seminars an der k. k. Universität Wien im Wintersemester 1892–93, S. 13–17.

2) Vergl. Westergaard, S. 46: „Wäre das Verhältnis zwischen weiblichen und männlichen Selbstmördern nicht jedes Jahr nahezu dasselbe, so würde hier ein recht deutliches Beispiel für die Nützlichkeit einer detaillierten Bearbeitung des Materials vorliegen.“ Thatsächlich liegt aber das Beispiel nicht im Conjunctivus resp. Conditionalis, sondern im Indicativus vor, eben aus dem Grunde oder doch mit aus dem Grunde, weil die Schwankungen des Verhältnisses zwischen weiblichen und männlichen Selbstmördern größer sind, als dem Zufall entsprechen würde.

3) Grundzüge S. 78.

4) Ebenda S. 80–81.

$$\text{Formeln } f_1 = \sqrt{400 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5}} = \sqrt{64} \text{ und } f_2 = \sqrt{100 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}} =$$

$\sqrt{24}$. Für den mittleren Fehler der Zahl der Erhängten beiderlei Geschlechts giebt er schließlich die Größe $f' = \sqrt{f_1^2 + f_2^2} = \sqrt{88}$ aus. Ist aber diese Berechnungsart, die allerdings stets einen kleineren mittleren Fehler liefern muß¹⁾, der gestellten Frage adäquat? Sie wäre es nur dann, wenn g_1 und g_2 keine Wahrscheinlichkeiten, sondern konstante Zahlen darstellen würden. In Wirklichkeit weisen die Zahlen g_1, g_2 nicht nur keine Konstanz auf, sondern nicht einmal eine der Annahme fester Wahrscheinlichkeiten entsprechende Stabilität. Bei Formulierung der Aufgabe bezeichnet Westergaard selbst die angegebene Verteilung als eine „durchschnittliche“. Darum kommt der mittlere Fehler $f' = \sqrt{88}$ nicht der wirklichen Zahl der Erhängten unter 500 Selbstmördern, sondern einer Zahl zu, die für jedes Jahr aus den für dasselbe sich ergebenden Werten von p_1 und p_2 und den Konstanten g_1 und g_2 künstlich gebildet würde²⁾.

Bezieht sich also eine statistische Verhältniszahl auf eine Totalmasse und läßt sich diese in Teilmassen, denen verschiedene Werte jener Verhältniszahl entsprechen, zerlegen, so erblickt Westergaard darin einen Grund, für die der Totalmasse entsprechende Verhältniszahl eine größere Stabilität, d. h. eine geringere Abhängigkeit von der Wirkung zufälliger Ursachen, anzunehmen, als in dem Fall, wo sich jene Verhältniszahl gegenüber der vorgenommenen Zerlegung indifferent verhielte.

Diese Anschauung, die bei ihm in nicht ganz unzweideutiger Weise ausgesprochen ist und sogar mit einer gerade entgegengesetzten gleichsam konkurriert, tritt uns bei einigen anderen Autoren in klarer Formulierung entgegen.

Bertrand³⁾ äußert sich z. B. dahin, daß die Präzisionsberechnungen in der Statistik unrichtig seien, weil die statistischen Massenerscheinungen einem Spiele mit vielen Urnen, von denen einer jeden

1) Auf Grund des auf S. 653 formulierten Satzes.

2) Vielleicht hat Westergaard in den citierten und ähnlichen Beispielen nicht effektive Zahlen der Ereignisse, sondern in der That künstlich hergestellte Zahlen im Auge gehabt. Ich vermisze aber in den „Grundzügen“ die ausdrückliche Aussprechung des Satzes, daß bei Berechnung des mittleren Fehlers vom Durchschnittscharakter der in Frage stehenden Wahrscheinlichkeit abgesehen werden kann, worin, wie oben gezeigt worden ist, die von Poisson dem Bernouilli'schen Theorem verliehene Erweiterung besteht. Im historischen Teil der „Grundzüge“ bemerkt Westergaard (S. 256), daß „das Bernouilli'sche Theorem von Poisson auf den Fall erweitert wurde, wo zwei oder mehrere Wahrscheinlichkeiten obwalten“, und verweist auf S. 77 ff. An letzterer Stelle finde ich aber nur eine Erörterung von Beispielen, die einem allerdings auch von Poisson bewiesenen Satz (formuliert in No. 112, 7^o, bewiesen in No. 94—95 der „Recherches“) entsprechen, der aber nicht das erweiterte Theorem Bernouilli's ist. Eine strengere Auseinanderhaltung jener zwei Sätze, von denen der letzte auf eine Durchschnittswahrscheinlichkeit i. eig. S., der erste aber auf eine konstant zusammengesetzte Durchschnittswahrscheinlichkeit sich bezieht, dürfte in einem Lehrbuch, das für mathematisch weniger geschulte Leser bestimmt zu sein scheint, wohl am Platze gewesen sein.

3) Calcul des probabilités, Chap. XII: les lois de la statistique.

eine verschiedene Chance des Erscheinens einer weißen Kugel entspricht, gleichkämen, denkt sich aber das Spiel so eingerichtet, daß die Zahlen der aus den einzelnen Urnen vorzunehmenden Ziehungen im voraus festgesetzt werden. Warum aber eben dieses Schema für die Betrachtung statistischer Vorgänge maßgebend sein soll, bleibt unbewiesen.

Eine tiefere Begründung hat v. Kries dem nämlichen Standpunkt zu geben versucht¹⁾.

Die Präzisionsbestimmungen haben, nach seiner Auffassung, den Zweck, einen Maßstab für die Sicherheit derjenigen Schlußfolgerungen abzugeben, die aus den Veränderungen in den Werten einer Verhältniszahl auf das Verhalten der für die untersuchte Massenerscheinung in Betracht kommenden „allgemeinen Bedingungen“ gemacht werden. Dabei lasse man sich aber stets von der Vorstellung leiten, daß jene „allgemeinen Bedingungen“, wenn sie konstant blieben, normale Dispersion zur Folge haben würden. Dies sei nun, so meint v. Kries, eine ganz willkürliche und in vielen Fällen durchaus unzutreffende Annahme, wie man's aus folgendem Beispiel ersehen könne.

Handelt es sich um die allgemeine Kriminalität einer Bevölkerung und wird dieselbe an dem Verhältnis (p) der Zahl der jährlich begangenen Verbrechen und Vergehen zu der Gesamtzahl der strafmündigen Bevölkerung (n) gemessen, so glaubt v. Kries, daß, falls sich die „allgemeinen Bedingungen“, welche für die Kriminalität von Belang sind, in der Zeit nicht ändern würden, man bei den Werten von p von Jahr zu Jahr kleinere Schwankungen erwarten sollte, als bei einer Anzahl von Versuchsreihen im Fall einer mit schwarzen und weißen Kugeln im Verhältnis von $1-p$ zu p gefüllten Urne, aus der jedesmal n Ziehungen vorgenommen werden. Solch eine Erwartung motiviert er damit, daß die Kriminalität in verschiedenen Kategorien der Bevölkerung nicht dieselbe Höhe hat, sondern nach Geschlecht, Alter, Beruf u. s. f. verschieden ist. Die numerischen Anteile aber, die jene Geschlechts-, Alters-, Berufs- u. s. f. Gruppen an der Gesamtbevölkerung haben, fallen, nach v. Kries, unter den Begriff der „hier in Rede stehenden allgemeinen Bedingungen“, mithin sei es als eine Veränderung der allgemeinen Bedingungen anzusehen, wenn eine Bevölkerungsgruppe, die in einem bestimmten Jahre 10 Proz. der Bevölkerung ausmacht, im darauf folgenden etwa auf 9,99 Proz. sinkt oder auf 10,01 Proz. steigt. Auch für den Fall der Sterblichkeit entwickelt v. Kries analoge Vorstellungen.

So möchte also v. Kries, genau wie Bertrand, die statistischen Verhältniszahlen nach dem Schema konstant zusammengesetzter Durchschnittswahrscheinlichkeiten behandelt wissen, und darum ist ihm die erwartungsmäßige, d. h. die dem Konstantbleiben der allgemeinen Bedingungen entsprechende Dispersion eine unternormale.

Da nun einerseits, wie v. Kries mit Recht anzunehmen scheint, der Durchschnittscharakter allen statistischen Relativzahlen innewohnt,

1) Prinzipien, Kap. VI, § 8 und Kap. IX, §§ 6—9.

und andererseits über die Art der Zusammensetzung einer statistischen Durchschnittswahrscheinlichkeit aus den sie bildenden Elementarwahrscheinlichkeiten eine genaue Kenntnis niemals vorliegt, so ist eine der v. Kries'schen Auffassung adäquate Präzisionsbestimmung schlechtweg ausgeschlossen. Mit aus dieser Ueberlegung ergibt sich dann als folgerichtige Konsequenz eine „allgemeine Verwerfung“ derjenigen Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf den statistischen Stoff, die den Zweck haben, Spielräume für die Wirkung „zufälliger Ursachen“ anzugeben.

Das eine, was den angeführten Betrachtungen gegenüber geltend gemacht werden könnte, wäre dies: Setzt man voraus, daß es gelungen sein sollte, eine Durchschnittswahrscheinlichkeit p unter die Form

$$p = \gamma_1 \pi_1 + \gamma_2 \pi_2 + \gamma_3 \pi_3 \dots$$

zu bringen, wo $\pi_1, \pi_2, \pi_3 \dots$ Elementarwahrscheinlichkeiten darstellen, so erscheint die Annahme, daß für die Größen $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \dots$ sich bei einer Anzahl von Versuchsreihen, also z. B. bei einer Reihe von Jahrgängen, identische Zahlenwerte herausstellen würden — worin, nach v. Kries, die Konstanz der allgemeinen Bedingungen ihren Ausdruck finden soll — in gleichem Maße unwahrscheinlich und der bisherigen Erfahrung widersprechend, wie etwa die Annahme, daß die empirischen Werte von $\pi_1, \pi_2, \pi_3 \dots$ von Versuchsreihe zu Versuchsreihe konstant blieben. Denn bei Auflösung von Durchschnittswahrscheinlichkeiten höherer Ordnungen in solche niederer Ordnungen hat sich bis jetzt etwas Aehnliches bezüglich der Größen $g_1, g_2, g_3 \dots$ nie gezeigt. Mithin wäre die Frage nach der Konstanz der allgemeinen Bedingungen im voraus für alle Fälle im negativen Sinne entschieden und eine vom v. Kries'schen Gesichtspunkte aus geführte Untersuchung der Schwankungen, denen statistische Verhältniszahlen in der Zeit unterworfen sind, würde sich nicht nur als unmöglich, wie v. Kries behauptet, sondern auch als gegenstandslos erweisen.

Das andere jener Auffassung Entgegenzuhaltende wäre, daß sie auf eine große Gruppe statistischer Verhältniszahlen gar keine Anwendung zuläßt. Ich meine solche Zahlen, die nicht mehr die Intensität gewisser Erscheinungen, sondern die Häufigkeit des Vorkommens bestimmter, an den Einzelfällen einer statistischen Masse wahrnehmbarer Merkmale zum Ausdruck bringen, z. B. das Verhältnis der Zahlen der Totgeborenen zu der Gesamtzahl der Geborenen, das Verhältnis der Zahl der an bestimmten Todesursachen Gestorbenen zu der Gesamtzahl der Gestorbenen, das Verhältnis der Zahl von Verbrechen besonderer Art zu der Gesamtzahl der Verbrechen u. s. f. Die mangelnde Chancengleichheit der Einzelfälle wird in den angeführten und ähnlichen Fällen darin zum Ausdruck kommen, daß sich verschiedene Arten der Zerlegung ein und derselben Masse gegenseitig nicht indifferent verhalten werden, so z. B. bei den Geborenen die Verteilung einmal in Lebend- und Totgeborene und ein anderes Mal in Eheliche und Uneheliche, falls sich z. B. herausstellen sollte, daß in der Masse der Unehelichen die Totgeborenen verhältnismässig stärker vertreten sind, als in der Masse der Ehelichen. Es steht nichts im

Wege, den größeren oder kleineren Anteil der Unehelichen als eine der „allgemeinen Bedingungen“, die für die Verteilung der Geborenen in Lebend- und Totgeborene in Frage kommen, zu betrachten, oder, ganz allgemein gesagt, die eine der beiden von verschiedenen Gesichtspunkten aus erhaltenen Verteilungen einer statistischen Masse als bedingend für die andere hinzustellen. Sucht man aber nach einem zahlenmäßigen Ausdruck der als „allgemeine Bedingung“ gedachten Verteilung, so darf man jenen Ausdruck nicht, nach v. Kries'scher Art, in den sich aus der Beobachtung unmittelbar ergebenden Zahlen erblicken, zugleich aber die analogen Zahlen der anderen Verteilung — der bedingten — als mit zufälligen Fehlern behaftete ansehen. Dies würde schon wegen des sehr wohl möglichen Ineinandergreifens der zwei Ursachenkomplexe, durch die die zwei Verteilungen herbeigeführt werden — Beispiele solchen Verhaltens der Ursachenkomplexe ließen sich leicht anführen — im höchsten Grade inkonsequent erscheinen.

Tritt bei Betrachtung der soeben ins Auge gefaßten Art statistischer Verhältniszahlen das Unnatürliche der v. Kries'schen Auffassung deutlicher, als in dem Beispiele der Kriminalitäts-, der Sterbeziffer oder irgend welches Intensitäts-Koeffizienten hervor, so liegt es eben an dem, wie ich glaube, nebensächlichen Unterschied, daß dort die zwei in Betracht kommenden Verteilungen sich aus zwei parallel laufenden, vielleicht sogar durchkreuzenden Erscheinungsreihen ergeben, ja in denselben Einzelfällen sich gleichsam verkörpern, während hier die Masse der lebenden Personen in bestimmter Gliederung als etwas Gegebenes vorliegt, bevor die Reihe der verbrecherischen Handlungen, der Todesfälle oder irgend welcher Ereignisse eröffnet wird.

Eine Analogie zu diesem Modus des statistischen Geschehens bietet das oben erwähnte Beispiel Poisson's mit den Urnen (S. 656 ff.), wo erst das Urnensystem $B_1, B_2, B_3 \dots$ aus dem Urnensystem $C_1, C_2, C_3 \dots$ abgeleitet und dann eine Reihe von Ziehungen vorgenommen wird. Die bei den einzelnen Versuchsreihen benützten Urnensysteme $B_1, B_2, B_3 \dots$; $B'_1, B'_2, B'_3 \dots$; $B''_1, B''_2, B''_3 \dots$ entsprechen den für einzelne Jahrgänge oder sonstige Abschnitte einer Zeitperiode in Betracht kommenden Massen lebender Personen. Mit solch einem Vergleich berühre ich aber einen Punkt, der für die ganze Frage von Wichtigkeit sein dürfte. Sind nämlich im Poisson'schen Beispiel die einzelnen B -Systeme in Bezug auf ihre Ableitung aus dem C -System ganz und gar voneinander unabhängig, so läßt sich das Gleiche von den Massen lebender Personen, die etwa zwei aufeinanderfolgenden Jahrgängen entsprechen, nicht behaupten, denn die beiden Massen bestehen zum großen Teil aus denselben Individuen¹⁾. Darum würde der in Frage stehende statistische Vorgang eher einer Einrichtung des Spieles gleichen, bei der das System $B'_1, B'_2, B'_3 \dots$ nicht unmittelbar aus dem System $C_1, C_2, C_3 \dots$, sondern aus dem vorhandenen System $B_1, B_2, B_3 \dots$ abgeleitet würde, und zwar in der Weise, daß etwa durch Auslosung eine verhältnismäßig

1) Lexis, Zur Theorie . . . , § 22.

kleine Anzahl von Urnen aus dem zuletzt erwähnten System entfernt und durch eine gleiche Zahl neuer, ebenfalls durch Auslosung aus dem Urnensystem $C_1, C_2, C_3 \dots$ hergenommener ersetzt würde. In ähnlicher Weise wäre aus dem so erhaltenen Urnensystem $B'_1, B'_2, B'_3 \dots$ das der folgenden Versuchsreihe entsprechende System $B''_1, B''_2, B''_3 \dots$ abzuleiten u. s. f. Es ist klar, daß ein in geschildeter Art eingerichtetes Spiel eine unternormale Dispersion würde erwarten lassen. Damit letztere in dem uns beschäftigenden statistischen Fall auch als erwartungsmäßige gelten könnte, müßten allerdings bezüglich der Zu- und Abgänge, die eine Masse lebender Menschen in der Zeit erfährt, gewisse Bedingungen erfüllt werden, auf deren nähere Präcisierung ich hier nicht eingehen werde. Diese Bedingungen könnten aber mit vollem Recht zu den allgemeinen Bedingungen der Erfahrung gerechnet werden. In einer einzigen Beziehung würde sich das erwähnte Schema als nicht ganz zutreffend erweisen: es bleibt nämlich dabei unberücksichtigt, daß ein und dasselbe Individuum in verschiedenen Jahrgängen nicht derselben Gruppe anzugehören braucht, oder daß, m. a. W., die für ein bestimmtes Individuum geltende Chance eine wechselnde sein kann. Am deutlichsten macht sich dieser Umstand in dem Falle der Gruppierung nach Altersklassen geltend.

Trotzdem muß anerkannt werden, daß die partielle Identität der den einzelnen Jahrgängen entsprechenden statistischen Massen in bezug auf ihren Bestand einen störenden Faktor bei Untersuchung der Dispersionsverhältnisse statistischer Reihen bildet und zwar die Erwartungen bezüglich der Dispersion nach der Richtung der unternormalen Dispersion hin zu modifizieren imstande ist.

Es ist andererseits klar, daß jene mangelnde Unabhängigkeit der Einzelwerte einer statistischen Reihe, oder in der Sprache der Wahrscheinlichkeitsrechnung ausgedrückt, die mangelnde Unabhängigkeit der Versuchsreihen dort nichts zu bedeuten hat, wo die in Frage stehende Wahrscheinlichkeit p eine Elementarwahrscheinlichkeit ist. Denn wäre z. B. die Chance, ein Verbrechen zu begehen, für jeden Menschen die gleiche, so würde es vollkommen irrelevant sein, aus welchen Individuen die betreffenden, den einzelnen aufeinanderfolgenden Jahrgängen entsprechenden Massen bestehen.

So gelange ich auf Umwegen zu einer teilweisen Uebereinstimmung mit v. Kries, der bei mangelnder Chancengleichheit der Einzelfälle eine unternormale Dispersion resp. eine höhere Präcision als erwartungsmäßige hinstellt. Ich behaupte aber,

daß 1) die Wirkung, welche die mangelnde Chancengleichheit der Einzelfälle auf die Gestaltung der erwartungsmäßigen Dispersionsverhältnisse ausübt, keine direkte ist, sondern nur unter der Voraussetzung der mangelnden Unabhängigkeit der Versuchsreihen zur Geltung kommt¹⁾;

1) Ähnlich begründet die mangelnde Chancengleichheit der Einzelfälle oder die Thatsache, daß die in Frage stehende Wahrscheinlichkeit eine Durchschnittswahrscheinlichkeit sei, die bekannte Schwierigkeit bei Berechnung von Wahrscheinlichkeiten zusammengesetzter Ereignisse bestimmter Art. Richtig erkannt von Poisson, Recherches

daß 2) aus dem sub 1) angegebenen Grunde die genannte Wirkung bei einer umfangreichen Klasse statistischer Verhältniszahlen ausbleibt;

daß 3) aus dem nämlichen Grunde keine Störung durch mangelnde Chancengleichheit der Einzelfälle herbeigeführt wird, wo die Präzisionsbestimmung als Orientierungsmittel bei Vergleichen von Land zu Land oder von einer Gruppe der Bevölkerung zu einer anderen gleichzeitigen Gruppe dienen soll, und

daß 4) die Art, in der v. Kries die von mir in beschränktem Maße anerkannte Beziehung zwischen mangelnder Chancengleichheit der Einzelfälle und unternormaler Dispersion zu begründen versucht hat, eine, nach meiner Meinung, verfehlt sei, weil nichts die Auffassung zu rechtfertigen vermag, wonach die in Betracht kommenden Verteilungskoeffizienten ($g_1, g_2, g_3 \dots$ resp. $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \dots$) anders, denn als empirische Werte von Wahrscheinlichkeitsgrößen zu betrachten wären.

v. Kries hat selbst die Denkbarkeit jener der seinigen entgegengesetzten Auffassung, wie es scheint, zugegeben. Er verwirft aber die letzte aus dem Grunde, weil es „kaum möglich“ sei, diejenigen „entfernteren“ allgemeinen Bedingungen „bestimmt zu bezeichnen“, deren Konstanz in den eben genannten Verteilungskoeffizienten „noch zufällige Schwankungen zuließe“¹⁾.

Demgegenüber wäre erstens darauf hinzuweisen, daß in sehr vielen Fällen die den Verteilungskoeffizienten entsprechenden abstrakten Wahrscheinlichkeiten — und solche möchte v. Kries nicht gelten lassen — als analytische Funktionen anderer Wahrscheinlichkeitsgrößen dargestellt werden können, die v. Kries selbst keinen Anstand nimmt, in dieser Eigenschaft anzuerkennen.

Zweitens aber erscheint eine „bestimmte Bezeichnung“ der allgemeinen Bedingungen, die einer Wahrscheinlichkeit zu Grunde liegen, in der Statistik überhaupt ausgeschlossen. Man hat hier stets mit hypothetischen und meistens vagen Vorstellungen zu rechnen und es giebt in dieser Beziehung zwischen den einzelnen Fällen wohl nur graduelle Verschiedenheiten, womit ich keineswegs leugnen möchte, daß die Verteilungskoeffizienten resp. die ihnen entsprechenden abstrakten Wahrscheinlichkeiten im allgemeinen etwas ungünstiger als anders geartete Relativzahlen gestellt seien.

Uebrigens giebt man sich einer Täuschung hin, wenn man glaubt, aus dem Verhalten statistischer Zahlen unmittelbar auf das Verhalten der in Betracht kommenden allgemeinen Bedingungen schließen zu dürfen. In Wirklichkeit beziehen sich die Folgerungen stets auf die in Frage stehende abstrakte Wahrscheinlichkeit. Es leuchtet aber ein, daß das Verhalten der letzteren mit dem Verhalten der ihr zu Grunde liegenden allgemeinen Bedingungen durchaus nicht immer zu koincidieren braucht: diese können wesentliche Aenderungen erfahren haben, ohne daß der numerische Wert jener dadurch irgendwie tangiert wäre.

S. 149—150, wenn auch im speziellen Teile der „Recherches“ nicht genügend berücksichtigt. S. Laplace, *Théorie analytique des probabilités*, Livre II, Chap. VII und S. 186—187. Vergl. v. Kries, Kap. IV, § 3 und Kap. IX, § 8, S. 242—244.

1) Prinzipien S. 238, vgl. dagegen S. 234 (unten) — 235 (oben).

Handwritten note: ~~Indes ist die Wahrscheinlichkeit nicht auf Grund der Zahlen zu bestimmen, sondern umgekehrt.~~