Untersuchungen über das logische Schließen*). I.

Von

Gerhard Gentzen in Göttingen.

Übersicht.

Die folgenden Untersuchungen beziehen sich auf den Bereich der Prädikatenlogik [bei H.-A.[1]) „engerer Funktionenkalkül" genannt]. Diese umfaßt solche Schlüsse, die in allen Teilen der Mathematik immerzu gebraucht werden. Was noch zu ihnen hinzukommt, sind Axiome und Schlußweisen, die man den einzelnen Zweigen der Mathematik selbst zurechnen kann, z. B. in der elementaren Zahlentheorie die Axiome der natürlichen Zahlen, der Addition, Multiplikation und Potenzierung, sowie der Schluß der vollständigen Induktion; in der Geometrie die geometrischen Axiome.

Neben der klassischen Logik werde ich ferner die intuitionistische Logik behandeln, wie sie z. B. von Heyting[2]) formalisiert worden ist.

Die vorliegenden Untersuchungen über die klassische und intuitionistische Prädikatenlogik zerfallen im wesentlichen in zwei nur lose zusammenhängende Teile.

1. Mein erster Gesichtspunkt war folgender: Die Formalisierung des logischen Schließens, wie sie insbesondere durch Frege, Russell und Hilbert entwickelt worden ist, entfernt sich ziemlich weit von der Art des Schließens, wie sie in Wirklichkeit bei mathematischen Beweisen geübt wird. Dafür werden beträchtliche formale Vorteile erzielt. Ich wollte nun zunächst einmal einen Formalismus aufstellen, der dem wirklichen Schließen möglichst nahe kommt. So ergab sich ein „Kalkül des natürlichen Schließens". („NJ" für die intuitionistische, „NK" für die klassische Prädikatenlogik.) Es zeigte sich dann weiter, daß der Kalkül gewisse besondere Eigenschaften hat, und zwar nimmt im Hinblick auf diese der von den Intuitionisten abgelehnte „Satz vom ausgeschlossenen Dritten" eine Sonderstellung ein.

Den Kalkül des natürlichen Schließens werde ich im II. Abschnitt der vorliegenden Abhandlung entwickeln, und einige Betrachtungen darüber anfügen.

---

*) Diese Arbeit, einschließlich des II. Teils, ist von der Math.-Nat. Fakultät der Universität Göttingen als Inaugural-Dissertation angenommen worden.

[1]) Hilbert-Ackermann, Grundzüge der theoretischen Logik. Im folgenden stets als H.-A. zitiert.

[2]) A. Heyting, Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik und Mathematik, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss., phys.-math. Kl. 1930. S. 42—65.

2. Eine nähere Untersuchung der besonderen Eigenschaften des natürlichen Kalküls führte mich schließlich zu einem sehr allgemeinen Satz, den ich im folgenden „Hauptsatz“ nennen will.

Der Hauptsatz[3]) besagt, daß sich jeder rein logische Beweis auf eine bestimmte, übrigens keineswegs eindeutige, Normalform bringen läßt. Die wesentlichsten Eigenschaften eines solchen Normalbeweises lassen sich etwa so ausdrücken: Er macht keine Umwege. Es werden in ihm keine Begriffe eingeführt, welche nicht in seinem Endergebnis enthalten sind und daher zu dessen Gewinnung notwendig verwendet werden müssen.

Der Hauptsatz gilt sowohl für die klassische als auch für die intuitionistische Prädikatenlogik.

Um ihn in bequemer Form aussprechen und beweisen zu können, mußte ich einen besonders dafür passenden logischen Kalkül zugrunde legen. Hierzu erwies sich der natürliche Kalkül nicht als geeignet. Zwar weist er schon die für die Gültigkeit des Hauptsatzes wesentlichen Eigenschaften auf, doch nur in seiner intuitionistischen Form, während der Satz vom ausgeschlossenen Dritten, wie schon bemerkt, im Hinblick auf diese Eigenschaften eine Sonderstellung einnimmt.

Im III. Abschnitt der vorliegenden Abhandlung werde ich also einen weiteren Kalkül des logischen Schließens entwickeln, welcher alle gewünschten Eigenschaften sowohl in seiner intuitionistischen als auch in seiner klassischen Form besitzt. („LJ“ für die intuitionistische, „LK“ für die klassische Prädikatenlogik). An Hand dieses Kalküls wird dann der Hauptsatz ausgesprochen und bewiesen.

Der Hauptsatz gestattet mannigfache Anwendungen. Als Beispiele dafür werde ich im IV. Abschnitt ein Entscheidungsverfahren für die intuitionistische Aussagenlogik entwickeln (IV, § 1), sowie einen neuen Beweis für die Widerspruchsfreiheit der klassischen Arithmetik mit Ausschluß der vollständigen Induktion geben (IV, § 3).

Der III. und IV. Abschnitt können unabhängig vom II. Abschnitt gelesen werden.

3. Der I. Abschnitt enthält eine Festsetzung der in dieser Abhandlung verwendeten Bezeichnungsweisen.

Im V. Abschnitt beweise ich die Äquivalenz der von mir aufgestellten logischen Kalküle NJ, NK und LJ, LK mit einem den Formalismen von Russell, Hilbert und Heyting angeglichenen (und mit diesen unschwer vergleichbaren) Kalkül. („LHJ“ für die intuitionistische, „LHK“ für die klassische Prädikatenlogik).

---

[3]) Ein wichtiger Spezialfall des Hauptsatzes wurde bereits von Herbrand auf völlig anderem Wege bewiesen. Näheres darüber siehe IV. Abschn., § 2.

4. Der vorliegende I. Teil enthält nur den I. bis III. Abschnitt, der IV. und V. Abschnitt folgen in einem II. Teil nach.

I. Abschnitt.

Bezeichnungsfestsetzung.

Den Begriffen „Gegenstand", „Funktion", „Prädikat", „Aussage", „Satz", „Axiom", „Beweis", „Schluß" usw. in der Logik und Mathematik entsprechen in deren Formalisierung gewisse Zeichen bzw. Zeichenkombinationen. Wir teilen diese ein in:

1. *Zeichen.*

2. *Ausdrücke,* das sind endliche Zeichenreihen.

3. *Figuren,* das sind irgendwie angeordnete endliche Mengen von Zeichen.

Zeichen gelten als spezielle Ausdrücke und Figuren, Ausdrücke als spezielle Figuren.

In der vorliegenden Arbeit werden wir Zeichen, Ausdrücke und Figuren folgender Art betrachten:

1. Zeichen:

Diese zerfallen in Zeichen für Bestimmtes und Variable.

1. 1. Zeichen für Bestimmtes:

Zeichen für bestimmte Gegenstände: 1, 2, 3, ...

Zeichen für bestimmte Funktionen: $+$, $-$, $\cdot$.

Zeichen für bestimmte Aussagen: $\vee$ („die richtige Aussage"), $\wedge$ („die falsche Aussage").

Zeichen für bestimmte Prädikate: $=$, $<$.

Logische Zeichen[4]*:* & „und", $\vee$ „oder", $\supset$ „aus ... folgt", $\supset\subset$ „ist äquivalent", $\neg$ „nicht", $\forall$ „für alle", $\exists$ „es gibt ein".

Wir gebrauchen auch die Benennungen: Und-Zeichen, Oder-Zeichen, Folgt-Zeichen, Äquivalenz-Zeichen, Nicht-Zeichen, All-Zeichen, Es-gibt-Zeichen.

---

[4]) Wir übernehmen die Zeichen $\vee$, $\supset$, $\exists$ von Russell. Die Russellschen Zeichen für „und", „äquivalent", „nicht", „alle", nämlich $\cdot$, $\equiv$, $\sim$, ( ), werden bereits in der Mathematik in anderer Bedeutung gebraucht. Wir nehmen daher das Hilbertsche &, während für Hilberts Äquivalenz-, All- und Nicht-Zeichen $\sim$, ( ), $\overline{}$, ebenfalls schon andere Bedeutungen üblich sind. Das Nicht-Zeichen stellt außerdem eine Abweichung von der linearen Anordnung der Zeichen dar, die für manche Zwecke unangenehm ist. Wir verwenden daher für Äquivalenz und Verneinung die Zeichen von Heyting, und als All-Zeichen ein dem $\exists$ entsprechendes Zeichen.

Hilfszeichen:) (, $\rightarrow$.

1.2. Variable:

Gegenstandsvariable. Diese teilen wir ein in *freie* Gegenstandsvariable: $a, b, c, \ldots, m$ und *gebundene* Gegenstandsvariable: $n, \ldots, x, y, z$.

Aussagenvariable: $A, B, C, \ldots$.

Es sollen beliebig viele Variable zur Verfügung stehen; wenn das Alphabet nicht ausreicht, werden Zahlenindizes angefügt, z. B. a_7, C_3.

1.3. Deutsche und griechische Buchstaben dienen uns als „Mitteilungszeichen", sind also keine Zeichen der formalisierten Logik, sondern Variable unserer Betrachtungen über diese. Ihre Bedeutung wird jeweils bei Gebrauch erklärt werden.

2. Ausdrücke.

2.1. Begriff des Aussageausdrucks, kurz *Formel* genannt (induktiv erklärt):

(Der Begriff Formel wird sonst gewöhnlich in allgemeinerer Bedeutung gebraucht; den im folgenden erklärten Spezialfall würde man dann etwa als „rein logische Formel" bezeichnen können.)

2.11. Ein Zeichen für eine bestimmte Aussage ist eine Formel. Das sind die Zeichen $\curlyvee$ und $\curlywedge$.

Eine Aussagenvariable mit einer Anzahl von freien Gegenstandsvariablen dahinter (eventuell auch keinen) ist eine Formel. Z. B. $A\,b\,a\,b$.

Die Gegenstandsvariablen heißen die *Argumente* der Aussagenvariablen.

Formeln der genannten zwei Arten nennen wir auch *Elementarformeln.*

2.12. Ist $\mathfrak{A}$ eine Formel, so ist auch $\neg\, \mathfrak{A}$ eine Formel.

Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Formeln, so sind auch $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ Formeln.

(Das Zeichen $\supset\subset$ wollen wir für unsere Betrachtungen nicht zulassen, es ist ja überflüssig, da $\mathfrak{A} \supset\subset \mathfrak{B}$ als Abkürzung für $(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \,\&\, (\mathfrak{B} \supset \mathfrak{A})$ angesehen werden kann.)

2.13. Aus einer Formel, in der die gebundene Gegenstandsvariable $\mathfrak{x}$ nicht vorkommt, entsteht wieder eine Formel, wenn man $\forall\, \mathfrak{x}$ bzw. $\exists\, \mathfrak{x}$ davor setzt, zugleich darf man eine in der Formel vorkommende freie Gegenstandsvariable an einigen Stellen durch $\mathfrak{x}$ ersetzen.

2.14. Durch Klammern ist dafür zu sorgen, daß der Aufbau einer Formel eindeutig ersichtlich ist. Beispiel einer Formel:

$$\exists\, x\big(((\neg\, A\,b\,x\,a) \vee B\,x) \supset (\forall\, z(A \,\&\, B))\big).$$

Durch besondere Abmachungen kann man Klammern sparen; wir verzichten darauf (mit einer Ausnahme, s. 2.4), da wir nicht viele Formeln hinzuschreiben haben.

2.2. Als *Grad einer Formel* bezeichnen wir die Anzahl der in ihr vorkommenden logischen Zeichen. (Eine Elementarformel hat also den Grad 0.)

Als *äußerstes Zeichen einer Formel*, die keine Elementarformel ist, bezeichnen wir dasjenige logische Zeichen, das bei ihrem Aufbau gemäß 2.12 und 2.13 als letztes hinzugefügt würde.

Als *Teilformeln einer Formel* bezeichnen wir diejenigen Formeln, welche bei ihrem Aufbau gemäß 2.12 und 2.13 auftreten konnten, sie selbst eingeschlossen.

Beispiel: Die Teilformeln von $A \,\&\, \forall x\, B x a$ sind A, $\forall x\, B x a$, $A \,\&\, \forall x\, B x a$, sowie alle Formeln der Gestalt $B\mathfrak{a}a$, wobei für $\mathfrak{a}$ eine beliebige freie Gegenstandsvariable steht (z. B. kann dies auch a sein). Der Grad von $A \,\&\, \forall x\, B x a$ ist 2, das äußerste Zeichen &.

2.3. Begriff der *Sequenz*:

(Dieser wird erst im III. Abschnitt gebraucht, und der Zweck seiner Einführung wird auch erst dort deutlich.)

Eine Sequenz ist ein Ausdruck der Form

$$\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu \rightarrow \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_\nu,$$

wobei für $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu, \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_\nu$ beliebige Formeln stehen dürfen. (Das $\rightarrow$ gilt ebenso wie die Kommata als Hilfszeichen und nicht etwa als logisches Zeichen.)

Die Formeln $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu$ bilden das *Antezedens*, die Formeln $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_\nu$ das *Sukzedens* der Sequenz. Beide Ausdrücke dürfen leer sein.

2.4. Die Sequenz $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu \rightarrow \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_\nu$ bedeutet inhaltlich genau dasselbe wie die Formel

$$(\mathfrak{A}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{A}_\mu) \supset (\mathfrak{B}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{B}_\nu).$$

(Mit $\mathfrak{A}_1 \,\&\, \mathfrak{A}_2 \,\&\, \mathfrak{A}_3$ meinen wir $(\mathfrak{A}_1 \,\&\, \mathfrak{A}_2) \,\&\, \mathfrak{A}_3$, entsprechend für $\vee$.)

Ist das Antezedens leer, so ist die Formel $\mathfrak{B}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{B}_\nu$ gemeint.

Ist das Sukzedens leer, so bedeutet die Sequenz dasselbe wie die Formel $\neg (\mathfrak{A}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{A}_\mu)$ oder $(\mathfrak{A}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{A}_\mu) \supset \curlywedge$.

Sind beide leer, so bedeutet die Sequenz dasselbe wie $\curlywedge$, also eine falsche Aussage.

Umgekehrt gibt es auch zu jeder Formel eine äquivalente Sequenz, z. B. die, deren Antezedens leer ist und deren Sukzedens nur aus der Formel besteht.

Die Formeln, aus denen eine Sequenz besteht, nennen wir *S-Formeln* (d. h. Sequenzformeln), womit wir zum Ausdruck bringen wollen, daß wir nicht die Formel als solche meinen, sondern verbunden mit ihrer Stellung in der Sequenz. So sagen wir z. B.:

„Eine Formel kommt in einer Sequenz an mehreren Stellen als S-Formel vor",

was wir auch so ausdrücken können:

„Mehrere verschiedene (was nur heißen soll: an verschiedener Stelle in der Sequenz stehende) S-Formeln sind formal gleich."

3. Figuren.

Wir brauchen Schlußfiguren und Beweisfiguren.

Solche bestehen aus Formeln oder auch aus Sequenzen; wir wollen im folgenden (3. 1 bis 3. 3, 3. 5) nur von Formeln reden, es gilt aber alles analog für Sequenzen, man hat dann nur das Wort Formel überall durch das Wort Sequenz zu ersetzen.

3. 1. Eine *Schlußfigur* läßt sich in der Form schreiben:

$$\frac{\mathfrak{A}_1 \;\ldots\; \mathfrak{A}_\nu}{\mathfrak{B}} \qquad (\nu \geqq 1),$$

wobei $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\nu$, $\mathfrak{B}$ Formeln sind. $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\nu$ heißen dann die *Oberformeln*, $\mathfrak{B}$ heißt die *Unterformel* der Schlußfigur.

(Ganz entsprechend sind also die Begriffe Obersequenz und Untersequenz bei einer aus Sequenzen bestehenden Schlußfigur zu verstehen.)

Wir werden nur spezielle Schlußfiguren zu betrachten haben, die bei den einzelnen Kalkülen angegeben werden.

3. 2. Eine Beweisfigur, kurz *Herleitung* genannt, besteht aus einer Anzahl von Formeln (mindestens einer), die unter sich Schlußfiguren bilden in folgender Weise: Jede Formel ist Unterformel von höchstens einer Schlußfigur, jede, außer genau einer, der *Endformel*, ist Oberformel von mindestens einer Schlußfigur, und das System der Schlußfiguren ist zirkelfrei, d. h. es gibt keinen Zyklus (Reihe, zu deren letztem Glied wieder das erste als Nachfolger gilt) von Formeln der Herleitung, von denen jede Oberformel einer Schlußfigur ist, deren Unterformel die nächste in der Reihe ist.

3. 3. Solche Formeln einer Herleitung, welche nicht Unterformeln einer Schlußfigur sind, heißen *Anfangsformeln* der Herleitung.

Eine Herleitung heißt *stammbaumförmig*, wenn jede ihrer Formeln eine Oberformel von höchstens einer Schlußfigur ist.

Alsdann sind also alle Formeln außer der Endformel Oberformeln von genau einer Schlußfigur.

Wir werden nur stammbaumförmige Herleitungen zu betrachten haben.

Die Formeln, aus denen eine Herleitung nach der Erklärung besteht, nennen wir *H-Formeln* (d. h. Herleitungsformeln), womit wir zum Ausdruck bringen wollen, daß wir nicht nur die Formel als solche meinen, sondern verbunden mit ihrer Stellung in der Herleitung. In diesem Sinne werden wir z. B. die Ausdrucksweisen gebrauchen:

„Eine Formel kommt in einer Herleitung als H-Formel vor.“

„Zwei verschiedene (d. h. nur: an verschiedener Stelle in der Herleitung stehende) H-Formeln sind formal gleich, nämlich gleich derselben Formel.“

Es bedeutet also: „$\mathfrak{A}$ ist dieselbe H-Formel wie $\mathfrak{B}$“, daß $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ nicht nur der Form nach gleich sind, sondern außerdem die gleiche Stelle in der Herleitung haben. Für Gleichheit der Form ohne Rücksicht auf die Stelle benutzen wir die Worte „formal gleich“.

Dagegen wollen wir für Gegenstandsvariable keine besondere Bezeichnung, die sie in Verbindung mit einer bestimmten Stelle in einer Formel brächte, einführen, wir sagen also z. B.: „In zwei verschiedenen H-Formeln kommt dieselbe Gegenstandsvariable vor.“

3.4. Die Schlußfiguren der Herleitung nennen wir *H-Schlußfiguren* (d. h. Herleitungs-Schlußfiguren).

In einer aus Sequenzen bestehenden Herleitung nennen wir die S-Formeln der H-Sequenzen *H-S-Formeln* (d. h. Herleitungs-Sequenz-Formeln)

3.5. Ein *Faden* in einer Herleitung ist (nach Hilbert) eine Reihe von H-Formeln, deren erste eine Anfangsformel und deren letzte die Endformel ist, und von denen jede außer der letzten Oberformel einer H-Schlußfigur ist, deren Unterformel die nächste Formel des Fadens ist.

Wir sagen: „Eine H-Formel steht *über* (bzw. *unter*) einer anderen H-Formel“, wenn es einen Faden gibt, in dem die erstere vor (bzw. nach) der letzteren vorkommt.

Wir denken dabei an die Schreibweise der Herleitung als stammbaumförmige Figur mit den Anfangsformeln obenan und der Endformel unten. (Beispiele finden sich im II. Abschnitt, § 4.)

Ferner sagen wir: „Eine H-Schlußfigur steht über bzw. unter einer H-Formel“, wenn alle Formeln der Schlußfigur über bzw. unter dieser H-Formel stehen.

Wir bezeichnen eine Herleitung mit der Endformel $\mathfrak{A}$ auch als eine „Herleitung von $\mathfrak{A}$“.

Die Anfangsformeln einer Herleitung können *Grundformeln* oder *Annahmeformeln* sein, über deren Natur werden wir bei den einzelnen Kalkülen näheres zu sagen haben.

II. Abschnitt.

Der Kalkül des natürlichen Schließens.

§ 1.

Beispiele natürlichen Schließens.

Wir wollen einen Formalismus aufstellen, der möglichst genau das wirkliche logische Schließen bei mathematischen Beweisen wiedergibt.

Wir zeigen zunächst an einigen Beispielen, wie das wirkliche Schließen etwa verläuft; zu dem Zwecke betrachten wir drei „richtige Formeln" und versuchen deren Richtigkeit auf einem möglichst natürlichen Wege einzusehen.

1.1. Erstes Beispiel:

$(X \vee (Y \& Z)) \supset ((X \vee Y) \& (X \vee Z))$ ist als richtige Formel zu erkennen (H.-A., Seite 28, Formel 19).

Man wird so argumentieren: Es gelte X oder $Y \& Z$. Wir unterscheiden die zwei Fälle: 1. X gilt, 2. $Y \& Z$ gilt. Im 1. Falle folgt die Gültigkeit von $X \vee Y$ sowie $X \vee Z$, also auch von $(X \vee Y) \& (X \vee Z)$. Im 2. Falle gilt $Y \& Z$, also sowohl y als auch Z. Aus Y folgt $X \vee Y$, aus Z folgt $X \vee Z$. Also gilt auch jetzt $(X \vee Y) \& (X \vee Z)$. Damit ist dies überhaupt aus $X \vee (Y \& Z)$ hergeleitet, d. h. es gilt:

$$(X \vee (Y \& Z)) \supset ((X \vee Y) \& (X \vee Z)).$$

1.2. Zweites Beispiel:

$$(\exists x \forall y F x y) \supset (\forall y \exists x F x y).$$

(H.-A., Formel 36, Seite 60). Man wird so argumentieren: Es gebe ein x, so daß für alle y $F x y$ gilt. Sei a ein solches x. Also gelte für alle y: $F a y$. Sei nun b irgendein beliebiger Gegenstand. Dann gilt $F a b$. Es gibt also ein x, nämlich a, so daß $F x b$ gilt. b war beliebig, also gilt dies für alle Gegenstände, d. h.: Für alle y gibt es ein x, so daß $F x y$ gilt. Damit haben wir die Behauptung.

1.3. Drittes Beispiel:

$(\neg \exists x F x) \supset (\forall y \neg F y)$ soll als intuitionistisch richtig erkannt werden. Man wird so schließen: Es wird angenommen, es gäbe kein x, für das $F x$ gilt. Hieraus soll gefolgert werden: Für alle y gilt $\neg F y$. Nun sei etwa a irgendein Gegenstand, für den $F a$ doch gelte. Dann folgt: Es gibt ein x, für das $F x$ gilt; nämlich a ist ein solches. Das widerspricht der Annahme $\neg \exists x F x$. Also haben wir einen Widerspruch,

d. h. Fa kann nicht gelten. Nun war a völlig beliebig, also folgt: Für alle y gilt $\neg Fy$. Das war zu zeigen.

Beweise der Art, wie sie bei diesen drei Beispielen geführt wurden, sollen nunmehr in einen exakt zu definierenden Kalkül eingeordnet werden (in § 4 wird dann angegeben, wie diese Beispiele in dem Kalkül sich darstellen).

§ 2.

Aufstellung des Kalküls NJ.

2. 1. Es soll jetzt ein Kalkül für „natürliche“, intuitionistische Herleitungen von richtigen Formeln angegeben werden. Die Beschränkung auf das intuitionistische Schließen ist nur vorläufig, die Gründe hierfür und die Erweiterung des Kalküls zum klassischen Schließen (durch Hinzufügung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten) sollen unten erläutert werden (siehe § 5).

Der wesentlichste äußerliche Unterschied zwischen NJ-Herleitungen und Herleitungen in den Systemen von Russell, Hilbert, Heyting ist folgender: Bei letzteren werden die richtigen Formeln aus einer Reihe von „logischen Grundformeln“ durch wenige Schlußweisen hergeleitet; das natürliche Schließen geht jedoch im allgemeinen nicht von logischen Grundsätzen aus, sondern von Annahmen (s. die Beispiele in § 1), an welche sich logische Schlüsse anschließen. Durch einen späteren Schluß wird dann das Ergebnis wieder von der Annahme unabhängig gemacht.

Wir wollen Kalküle der ersteren Art als *logistische* bezeichnen.

2. 2. Nach dieser Vorbemerkung erklären wir den Begriff der *NJ-Herleitung* wie folgt:

(Beispiele in § 4.)

Eine NJ-Herleitung besteht aus Formeln in stammbaumförmiger (I, 3. 3) Anordnung.

(Durch die Forderung nach stammbaumförmiger Anordnung weichen wir etwas von der Analogie zum wirklichen Schließen ab. Denn 1. findet beim wirklichen Schließen infolge der Linearität des Denkens notwendigerweise eine lineare Aufeinanderfolge der Aussagen statt, und 2. ist es hier üblich, ein bereits erhaltenes Ergebnis mehrmals weiter zu benutzen, während die Stammbaumform nur jeweils einmalige Verwendung einer hergeleiteten Formel gestattet. Beide Abweichungen dienen zur bequemeren Fassung des Herleitungsbegriffs und sind nicht wesentlich.)

Die Anfangsformeln der Herleitung sind Annahmeformeln, von diesen ist jede genau einer H-Schlußfigur zugeordnet (und zwar steht sie alsdann „über“ (I, 3.5) deren Unterformel, wie unten noch näher ausgeführt werden wird).

Alle Formeln, die unter einer Annahmeformel, aber noch über der Unterformel der H-Schlußfigur, zu der die Annahmeformel gehört, stehen, die Annahmeformel selbst eingeschlossen, heißen von dieser *abhängig*.

(Der Schluß macht also die nach ihm folgenden Aussagen von der zu ihm gehörigen Annahme unabhängig.)

Die Endformel der Herleitung hängt nach dem Gesagten von keiner Annahmeformel ab.

2.21. Angabe der zulässigen Schlußfiguren.

Die untenstehenden Schlußfigurenschemata sind so zu verstehen:

Aus einem der Schemata erhält man eine NJ-Schlußfigur, indem man für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ beliebige Formeln einsetzt, für $\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F} \mathfrak{x}$ bzw. $\exists \mathfrak{x}\, \mathfrak{F} \mathfrak{x}$ eine beliebige Formel mit $\forall$ bzw. $\exists$ als äußerstem Zeichen, $\mathfrak{x}$ bezeichne die zugehörige gebundene Gegenstandsvariable, für $\mathfrak{F} \mathfrak{a}$ diejenige Formel, welche aus $\mathfrak{F} \mathfrak{x}$ entsteht, indem man die gebundene Gegenstandsvariable $\mathfrak{x}$ überall, wo sie vorkommt, durch die freie Gegenstandsvariable $\mathfrak{a}$ ersetzt.

(Es kann z. B. für $\mathfrak{a}$ eine Variable genommen werden, die in $\mathfrak{F} \mathfrak{x}$ schon vorkommt. Für die Schlußfiguren AE und EB wird diese Möglichkeit allerdings durch die unten folgende Variablenbedingung wieder ausgeschlossen werden, doch für AB und EE bleibt sie bestehen. — Es braucht auch $\mathfrak{x}$ in $\mathfrak{F} \mathfrak{x}$ gar nicht vorzukommen, alsdann ist $\mathfrak{F} \mathfrak{a}$ natürlich mit $\mathfrak{F} \mathfrak{x}$ identisch. — $\mathfrak{F} \mathfrak{a}$ ist offenbar stets eine Teilformel von $\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F} \mathfrak{x}$ bzw. $\exists \mathfrak{x}\, \mathfrak{F} \mathfrak{x}$, gemäß der Teilformeldefinition unter I, 2.2.)

Die in eckigen Klammern stehenden Zeichen haben folgende Bedeutung: Formeln von dieser Gestalt dürfen in beliebiger Anzahl (evtl. keine), doch alle formal gleich, der Schlußfigur als Annahmeformeln zugeordnet sein. Sie müssen alsdann Anfangsformeln der Herleitung, und zwar in solchen Beweisfäden sein, welchen die betreffende Oberformel der Schlußfigur angehört. (D. h. diejenige Oberformel, über der im Schema die eckige Klammer steht. — Diese kann bereits selbst Annahmeformel sein.)

In einer Herleitung muß die Zuordnung zwischen einer H-Schlußfigur und den zugehörigen Annahmeformeln irgendwie kenntlich gemacht sein, etwa durch gemeinsame Numerierung (siehe die Beispiele in § 4).

Die Bezeichnungen der einzelnen Schlußfigurenschemata: UE, UB usw. sollen bedeuten: Eine nach dem Schema gebildete Schlußfigur ist eine Und-(U), Oder-(O), All-(A), Es-gibt-(E), Folgt-(F) bzw. Nicht-

(N)-Zeichen-„Einführung“ (E) bzw. „-Beseitigung“ (B). Näheres hierüber in § 5.

Die Schlußfiguren-Schemata:

UE	*UB*	*OE*	*OB*	
$\dfrac{\mathfrak{A} \quad \mathfrak{B}}{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}$	$\dfrac{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} \quad \dfrac{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}$	$\dfrac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}} \quad \dfrac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}}$	$\dfrac{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \quad \begin{matrix}[\mathfrak{A}] \\ \mathfrak{C}\end{matrix} \quad \begin{matrix}[\mathfrak{B}] \\ \mathfrak{C}\end{matrix}}{\mathfrak{C}}$	
AE	*AB*	*EE*	*EB*	
$\dfrac{\mathfrak{F}\mathfrak{a}}{\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}}$	$\dfrac{\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}}{\mathfrak{F}\mathfrak{a}}$	$\dfrac{\mathfrak{F}\mathfrak{a}}{\exists \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}}$	$\dfrac{\exists \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x} \quad \begin{matrix}[\mathfrak{F}\mathfrak{a}] \\ \mathfrak{C}\end{matrix}}{\mathfrak{C}}$	
FE	*FB*	*NE*	*NB*	
$\dfrac{\begin{matrix}[\mathfrak{A}] \\ \mathfrak{B}\end{matrix}}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}}$	$\dfrac{\mathfrak{A} \quad \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}$	$\dfrac{\begin{matrix}[\mathfrak{A}] \\ \curlywedge\end{matrix}}{\neg \mathfrak{A}}$	$\dfrac{\mathfrak{A} \quad \neg \mathfrak{A}}{\curlywedge}$	$\dfrac{\curlywedge}{\mathfrak{D}}$

Als *Eigenvariable* einer AE bzw. EB bezeichnen wir die in dem betreffenden Schema mit $\mathfrak{a}$ bezeichnete freie Gegenstandsvariable. (Vorausgesetzt, daß sie existiert, d. h. daß die mit $\mathfrak{x}$ bezeichnete gebundene Gegenstandsvariable in der mit $\mathfrak{F}\mathfrak{x}$ bezeichneten Formel vorkommt.)

Die Variablenbedingung:

Eine NJ-Herleitung muß noch folgender Bedingung genügen: (Über deren Sinn vgl. § 3.)

Die Eigenvariable einer AE darf nicht in der im Schema mit $\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}$ bezeichneten Formel und nicht in irgendeiner Annahmeformel, von der diese abhängt, vorkommen;

die Eigenvariable einer EB darf nicht in der im Schema mit $\exists \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}$ bezeichneten Formel und nicht in der mit $\mathfrak{C}$ bezeichneten Oberformel sowie nicht in irgendeiner Annahmeformel, von der diese abhängt, außer den mit $\mathfrak{F}\mathfrak{a}$ bezeichneten, zur EB gehörigen Annahmeformeln, vorkommen.

Hiermit ist die Definition der „NJ-Herleitung“ beendet.

§ 3.

Der inhaltliche Sinn der NJ-Schlußfiguren.

Wir wollen für einige der Schlußfigurenschemata ihren inhaltlichen Sinn erklären und damit deutlich zu machen versuchen, daß der Kalkül in der Tat das „wirkliche Schließen“ wiedergibt.

FE: In Worten ausgedrückt, ist dies folgender Schluß: Wenn $\mathfrak{B}$ unter Benutzung der Annahme $\mathfrak{A}$ bewiesen ist, so gilt (nunmehr ohne diese Annahme): aus $\mathfrak{A}$ folgt $\mathfrak{B}$. (Natürlich können weitere Annahmen gemacht worden sein, von denen auch dieses Ergebnis zunächst noch abhängig bleibt.)

OB: („Fallunterscheidung".) Wenn man $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ bewiesen hat, so kann man eine Fallunterscheidung machen: Man nimmt zunächst an, es gelte $\mathfrak{A}$, und leitet daraus etwa $\mathfrak{C}$ her. Wenn ferner aus der Annahme der Gültigkeit von $\mathfrak{B}$ ebenfalls $\mathfrak{C}$ sich herleiten läßt, dann gilt $\mathfrak{C}$ überhaupt, d. h. nunmehr unabhängig von beiden Annahmen (vgl. 1. 1).

AE: Wenn $\mathfrak{F}a$ für „beliebiges a" bewiesen ist, so gilt $\forall \mathfrak{x} \mathfrak{F} \mathfrak{x}$. Die Voraussetzung, daß a „ganz beliebig" ist, läßt sich genauer so ausdrücken: $\mathfrak{F}a$ darf von keiner Annahme abhängen, in welcher die Gegenstandsvariable a vorkommt. Und dies, zusammen mit der selbstverständlichen Forderung, daß in $\mathfrak{F}\mathfrak{x}$ das a von $\mathfrak{F}a$ überall, wo es vorkam, durch $\mathfrak{x}$ ersetzt sein muß, ist genau der auf die *AE* bezügliche Teil der obigen „Variablenbedingung".

EB: Man hat $\exists \mathfrak{x} \mathfrak{F} \mathfrak{x}$. Dann sagt man: Sei a ein solcher Gegenstand, für den $\mathfrak{F}$ gilt. D. h. man nimmt an: Es gelte $\mathfrak{F}a$. (Natürlich muß man für a eine Gegenstandsvariable nehmen, die in $\exists \mathfrak{x} \mathfrak{F} \mathfrak{x}$ noch nicht vorkam.) Hat man auf Grund dieser Annahme eine Aussage $\mathfrak{C}$ bewiesen, welche a nicht mehr enthält und auch nicht von einer sonstigen a enthaltenden Annahme abhängt, so ist $\mathfrak{C}$ unabhängig von der Annahme $\mathfrak{F}a$ bewiesen. Mit dem Gesagten wurde der die *EB* betreffende Teil der „Variablenbedingung" ausgesprochen. (Eine gewisse Analogie besteht zwischen *EB* und *OB*, wie ja überhaupt das Es-gibt-Zeichen die Verallgemeinerung des $\vee$, das Allzeichen die des & ist.)

NB: $\mathfrak{A}$ und $\neg \mathfrak{A}$ bedeutet einen Widerspruch, und ein solcher kann nicht zutreffen (Satz vom Widerspruch). Dies wird formal durch die Schlußfigur *NB* wiedergegeben, wobei $\curlywedge$ „den Widerspruch", „das Falsche" bezeichnet.

NE: (reductio ad absurdum.) Wenn aus einer Annahme $\mathfrak{A}$ etwas Falsches ($\curlywedge$) folgt, so ist $\mathfrak{A}$ nicht richtig, d. h. es gilt $\neg \mathfrak{A}$.

Das Schema $\frac{\curlywedge}{\mathfrak{D}}$: Wenn etwas Falsches gilt, so gilt jede beliebige Aussage.

Die übrigen Schlußfigurenschemata sind wohl leicht zu deuten.

§ 4.
Schreibung der drei Beispiele aus § 1 als $\mathfrak{N}\mathfrak{J}$-Herleitungen.

Das erste Beispiel (1. 1):

$$\dfrac{\dfrac{\overset{2}{X \lor (Y \& Z)} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{1}{X}}{X \lor Y}\,OE \quad \dfrac{\overset{1}{X}}{X \lor Z}\,OE}{(X \lor Y) \& (X \lor Z)}\,UE \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{Y \& Z}}{Y}\,UB}{X \lor Y}\,OE \quad \dfrac{\dfrac{\overset{1}{Y \& Z}}{Z}\,UB}{X \lor Z}\,OE}{(X \lor Y) \& (X \lor Z)}\,UE}{(X \lor Y) \& (X \lor Z)}\,OB1}{(X \lor (Y \& Z)) \supset ((X \lor Y) \& (X \lor Z))}\,FE2$$

Bei diesem Beispiel dürfte die stammbaumförmige Anordnung insofern etwas künstlich erscheinen, als durch sie z. B. das Nachfolgen der Fallunterscheidung X, $Y \& Z$ nach der Feststellung von $X \lor (Y \& Z)$ verloren geht.

Das zweite Beispiel (1. 2):

$$\dfrac{\dfrac{\overset{2}{\exists x \forall y F x y} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{\forall y F a y}}{F a b}\,AB}{\exists x F x b}\,EE}{\forall y \exists x F x y}\,AE}{\forall y \exists x F x y}\,EB1}{(\exists x \forall y F x y) \supset (\forall y \exists x F x y)}\,FE2$$

Auch hier würde bei linearer Anordnung naturgemäß die Annahme der EB nach deren linker Oberformel folgen, wie es in § 1 bei diesem Beispiel geschehen ist.

Das dritte Beispiel (1. 3):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{2}{F a}}{\exists x F x}\,EE \qquad \overset{1}{\neg \exists x F x}}{\curlywedge}\,NB}{\neg F a}\,NE2}{\forall y \neg F y}\,AE}{(\neg \exists x F x) \supset (\forall y \neg F y)}\,FE1$$

§ 5.
Einige Bemerkungen zum Kalkül $\mathfrak{N}\mathfrak{J}$. Der Kalkül $\mathfrak{N}\mathfrak{K}$.

5. 1. Der Kalkül NJ hat manche formale Unschönheiten. Diesen stehen etwa folgende Vorteile gegenüber:

5. 11. Die weitgehende Anpassung an das wirkliche Schließen, von der wir ja ausgegangen sind. Daher ist der Kalkül insbesondere zur Formalisierung mathematischer Beweise geeignet.

5.12. Die Herleitungen für richtige Formeln sind in diesem Kalkül fast durchweg kürzer als in den logistischen Kalkülen. Das beruht im wesentlichen darauf, daß bei logistischen Herleitungen ein und dieselbe Formel meist eine Reihe von Malen (als Teil anderer Formeln) auftritt, während dies bei *NJ*-Herleitungen nur in geringem Maße der Fall ist.

5.13. Die oben angewandte Bezeichnung der einzelnen Schlußfiguren (2.21) läßt erkennen, daß hier eine beachtenswerte Systematik vorliegt. Zu jedem der logischen Zeichen &, $\vee$, $\forall$, $\exists$, $\supset$, $\neg$ gehört genau eine Schlußfigur, die das Zeichen — als äußerstes Zeichen einer Formel — „einführt", und eine, die es „beseitigt"; die Duplizität der Schlußfiguren *UB* und *OE* bedeutet eine belanglose, rein äußerliche Abweichung. Die Einführungen stellen sozusagen die „Definitionen" der betreffenden Zeichen dar, und die Beseitigungen sind letzten Endes nur Konsequenzen hiervon, was sich etwa so ausdrücken läßt: Bei der Beseitigung eines Zeichens darf die betreffende Formel, um deren äußerstes Zeichen es sich handelt, nur „als das benutzt werden, was sie auf Grund der Einführung dieses Zeichens bedeutet". Ein Beispiel möge verdeutlichen, wie das gemeint ist: Die Formel $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ durfte eingeführt werden, wenn eine Herleitung von $\mathfrak{B}$ aus der Annahmeformel $\mathfrak{A}$ vorlag. Will man sie nun mit Beseitigung des Zeichens $\supset$ wieder verwenden [natürlich sind auch Verwendungen zur Bildung längerer Formeln, wie etwa $(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \vee \mathfrak{C}$, *OE*, möglich], so kann man das gerade in der Weise tun, daß man aus einem bewiesenen $\mathfrak{A}$ sofort $\mathfrak{B}$ schließt, denn $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ dokumentiert ja das Bestehen einer Herleitung von $\mathfrak{B}$ aus $\mathfrak{A}$. Wohlgemerkt: Es braucht hierbei nicht auf einen „inhaltlichen Sinn" des Zeichens $\supset$ Bezug genommen zu werden.

Durch Präzisierung dieser Gedanken dürfte es möglich sein, die *B*-Schlüsse auf Grund gewisser Anforderungen als eindeutige Funktionen der zugehörigen *E*-Schlüsse nachzuweisen.

5.2. Die Negation läßt sich in unserem Kalkül eliminieren, indem man $\neg\mathfrak{A}$ als Abkürzung für $\mathfrak{A} \supset \curlywedge$ ansieht. Dies ist zulässig, denn: Wenn man in einer *NJ*-Herleitung alle Nicht-Zeichen beseitigt, indem man jedes $\neg\mathfrak{A}$ jeweils durch $\mathfrak{A} \supset \curlywedge$ ersetzt, so entsteht wieder eine *NJ*-Herleitung (dabei werden die Schlußfiguren *NE* und *NB* zu Spezialfällen von *FE* und *FB*), und umgekehrt: Wenn man in einer *NJ*-Herleitung jedes $\mathfrak{A} \supset \curlywedge$ jeweils durch $\neg\mathfrak{A}$ ersetzt, so entsteht ebenfalls wieder eine *NJ*-Herleitung.

Das Schlußfigurenschema $\dfrac{\curlywedge}{\mathfrak{D}}$ nimmt eine Sonderstellung unter den Schemata ein, es gehört nicht zu einem logischen Zeichen, sondern zu dem Aussagezeichen $\curlywedge$.

5.3. Der „Satz vom ausgeschlossenen Dritten“ und der Kalkül NK.

Aus dem Kalkül NJ entsteht ein vollständiger klassischer Kalkül NK durch Hinzufügung des „Satzes vom ausgeschlossenen Dritten“ (tertium non datur), d. h.: Man läßt als Anfangsformeln der Herleitung außer den Annahmeformeln noch „Grundformeln“ der Gestalt $\mathfrak{A} \vee \neg \mathfrak{A}$, wobei für $\mathfrak{A}$ eine beliebige Formel einzusetzen ist, zu.

Wir haben hiermit rein äußerlich dem Satz vom ausgeschlossenen Dritten eine Sonderstellung eingeräumt, und zwar deswegen, weil wir diese Formulierung für die „natürlichste“ hielten. Es wäre durchaus möglich, an Stelle des Grundformelnschemas $\mathfrak{A} \vee \neg \mathfrak{A}$ ein neues Schlußfigurenschema zuzulassen, etwa $\dfrac{\neg \neg \mathfrak{A}}{\mathfrak{A}}$ (analog zu Hilbert und Heyting). Doch diese Schlußfigur fällt insofern noch immer aus dem Rahmen der NJ-Schlußfiguren heraus, als sie eine neue Negationsbeseitigung darstellt, deren Zulässigkeit keineswegs aus der Art der Nicht-Zeichen-Einführung durch die NE hervorgeht.

III. Abschnitt.

Die Schlußweisenkalküle LJ, LK und der Hauptsatz.

§ 1.

Die Kalküle LJ und LK. (Logistischer intuitionistischer und klassischer Kalkül.)

1.1. Vorbemerkungen zur Aufstellung der Kalküle LJ und LK.

Wir wollen einen Schlußweisenkalkül (für die Prädikatenlogik) aufstellen, der einerseits „logistisch“ ist, in welchem also die Herleitungen keine Annahmeformeln wie beim Kalkül NJ enthalten, der andererseits jedoch von dem Kalkül NJ die Einteilung der Schlußweisen in Einführungen und Beseitigungen der einzelnen logischen Zeichen übernimmt.

Das naheliegendste Verfahren, um aus einer NJ-Herleitung eine logistische Herleitung zu machen, ist dieses: Man ersetzt eine H-Formel $\mathfrak{B}$, welche von den Annahmeformeln $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu$ abhängt, durch die neue Formel $(\mathfrak{A}_1 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} \mathfrak{A}_\mu) \supset \mathfrak{B}$. Dies geschehe mit sämtlichen H-Formeln.

So erhält man Formeln, die schon für sich richtig sind, deren Richtigkeit also nicht mehr von der Gültigkeit gewisser Annahmeformeln abhängt. Nun kommen aber auf diese Weise neue logische Zeichen & und $\supset$ hinzu, diese würden zusätzliche Schlußfiguren für & und $\supset$ erfordern und damit die ganze Einführungs- und Beseitigungssystematik stören. Aus diesem Grunde haben wir den Begriff der Sequenz (I, 2. 3) eingeführt. Wir schreiben also anstatt einer Formel $(\mathfrak{A}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{A}_\mu) \supset \mathfrak{B}$ die Sequenz

$$\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu \rightarrow \mathfrak{B}.$$

Diese unterscheidet sich ihrer inhaltlichen Bedeutung nach nicht von der Formel, sondern nur hinsichtlich ihrer formalen Struktur (vgl. I, 2. 4).

Auch jetzt brauchen wir neue Schlußfiguren, welche sich nicht in die Einführungs- und Beseitigungssystematik einfügen; wir haben aber den Vorteil, daß wir diesen eine Sonderstellung einräumen können, da sie sich nicht mehr auf logische Zeichen, sondern auf die Struktur der Sequenzen beziehen. Wir nennen diese daher „Struktur-Schlußfiguren", die anderen „Logische-Zeichen-Schlußfiguren".

In dem klassischen Kalkül *NK* nahm der Satz vom ausgeschlossenen Dritten eine Sonderstellung unter den Schlußweisen ein (II, 5. 3), indem er sich der Einführungs- und Beseitigungssystematik nicht einfügte. Bei dem im folgenden anzugebenden logistischen klassischen Kalkül *LK* wird diese Sonderstellung aufgehoben. Das wird dadurch ermöglicht, daß wir Sequenzen mit mehreren Formeln im Sukzedens zulassen, während der soeben angegebene Übergang vom Kalkül *NJ* her uns nur auf Sequenzen mit einer Formel im Sukzedens führte. (Über die inhaltliche Bedeutung der allgemeinen Sequenzen siehe I, 2. 4.) Die damit erreichte Symmetrie erweist sich als für die klassische Logik angemessener. Dagegen bleibt für den intuitionistischen Kalkül *LJ* die Beschränkung auf höchstens eine Formel im Sukzedens bestehen. (Siehe unten. — Ein leeres Sukzedens bedeutet dasselbe, wie wenn $\curlywedge$ im Sukzedens stände.)

Hiermit haben wir einige Gesichtspunkte zur Begründung der Aufstellung der folgenden Kalküle angegeben. Im wesentlichen ist ihre Form jedoch durch die Rücksicht auf den nachher zu beweisenden „Hauptsatz" (§ 2) bestimmt und kann daher vorläufig nicht näher begründet werden.

1. 2. Nunmehr erklären wir die Begriffe *LK-Herleitung* und *LJ-Herleitung* wie folgt:

Eine *LJ-* bzw. *LK*-Herleitung besteht aus Sequenzen in stammbaumförmiger (I, 3. 3) Anordnung.

Die Anfangssequenzen der Herleitung sind Grundsequenzen der Form

$$\mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{D},$$

wobei $\mathfrak{D}$ eine beliebige Formel sein kann.

Jede Schlußfigur der Herleitung geht aus einem der untenstehenden Schemata durch eine Einsetzung folgender Art hervor (vgl. II, 2. 21):

Für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ setzt man beliebige Formeln ein, für $\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}$ bzw. $\exists \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}$ eine beliebige Formel mit $\forall$ bzw. $\exists$ als äußerstem Zeichen, $\mathfrak{x}$ bezeichne die zugehörige gebundene Gegenstandsvariable, für $\mathfrak{F}\mathfrak{a}$ diejenige Formel, welche aus $\mathfrak{F}\mathfrak{x}$ entsteht, indem man die gebundene Gegenstandsvariable $\mathfrak{x}$ überall, wo sie vorkommt, durch die freie Gegenstandsvariable $\mathfrak{a}$ ersetzt.

Für Γ, Δ, Θ, Λ sind beliebige (eventuell leere) Reihen von Formeln, durch Kommata getrennt, einzusetzen.

Ferner gilt für *LJ*-Schlußfiguren folgende Einschränkung (und dies ist der einzige Punkt, in welchem sich die Begriffe *LJ*- und *LK*-Herleitung unterscheiden):

„Im Sukzedens jeder *H*-Sequenz darf nicht mehr als eine *S*-Formel vorkommen.“ —

Die Bezeichnungen der einzelnen Schemata für Logische-Zeichen-Schlußfiguren, *UES*, *UEA* usw. sollen bedeuten: Eine nach dem Schema gebildete Schlußfigur ist eine Und-(*U*), Oder-(*O*), All-(*A*), Es-gibt-(*E*), Nicht-(*N*) bzw. Folgt-(*F*)-Zeichen-Einführung (*E*) im Sukzedens (*S*) bzw. Antezedens (*A*).

Die Schlußfiguren-Schemata.

1.21. Schemata für Struktur-Schlußfiguren:

Verdünnung:

im Antezedens: $$\frac{\Gamma \to \Theta}{\mathfrak{D}, \Gamma \to \Theta}, \quad \text{im Sukzedens: } \frac{\Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{D}};$$

Zusammenziehung:

im Antezedens: $$\frac{\mathfrak{D}, \mathfrak{D}, \Gamma \to \Theta}{\mathfrak{D}, \Gamma \to \Theta}, \quad \text{im Sukzedens: } \frac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{D}, \mathfrak{D}}{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{D}};$$

Vertauschung:

im Antezedens: $$\frac{\Delta, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \Gamma \to \Theta}{\Delta, \mathfrak{E}, \mathfrak{D}, \Gamma \to \Theta}, \quad \text{im Sukzedens: } \frac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{E}, \mathfrak{D}, \Lambda}{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \Lambda};$$

Schnitt: $$\frac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{D} \quad \mathfrak{D}, \Delta \to \Lambda}{\Gamma, \Delta \to \Theta, \Lambda}.$$

1.22. Schemata für Logische-Zeichen-Schlußfiguren:

UES: $$\frac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \quad \Gamma \to \Theta, \mathfrak{B}}{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}$$

OEA: $$\frac{\mathfrak{A}, \Gamma \to \Theta \quad \mathfrak{B}, \Gamma \to \Theta}{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}, \Gamma \to \Theta}$$

UEA: $$\frac{\mathfrak{A}, \Gamma \to \Theta}{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}, \Gamma \to \Theta} \quad \frac{\mathfrak{B}, \Gamma \to \Theta}{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}, \Gamma \to \Theta}$$

OES: $$\frac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A}}{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}} \quad \frac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{B}}{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}}$$

AES: $$\frac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{F}\mathfrak{a}}{\Gamma \to \Theta, \forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}}$$

EEA: $$\frac{\mathfrak{F}\mathfrak{a}, \Gamma \to \Theta}{\exists \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}, \Gamma \to \Theta}$$

Variablenbedingung: Die in den beiden letzten Schemata mit $\mathfrak{a}$ bezeichnete Gegenstandsvariable, wir nennen sie die *Eigenvariable* der AES bzw. EEA, darf in der Untersequenz der Schlußfigur nicht vorkommen (also nicht in Γ, Θ und $\mathfrak{F}\mathfrak{x}$).

$$AEA\colon \frac{\mathfrak{F}\mathfrak{a},\ \Gamma \to \Theta}{\forall \mathfrak{x}\mathfrak{F}\mathfrak{x},\ \Gamma \to \Theta} \qquad EES\colon \frac{\Gamma \to \Theta,\ \mathfrak{F}\mathfrak{a}}{\Gamma \to \Theta,\ \exists \mathfrak{x}\mathfrak{F}\mathfrak{x}}$$

$$NES\colon \frac{\mathfrak{A},\ \Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta,\ \neg\mathfrak{A}} \qquad NEA\colon \frac{\Gamma \to \Theta,\ \mathfrak{A}}{\neg\mathfrak{A},\ \Gamma \to \Theta}$$

$$FES\colon \frac{\mathfrak{A},\ \Gamma \to \Theta,\ \mathfrak{B}}{\Gamma \to \Theta,\ \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}} \qquad FEA\colon \frac{\Gamma \to \Theta,\ \mathfrak{A} \quad \mathfrak{B},\ \Delta \to \Lambda}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B},\ \Gamma,\ \Delta \to \Theta,\ \Lambda}$$

1.3. Beispiel einer LJ-Herleitung (nach II, 4.3):

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$Fa \to Fa$}
\RightLabel{EES}
\UnaryInfC{$Fa \to \exists xFx$}
\AxiomC{$\exists xFx \to \exists xFx$}
\RightLabel{NEA}
\UnaryInfC{$\neg\exists xFx,\ \exists xFx \to$}
\RightLabel{Vertauschung}
\UnaryInfC{$\exists xFx,\ \neg\exists xFx \to$}
\RightLabel{Schnitt}
\BinaryInfC{$Fa,\ \neg\exists xFx \to$}
\RightLabel{NES}
\UnaryInfC{$\neg\exists xFx \to \neg Fa$}
\RightLabel{AES}
\UnaryInfC{$\neg\exists xFx \to \forall y \neg Fy$}
\RightLabel{FES}
\UnaryInfC{$\to (\neg\exists xFx) \supset (\forall y \neg Fy)$}
\end{prooftree}
$$

1.4. Beispiel einer LK-Herleitung (Herleitung des „Satzes vom ausgeschlossenen Dritten"):

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$A \to A$}
\RightLabel{NES}
\UnaryInfC{$\to A,\ \neg A$}
\RightLabel{OES}
\UnaryInfC{$\to A,\ A \vee \neg A$}
\RightLabel{Vertauschung}
\UnaryInfC{$\to A \vee \neg A,\ A$}
\RightLabel{OES}
\UnaryInfC{$\to A \vee \neg A,\ A \vee \neg A$}
\RightLabel{Zusammenziehung}
\UnaryInfC{$\to A \vee \neg A$}
\end{prooftree}
$$

§ 2.

Einige Bemerkungen zu den Kalkülen LJ und LK. — Der Hauptsatz.

(Von den Bemerkungen 2.1 bis 2.3 werden wir weiterhin keinen Gebrauch machen.)

2.1. Die Schemata sind nicht alle voneinander unabhängig, d. h. man könnte einige mit Hilfe der übrigen ersetzen. Würden wir jedoch diese weglassen, so wäre der „Hauptsatz" nicht mehr gültig.

2.2. Überhaupt könnte man, wenn man auf den Hauptsatz keinen Wert legte, die Kalküle in mancher Hinsicht vereinfachen. So sei kurz darauf hingewiesen, daß sich im Kalkül LK die Schlußfiguren UES,

OEA, *UEA*, *OES*, *AEA*, *EES*, *NES*, *NEA* und *FEA* durch Grundsequenzen nach folgenden Schemata ersetzen ließen:

$$\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \to \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B} \qquad \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \qquad \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$$

$$\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B} \to \mathfrak{B} \qquad \mathfrak{A} \to \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \qquad \mathfrak{B} \to \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \qquad \forall \mathfrak{x} \mathfrak{F} \mathfrak{x} \to \mathfrak{F} \mathfrak{a}$$

$$\mathfrak{F} \mathfrak{a} \to \exists \mathfrak{x} \mathfrak{F} \mathfrak{x} \qquad \to \mathfrak{A}, \neg \mathfrak{A} \text{ (Satz vom ausgeschlossenen Dritten)}$$

$$\neg \mathfrak{A}, \mathfrak{A} \to \text{ (Satz vom Widerspruch)} \qquad \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}.$$

Die Äquivalenz der Grundsequenzen mit den Schlußfiguren ist leicht zu zeigen.

Für den Kalkül *LJ* besteht dieselbe Möglichkeit, ausgenommen für die Schlußfiguren *OEA* und *NES*, da ja die *LJ*-*H*-Sequenzen nicht zwei *S*-Formeln im Sukzedens haben dürfen (vgl. hierzu V. Abschnitt, § 5).

2.3. Der Unterschied zwischen intuitionistischer und klassischer Logik ist bei den Kalkülen *LJ* und *LK* äußerlich ganz anderer Art als bei *NJ* und *NK*. Dort bestand er in Weglassung bzw. Hinzunahme des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten, während er hier durch die Sukzedensbedingung ausgedrückt wird. (Daß beide Unterscheidungen äquivalent sind, werden die Äquivalenzbeweise für alle behandelten Kalküle, im V. Abschnitt, ergeben.)

2.4. Der Kalkül *LK* ist, wenn man *FES* und *FEA* wegläßt, spiegelbildlich-symmetrisch in folgendem Sinne: Wenn man alle Sequenzen einer *LK*-Herleitung (in der das Zeichen $\supset$ nicht vorkommt) umgekehrt schreibt, d. h. für $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu \to \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_\nu$ jeweils $\mathfrak{B}_\nu, \ldots, \mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{A}_\mu, \ldots, \mathfrak{A}_1$ setzt, sowie bei Schlußfiguren mit zwei Obersequenzen die rechte und linke Obersequenz mitsamt ihren Herleitungen vertauscht, ferner jedes vorkommende & durch $\vee$, $\forall$ durch $\exists$, $\vee$ durch & und $\exists$ durch $\forall$ ersetzt (bei Ersetzung von & durch $\vee$ und umgekehrt hat man noch die beiden Erstreckungsbereiche des Zeichens zu vertauschen, also z. B. $\mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}$ für $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$ zu setzen), so entsteht wieder eine *LK*-Herleitung.

Dies ist unmittelbar aus den Schemata ersichtlich. (Bei deren Anordnung ist auf die Symmetrie besondere Rücksicht genommen worden.) (Vgl. das Dualitätsprinzip bei H.-A., S. 62.)

2.41. Das Zeichen $\supset$ kann man beim Kalkül *NK* überhaupt in bekannter Weise entbehren, indem man $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ als Abkürzung für $(\neg \mathfrak{A}) \vee \mathfrak{B}$ ansieht; es ist leicht nachzuprüfen, daß sich dann die Schemata für *FES* und *FEA* durch die Schemata für $\vee$ und $\neg$ ersetzen lassen.

Für den Kalkül *NJ* gilt nichts entsprechendes.

2.5. Die für uns wichtigste Tatsache über die Kalküle *LJ* und *LK* ist der folgende

Hauptsatz: Jede LJ- bzw. LK-Herleitung läßt sich in eine LJ- bzw. LK-Herleitung mit der gleichen Endsequenz umwandeln, in welcher die als „Schnitt" bezeichnete Schlußfigur nicht vorkommt.

2.51. Der Beweis folgt in § 3.

Um die Bedeutung des Satzes klarer hervortreten zu lassen, beweisen wir einen einfachen Zusatz (2.513).

Dazu führen wir einige (im folgenden oftmals benötigte) Ausdrucksweisen im Zusammenhang mit den Logische-Zeichen-Schlußfiguren ein:

2.511. Diejenige S-Formel, welche im Schema das logische Zeichen enthält, nennen wir die *Hauptformel* der Schlußfigur.

Das ist also die S-Formel der Gestalt $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$ bei UES, UEA; $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ bei OES, OEA; $\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}$ bei AES, AEA; $\exists \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}$ bei EES, EEA, $\neg \mathfrak{A}$ bei NES, NEA und $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ bei FES, FEA.

Die in den Schemata mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{F}\,a$ bezeichneten S-Formeln nennen wir die *Nebenformeln* der betreffenden Schlußfigur.

Sie sind stets Teilformeln der Hauptformel (nach der Teilformeldefinition unter I, 2. 2).

2.512. Nun können wir aus den Schlußfigurenschemata die folgenden Tatsachen leicht ablesen:

Die Hauptformel steht immer in der Untersequenz, die Nebenformeln stehen immer in den Obersequenzen einer Logische-Zeichen-Schlußfigur.

Kommt eine Formel in einer Obersequenz einer beliebigen Schlußfigur als S-Formel vor, und ist sie hier nicht Nebenformel oder das $\mathfrak{D}$ eines Schnittes, so kommt sie auch in der Untersequenz als S-Formel vor.

Aus diesen beiden Tatsachen ergibt sich:

Kommt in einer LJ- oder LK-Herleitung irgendwo eine Formel als S-Formel vor, und verfolgt man den Herleitungsfaden von der betreffenden Sequenz bis zur Endsequenz, so kann in diesem Faden die Formel nur dann verschwinden, wenn sie das $\mathfrak{D}$ eines Schnittes oder die Nebenformel einer Logische-Zeichen-Schlußfigur ist. In letzterem Falle tritt dafür in der nächsten Sequenz die Hauptformel der Schlußfigur auf, von dieser ist jene eine Teilformel. Auf die Hauptformel kann man dann, nach unten fortschreitend, dieselbe Betrachtung anwenden usw. So ergibt sich der folgende

2.513. Zusatz zum Hauptsatz (Teilformeln-Eigenschaft): In einer LJ- bzw. LK-Herleitung ohne Schnitte sind alle vorkommenden H-S-Formeln Teilformeln der in der Endsequenz auftretenden S-Formeln.

2.514. Anschaulich gesprochen, kann man die beschriebenen Eigenschaften der Herleitung ohne Schnitte etwa so ausdrücken: Die S-Formeln werden nach unten zu immer länger, niemals kürzer. Man baut sozusagen das Endergebnis aus seinen Bestandteilen heraus allmählich auf. Der durch die Herleitung dargestellte Beweis macht keine Umwege, es kommen nur solche Begriffe darin vor, welche auch in dem Endergebnis vorkommen (vgl. die Übersicht am Anfang dieser Abhandlung).

Beispiel. Die oben angegebene Herleitung (1.3) für $\rightarrow (\neg \exists x F x) \supset (\forall y \neg F y)$ läßt sich ohne Schnitte etwa so schreiben:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{F a \rightarrow F a}{F a \rightarrow \exists x F x}\ EES}{\neg \exists x F x,\ F a \rightarrow}\ NEA}{F a,\ \neg \exists x F x \rightarrow}\ \text{Vertauschung}$$

und weiter wie oben.

§ 3.

Beweis des Hauptsatzes.

Der Hauptsatz lautete:

Jede LJ- bzw. LK-Herleitung läßt sich in eine LJ- bzw. LK-Herleitung mit gleicher Endsequenz umwandeln, in welcher keine Schnitte vorkommen.

3.1. Beweis des Hauptsatzes für LK-Herleitungen.

Wir führen (zur Erleichterung des Beweises) eine neue Schlußfigur ein, welche eine Abwandlung des Schnittes darstellt, wir nennen sie „Mischung".

Das Schema hierfür lautet:

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Theta \quad \Delta \rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Delta^* \rightarrow \Theta^*, \Lambda}.$$

Dabei sind für Θ und Δ solche Reihen von Formeln, durch Kommata getrennt, einzusetzen, in welchen eine Formel der Gestalt $\mathfrak{M}$, wir nennen sie die „Mischformel", jeweils mindestens einmal (als Glied der Reihe) auftritt; für Θ^* und Δ^* sind dieselben Formelreihen einzusetzen, jedoch mit Weglassung sämtlicher (als Glieder der Reihe) vorkommenden Formeln der Gestalt $\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M}$ kann eine beliebige Formel sein). Für Γ und Λ sind, wie üblich, beliebige (eventuell leere) Reihen von Formeln, durch Kommata getrennt, einzusetzen.

Beispiel einer Mischung:

$$\frac{A \rightarrow B, \neg A \quad B \vee C, B, B, D, B \rightarrow}{A, B \vee C, D \rightarrow \neg A}.$$

B ist die Mischformel.

Offenbar läßt sich jeder Schnitt in eine Mischung mit anschließenden Verdünnungen und Vertauschungen umwandeln. (Ferner läßt sich umgekehrt jede Mischung in einen Schnitt mit vorangehenden Vertauschungen und Zusammenziehungen umwandeln, was wir nicht brauchen.)

Wir betrachten im folgenden nur noch Herleitungen, in denen keine Schnitte, dafür aber Mischungen vorkommen dürfen.

Da sich Herleitungen im alten Sinne in solche umwandeln lassen, genügt es zum Beweis des Hauptsatzes, zu zeigen, daß sich eine solche Herleitung in eine Herleitung ohne Mischungen umwandeln läßt.

Es genügt ferner bereits der folgende

H i l f s s a t z: Eine Herleitung, die eine Mischung als unterste Schlußfigur hat, und sonst keine Mischungen enthält, läßt sich in eine Herleitung (mit gleicher Endsequenz), in der keine Mischungen vorkommen, umwandeln.

Hieraus folgt der ganze Satz leicht so:

In einer beliebigen Herleitung betrachte man eine Mischung, über deren Untersequenz keine weitere Mischung vorkommt. Die Herleitung für diese Untersequenz ist dann von der im Hilfssatz genannten Art, sie läßt sich also so umwandeln, daß in ihr keine Mischung mehr vorkommt. Dabei bleibt der übrige Teil der Gesamtherleitung unverändert. Dann wiederholt man dieses Verfahren und schafft so der Reihe nach sämtliche Mischungen weg.

Jetzt brauchen wir also nur noch den

B e w e i s d e s H i l f s s a t z e s. (Dieser erstreckt sich bis 3. 2 ausschließlich.)

Wir haben eine Herleitung zu behandeln, die eine Mischung als unterste Schlußfigur hat und sonst keine Mischungen enthält.

Als „Grad der Herleitung" bezeichnen wir den Grad der Mischformel. (Definiert unter I, 2. 2.)

Als „Rang der Herleitung" bezeichnen wir die Summe der rechten Rangzahl und linken Rangzahl. Diese beiden erklären wir so:

Die linke Rangzahl ist die größte Anzahl von in einem Faden aneinander anschließenden Sequenzen, deren unterste die l i n k e Obersequenz der Mischung ist, und von denen jede im S u k z e d e n s die Mischformel enthält.

Die rechte Rangzahl ist (entsprechend) die größte Anzahl von in einem Faden aneinander anschließenden Sequenzen, deren unterste die r e c h t e Obersequenz der Mischung ist, und von denen jede im A n t e z e d e n s die Mischformel enthält.

Der mindest mögliche Rang ist offenbar 2.

Zum Beweis des Hilfssatzes machen wir zwei vollständige Induktionen, nach dem Grad γ und dem Rang ϱ der Herleitung. D. h.:

Wir beweisen den Satz für eine Herleitung mit dem Grad γ, und nehmen dabei an, daß er für Herleitungen kleineren Grades (sofern es solche gibt, d. h. sofern γ nicht gleich 0 ist), schon gültig sei, daß also solche Herleitungen sich bereits in Herleitungen ohne Mischungen umwandeln lassen.

Ferner behandeln wir zunächst den Fall, daß der Rang ϱ der Herleitung gleich 2 ist (3.11), und danach den Fall, daß $\varrho > 2$ ist (3.12), wobei wir annehmen, daß der Satz für Herleitungen desselben Grades, jedoch kleineren Ranges, ebenfalls schon gültig sei.

Im folgenden sollen, wie bisher, große deutsche Buchstaben stets als Mitteilungszeichen für Formeln, große griechische Buchstaben als Mitteilungszeichen für (evtl. leere) Reihen von Formeln dienen.

Bei der Umwandlung der Herleitung werden gelegentlich „identische Schlußfiguren" auftreten, d. h. Schlußfiguren mit gleicher Ober- und Untersequenz. Da wir solche in unserem Kalkül nicht zugelassen haben, sind sie in jedem Falle sofort wegzuschaffen, was trivialerweise dadurch möglich ist, daß man eine der beiden Sequenzen fortläßt.

Die Mischformel zu der am Ende der Herleitung stehenden Mischung bezeichnen wir mit $\mathfrak{M}$. Sie hat den Grad γ.

3.10. Umbennung von freien Gegenstandsvariablen als Vorbereitung zur Umwandlung der Herleitung.

Wir wollen erreichen, daß die Herleitung folgende Eigenschaften hat:

3.101. Für jede AES (bzw. EEA) gilt: Ihre Eigenvariable kommt in der Herleitung nur in Sequenzen über der Untersequenz der AES (bzw. EEA) vor, und kommt ferner in keiner anderen AES oder EEA als deren Eigenvariable vor.

3.102. Dies gelingt durch die folgende Umbenennung von freien Gegenstandsvariablen:

Wir nehmen eine AES bzw. EEA vor, über deren Untersequenz keine weiteren Schlußfiguren dieser Art oder höchstens solche, die wir schon in der anzugebenden Weise behandelt haben, stehen.

Deren Eigenvariable ersetzen wir in allen Sequenzen über der Untersequenz dieser Schlußfigur durch ein und dieselbe bisher in der Herleitung noch nicht vorkommende freie Gegenstandsvariable. — Hierbei bleibt die AES bzw. EEA selbst korrekt, wie leicht ersichtlich. (Die Eigenvariable kam ja in ihrer Untersequenz nicht vor.) Ferner bleibt die übrige Herleitung korrekt auf Grund der gleich folgenden Hilfsbehauptung.

Indem wir dieses Verfahren für jede einzelne AES und EEA der Reihe nach durchführen, bleibt also die Herleitung jedesmal korrekt und hat zum Schluß offenbar die gewünschte Eigenschaft (3.101). Ferner sind, was wesentlich ist, Grad und Rang der Herleitung, sowie ihre Endsequenz, unverändert geblieben.

3.103. Wir führen jetzt den noch ausstehenden Beweis der folgenden Hilfsbehauptung:

(Wir fassen diese etwas allgemeiner, als für die vorliegende Anwendung nötig wäre, da wir sie an anderer Stelle (3.113.33) noch einmal gebrauchen werden.)

„Eine LK-Grundsequenz oder -Schlußfigur geht in eine Grundsequenz oder Schlußfigur derselben Art über, wenn man eine freie Gegenstandsvariable, die nicht die Eigenvariable der Schlußfigur ist, überall wo sie in der Grundsequenz bzw. Schlußfigur vorkommt, durch ein und dieselbe freie Gegenstandsvariable ersetzt, vorausgesetzt, daß diese ebenfalls nicht die Eigenvariable der Schlußfigur ist.“

Dies ist trivial außer für AES, AEA, EES und EEA. Doch auch in diesen Fällen ist alles in Ordnung: Die Variablenbedingung nämlich ist nicht gefährdet, da man nicht die Eigenvariable einsetzen darf, und nichts für die Eigenvariable einsetzen darf. (Aus diesem Grunde sind beide Einschränkungen notwendig.) Ferner geht die aus $\mathfrak{F}\,a$ entstehende Formel wieder aus der aus $\mathfrak{F}\,\mathfrak{x}$ entstehenden Formel durch Einsetzen von a für $\mathfrak{x}$ hervor. —

Nach dem vorbereitenden Schritt (3.10) folgt nun die eigentliche Umwandlung der Herleitung zwecks Wegschaffung der in ihr vorkommenden Mischung.

Wie schon bemerkt, unterscheiden wir die beiden Fälle $\varrho = 2$ (3.11) und $\varrho > 2$ (3.12).

3.11. Es sei $\varrho = 2$.

Wir werden eine Anzahl von Einzelfällen unterscheiden. Davon sind die Fälle 3.111, 3.112, 3.113.1, 3.113.2 besonders einfacher Natur, hier läßt sich nämlich die Mischung sofort ganz wegschaffen. Die übrigen Fälle (3.113.3) sind die wichtigeren, bei ihrer Behandlung kommt der Grundgedanke der ganzen Umwandlung zum Ausdruck. Hier wenden wir die Induktionsannahme bezüglich γ an, d. h. wir führen jeden der Fälle auf die Erledigung von Herleitungen kleineren Grades zurück.

3.111. Die linke Obersequenz der Mischung am Ende der Herleitung sei eine Grundsequenz. Dann lautet die Mischung:

$$\frac{\mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M} \qquad \Delta \rightarrow \Lambda}{\mathfrak{M},\, \Delta^* \rightarrow \Lambda}.$$

Man wandelt sie um zu:

$$\frac{\Delta \rightarrow \Lambda}{\mathfrak{M},\, \Delta^* \rightarrow \Lambda} \text{ evtl. mehrmalige Vertauschung und Zusammenziehung.}$$

Der Herleitungsteil über $\Delta \rightarrow \Lambda$ bleibt derselbe. Wir haben jetzt bereits eine Herleitung ohne eine Mischung.

3.112. Die rechte Obersequenz der Mischung sei eine Grundsequenz. Dieser Fall erledigt sich symmetrisch zum vorigen, man hat nur die beiden Schemata „spiegelbildlich" zu betrachten. (Vgl. 2.4.)

3.113. Weder die linke noch die rechte Obersequenz der Mischung sei eine Grundsequenz. Dann sind beide also Untersequenzen von Schlußfiguren. Da $\varrho = 2$ ist, so ist die rechte und die linke Rangzahl gleich 1, d. h.: in den direkt über der linken Obersequenz der Mischung stehenden Sequenzen kommt die Mischformel $\mathfrak{M}$ nicht im Sukzedens, in den direkt über der rechten Obersequenz stehenden Sequenzen kommt $\mathfrak{M}$ nicht im Antezedens vor.

Nun gilt allgemein: Kommt eine Formel im Antezedens bzw. Sukzedens der Untersequenz einer Schlußfigur vor, so ist sie entweder Hauptformel oder das $\mathfrak{D}$ einer Verdünnung, oder aber sie kommt auch in mindestens einer Obersequenz der Schlußfigur im Antezedens bzw. Sukzedens vor.

Das ist unmittelbar aus den Schlußfigurenschemata (1.21, 1.22) abzulesen.

Betrachtet man nun die Voraussetzungen der folgenden drei Fälle, so ist leicht ersichtlich, daß diese sämtliche innerhalb des Falles 3.113 bestehenden Möglichkeiten erschöpfen.

3.11 3.1. Die linke Obersequenz der Mischung sei Untersequenz einer Verdünnung. Das Ende der Herleitung lautet also:

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma \rightarrow \Theta}{\Gamma \rightarrow \Theta, \mathfrak{M}} \quad \Delta \rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Delta^* \rightarrow \Theta, \Lambda}.$$

Man wandelt es um zu:

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Theta}{\overline{\Gamma, \Delta^* \rightarrow \Theta, \Lambda}} \text{ evtl. mehrmalige Verdünnung und Vertauschung.}$$

Der Herleitungsteil über $\Delta \rightarrow \Lambda$ fällt weg.

3.11 3.2. Die rechte Obersequenz der Mischung sei Untersequenz einer Verdünnung. Dieser Fall ist symmetrisch zum vorigen zu erledigen.

3.11 3.3. Die Mischformel $\mathfrak{M}$ kommt im Sukzedens der linken und im Antezedens der rechten Obersequenz der Mischung lediglich als Hauptformel je einer Logische-Zeichen-Schlußfigur vor.

Je nachdem ob das äußerste Zeichen von $\mathfrak{M}$ (eine Formel ohne logische Zeichen kann keine Hauptformel sein) &, $\vee$, $\forall$, $\exists$, $\neg$, $\supset$ ist, unterscheiden wir die Fälle 3.11 3.31 bis 3.11 3.36.

3.11 3.31. Das äußerste Zeichen von $\mathfrak{M}$ sei &. Dann lautet das Ende der Herleitung:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma_1 \rightarrow \Theta_1,\ \mathfrak{A} \qquad \Gamma_1 \rightarrow \Theta_1,\ \mathfrak{B}}{\Gamma_1 \rightarrow \Theta_1,\ \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}\,UES \qquad \dfrac{\mathfrak{A},\ \Gamma_2 \rightarrow \Theta_2}{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B},\ \Gamma_2 \rightarrow \Theta_2}\,UEA}{\Gamma_1,\ \Gamma_2 \rightarrow \Theta_1,\ \Theta_2}\ \text{Mischung}$$

(bzw. entsprechend für die andere Form von UEA, Erledigung ganz analog.) Man wandelt es um zu:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma_1 \rightarrow \Theta_1,\ \mathfrak{A} \qquad \mathfrak{A},\ \Gamma_2 \rightarrow \Theta_2}{\Gamma_1,\ \Gamma_2^* \rightarrow \Theta_1^*,\ \Theta_2}\ \text{Mischung}}{\Gamma_1,\ \Gamma_2 \rightarrow \Theta_1,\ \Theta_2}\ \text{evtl. mehrmalige Verdünnung und Vertauschung.}$$

Auf den Herleitungsteil mit der untersten Sequenz $\Gamma_1,\ \Gamma_2^* \rightarrow \Theta_1^*,\ \Theta_2$ läßt sich nun die Induktionsannahme bezüglich γ anwenden, denn er hat einen kleineren Grad als γ. ($\mathfrak{A}$ enthält ja weniger logische Zeichen als $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$.) Also läßt sich auch die ganze Herleitung in eine von Mischungen freie Herleitung umwandeln.

3.11 3.32. Das äußerste Zeichen von $\mathfrak{M}$ sei $\vee$. Dieser Fall ist symmetrisch zum vorigen zu erledigen.

3.11 3.33. Das äußerste Zeichen von $\mathfrak{M}$ sei $\forall$. Dann lautet das Ende der Herleitung:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma_1 \rightarrow \Theta_1,\ \mathfrak{F}\mathfrak{a}}{\Gamma_1 \rightarrow \Theta_1,\ \forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}}\,AES \qquad \dfrac{\mathfrak{F}\mathfrak{b},\ \Gamma_2 \rightarrow \Theta_2}{\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x},\ \Gamma_2 \rightarrow \Theta_2}\,AEA}{\Gamma_1,\ \Gamma_2 \rightarrow \Theta_1,\ \Theta_2}\ \text{Mischung.}$$

Man wandelt es um zu:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma_1 \rightarrow \Theta_1,\ \mathfrak{F}\mathfrak{b} \qquad \mathfrak{F}\mathfrak{b},\ \Gamma_2 \rightarrow \Theta_2}{\Gamma_1,\ \Gamma_2^* \rightarrow \Theta_1^*,\ \Theta_2}\ \text{Mischung}}{\Gamma_1,\ \Gamma_2 \rightarrow \Theta_1,\ \Theta_2}\ \text{evtl. mehrmalige Verdünnung und Vertauschung.}$$

Über die linke Obersequenz der Mischung, $\Gamma_1 \rightarrow \Theta_1,\ \mathfrak{F}\mathfrak{b}$, schreibt man denselben Herleitungsteil, der vorher über $\Gamma_1 \rightarrow \Theta_1,\ \mathfrak{F}\mathfrak{a}$ stand, doch ersetzt man darin die freie Gegenstandsvariable $\mathfrak{a}$ überall wo sie vorkommt durch $\mathfrak{b}$. Aus der Hilfsbehauptung 3.103 zusammen mit 3.101 geht nun bereits hervor, daß der Herleitungsteil *über* $\Gamma_1 \rightarrow \Theta_1,\ \mathfrak{F}\mathfrak{b}$ hierbei wieder in einen korrekten Herleitungsteil übergegangen ist. (Auf Grund von 3.101 kann ja weder $\mathfrak{a}$ noch $\mathfrak{b}$ die Eigenvariable einer in diesem Herleitungsteil stehenden Schlußfigur sein.) Dieselbe Betrachtung läßt sich auch für den Teil *einschließlich* der Sequenz $\Gamma_1 \rightarrow \Theta_1,\ \mathfrak{F}\mathfrak{b}$ anwenden, da diese aus $\Gamma_1 \rightarrow \Theta_1,\ \mathfrak{F}\mathfrak{a}$ ebenfalls durch Einsetzen von $\mathfrak{b}$ für $\mathfrak{a}$ hervorgeht. Letzteres sieht man folgendermaßen ein: Auf Grund der Variablenbedingung für die AES konnte $\mathfrak{a}$ in Γ_1 und Θ_1 nicht vorkommen, sowie nicht in $\mathfrak{F}\mathfrak{x}$. Nun entstand ferner $\mathfrak{F}\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{F}\mathfrak{x}$ durch Einsetzen von $\mathfrak{a}$ für $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{F}\mathfrak{b}$

aus $\mathfrak{F}\mathfrak{x}$ durch Einsetzen von $\mathfrak{b}$ für $\mathfrak{x}$. Daher entsteht auch $\mathfrak{F}\mathfrak{b}$ aus $\mathfrak{F}a$ durch Einsetzen von $\mathfrak{b}$ für a.

Die Mischformel $\mathfrak{F}\mathfrak{b}$ in der neuen Herleitung hat einen kleineren Grad als γ, also läßt sich die Mischung nach Induktionsannahme wegschaffen.

3.11 3.34. Das äußerste Zeichen von $\mathfrak{M}$ sei $\exists$. Dieser Fall ist symmetrisch zum vorigen zu erledigen.

3.11 3.35. Das äußerste Zeichen von $\mathfrak{M}$ sei $\neg$. Dann lautet das Ende der Herleitung:

$$\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}, \Gamma_1 \to \Theta_1}{\Gamma_1 \to \Theta_1, \neg \mathfrak{A}}\,NES \qquad \dfrac{\Gamma_2 \to \Theta_2, \mathfrak{A}}{\neg \mathfrak{A}, \Gamma_2 \to \Theta_2}\,NEA}{\Gamma_1, \Gamma_2 \to \Theta_1, \Theta_2}\ \text{Mischung.}$$

Man wandelt es um zu:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma_2 \to \Theta_2, \mathfrak{A} \qquad \mathfrak{A}, \Gamma_1 \to \Theta_1}{\Gamma_2, \Gamma_1^* \to \Theta_2^*, \Theta_1}\ \text{Mischung}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \to \Theta_1, \Theta_2}\ \text{evtl. mehrmalige Vertauschung und Verdünnung.}$$

Die neue Mischung läßt sich nach Induktionsannahme wegschaffen.

3.11 3.36. Das äußerste Zeichen von $\mathfrak{M}$ sei $\supset$. Dann lautet das Ende der Herleitung:

$$\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}, \Gamma_1 \to \Theta_1, \mathfrak{B}}{\Gamma_1 \to \Theta_1, \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}}\,FES \qquad \dfrac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \qquad \mathfrak{B}, \Delta \to \Lambda}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \Gamma, \Delta \to \Theta, \Lambda}\,FEA}{\Gamma_1, \Gamma, \Delta \to \Theta_1, \Theta, \Lambda}\ \text{Mischung.}$$

Man wandelt es um zu:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \qquad \dfrac{\mathfrak{A}, \Gamma_1 \to \Theta_1, \mathfrak{B} \qquad \mathfrak{B}, \Delta \to \Lambda}{\mathfrak{A}, \Gamma_1, \Delta^* \to \Theta_1^*, \Lambda}\ \text{Mischung}}{\Gamma, \Gamma_1^*, \Delta^{**} \to \Theta^*, \Theta_1^*, \Lambda}\ \text{Mischung}}{\Gamma_1, \Gamma, \Delta \to \Theta_1, \Theta, \Lambda}\ \text{evtl. mehrmalige Vertauschung und Verdünnung.}$$

(Die Sterne sind natürlich so gemeint: Δ^* und Θ_1^* entstehen aus Δ und Θ_1 durch Weglassen aller S-Formeln der Gestalt $\mathfrak{B}$; Γ_1^*, Δ^{**} und Θ^* entstehen aus Γ_1, Δ^* und Θ durch Weglassen aller S-Formeln der Gestalt $\mathfrak{A}$.)

Wir haben diesmal zwei Mischungen, doch beide Mischformeln sind von kleinerem Grade als γ. Nun wenden wir die Induktionsannahme erst auf die obere Mischung an (d. h. auf den Herleitungsteil, dessen unterste Schlußfigur sie ist). Diese läßt sich also wegschaffen. Danach können wir ebenso die untere Mischung beseitigen.

3.12. Es sei $\varrho > 2$.

Wir unterscheiden zunächst zwei Hauptfälle: Die rechte Rangzahl sei größer als 1 (3.121), oder die rechte Rangzahl sei gleich 1 und daher die linke größer als 1 (3.122). Der zweite Fall wird sich im wesentlichen symmetrisch zum ersten erledigen lassen.

3.121. Die rechte Rangzahl sei größer als 1.

D. h.: Die rechte Obersequenz der Mischung ist Untersequenz einer Schlußfigur, wir bezeichnen diese mit $\mathfrak{Sf}$, und in mindestens einer Obersequenz von $\mathfrak{Sf}$ kommt $\mathfrak{M}$ im Antezedens vor.

Der Grundgedanke des Umwandlungsverfahrens ist folgender:

Während der Fall $\varrho = 2$ im allgemeinen auf die Erledigung von Herleitungen kleineren Grades zurückgeführt wurde, werden wir jetzt eine Zurückführung auf die Erledigung von Herleitungen des gleichen Grades, aber kleineren Ranges, unternehmen, so daß wir dann die Induktionsannahme bezüglich ϱ anwenden können.

Lediglich der erste Fall, 3.121.1, macht eine Ausnahme, hier läßt sich nämlich die Mischung sofort ganz wegschaffen.

In den übrigen Fällen wird die Zurückführung auf Herleitungen kleineren Ranges in folgender Weise erreicht: Man verschiebt sozusagen die Mischung um eine Stufe nach oben, über die Schlußfigur $\mathfrak{Sf}$ hinweg, genau gesagt (als besonders deutliches Beispiel betrachte man etwa den Fall 3.121.231): Die linke Obersequenz der Mischung (im folgenden stets mit $\Pi \rightarrow \Sigma$ bezeichnet), die zunächst neben der Untersequenz von $\mathfrak{Sf}$ steht, wird statt dessen neben die Obersequenzen von $\mathfrak{Sf}$ geschrieben, welche nun Obersequenzen von neuen Mischungen werden; und die Untersequenzen dieser Mischungen dienen dann als Obersequenzen einer neuen, an Stelle von $\mathfrak{Sf}$ tretenden Schlußfigur, durch die wir sofort oder nach Zufügung weiterer Schlußfiguren wieder zu der alten Endsequenz gelangen. Zu den neuen Mischungen gehört nun offenbar jeweils ein Rang, der kleiner als ϱ ist, denn die linke Rangzahl bleibt ungeändert und die rechte vermindert sich um mindestens 1.

Bei der genauen Durchführung dieses Grundgedankens ergeben sich noch verschiedene Besonderheiten, welche entsprechende Fallunterscheidungen und Sonderbehandlungen notwendig machen.

3.121.1. $\mathfrak{M}$ komme im Antezedens der linken Obersequenz der Mischung vor. Das Ende der Herleitung lautet:

$$\frac{\Pi \rightarrow \Sigma \qquad \Delta \rightarrow \Lambda}{\Pi,\ \Delta^* \rightarrow \Sigma^*,\ \Lambda}\text{, in } \Pi \text{ kommt also } \mathfrak{M} \text{ vor.}$$

Man wandelt es um zu:

$$\frac{\Delta \rightarrow \Lambda}{\overline{\Pi,\ \Delta^* \rightarrow \Sigma^*,\ \Lambda}}\ \text{evtl. mehrmalige Verdünnung, Zusammenziehung und Vertauschung.}$$

3.12 1.2. $\mathfrak{M}$ komme im Antezedens der linken Obersequenz der Mischung nicht vor. (Von dieser Voraussetzung werden wir erstmalig unter 3.12 1.222 Gebrauch machen.)

3.12 1.21. $\mathfrak{Sf}$ sei eine Verdünnung, Zusammenziehung oder Vertauschung im Antezedens. Dann lautet das Ende der Herleitung:

$$\dfrac{\Pi \to \Sigma \qquad \dfrac{\Psi \to \Theta}{\Xi \to \Theta}\,\mathfrak{Sf}}{\Pi, \Xi^* \to \Sigma^*, \Theta}\,\text{Mischung.}$$

Man wandelt es um zu:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Pi \to \Sigma \quad \Psi \to \Theta}{\Pi, \Psi^* \to \Sigma^*, \Theta}\,\text{Mischung}}{\Psi^*, \Pi \to \Sigma^*, \Theta}\,\text{evtl. mehrmalige Vertauschung}}{\Xi^*, \Pi \to \Sigma^*, \Theta}\,\text{s. u.}}{\Pi, \Xi^* \to \Sigma^*, \Theta}\,\text{evtl. mehrmalige Vertauschung.}$$

Die unbezeichnete Schlußfigur ist von der gleichen Art wie $\mathfrak{Sf}$, sofern die im Schema von $\mathfrak{Sf}$ (1.21) mit $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ bezeichneten S-Formeln nicht gleich $\mathfrak{M}$ waren. War das $\mathfrak{D}$ oder $\mathfrak{E}$ gleich $\mathfrak{M}$, so ist sie eine identische Schlußfigur (Ψ^* ist gleich Ξ^*).

Die Herleitung für die Untersequenz der neuen Mischung hat dieselbe linke Rangzahl wie die alte Herleitung, während ihre rechte Rangzahl um 1 kleiner ist. Also läßt sich die Mischung nach Induktionsannahme ganz wegschaffen.

3.12 1.22. $\mathfrak{Sf}$ sei eine Schlußfigur mit einer Obersequenz, doch keine Verdünnung, Zusammenziehung oder Vertauschung im Antezedens. Dann lautet das Ende der Herleitung:

$$\dfrac{\Pi \to \Sigma \qquad \dfrac{\Psi, \Gamma \to \Omega_1}{\Xi, \Gamma \to \Omega_2}\,\mathfrak{Sf}}{\Pi, \Xi^*, \Gamma^* \to \Sigma^*, \Omega_2}\,\text{Mischung.}$$

Dabei seien in Γ diejenigen S-Formeln zusammengefaßt, welche auch im Schema der Schlußfigur (1.21, 1.22) mit Γ bezeichnet sind. Ψ kann also leer sein oder aus einer Nebenformel der Schlußfigur bestehen, Ξ kann leer sein oder aus der Hauptformel der Schlußfigur bestehen.

Man wandelt das Ende der Herleitung zunächst um zu:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Pi \to \Sigma \qquad \Psi, \Gamma \to \Omega_1}{\Pi, \Psi^*, \Gamma^* \to \Sigma^*, \Omega_1}\,\text{Mischung}}{\Psi, \Gamma^*, \Pi \to \Sigma^*, \Omega_1}\,\text{evtl. mehrmalige Vertauschung u. Verdünnung.}}{\Xi, \Gamma^*, \Pi \to \Sigma^*, \Omega_2}$$

Die unterste Schlußfigur ist offenbar eine Schlußfigur von derselben Art wie $\mathfrak{Sf}$. (Man nimmt Γ^*, Π als das Γ der Schlußfigur, und rechnet Σ^* zu dem Θ der Schlußfigur.)

Etwas Aufmerksamkeit ist lediglich wegen der Variablenbedingung erforderlich (wenn $\mathfrak{Sf}$ eine *AES* oder *EEA* ist): Diese bleibt erfüllt auf Grund von 3.101, denn hiernach kann die etwaige Eigenvariable von $\mathfrak{Sf}$ in Π und Σ nicht vorgekommen sein.

In der neuen Herleitung läßt sich die Mischung nach Induktionsannahme wegschaffen.

Wir erhalten also eine mischungsfreie Herleitung mit folgender Schlußfigur am Ende:

$$\frac{\Psi, \Gamma^*, \Pi \to \Sigma^*, \Omega_1}{\Xi, \Gamma^*, \Pi \to \Sigma^*, \Omega_2}.$$

Die Endsequenz ist im allgemeinen noch nicht diejenige, welche wir haben wollen.

Nun verfahren wir weiter wie folgt:

3.121.221. Ξ enthalte $\mathfrak{M}$ nicht.

Dann fügen wir noch evtl. mehrmalige Vertauschung an und erhalten die Endsequenz der ursprünglichen Herleitung.

3.121.222. Ξ enthalte $\mathfrak{M}$. Dann ist also Ξ die Hauptformel von $\mathfrak{Sf}$ und gleich $\mathfrak{M}$. Nun fügen wir an:

$$\dfrac{\dfrac{\Pi \to \Sigma \qquad \mathfrak{M}, \Gamma^*, \Pi \to \Sigma^*, \Omega_2}{\Pi, \Gamma^*, \Pi^* \to \Sigma^*, \Sigma^*, \Omega_2}\ \text{Mischung}}{\Pi, \Gamma^* \to \Sigma^*, \Omega_2}\ \begin{array}{l}\text{evtl. mehrmalige Zusammenziehung}\\ \text{und Vertauschung.}\end{array}$$

Dies ist wiederum die Endsequenz der ursprünglichen Herleitung. (Über $\Pi \to \Sigma$ schreiben wir noch einmal die zugehörige Herleitung.) Wir haben nun abermals eine Mischung in der Herleitung. Die zugehörige linke Rangzahl ist die gleiche wie bei der ursprünglichen Herleitung. Die rechte Rangzahl ist nun gleich 1. Denn direkt über der rechten Obersequenz steht die Sequenz

$$\Psi, \Gamma^*, \Pi \to \Sigma^*, \Omega_1.$$

In deren Antezedens kommt $\mathfrak{M}$ nicht mehr vor. Denn Γ^* enthält $\mathfrak{M}$ nicht, Π ebenfalls nicht wegen 3.121.2, und Ψ enthält höchstens eine Nebenformel von $\mathfrak{Sf}$, diese kann nicht gleich $\mathfrak{M}$ sein, da ja die Hauptformel von $\mathfrak{Sf}$ gleich $\mathfrak{M}$ ist.

Also läßt sich auch diese Mischung nach Induktionsannahme wegschaffen.

3.121.23. $\mathfrak{Sf}$ sei eine Schlußfigur mit zwei Obersequenzen, also eine *UES*, *OEA* oder *FEA*.

(Mit Rücksicht auf die intuitionistische Anwendung (3.2) behandeln wir die einzelnen Möglichkeiten ausführlicher, als es für den klassischen Fall nötig wäre.)

3.12 1.231. $\mathfrak{S}$f sei eine *UES*. Dann lautet das Ende der Herleitung:

$$\dfrac{\Pi \to \Sigma \qquad \dfrac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \qquad \Gamma \to \Theta, \mathfrak{B}}{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}\, UES}{\Pi, \Gamma^* \to \Sigma^*, \Theta, \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}\, \text{Mischung.}$$

($\mathfrak{M}$ kommt in Γ vor.) Man wandelt es um zu:

$$\dfrac{\dfrac{\Pi \to \Sigma \qquad \Gamma \to \Theta, \mathfrak{A}}{\Pi, \Gamma^* \to \Sigma^*, \Theta, \mathfrak{A}}\, \text{Mischung} \qquad \dfrac{\Pi \to \Sigma \qquad \Gamma \to \Theta, \mathfrak{B}}{\Pi, \Gamma^* \to \Sigma^*, \Theta, \mathfrak{B}}\, \text{Mischung}}{\Pi, \Gamma^* \to \Sigma^*, \Theta, \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}\, UES.$$

Beide Mischungen lassen sich nach der Induktionsannahme wegschaffen.

3.12 1.232. $\mathfrak{S}$f sei eine *OEA*. Dann lautet das Ende der Herleitung:

$$\dfrac{\Pi \to \Sigma \qquad \dfrac{\mathfrak{A}, \Gamma \to \Theta \qquad \mathfrak{B}, \Gamma \to \Theta}{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}, \Gamma \to \Theta}\, OEA}{\Pi, (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})^*, \Gamma^* \to \Sigma^*, \Theta}\, \text{Mischung.}$$

(($\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})^*$ bedeute $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ oder gar nichts, je nachdem ob $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ ungleich $\mathfrak{M}$ ist oder gleich $\mathfrak{M}$.)

$\mathfrak{M}$ kommt in Γ sicher vor. (Denn sonst wäre $\mathfrak{M}$ gleich $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$, und die rechte Rangzahl wäre gleich 1, entgegen 3.121.)

Man wandelt das Ende der Herleitung zunächst um zu:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Pi \to \Sigma \quad \mathfrak{A}, \Gamma \to \Theta}{\Pi, \mathfrak{A}^*, \Gamma^* \to \Sigma^*, \Theta}\, \text{Mischung}}{\mathfrak{A}, \Pi, \Gamma^* \to \Sigma^*, \Theta}\, \begin{smallmatrix}\text{evtl. mehrmalige Ver-}\\ \text{tauschg. u. Verdünng.}\end{smallmatrix} \qquad \dfrac{\dfrac{\Pi \to \Sigma \quad \mathfrak{B}, \Gamma \to \Theta}{\Pi, \mathfrak{B}^*, \Gamma^* \to \Sigma^*, \Theta}\, \text{Mischung}}{\mathfrak{B}, \Pi, \Gamma^* \to \Sigma^*, \Theta}\, \begin{smallmatrix}\text{evtl. mehrmalige Ver-}\\ \text{tauschg. u. Verdünng.}\end{smallmatrix}}{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}, \Pi, \Gamma^* \to \Sigma^*, \Theta}\, OEA.$$

Beide Mischungen lassen sich nach der Induktionsannahme wegschaffen.

Alsdann ist das Verfahren dasselbe wie unter 3.12 1.221 und 3.12 1.222. D. h. wir unterscheiden zwei Fälle, je nachdem $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ ungleich $\mathfrak{M}$ ist oder gleich $\mathfrak{M}$; im ersten Falle fügen wir evtl. mehrmalige Vertauschung an und erhalten so die Endsequenz der ursprünglichen Herleitung, im zweiten Falle fügen wir eine Mischung mit $\Pi \to \Sigma$ als linker Obersequenz an, und erhalten durch anschließende (evtl.) mehrmalige Zusammenziehung und Vertauschung wiederum die Endsequenz der ursprünglichen Herleitung. Die betreffende Mischung läßt sich wegschaffen, da die zugehörige rechte Rangzahl gleich 1 ist. (Alles wie unter 3.12 1.222.)

3.12 1.233. $\mathfrak{S}$f sei eine *FEA*. Dann lautet das Ende der Herleitung:

$$\dfrac{\Pi \to \Sigma \qquad \dfrac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \qquad \mathfrak{B}, \Delta \to \Lambda}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \Gamma, \Delta \to \Theta, \Lambda}\, FEA}{\Pi, (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})^*, \Gamma^*, \Delta^* \to \Sigma^*, \Theta, \Lambda}\, \text{Mischung.}$$

3.12 1.23 3.1. $\mathfrak{M}$ komme in Γ und Δ vor.

Dann wandelt man das Ende der Herleitung zunächst um zu:

$$\dfrac{\dfrac{\Pi \to \Sigma \quad \Gamma \to \Theta, \mathfrak{A}}{\Pi, \Gamma^* \to \Sigma^*, \Theta, \mathfrak{A}}\,\text{Mischung} \qquad \dfrac{\dfrac{\Pi \to \Sigma \quad \mathfrak{B}, \Delta \to \Lambda}{\Pi, \mathfrak{B}^*, \Delta^* \to \Sigma^*, \Lambda}\,\text{Mischung}}{\mathfrak{B}, \Pi, \Delta^* \to \Sigma^*, \Lambda}\,\left\{\begin{array}{l}\text{evtl. mehrmalige Vertau-}\\ \text{schung und Verdünnung}\end{array}\right.}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \Pi, \Gamma^*, \Pi, \Delta^* \to \Sigma^*, \Theta, \Sigma^*, \Lambda}\,\mathit{FEA}.$$

Beide Mischungen lassen sich nach der Induktionsannahme wegschaffen. Danach folgt das gleiche Verfahren wie unter 3.12 1.221 und 3.12 1.222. (Es können lediglich im ersten Falle außer Vertauschungen noch Zusammenziehungen notwendig werden.)

3.12 1.23 3. 2. $\mathfrak{M}$ komme nicht in Γ und in Δ zugleich vor. In einem von beiden muß $\mathfrak{M}$ wegen 3.121 vorkommen. Wir führen den Fall, daß $\mathfrak{M}$ in Δ, doch nicht in Γ vorkommt, aus, der andere erledigt sich analog.

Man wandelt das Ende der Herleitung um zu:

$$\dfrac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \qquad \dfrac{\dfrac{\Pi \to \Sigma \quad \mathfrak{B}, \Delta \to \Lambda}{\Pi, \mathfrak{B}^*, \Delta^* \to \Sigma^*, \Lambda}\,\text{Mischung}}{\mathfrak{B}, \Pi, \Delta^* \to \Sigma^*, \Lambda}\,\left\{\begin{array}{l}\text{evtl. mehrmalige Vertau-}\\ \text{schung und Verdünnung}\end{array}\right.}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \Gamma, \Pi, \Delta^* \to \Theta, \Sigma^*, \Lambda}\,\mathit{FEA}$$

Die Mischung läßt sich nach Induktionsannahme wegschaffen. Danach folgt das gleiche Verfahren wie unter 3.12 1.221 und 3.12 1.222. (Im zweiten Falle, also wenn $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ gleich $\mathfrak{M}$ ist, ist die zu der neuen Mischung gehörige rechte Rangzahl wie immer gleich 1, da ja $\mathfrak{M}$ sowohl in $\mathfrak{B}$, Π, Δ^* aus den üblichen Gründen nicht vorkommt, als auch nicht in Γ gemäß der Voraussetzung des behandelten Falles.)

3.122. Die rechte Rangzahl sei gleich 1. Dann ist die linke Rangzahl größer als 1.

Dieser Fall ist im wesentlichen spiegelbildlich zu 3.121 zu erledigen. Man muß nur auf die Schlußfiguren ohne symmetrisches Gegenstück, nämlich *FES* und *FEA*, achten. Nun wurden unter 3.12 1.22 die Schlußfiguren $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ mit einer Obersequenz in das allgemeine Schema:

$$\frac{\Psi, \Gamma \to \Omega_1}{\Xi, \Gamma \to \Omega_2}$$

eingeordnet. Das spiegelbildliche Schema lautet:

$$\frac{\Omega_1 \to \Gamma, \Psi}{\Omega_2 \to \Gamma, \Xi},$$

und diesem fügt sich auch eine *FES* ohne weiteres ein. (Γ vertritt jetzt die in den Schemata 1.21, 1.22 mit Θ bezeichneten Formeln.)

3.12 2.1. Dagegen wollen wir den Fall, daß die Schlußfigur $\mathfrak{Sf}$ eine *FEA* ist, gesondert durchführen. Die Behandlung ist zwar ganz ähnlich wie unter 3.12 1.233, doch nicht völlig spiegelbildlich. Also:

Das Ende der Herleitung lautet:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \qquad \mathfrak{B}, \Delta \to \Lambda}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \Gamma, \Delta \to \Theta, \Lambda}\,FEA \qquad \Sigma \to \Pi}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \Gamma, \Delta, \Sigma^* \to \Theta^*, \Lambda^*, \Pi}\,\text{Mischung}$$

3.12 2.11. $\mathfrak{M}$ komme in Θ und Λ vor.

Dann wandelt man das Ende der Herleitung um zu:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \qquad \Sigma \to \Pi}{\Gamma, \Sigma^* \to \Theta^*, \mathfrak{A}^*, \Pi}\,\text{Mischung}}{\Gamma, \Sigma^* \to \Theta^*, \Pi, \mathfrak{A}}\left\{\begin{array}{l}\text{evtl. mehrmalige Vertau-}\\ \text{schung und Verdünnung}\end{array}\right. \qquad \dfrac{\mathfrak{B}, \Delta \to \Lambda \qquad \Sigma \to \Pi}{\mathfrak{B}, \Delta. \Sigma^* \to \Lambda^*, \Pi}\,\text{Mischung}}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \Gamma, \Sigma^*, \Delta, \Sigma^* \to \Theta^*, \Pi, \Lambda^*, \Pi}\,FEA}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \Gamma, \Delta, \Sigma^* \to \Theta^*, \Lambda^*, \Pi}\left\{\begin{array}{l}\text{evtl. mehrmalige Zusammen-}\\ \text{ziehung und Vertauschung}\end{array}\right.$$

Beide Mischungen lassen sich nach der Induktionsannahme wegschaffen.

3.12 2.12. $\mathfrak{M}$ komme nicht in Θ und in Λ zugleich vor. In einem von beiden muß $\mathfrak{M}$ vorkommen. Wir führen den Fall, daß $\mathfrak{M}$ in Λ, doch nicht in Θ vorkommt, aus, der andere erledigt sich analog.

Man wandelt das Ende der Herleitung um zu:

$$\dfrac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \qquad \dfrac{\mathfrak{B}, \Delta \to \Lambda \qquad \Sigma \to \Pi}{\mathfrak{B}, \Delta, \Sigma^* \to \Lambda^*, \Pi}\,\text{Mischung}}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \Gamma, \Delta, \Sigma^* \to \Theta, \Lambda^*, \Pi}\,FEA$$

Die Mischung läßt sich nach der Induktionsannahme wegschaffen. —

3.2. Beweis des Hauptsatzes für *LJ*-Herleitungen.

Um eine *LJ*-Herleitung in eine *LJ*-Herleitung ohne Schnitte umzuwandeln, wendet man genau das gleiche Verfahren an wie für *LK*-Herleitungen.

Da eine *LJ*-Herleitung eine spezielle *LK*-Herleitung ist, so ist es klar, daß sich die Umwandlungen durchführen lassen. Wir haben uns nur noch davon zu überzeugen, daß bei jedem Umwandlungsschritt aus einer *LJ*-Herleitung auch wieder eine *LJ*-Herleitung wird; d. h. daß die *H*-Sequenzen der umgewandelten Herleitung jeweils höchstens eine *S*-Formel im Sukzedens haben, vorausgesetzt, daß dies zuvor der Fall war.

Wir betrachten also die einzelnen Umwandlungsschritte daraufhin.

3.21. Die Ersetzung der Schnitte durch Mischungen. Ein *LJ*-Schnitt lautet:

$$\dfrac{\Gamma \to \mathfrak{D} \qquad \mathfrak{D}, \Delta \to \Lambda}{\Gamma, \Delta \to \Lambda},$$

wobei Λ höchstens eine S-Formel enthält. Dieser war umzuwandeln zu:

$$\frac{\dfrac{\Gamma \to \mathfrak{D} \quad \mathfrak{D}, \Delta \to \Lambda}{\Gamma, \Delta^* \to \Lambda}\ \text{Mischung}}{\Gamma, \Delta \to \Lambda}\ \left\{\begin{array}{l}\text{evtl. mehrmalige Vertauschung und}\\ \text{Verdünnung im Antezedens.}\end{array}\right.$$

Bei dieser Ersetzung entsteht also wieder eine LJ-Herleitung.

3.22. Durch Umbenennung von freien Gegenstandsvariablen (3.10) geht eine LJ-Herleitung trivialerweise wieder in eine solche über.

3.23. Die eigentliche Umwandlung (3.11 und 3.12).

Wir haben an jedem einzelnen der Fälle 3.111 bis 3.12 2.12 nachzuweisen, daß durch die dort angegebenen Umwandlungen keine Sequenzen mit mehr als einer S-Formel im Sukzedens neu auftreten.

3.231. Zunächst die Fälle 3.11:

In den Fällen 3.111, 3.11 3.1, 3.11 3.31, 3.11 3.35 und 3.11 3.36 kommen in jedem Sequenz-Sukzedens der neuen Herleitung nur solche Formeln vor, die bereits in einem Sequenz-Sukzedens der alten Herleitung vorkamen.

In dem Falle 1.11 3.33 gilt im wesentlichen das gleiche, doch kommt noch eine Ersetzung von freien Gegenstandsvariablen hinzu, diese ändert natürlich nichts an der Anzahl der Sukzedensformeln einer Sequenz.

Die Fälle 3.112, 3.11 3.2, 3.11 3.32 und 3.11 3.34 wurden symmetrisch zu den Fällen 3.111, 3.11 3.1, 3.11 3.31 und 3.11 3.33 behandelt. D. h.: Um den einen Fall aus dem anderen zu erhalten, hat man die Schemata von rechts nach links statt von links nach rechts zu lesen (sowie logische Zeichen zu ändern, was hier keine Rolle spielt). In dem einen Falle steht also genau das im Antezedens, was in dem anderen Falle im Sukzedens steht. Nun gilt für die Antezedentia in den Fällen 3.111, 3.11 3.1, 3.11 3.31 und 3.11 3.33 dasselbe wie für die Sukzedentia, nämlich: Es kommen in jedem Sequenz-Antezedens der neuen Herleitung nur solche Formeln vor, die bereits in einem Sequenz-Antezedens der alten Herleitung vorkamen.

Damit sind die hierzu spiegelbildlichen Fälle 3.112, 3.11 3.2, 3.11 3.32 und 3.11 3.34 erledigt.

3.232. Nun die Fälle 3.12:

3.23 2.1. In den Fällen 3.121 gilt allgemein: Σ^* ist leer, denn in $\Pi \to \Sigma$ darf Σ nur eine Formel enthalten, und diese muß gleich $\mathfrak{M}$ sein.

Nunmehr sieht man leicht, daß wieder in jedem Sequenz-Sukzedens der neuen Herleitung nur solche Formeln vorkommen, die bereits in einem Sequenz-Sukzedens der alten Herleitung vorkamen.

3.23 2.2. In den Fällen 3.122 ist es etwas schwieriger einzusehen, daß aus einer LJ-Herleitung immer wieder eine LJ-Herleitung wird. Wir haben, wie schon oben bei der Betrachtung spiegelbildlicher Fälle, unser Augenmerk auf die Antezedentia in den Schemata 3.121 zu richten.

Wir nehmen eine weitere Unterteilung vor.

3.23 2.21. Der zu 3.12 1.1 spiegelbildliche Fall ist trivial, es kommen ja in jedem Sequenz-Antezedens der neuen Herleitung (im Falle 3.12 1.1) wiederum nur solche Formeln vor, die bereits in einem Sequenz-Antezedens der alten Herleitung vorkamen.

3.23 2.22. In den zu 3.12 1.2 spiegelbildlichen Fällen lautet die Mischung am Ende der Herleitung:

$$\frac{\Omega \rightarrow \mathfrak{M} \quad \Sigma \rightarrow \Pi}{\Omega,\ \Sigma^* \rightarrow \Pi},$$

dabei enthält Π höchstens eine S-Formel, und $\Omega \rightarrow \mathfrak{M}$ ist Untersequenz einer LJ-Schlußfigur, von der mindestens eine Obersequenz $\mathfrak{M}$ als Sukzedensformel hat. Betrachten wir nun die Schlußfigurenschemata 1.21, 1.22, so ist leicht ersichtlich, daß eine solche Schlußfigur nur Verdünnung, Zusammenziehung oder Vertauschung im Antezedens, oder OEA, UEA, EEA, AEA, FEA sein kann. Lassen wir zunächst OEA und FEA beiseite, so fallen alle diese Möglichkeiten unter den zu 3.12 1.22 spiegelbildlichen Fall, und offenbar sind Ψ und Ξ dabei immer leer. (Γ entspricht dem Θ der Schlußfigur.) Man hat also den zu 3.12 1.221 spiegelbildlichen Fall. Nun ist ferner Γ gleich $\mathfrak{M}$, also Γ^* leer, und Π enthält höchstens eine Formel. Demnach kommt in der Tat in der neuen Herleitung nie mehr als eine Formel im Sukzedens einer Sequenz vor.

Der Fall OEA ist spiegelbildlich zu 3.12 1.231. Wieder ist Γ gleich $\mathfrak{M}$, Γ^* leer, Π enthält höchstens eine Formel, also ist alles in Ordnung.

Nun bleibt noch der Fall FEA, d. h. 3.122.1. Bei einer LJ-FEA ist das Θ des Schemas (1.22) leer. Also liegt der unter 3.12 2.12 ausgeführte Fall vor. Δ^* ist ebenfalls leer, und Π enthält höchstens eine Formel, also entsteht auch hier aus einer LJ-Herleitung wieder eine LJ-Herleitung.

(Eingegangen am 21. Juli 1933.)