

Werk

Titel: Ueber das Gleichgewicht der Sonnenatmosphäre

Autor: Schwarzschild, K.

Jahr: 1906

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?252457811_1906|log9

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

Ueber das Gleichgewicht der Sonnenatmosphäre

Von

K. Schwarzschild.

Vorgelegt in der Sitzung vom 13. Januar 1906.

I. Inhaltsübersicht.

Die Sonnenoberfläche zeigt uns in Granulationen, Sonnenflecken und Protuberanzen wechselnde Zustände und stürmische Veränderungen. Um die physikalischen Verhältnisse zu begreifen, unter denen diese Erscheinungen stehn, pflegt man in erster Annäherung den räumlichen und zeitlichen Wechsel durch einen mittleren stationären Zustand, ein mechanisches Gleichgewicht der Sonnenatmosphäre zu ersetzen. Im Vordergrund der Betrachtung stand bisher allgemein das sog. adiabatische Gleichgewicht, wie es in unsrer Atmosphäre herrscht, wenn sie von auf- und absteigenden Strömungen gründlich durchmischt ist. Ich möchte hier auf eine andere Art des Gleichgewichts aufmerksam machen, welche man als „Strahlungsgleichgewicht“ bezeichnen kann. Strahlungsgleichgewicht wird sich in einer stark strahlenden und absorbierenden Atmosphäre einstellen, in welcher die durchmischende Wirkung auf- und absteigender Ströme gegenüber dem Wärmeaustausch durch Strahlung zurücktritt. Ob für die Sonne mehr das adiabatische oder das Strahlungsgleichgewicht gilt, wäre aus allgemeinen Gründen schwer zu entscheiden. Indessen giebt es Beobachtungsdaten, welche ein gewisses Urtheil ermöglichen. Die Sonnenscheibe ist nicht gleichmässig hell, sondern vom Centrum nach dem Rande zu abgetönt. Aus dieser Helligkeitsverteilung auf der Oberfläche lässt sich unter plausibeln Annahmen zurückschliessen auf die Temperaturverteilung in der Tiefe. Das Resultat ist, daß das

Gleichgewicht der Sonnenatmosphäre im Grossen und Ganzen dem Strahlungsgleichgewicht entspricht.

Die Ueberlegungen, die zu diesem Resultat führen, setzen voraus, daß das Kirchhoff'sche Gesetz gilt oder — in andern Worten — daß die Strahlung der Sonnenatmosphäre reine Temperaturstrahlung ist. Sie setzen ferner voraus, daß man beim Eindringen in den Sonnenkörper einer kontinuierlichen Aenderung des Zustandes begegnet und nicht aus einer ziemlich durchsichtigen Chromosphäre diskontinuierlich in eine aus leuchtenden Wolken gebildete undurchsichtige Photosphäre gerät. Vernachlässigt ist die Wirkung der Streuung des Lichts durch Beugung an den Teilchen der Atmosphäre, auf deren Bedeutung Herr A. Schuster¹⁾ aufmerksam gemacht hat, ebenso ist die Refraction vernachlässigt, die H. v. Seeliger²⁾ zur Erklärung der beobachteten Helligkeitsverteilung heranzieht. Auch wird die verschiedene Absorption verschiedener Wellenlängen, die Abnahme der Schwere mit der Höhe und die kugelförmige Ausbreitung der Strahlung nicht berücksichtigt. Die ganze Betrachtung kann daher keineswegs als abschliessend oder zwingend gelten, doch mag sie weiteren Spekulationen einen Anhalt geben, indem sie einen einfachen Gedanken zunächst in einfachster Form ausführt.

2. Verschiedene Arten des Gleichgewichts.

Man bezeichne den Druck mit p , die absolute Temperatur (in Centesimalgraden) mit t , die Dichte mit ϱ , das Molekulargewicht (im Vergleich zum Wasserstoffatom) mit M , die Schwere mit g , die Tiefe in der Atmosphäre (von einem beliebigen Anfangspunkt nach innen gerechnet) mit h . Die Einheiten entnehme man den Verhältnissen, die an der Erdoberfläche bestehn, wähle also als Einheit von p die Atmosphäre, als Einheit von ϱ die Dichte der Luft bei 273° absoluter Temperatur unter dem Druck einer Atmosphäre, als Einheit von g die Schwere auf der Erdoberfläche und als Einheit von h die Höhe der sog. „homogenen Atmosphäre“, welche 8 km beträgt.

Es gilt dann für ein ideales Gas die Beziehung:

$$(1) \quad \varrho t = \frac{p \cdot M}{R} \quad R = 0.106$$

1) Astrophysical Journal. 1905. Bd. 21. pag. 1.

2) Sitzungsberichte der Münchener Akad. d. Wiss., Math.-phys. Classe. 1891. Bd. 21. pag. 264.

und die Bedingung mechanischen Gleichgewichts der Atmosphäre lautet:

$$(2) \quad dp = \varrho g dh.$$

Die Elimination von ϱ aus (1) und (2) ergibt:

$$(3) \quad \frac{dp}{p} = \frac{M}{R} \cdot \frac{g}{t} dh.$$

a) Isothermes Gleichgewicht. Zur allgemeinen Orientierung betrachte man isothermes Gleichgewicht, setze t als konstant voraus. Es folgt dann:

$$(4) \quad p = p_0 e^{\frac{M}{R} \frac{g}{t} h}, \quad \varrho = \varrho_0 e^{\frac{M}{R} \frac{g}{t} h}.$$

Die Schwere g ist auf der Sonne 27.7 mal größer, als auf der Erde, die Temperatur (rund 6000°) etwa 20 mal höher. Es folgt also für ein Gas vom Molekulargewicht der Luft etwa dieselbe räumliche Druckverteilung, wie für Luft auf der Erde. Rechnet man genauer, so findet man eine Zunahme von Druck und Dichte auf das 10-fache für ein Gas vom Molekulargewicht der Luft (28.9) auf je 14.7 km, für Wasserstoff auf je 212 km. Da 725 km auf der Sonne einem Winkelwert von einer Bogensekunde von der Erde aus gesehn entsprechen, so ist klar, daß die Sonne völlig scharf begrenzt aussehn muß.

b) Adiabatisches Gleichgewicht. Wenn eine Gasmasse sich adiabatisch ausdehnt, so gelten die Poisson'schen Beziehungen:

$$(5) \quad \frac{p}{p_0} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_0} \right)^k = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

wobei p_0 und ϱ_0 irgend welche zusammengehörige Ausgangswerte bezeichnen. Die Größe k , das Verhältnis der spezifischen Wärme, ist für ein 1-atomiges Gas gleich 5/3, für ein 2-atomiges gleich 7/5, für ein dreiatomiges 4/3, und nimmt für mehratomige Gase bis auf 1 ab. Das Gleichgewicht einer Atmosphäre heißt adiabatisch, wenn an jeder Stelle die Temperatur herrscht, welche eine von unten aufsteigende, sich adiabatisch abkühlende Gasmasse an dieser Stelle annehmen würde, wenn also innerhalb der ganzen Atmosphäre die Gleichungen (5) erfüllt sind. Es folgt dann aus (3) durch Einsetzen von (5) und Integration:

$$(6) \quad t - t_0 = \frac{k-1}{k} \frac{Mg}{R} (h - h_0).$$

Die Temperatur ändert sich linear mit der Höhe. Der Temperaturgradient berechnet sich für die Erdatmosphäre zu 1° auf je 100 m, für die Sonne wird er 27,7 mal größer als auf der Erde. Die Temperaturzunahme um einen Grad erfolgt dort also für Luft auf je 3,63 m, für Wasserstoff auf je 52 m. Die Atmosphäre hat eine bestimmte äußere Grenze ($t = \varrho = p = 0$). Die Tiefe einer Schicht von 6000° Temperatur unter der äußeren Grenze beträgt auf der Sonne für Luft 22 km, für Wasserstoff 300 km.

c) Strahlungsgleichgewicht. Wenn man sich vorstellt, daß die äußeren Teile der Sonne einen kontinuierlichen Uebergang zu immer heißeren und dichteren Gasmassen bilden, so kann man nicht unterscheiden zwischen strahlenden und absorbierenden Schichten, sondern hat jede Schicht gleichzeitig als absorbierend und strahlend anzusehen. Wir wissen, daß ein mächtiger Energiestrom, aus unbekannten Quellen im Sonneninnern entspringend, die Sonnenatmosphäre durchsetzt und in den Außenraum dringt. Welche Temperatur würden beim Fehlen durchmischender Bewegungen die einzelnen Schichten der Sonnenatmosphäre annehmen müssen, damit sie einen solchen Energiestrom ohne weitere eigene Temperaturänderung stationär befördern?

Man nehme an, jede Höhenschicht dh der Sonnenatmosphäre absorbiere den Bruchteil $a dh$ der hindurchgehenden Strahlung. Ist E die Emission eines schwarzen Körpers von der Temperatur dieser Höhenschicht und nimmt man das Kirchhoff'sche Gesetz als gültig an, so folgt, daß diese Höhenschicht die Energie $E \cdot a dh$ nach jeder Seite ausstrahlt.

Man betrachte jetzt die Strahlungsenergie A , die durch die Sonnenatmosphäre an irgend einer Stelle nach außen wandert, und die Strahlungsenergie B , die (infolge der Strahlung der weiter außen liegenden Schichten) nach innen wandert.

Man verfolge zunächst die nach innen wandernde Energie B . Geht man um eine unendlich dünne Schicht dh nach innen, so geht von der von außen kommenden Energie B der Bruchteil $B \cdot a dh$ verloren, auf der anderen Seite kommt durch die nach der einen Seite gehende Eigenstrahlung der Schicht dh der Betrag $a E dh$ hinzu, es ergibt sich also im Ganzen:

$$(7) \quad \frac{dB}{dh} = a(E - B).$$

Völlig analog folgt für die nach außen gehende Strahlung:

$$(8) \quad \frac{dA}{dh} = -a(E - A).$$

Indem man sich das Absorptionsvermögen a als Funktion der Tiefe h gegeben denkt, bilde man die über der Tiefe h liegende „optische Masse“ der Atmosphäre:

$$(9) \quad m = \int^h a dh.$$

Dann lauten die Differentialgleichungen:

$$(10) \quad \frac{dB}{dm} = E - B, \quad \frac{dA}{dm} = A - E.$$

Wir fragen nach einem stationären Zustand der Temperaturverteilung. Derselbe ist bedingt durch die Forderung, daß jede Schicht ebensoviel Energie empfängt, als ausstrahlt, daß also gilt:

$$aA + a \cdot B = 2aE, \quad A + B = 2E.$$

Führt man dieser Bedingung entsprechend die Hilfsgröße γ ein durch:

$$A = E + \gamma, \quad B = E - \gamma,$$

so gehn die Differentialgleichungen durch Addition und Subtraktion über in:

$$\frac{d\gamma}{dm} = 0, \quad \frac{dE}{dm} = \gamma$$

und integriert:

$$\begin{aligned} \gamma &= \text{const}, & E &= E_0 + \gamma m, \\ A &= E_0 + \gamma(1 + m), & B &= E_0 + \gamma(m - 1). \end{aligned}$$

Die Integrationskonstanten E_0 und γ wurden dadurch bestimmt, daß an der Außengrenze der Atmosphäre ($m = 0$) keine nach innen wandernde Energie B vorhanden ist und die nach außen wandernde Energie den zu beobachtenden Betrag A_0 hat. Es muß also für $m = 0$:

$$B = 0, \quad A = A_0$$

sein. Hiermit ergibt sich das Resultat:

$$(11) \quad E = \frac{A_0}{2}(1 + m), \quad A = \frac{A_0}{2}(2 + m), \quad B = \frac{A_0}{2}m.$$

Es läßt sich also nur unter Voraussetzung des Kirchhoff'schen Gesetzes die Abhängigkeit der Strahlung E von der über der betreffenden Stelle liegenden optischen Masse ableiten.

Will man die Verteilung von Druck und Dichte, die bei Strahlungsgleichgewicht herrscht, kennen lernen, so hat man im Grunde eine detailliertere Untersuchung nötig, welche die Strahlung in den einzelnen Wellenlängen betrachtet. Es genüge hier für eine erste Uebersicht die Annahme, daß der Absorptionskoeffizient unabhängig von der Farbe und der Dichte proportional sei:

$$(12) \quad a = \varrho k$$

(k eine Constante). Dann folgt:

$$(13) \quad m = \int a \, dh = k \cdot \int \varrho \, dh = \frac{k}{g} \cdot p.$$

Die Strahlung E des schwarzen Körpers ist nach dem Stefan'schen Gesetz:

$$E = c \cdot t^4 \quad (c \text{ eine Constante}).$$

Setzt man für die nach außen gelangende Energie A_0 :

$$A_0 = c \cdot T^4,$$

so ist T das, was man gewöhnlich als (effektive) Temperatur der Sonne angiebt. Es ist rund $T = 6000^\circ$. Für Strahlungsgleichgewicht gilt dann nach (11):

$$(14) \quad t^4 = \frac{1}{2} T^4 \left[1 + \frac{k}{g} p \right].$$

Unter Einführung der an der äußeren Grenze der Atmosphäre herrschenden Temperatur $\tau \left(= \frac{T}{\sqrt[4]{2}} \right)$ kann man dafür auch schreiben:

$$(14a) \quad t^4 = \tau^4 \left[1 + \frac{k}{g} p \right].$$

Geht man hiermit in (3) ein, so erhält man:

$$(15) \quad \frac{M}{R} g h = \int \frac{4 t^4 \, dt}{t^4 - \tau^4} = \tau \left[4 \frac{t}{\tau} + \log \frac{\frac{t}{\tau} - 1}{\frac{t}{\tau} + 1} - 2 \operatorname{arctg} \frac{t}{\tau} \right] + \text{const.}$$

Diese Gleichung giebt die Temperatur als Funktion der Tiefe. Die zugehörige Dichte folgt aus:

$$(16) \quad \varrho = \frac{M}{R} \frac{p}{t} = \frac{M g}{R k} \frac{t^4 - \tau^4}{t \tau^4}.$$

Das nachstehende Täfelchen giebt die Werte, die aus (11), (15)

und (16) folgen, wenn man die Sonnenatmosphäre aus unserer Luft bestehen läßt. Für den Absorptionskoeffizienten der Luft hat man etwa $k = 0,6$ anzusetzen. Aus der Effektivtemperatur $T = 6000^\circ$ folgt für die Temperatur der äußeren Grenze $\tau = 5050^\circ$. Die Tiefe h ist von einer Stelle an gerechnet, an welcher die Temperatur das $1\frac{1}{2}$ fache dieser Grenztemperatur beträgt. Damit sind die Grundlagen der Rechnung gegeben.

Tiefe h	t	m	ρ
$-\infty$	5050°	0.000	0.00
-36.9 km	5060°	0.008	0.02
-19.1	5300°	0.215	0.51
0.0	7570°	4.06	6.8
$+12.0$	10100°	15.0	18.7
$+55.7$	20200°	255.0	159.4

Um die entsprechende Tabelle für eine Atmosphäre aus Wasserstoff zu erhalten, hätte man die Tiefe h mit 14,4 zu multiplizieren, die Dichte ρ einerseits durch 14,4 zu dividieren, andererseits mit einem Faktor zu multiplizieren, der angibt, um wie viel dieselbe Masse Wasserstoff durchsichtiger ist, als Luft. Die beiden Spalten t und m blieben unverändert.

Man erkennt, daß sich das Strahlungsgleichgewicht mit der Erhebung über die Sonne mehr und mehr dem isothermen Gleichgewicht, welches der Grenztemperatur τ entspricht, nähert und, daß es, wie dieses, theoretisch eine unendliche Erstreckung der Atmosphäre zur Folge hat.

3. Stabilität des Strahlungsgleichgewichts.

Von besonderem Interesse ist ein Vergleich des Temperaturgradienten bei Strahlungs- und bei adiabatischem Gleichgewicht. Ist nämlich der Temperaturgradient kleiner als bei adiabatischem Gleichgewicht, so gerät eine aufsteigende Luftmasse in Schichten, welche wärmer und dünner sind, als sie selbst ankommt, sie erfährt daher einen Druck nach unten. Ebenso erfährt dann eine absteigende Luftmasse einen Druck nach oben. Ein Gleichgewicht mit kleinerem Temperaturgradienten, als das adiabatische, ist daher stabil, umgekehrt eines mit größerem Temperaturgradienten instabil.

Für adiabatisches Gleichgewicht gilt nach (6):

$$\frac{dt}{dh} = \frac{k-1}{k} \frac{Mg}{R},$$

für Strahlungsgleichgewicht nach (15):

$$\frac{dt}{dh} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\tau^4}{t^4}\right) \frac{Mg}{R}.$$

Stabilitätsbedingung ist also:

$$(17) \quad 1 - \frac{\tau^4}{t^4} < 4 \frac{k-1}{k}$$

welche für $k > 4/3$ immer erfüllt ist.

Das Strahlungsgleichgewicht ist demnach überall stabil, so lange das Gas, welches die Atmosphäre bildet, ein-, zwei- oder dreiatomig ist. Für mehratomige Gase würde in tieferen Schichten (von höherer Temperatur t) Instabilität eintreten.

Es wird daher hier die Vorstellung nahe gelegt, daß eine äußere Schale der Sonnenatmosphäre sich in stabilem Strahlungsgleichgewicht befindet, während sich vielleicht in der Tiefe eine dem adiabatischen Gleichgewicht angenäherte Zone auf- und absteigender Ströme erstreckt, die dann zugleich die Entnahme der Energie aus ihren eigentlichen Quellen besorgen wird.

4. Helligkeitsverteilung auf der Sonnenscheibe.

Jeder Temperaturverteilung längs der Vertikalen in der Sonnenatmosphäre entspricht bei unseren Annahmen eine bestimmte Verteilung der Helligkeit auf der Sonnenscheibe.

Wir hatten früher die Gesamtenergie A betrachtet, die durch die Sonnenatmosphäre nach außen wandert, ohne die einzelnen Bestandteile zu trennen, welche unter verschiedenen Neigungen gegen die Vertikale laufen, und wir hatten den Absorptionskoeffizienten für die Gesamtenergie mit α bezeichnet. Dieses α giebt einen Durchschnittswert aus den für alle möglichen Neigungen gültigen Absorptionskoeffizienten.

Wir wollen jetzt die in einer bestimmten Richtung wandernde Strahlung isoliert betrachten und mit $F(i)$ grade die Strahlung bezeichnen, die sich unter dem Winkel i gegen die Vertikale bewegt. Es bezeichne α den Absorptionskoeffizienten für Strahlung, welche die Atmosphäre normal durchsetzt. Dann ist offenbar $\frac{\alpha}{\cos i}$

der Absorptionskoeffizient für unter dem Winkel i verlaufende Strahlung. Man erhält daher für F in völliger Analogie zu (8) die Differentialgleichung:

$$(18) \quad \frac{dF}{dh} = -\frac{\alpha}{\cos i} (E - F)$$

oder:

$$\frac{dF}{d\mu} = -\frac{1}{\cos i} (E - F),$$

wenn man die Abkürzung:

$$(19) \quad \mu = \int_{-\infty}^h \alpha dh$$

einführt. Die Integration ergibt für die aus der Atmosphäre austretende Strahlung:

$$(20) \quad F(i) = \int_0^{\infty} E e^{-\mu \sec i} d\mu \sec i.$$

Es läßt sich also $F(i)$ berechnen, sobald man die Temperaturverteilung längs der Vertikalen und damit E als Funktion von μ kennt.

Nun hängt aber μ mit der früher eingeführten optischen Masse m zusammen. Man betrachte die Gesamtstrahlung, die auf ein horizontales Flächenelement ds innerhalb der Atmosphäre von unten auffällt. Dieselbe wird gegeben durch das Integral über die aus allen möglichen Richtungen eintreffende Strahlung:

$$J = 2\pi ds \int_0^{\pi/2} di \sin i \cos i F(i).$$

Die Absorption, welche diese Strahlung innerhalb der Schicht dh erleidet, wird sein:

$$\begin{aligned} dJ &= 2\pi ds \int_0^{\pi/2} di \sin i \cos i F(i) \cdot \frac{\alpha dh}{\cos i} \\ &= 2\pi ds \alpha dh \int_0^{\pi/2} di \sin i F(i). \end{aligned}$$

Der früher verwandte Absorptionskoeffizient für die Gesamtenergie a war definiert durch die Beziehung:

$$\frac{dJ}{J} = a dh.$$

Die Vergleichung mit den vorstehenden Formeln ergibt:

$$a = \alpha \cdot \frac{\int_0^{\pi/2} di \sin i F(i)}{\int_0^{\pi/2} di \sin i \cos i F(i)}$$

Wenn $F(i)$ für kleine Neigungen i einigermaßen konstant ist und sich erst für i in der Nähe von 90° rascher ändert — wie das bei der Sonne nach den unten folgenden empirischen Ergebnissen der Fall ist — so erhält man eine Näherung für a , indem man $F(i)$ überhaupt als unabhängig von i betrachtet, und zwar folgt dann durch Ausführung der Integrale:

$$(21) \quad a = 2\alpha.$$

Von dieser Beziehung wollen wir Gebrauch machen. Es ergibt sich aus (9) und (19):

$$m = 2\mu$$

und damit statt (20):

$$(22) \quad F(i) = \int_0^\infty E e^{-\frac{m}{2} \sec i} \frac{dm}{2} \sec i.$$

Es ist also nunmehr $F(i)$ bekannt, sobald E als Funktion der optischen Masse m gegeben ist. Die Funktion $F(i)$ liefert aber auch sofort die Helligkeitsverteilung auf der Sonnenscheibe. Denn die Strahlung, die wir auf der Sonnenscheibe im scheinbaren Abstand r vom Centrum der Scheibe beobachten, hat offenbar die Sonnenatmosphäre unter einem Winkel i durchsetzt, der durch die Gleichung bestimmt wird:

$$(23) \quad \sin i = \frac{r}{R}.$$

Hierbei bezeichnet R den scheinbaren Sonnenradius. Die Verbindung von (22) und (23) liefert zu jedem r die zugehörige Helligkeit F .

Sehr übersichtlich wird der Zusammenhang zwischen der Strahlungsverteilung in der Tiefe E und der Helligkeitsverteilung auf der Oberfläche F , wenn sich E in eine Potenzreihe nach m entwickeln läßt:

$$(24) \quad E = \beta_0 + m\beta_1 + m^2\beta_2 + \dots$$

Dann folgt nämlich sofort aus (22):

$$(25) \quad F = \beta_0 + 2 \cdot 1! \beta_1 \cos i + 4 \cdot 2! \beta_2 \cos^2 i + \dots$$

Läßt sich E als eine Summe gebrochener Potenzen von m darstellen:

$$(26) \quad E = \sum_n \beta_n \cdot m^{\gamma_n},$$

so folgt für F :

$$(27) \quad F = \sum_n \Gamma(\gamma_n) \beta_n (2 \cos i)^{\gamma_n},$$

wo Γ die Γ -Funktion bedeutet. Auch hier ist der Uebergang von E zu F also noch einfach zu bewerkstelligen.

Wir wollen insbesondere betrachten, wie sich die Helligkeitsverteilung bei adiabatischem und bei Strahlungsgleichgewicht stellt.

Für Strahlungsgleichgewicht gilt nach (11):

$$E = \frac{A_0}{2} (1 + m).$$

Daraus folgt nach (24) und (25):

$$F(i) = \frac{A_0}{2} (1 + 2 \cos i)$$

oder, wenn man die Helligkeit im Centrum der Sonnenscheibe ($i = 0$) als Einheit nimmt:

$$(28) \quad F(i) = \frac{1 + 2 \cos i}{3}.$$

Für adiabatisches Gleichgewicht galt die Beziehung (5):

$$\frac{t}{t_0} = \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}}$$

Wenn wir ferner, wie oben, die Absorption für alle Farben gleich und der Dichte proportional voraussetzen, so besteht zwischen p und m der Zusammenhang (13):

$$m = \frac{k}{g} p.$$

Damit erhält man für E :

$$E = c \cdot t^k = c_1 p^{\frac{k(k-1)}{k}} = c_2 m^{\frac{k(k-1)}{k}} \quad 4^*$$

wobei c_1 und c_2 neue Konstante bedeuten. Der zugehörige Ausdruck vom F wird nach (26) und (27):

$$F(i) = c_2 \Gamma\left[4 \frac{(k-1)}{k}\right] (\cos i)^{4 \frac{(k-1)}{k}},$$

oder, wenn man wieder die centrale Helligkeit als Einheit wählt:

$$(29) \quad F(i) = (\cos i)^{4 \frac{k-1}{k}}.$$

Die Formeln (28) und (29) sind mit der Beobachtung zu vergleichen. Außer den hier nicht in Frage kommenden spektral-photometrischen Untersuchungen für einzelne Farbengebiete giebt es eine Reihe von Messungen, die mit Thermosäulen und Bolometer angestellt sind und die angeben, wie sich die von allen Wellenlängen zugleich gelieferte Gesamtstrahlung über die Sonnenscheibe verteilt. Herr G. Müller hat diese Messungen in seiner „Photometrie der Gestirne“ pag. 323 zusammengestellt und zu den Mittelwerten vereinigt, die in der zweiten Spalte des unten folgenden Täfelchens angegeben sind. Die theoretischen Werte für Strahlungsgleichgewicht und adiabatisches Gleichgewicht nach den Formeln (28) und (29) sind daneben gesetzt. Für das adiabatische Gleichgewicht ist $k = 4/3$ gesetzt, was einem 3-atomigen Gase entspricht. Ein- oder zweiatomige Gase würden eine noch schlechtere Uebereinstimmung geben und die physikalische Wahrscheinlichkeit spricht gewiß gegen mehr als 3-atomige Gase in den äußeren Teilen der Sonnenatmosphäre.

$\frac{r}{R}$	Messung.	Strahlungsgleichgew.	Adiabat. Gleichgew.
0.0	1.00	1.00	1.00
0.2	0.99	0.99	0.98
0.4	0.97	0.95	0.92
0.6	0.92	0.87	0.80
0.7	0.87	0.81	0.71
0.8	0.81	0.73	0.60
0.9	0.70	0.63	0.44
0.96	0.59	0.52	0.28
0.98	0.49	0.47	0.20
1.00	(0.40)	0.33	0.00

Man sieht, daß das Strahlungsgleichgewicht die Helligkeitsverteilung auf der Sonnenscheibe so gut darstellt, als beiden vereinfachten Voraussetzungen, unter denen hier gerechnet worden ist, erwartet werden kann, daß das adiabatische Gleichgewicht hingegen ein ganz anderes Aussehn der Sonnenscheibe zur Folge hätte. Damit hat die Einführung des Strahlungsgleichgewichts eine gewisse empirische Rechtfertigung gefunden.
