Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen.

Von Herrn *Axel Thue* in Kristiania.

Theorem I. Bedeutet ϱ *eine positive Wurzel einer ganzen Funktion vom Grade* r *mit ganzen Koeffizienten, so hat die Relation*

$$(1.)\qquad 0 < |q\varrho - p| < \frac{c}{q^{\frac{r}{2}+k}},$$

wo c *und* k *zwei beliebig gegebene positive Größen bezeichnen, nicht unendlich viele Auflösungen in ganzen positiven Zahlen* p *und* q.

Die Richtigkeit hiervon ergibt sich gleich, wenn $r = 1$ **und wenn** $r = 2$.

Wir brauchen folglich nur zu zeigen, daß der Satz immer richtig ist, wenn die genannte Funktion irreduktibel ist und $r > 2$.

Um dieses Ziel zu erreichen, wollen wir zuerst zwei Hilfssätze entwickeln.

Erster Hilfssatz. Es sei ϱ *eine beliebige Wurzel einer ganzen irreduktiblen Funktion* F *mit ganzen Koeffizienten und vom Grade* $r > 2$.

Es seien ferner θ *eine beliebig gewählte positive Größe* $> \frac{2}{r}$ *und* n *eine solche beliebige ganze positive Zahl, daß*

$$(2.)\qquad \frac{2}{r-2} - \frac{\theta}{n-1} > \omega,$$

wo ω *eine beliebig gegebene positive Größe* $< \frac{2}{r-2}$ *bedeutet.*

Es sei endlich m die positive ganze Zahl, die der Relation

$$(3.)\qquad m \overline{\overline{<}} \left(\frac{r-2}{2}+\frac{1}{\theta}\right)(n-1) < m+1$$

Genüge leistet.

Man kann dann immer solche ganzen von der gewählten Wurzel ϱ unabhängigen Funktionen $f(x)$, $P(x)$ und $Q(x)$ von x mit ganzen Koeffizienten bestimmen und solche nur von F, θ und ω abhängigen positiven Größen S und T finden, daß

$$(4.)\quad \varrho Q(x) - P(x)$$
$$= (\varrho - x)^n [f_1(x)\varrho^{r-1} + f_2(x)\varrho^{r-2} + \cdots + f_{r-1}(x)\varrho + f_r(x)] = (\varrho - x)^n R(x),$$

wo der Grad von jeder Funktion f nicht größer als m, also der Grad von P und von Q nicht größer als $n+m$ wird, während der absolute Wert jedes Koeffizienten der Funktionen f kleiner als T^n und der absolute Wert jedes Koeffizienten von P und Q kleiner als S^n werden).*

Beweis. Wenn n eine beliebige ganze positive Zahl bedeutet, können wir setzen

$$(\varrho - x)^n = A_1^{(n)}(x)\varrho^{r-1} + A_2^{(n)}(x)\varrho^{r-2} + \cdots + A_{r-1}^{(n)}(x)\varrho + A_r^{(n)}(x),$$

wo $A_1^{(n)}, A_2^{(n)}, \ldots A_r^{(n)}$ inbezug auf x ganze Funktionen vom Grade n mit ganzen Koeffizienten werden.

Der absolute Wert jedes Koeffizienten der Funktionen $A^{(n)}$ kann hier nicht größer als $(a+2)^n$ sein, wenn der absolute Wert jedes Koeffizienten von F nicht größer als eine positive Größe a ist.

Ist nämlich

$$(5.)\qquad \varrho^r = a_1\varrho^{r-1} + a_2\varrho^{r-2} + \cdots + a_{r-1}\varrho + a_r,$$

*) Vergleiche die drei Abhandlungen:

1. *A. Thue,* Bemerkungen über gewisse Näherungsbrüche algebraischer Zahlen. Christiania Videnskabsselskabs Schriften, 1908.
2. Derselbe, Über rationale Annäherungswerte der reellen Wurzel der ganzen Funktion dritten Grades $x^3 - ax - b$. C. V. S., 1908.
3. Derselbe, Om en generel i store hele tal ulösbar ligning. C. V. S., 1908.

wo $a_1, a_2, \dots a_r$ rationale Größen sind, so bekommt man ja

$$A_1^{(n+1)} \varrho^{r-1} + A_2^{(n+1)} \varrho^{r-2} + \cdots + A_{r-1}^{(n+1)} \varrho + A_r^{(n+1)} = (\varrho - x)^{n+1} = (\varrho - x)^n (\varrho - x)$$
$$= (a_1 A_1^{(n)} + A_2^{(n)} - x A_1^{(n)}) \varrho^{r-1} + (a_2 A_1^{(n)} + A_3^{(n)} - x A_2^{(n)}) \varrho^{r-2} + \cdots + (a_r A_1^{(n)} - x A_r^{(n)}).$$

Durch ähnliche Betrachtungen erhalten wir somit die Gleichungen

$$(6.)\quad \begin{aligned} (\varrho - x)^n &= B_1^{(0)}(x) \varrho^{r-1} + B_2^{(0)}(x) \varrho^{r-2} + \cdots + B_{r-1}^{(0)}(x) \varrho + B_r^{(0)}(x), \\ \varrho (\varrho - x)^n &= B_1^{(1)}(x) \varrho^{r-1} + B_2^{(1)}(x) \varrho^{r-2} + \cdots + B_{r-1}^{(1)}(x) \varrho + B_r^{(1)}(x), \\ \varrho^2 (\varrho - x)^n &= B_1^{(2)}(x) \varrho^{r-1} + B_2^{(2)}(x) \varrho^{r-2} + \cdots + B_{r-1}^{(2)}(x) \varrho + B_r^{(2)}(x), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varrho^{r-1} (\varrho - x)^n &= B_1^{(r-1)}(x) \varrho^{r-1} + B_2^{(r-1)}(x) \varrho^{r-2} + \cdots + B_{r-1}^{(r-1)}(x) \varrho + B_r^{(r-1)}(x), \end{aligned}$$

wo jedes B eine ganze Funktion von x vom Grade n und mit ganzen Koeffizienten bedeutet, während der absolute Wert jedes von diesen Koeffizienten kleiner ist als T_0^n, wo T_0 eine von n unabhängige und nur durch die Koeffizienten von F definierte positive Größe bezeichnet.

Setzen wir ferner

$$(7.)\quad U(x) = C_1(x) \varrho^{r-1} + C_2(x) \varrho^{r-2} + \cdots + C_{r-1}(x) \varrho + C_r(x),$$

wo jedes C eine ganze Funktion von x mit ganzen Koeffizienten bedeutet, so erhält man inbezug auf diesen Koeffizienten, wenn s eine beliebige ganze positive Zahl ist, im ganzen

$$(8.)\quad (2s+1)^{(m+1)r} = M$$

verschiedene Funktionen U, wo der Grad von jedem C nicht größer als m ist, und wo der absolute Wert jedes Koeffizienten der Funktionen C nicht s überschreitet.

Wegen der Irreduktibilität der Funktion F werden die M ganzen Funktionen U nicht bloß inbezug auf den genannten Koeffizienten verschieden.

Je zwei von ihnen können nicht für alle Werte von x einander gleich sein.

Aus (6.) und (7.) folgt

$$(9.)\qquad (\varrho - x)^n\, U(x) = G_1(x)\,\varrho^{r-1} + G_2(x)\,\varrho^{r-2} + \cdots + G_{r-1}(x)\,\varrho + G_r(x),$$

wo

$$(10.)\qquad G_p(x) = B_p^{(0)}\, C_r + B_p^{(1)}\, C_{r-1} + \cdots + B_p^{(r-1)}\, G_1. \qquad {\scriptstyle (p=1,2,\ldots r)}$$

Für jede der genannten M Funktionen U wird der Grad von jeder der ganzen Funktionen G nicht größer als $n+m$.

Ferner wird der absolute Wert jedes Koeffizienten dieser Funktionen G nicht größer sein als die kleinste der beiden Größen

$$r(m+1)\,s\,T_0^n \quad \text{und} \quad r(n+1)\,s\,T_0^n.$$

Wir wollen im folgenden die Größe

$$(11.)\qquad r(n+1)\,s\,T_0^n = N$$

als Grenze benutzen.

Der Bequemlichkeit halber wollen wir für T_0 eine solche Größe wählen, daß T_0^n und also auch N für alle ganzen positiven Werte von n irrational werden.

Setzen wir nun

$$(12.)\qquad G_p(x) = b_p^{(0)}\, x^{n+m} + b_p^{(1)}\, x^{n+m-1} + \cdots + b_p^{(n+m-1)}\, x + b_p^{(n+m)},$$

wo die Größen b_p die von x unabhängigen ganzen Koeffizienten von $G_p(x)$ bedeuten, so entspricht, wenn α und β gegeben sind, jeder der M Funktionen U ein zugehöriger Wert von $b_\beta^{(\alpha)}$.

Alle diese M einander gleichen oder ungleichen Werte des Koeffizienten $b_\beta^{(\alpha)}$ liegen zwischen den Grenzen

$$-N \text{ und } N.$$

Bezeichnet h eine beliebige ganze positive Zahl, so können wir uns das Intervall von $-N$ bis N in h gleiche Intervalle J geteilt denken.

Die Größe jedes von diesen h Intervallen wird gleich

$$\frac{2N}{h}.$$

Aus den M Funktionen U können wir folglich M_1, wo $M_1 \geqq \frac{M}{h}$, auswählen, so daß alle zu diesen M_1 Funktionen U gehörigen Werte von $b_\beta^{(\alpha)}$ in einem einzigen der h Intervalle J liegen.

Aus den so gefundenen M_1 Funktionen können wir ferner M_2, wo $M_2 \geqq \frac{M_1}{h} \geqq \frac{M}{h^2}$, auswählen, so daß alle zu diesen M_2 Funktionen U gehörigen Werte eines von $b_\beta^{(\alpha)}$ verschiedenen Koeffizienten $b_{\beta_1}^{(\alpha_1)}$, der Koeffizienten b auch in einem einzigen der h Intervalle J liegen.

Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens sehen wir ein, daß man aus den M Funktionen U immer imstande ist, solche L auszuwählen, daß alle die zu diesen L Funktionen U gehörigen Werte eines beliebigen Koeffizienten b der $(n+m+1)(r-2)$ Koeffizienten der $r-2$ Funktionen

$$G_1, G_2, \ldots G_{r-2}$$

in einem einzigen der h Intervalle J liegen werden, während

$$(13.) \qquad L \geqq \frac{M}{h^{(m+n+1)(r-2)}}.$$

Ist hier

$$(14.) \qquad h^{(m+n+1)(r-2)} < M,$$

so wird

$$L \geqq 2.$$

Bedeuten nun U_1 und U_2, wenn (14.) besteht, zwei beliebige der L Funktionen U, so können wir setzen

$$\begin{aligned}
U_1 &= C_1^{(1)}\varrho^{r-1} + C_2^{(1)}\varrho^{r-2} + \cdots + C_{r-1}^{(1)}\varrho + C_r^{(1)},\\
U_2 &= C_1^{(2)}\varrho^{r-1} + C_2^{(2)}\varrho^{r-2} + \cdots + C_{r-1}^{(2)}\varrho + C_r^{(2)},\\
(\varrho - x)^n U_1 &= G_1^{(1)}\varrho^{r-1} + G_2^{(1)}\varrho^{r-2} + \cdots + G_{r-1}^{(1)}\varrho + G_r^{(1)},\\
(\varrho - x)^n U_2 &= G_1^{(2)}\varrho^{r-1} + G_2^{(2)}\varrho^{r-2} + \cdots + G_{r-1}^{(2)}\varrho + G_r^{(2)},
\end{aligned}$$

wo $C_p^{(1)}, C_p^{(2)}$ und $G_p^{(1)}, G_p^{(2)}$ resp. die Werte von C_p und G_p in (7.) und (9.) deuten, wenn hier bezw. U_1 und U_2 für U gesetzt werden.

Wir bekommen somit die Gleichung

$$\begin{aligned}
(15.)\qquad & (\varrho - x)^n (U_1 - U_2)\\
&= (\varrho - x)^n [(C_1^{(1)} - C_1^{(2)})\varrho^{r-1} + (C_2^{(1)} - C_2^{(2)})\varrho^{r-2} + \cdots\\
&\qquad + (C_{r-1}^{(1)} - C_{r-1}^{(2)})\varrho + (C_r^{(1)} - C_r^{(2)})]\\
&= (G_1^{(1)} - G_1^{(2)})\varrho^{r-1} + (G_2^{(1)} - G_2^{(2)})\varrho^{r-2} + \cdots\\
&\qquad + (G_{r-1}^{(1)} - G_{r-1}^{(2)})\varrho + (G_r^{(1)} - G_r^{(2)}).
\end{aligned}$$

Jeder Koeffizient der $r-2$ Funktionen

$$(G_1^{(1)} - G_1^{(2)}),\ (G_2^{(1)} - G_2^{(2)}), \ldots (G_{r-2}^{(1)} - G_{r-2}^{(2)})$$

liegt zwischen den Grenzen

$$-\frac{2N}{h} \text{ und } \frac{2N}{h}.$$

Kann man nun h so groß wählen, daß

$$(16.)\qquad h > 2N,$$

so liegen also die genannten ganzen Koeffizienten sämtlich zwischen -1 und 1, und sie müssen dann folglich alle gleich Null sein.

Genügt h den Bedingungen (14.) und (16.), und setzen wir

$$\begin{aligned}
C_p^{(1)} - C_p^{(2)} &= f_p(x), \qquad (p=1,2,3,\ldots r)\\
G_{r-1}^{(1)} - G_{r-1}^{(2)} &= Q(x),\\
G_r^{(2)} - G_r^{(1)} &= P(x),
\end{aligned}$$

so bekommt man aus (15.) die Gleichung

$$(17.)\quad \begin{aligned} &\varrho Q(x) - P(x) \\ &= (\varrho - x)^n [f_1(x)\varrho^{r-1} + f_2(x)\varrho^{r-2} + \cdots + f_{r-1}(x)\varrho + f_r(x)], \end{aligned}$$

wo der absolute Wert jedes Koeffizienten der Funktionen f nicht größer als $2s$ wird, während der absolute Wert jedes Koeffizienten der Funktionen P und Q kleiner als

$$2N = 2r(n+1)sT_0^n$$

sein muß.

Infolge (8.) und (11.) werden (14.) und (16.) erfüllt sein, wenn man zwei solche positiven ganzen Zahlen s und h finden kann, daß

$$2r(n+1)sT_0^n < h < (2s+1)^{\frac{(m+1)r}{(m+n+1)(r-2)}}.$$

Dies wird erreicht, wenn man s so bestimmen kann, daß z B.

$$r(n+1)(2s+1)T_0^n < (2s+1)^{\frac{(m+1)r}{(m+n+1)(r-2)}}$$

oder so, daß

$$(18.)\quad (2s+1)T_1^n < (2s+1)^{\frac{(m+1)r}{(m+n+1)(r-2)}},$$

wo T_1 eine beliebige Größe größer als $2rT_0$ bedeutet.

Aus (2.) und (3.) ergibt sich ferner

$$0 < \frac{\omega}{\left(\frac{1}{r-2}+\frac{\theta}{2}\right)r} < \frac{\omega}{\left(\frac{1}{r-2}+\frac{\theta}{2}\right)r-\omega} < \frac{\omega}{1+\frac{r\theta}{2}+\frac{\theta}{n-1}} < \frac{\frac{2}{r-2}-\frac{\theta}{n-1}}{1+\frac{r\theta}{2}+\frac{\theta}{n-1}}$$

$$= \frac{r}{\left[1+\frac{n}{\left(\frac{r-2}{2}+\frac{1}{\theta}\right)(n-1)}\right](r-2)} - 1 < \frac{r}{\left(1+\frac{n}{m+1}\right)(r-2)} - 1$$

$$= \frac{(m+1)r}{(m+n+1)(r-2)} - 1.$$

Der Gleichung (18.) wird folglich genügt, wenn

$$T_1^n < (2s+1)^{\frac{\omega}{\left(\frac{1}{r-2}+\frac{\theta}{2}\right)r}}$$

oder wenn

$$2s+1 > T_1^{n\frac{\left(\frac{1}{r-2}+\frac{\theta}{2}\right)r}{\omega}}. \tag{19.}$$

Bezeichnet also T eine solche von n unabhängige und nur von θ, ω und von den Koeffizienten von F abhängige positive Größe, daß

$$T > T_1^{\frac{\left(\frac{1}{r-2}+\frac{\theta}{2}\right)r}{\omega}},$$

so wird der Bedingung (19.) und also auch (18.) genügt, wenn z. B.

$$2s+1 > T^n \geqq 2s-1.$$

Der absolute Wert jedes Koeffizienten der Funktionen P und Q wird hier kleiner als

$$2N = 2r(n+1)s\,T_0^n < (2s-1)\,T_1^n \leqq (TT_1)^n = S^n,$$

wo

$$S = TT_1.$$

Da alle M Funktionen $U(x)$ verschieden sind, kann nicht jede der beiden Funktionen P und Q gleich Null sein für alle Werte von x, d. h. nicht alle Koeffizienten von P und Q können Null sein.

Ferner können auch nicht alle Koeffizienten einer einzigen der beiden Funktionen gleich Null sein.

Die andere der zwei Funktionen, die also nicht identisch gleich Null ist, enthielte nämlich in diesem Falle den Faktor $(\varrho - x)^n$ und also auch, weil $F(x)$ irreduktibel ist, den Faktor $F_{(x)}^n$.

Dies ist aber unmöglich, da der Grad der genannten Funktion nicht größer als $m+n$ ist und also kleiner als rn sein muß.

Nach (3.) erhält man nämlich für $\theta > \frac{2}{r}$:

$$n+m \overline{\gtrless} \left(\frac{r-2}{2}+\frac{1}{\theta}\right)(n-1)+n=\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{\theta}\right)n-\left(\frac{r-2}{2}+\frac{1}{\theta}\right)<\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{\theta}\right)n<rn.$$

Der Hilfssatz ist hierdurch bewiesen.*)

Zweiter Hilfssatz. Es mögen $F(x), \varrho, r, \omega, \theta, n$ *die im ersten Hilfssatz gegebenen Bedeutungen haben. Ferner seien hier* ϱ *reell,* $\theta > 2$ *und* p *und* q *zwei solche beliebig gegebenen ganzen Zahlen, daß*

$$(20.)\qquad \begin{gathered} q>0, \\ |\varrho q - p| < 1. \end{gathered}$$

Wir können dann immer solche ganzen Zahlen A_0, B_0 *und* A_1, B_1 *finden, daß*

$$(21.)\qquad \frac{A_0}{B_0} \lesseqgtr \frac{A_1}{B_1},$$

$$(22.)\qquad |\varrho B_0 - A_0| < \left|\left[(\varrho q-p)^{\left(1-\frac{2}{\theta}\right)} C q^{\left(\frac{r-2}{2}+\frac{1}{\theta}\right)}\right]^{n-1}\right|,$$

$$(23.)\qquad |\varrho B_1 - A_1| < \left|\left[(\varrho q-p)^{\left(1-\frac{2}{\theta}\right)} C q^{\left(\frac{r-2}{2}+\frac{1}{\theta}\right)}\right]^{n-1}\right|,$$

$$(24.)\qquad |B_0| < D^{n-1} q^{\left[\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{\theta}\right)(n-1)+1\right]},$$

$$(25.)\qquad |B_1| < D^{n-1} q^{\left[\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{\theta}\right)(n-1)+1\right]},$$

---

*) Die obenstehenden Überlegungen können auch auf Funktionen f, P und Q, deren Koeffizienten algebraische Zahlen sind, angewandt werden.

Auf ähnliche Weise kann man ferner Gleichungen von der Form

$$\varrho\, Q(x_1, x_2, \dots x_r) - P(x_1, x_2, \dots x_r) = [x_1 \varrho^{r-1} + x_2 \varrho^{r-2} + \cdots + x_r]^n R(x_1, x_2, \dots x_r),$$

wo P, Q und R ganze homogene Funktionen der Variablen $x_1, x_2, \dots x_r$ sind, bilden.

wo C und D zwei positive, von den gewählten Werten von n, p und q unabhängige und nur von θ, ω und den Koeffizienten von $F(x)$ abhängige Größen bedeuten.

Beweis. Aus der Gleichung (4.) erhält man durch Derivation inbezug auf x

$$\varrho Q(x) - P(x) = (\varrho - x)^n R(x),$$

$$\varrho Q'(x) - P'(x) = (\varrho - x)^{n-1}[(\varrho - x) R'(x) - nR(x)]$$

oder

$$P(x) Q'(x) - P'(x) Q(x)$$
$$= (\varrho - x)^{n-1}[(\varrho - x)(R'(x) Q(x) - R(x) Q'(x)) - nR(x) Q(x)].$$

Da $F(x)$ irreduktibel ist, bekommt man folglich

$$(26.) \qquad P(x) Q'(x) - P'(x) Q(x) = F^{n-1}(x) W(x),$$

wo $W(x)$ eine ganze Funktion von x wird.

Da der Grad von P und Q nicht größer als $n+m$ ist, kann der Grad γ von W nicht größer als

$$(27.) \qquad 2(m+n-1) - r(n-1) = 2m - (r-2)(n-1) \overline{\gtrless} \frac{2}{\theta}(n-1)$$

sein.

Es können nicht sämtliche Koeffizienten von $W(x)$ gleich Null sein; sonst erhielte man für alle Werte von x

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{Q'(x)}{Q(x)}$$

oder

$$P(x) = \lambda Q(x),$$

wo λ konstant wäre.

Die Gleichung

$$(\varrho - \lambda) Q(x) = (\varrho - x)^n R(x)$$

ist aber unmöglich, da $Q(x)$ nicht durch $F^n(x)$ teilbar sein kann, weil ihr Grad ja kleiner als rn ist.

Wir bemerken nun ferner, daß nicht jeder Ausdruck

$$\frac{d^a}{dx^a}P(x)\frac{d^b}{dx^b}Q(x)-\frac{d^b}{dx^b}P(x)\frac{d^a}{dx^a}Q(x),$$

in welchem jede der Zahlen a und b eine beliebige der $\gamma+2$ Zahlen

$$0,1,2,3,\ldots\gamma,\gamma+1$$

bezeichnet, gleich Null werden kann, wenn

$$x=\frac{p}{q}$$

gesetzt wird.

Sonst erhielte man nämlich aus (26.), daß immer

$$\frac{d^\mu}{dx^\mu}[F^{n-1}(x)W(x)]_{x=\frac{p}{q}}=0,$$

wo μ eine beliebige der $\gamma+1$ ganzen Zahlen

$$0,1,2,3,\ldots\gamma$$

bedeutet.

Aber dann enthielte ja $F^{n-1}(x)W(x)$ und folglich auch $W(x)$ einen Faktor $\left(x-\frac{p}{q}\right)^{\gamma+1}$, was unmöglich ist.

Wir bekommen somit zwei Gleichungen

$$\varrho\,Q^{(a)}(x)-P^{(a)}(x)=\frac{d^a}{dx^a}[(\varrho-x)^n R(x)], \tag{28.}$$

$$\varrho\,Q^{(b)}(x)-P^{(b)}(x)=\frac{d^b}{dx^b}[(\varrho-x)^n R(x)], \tag{29.}$$

wo

$$P^{(a)}\left(\frac{p}{q}\right) Q^{(b)}\left(\frac{p}{p}\right) \leqq P^{(b)}\left(\frac{p}{q}\right) Q^{(a)}\left(\frac{p}{q}\right), \tag{30.}$$

während jede der ganzen Zahlen a und b gleich oder kleiner als $\gamma + 1$ und gleich oder größer als 0 wird.

Bedeutet δ eine beliebige der Zahlen a und b, so erhält man also

$$\varrho\, Q^{(\delta)}(x) - P^{(\delta)}(x) = \frac{d^\delta}{d x^\delta}[(\varrho - x)^n R(x)]. \tag{31.}$$

Jeder Koeffizient von $P^{(\delta)}(x)$ und $Q^{(\delta)}(x)$ muß durch $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \delta$ teilbar sein.

Aus (31.) ergibt sich nun:

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \delta}\left[\varrho\, Q^{(\delta)}(x) - P^{(\delta)}(x)\right] \tag{32.}$$

$$= (-1)^n \frac{(x-\varrho)^{n-\delta}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \delta}\Big[(n)(n-1)\cdots(n-\delta+1) R(x) + \cdots +$$

$$\frac{(\delta)(\delta-1)\cdots(\delta-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k}(n)(n-1)\cdots(n-[\delta-k]+1)(x-\varrho)^k R^{(k)}(x) + \cdots$$

$$+ (x-\varrho)^\delta R^{(\delta)}(x)\Big]$$

$$= (-1)^n (x-\varrho)^{n-\delta}\Big[\frac{(n)(n-1)\cdots(n-\delta+1)}{1.2\cdots\delta} R(x) + \cdots$$

$$+ \frac{(n)(n-1)\cdots(n-[\delta-k]+1)}{1 \cdot 2 \cdots (\delta-k)}(x-\varrho)^k \frac{R^{(k)}(x)}{1 \cdot 2 \cdots k} + \cdots + (x-\varrho)^\delta \frac{R^{(\delta)}(x)}{1 \cdot 2 \cdots \delta}\Big].$$

Der absolute Wert jedes Koeffizienten von $\frac{Q^{(\delta)}}{\delta!}$ und $\frac{P^{(\delta)}}{\delta!}$ wird kleiner als

$$\frac{(m+n)(m+n-1)\cdots(m+n-\delta+1)}{1 \cdot 2 \cdots \delta} S^n < 2^{m+n} S^n < (2^r S)^n. \tag{33.}$$

Bezeichnet t die größte der Größen 1 und $|\varrho^{r-1}|$, so wird der absolute Wert jedes Koeffizienten von $R(x)$ kleiner als

$$r\,t\,T^n,$$

oder kleiner als J^n, wo z. B.

$$J = r\,t\,T.$$

Der absolute Wert jedes Koeffizienten von $\frac{R^{(k)}}{k!}$ für $k = 0, 1, 2, \ldots \delta$ wird folglich kleiner als

$$(34.)\qquad \frac{(m)(m-1)\cdots(m-k+1)}{1\cdot 2\cdots k} J^n < 2^m J^n < (2^{r-1} J)^n.$$

Aus (32.) erhält man aber

$$(35.)\qquad \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\delta}\left[\varrho\, Q^{(\delta)}\left(\frac{p}{q}\right) q^{n+m-\delta} - P^{(\delta)}\left(\frac{p}{q}\right) q^{n+m-\delta}\right]$$

$$= (-)^n (p-\varrho q)^{n-\delta}\Big[\frac{(n)(n-1)\cdots(n-\delta+1)}{1\cdot 2\cdots\delta} R\left(\frac{p}{q}\right) q^m + \cdots +$$

$$\frac{(n)(n-1)\cdots(n-[\delta-k]+1)}{1\cdot 2\cdots(\delta-k)} (p-\varrho q)^k \frac{R^{(k)}\left(\frac{p}{q}\right) q^{m-k}}{1\cdot 2\cdots k} + \cdots + (p-\varrho q)^\delta \frac{R^{(\delta)}\left(\frac{p}{q}\right) q^{m-\delta}}{1\cdot 2\cdots\delta}\Big],$$

wo

$$\left|\frac{p}{q}\right| < |\varrho| + 1 = h.$$

Der absolute Wert jeder der ganzen Zahlen

$$\frac{q^{n+m-\delta}}{1\cdot 2\cdots\delta} P^{(\delta)}\left(\frac{p}{q}\right) = A \quad \text{und} \quad \frac{q^{n+m-\delta}}{1\cdot 2\cdots\delta} Q^{(\delta)}\left(\frac{p}{q}\right) = B$$

wird kleiner als

$$(2^r S)^n q^{n+m-\delta}(1 + h + h^2 + \cdots + h^{n+m-\delta}) < (2^r S)^n (1+h)^{n+m-\delta} q^{n+m-\delta}$$

oder kleiner als

$$[(2+2h)^r S]^n q^{\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{\theta}\right)(n-1)+1} < D^{n-1} q^{\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{\theta}\right)(n-1)+1},$$

wo D eine von n, p und q unabhängige positive Größe ist.

Ferner wird der absolute Wert von

$$\frac{R^{(k)}\left(\frac{p}{q}\right) q^{m-k}}{1\cdot 2\cdots k}$$

kleiner als

$$(2^{r-1}J)^n q^{m-k}(1+h+h^2+\cdots+h^{m-k}) < (2^{r-1}J)^n (1+h)^m q^m.$$

Da $|p-\varrho q|<1$, erhalten wir somit aus (35.),

$$|\varrho B - A| < |(p-\varrho q)^{n-\delta}| (2^{r-1}J)^n (1+h)^m q^m$$
$$\times \left[1+\frac{n}{1}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-\delta-1)}{1\cdot 2\cdots \delta}\right]$$

oder

$$|\varrho B - A| < |(p-\varrho q)^{n-r-1}| (2^r J)^n (1+h)^m q^m$$

oder wegen der Bedingungen (3.) und (27.):

$$|\varrho B - A| < \left|(p-\varrho q)^{\left(1-\frac{2}{\theta}\right)(n-1)} (2^r J)^n (1+h)^{\left(\frac{r-2}{2}+\frac{1}{\theta}\right)(n-1)} q^{\left(\frac{r-2}{2}+\frac{1}{\theta}\right)(n-1)}\right|.$$

Wir können nun eine von n, p und q unabhängige positive Größe C bestimmen, so daß

$$(2^r J)^n (1+h)^{\left(\frac{r-2}{2}+\frac{1}{\theta}\right)(n-1)} < C^{n-1}.$$

Man bekommt dann endlich:

$$|\varrho B - A| < \left|\left[(\varrho q - p)^{\left(1-\frac{2}{\theta}\right)} C q^{\left(\frac{r-2}{2}+\frac{1}{\theta}\right)}\right]^{n-1}\right|.$$

Unser zweiter Hilfssatz ist somit bewiesen.

Durch diesen Satz können wir nun sehr leicht die Richtigkeit des Theorems (I.) nachweisen.

Existierten nämlich unendlich viele Paare von positiven ganzen Zahlen p und q, die der Relation (1.) genüge leisten, so könnten wir auf unendlich viele Weisen vier ganze Zahlen p_0, q_0 und p_1, q_1 finden, sodaß

$$q_1 > q_0 > 0,$$

$$q_0\varrho - p_0 = \frac{\varepsilon_0}{q_0^h}, \tag{36.}$$

$$q_1\varrho - p_1 = \frac{\varepsilon_1}{q_1^h}, \tag{37.}$$

wo h hier eine beliebig gegebene positive Größe $> \frac{r}{2}$ bedeutet, während $|\varepsilon_0|$ und $|\varepsilon_1|$ kleiner als c wären.

Wählen wir nun für θ eine beliebige positive Größe, z. B. $> r+1$, und für ω eine beliebige positive Größe $< \frac{2}{r-2}$, so können wir hier, wenn

$$n-1 > \frac{\theta}{\frac{2}{r-2} - \omega},$$

nach dem zweiten Hilfssatz und nach (36.) immer zwei ganze Zahlen A und B finden, sodaß

$$\frac{A}{B} \gtrless \frac{p_1}{q_1},$$

während

$$\varrho B - A = \frac{\varphi E^{n-1}}{q_0^{\left[\left(1-\frac{2}{\theta}\right)h - \left(\frac{r-2}{2} + \frac{1}{\theta}\right)\right](n-1)}} \tag{38.}$$

und

$$|\varphi| < 1, \qquad |B| < D^{n-1} q_0^{\left[\left(\frac{r}{2} + \frac{1}{\theta}\right)(n-1)+1\right]}, \tag{39.}$$

wo D und E zwei von n, p_0 und q_0 unabhängige und nur von den Koeffizienten von $F(x)$ und von C, h, θ und ω abhängige positive Größen bedeuten.

Wir bemerken, daß

$$\left(1-\frac{2}{\theta}\right)h > \frac{r-2}{2}+\frac{1}{\theta},$$

wenn $\theta > r+1$.

Aus (37.) und (38.) folgt ferner

$$p_1 B - q_1 A = \frac{\varphi E^{n-1} q_1}{q_0^{\left[\left(1-\frac{2}{\theta}\right)h-\left(\frac{r-2}{2}+\frac{1}{\theta}\right)\right](n-1)}} - \frac{\varepsilon_1 B}{q_1^h}.$$

Da $p_1 B \gtrless q_1 A$ ist, wird nicht

$$\left|\frac{\varphi E^{n-1} q_1}{q_0^{\left[\left(1-\frac{2}{\theta}\right)h-\left(\frac{r-2}{2}+\frac{1}{\theta}\right)\right](n-1)}}\right| < \frac{1}{2},$$

$$\left|\frac{\varepsilon_1 B}{q_1^h}\right| < \frac{1}{2}.$$

Diese Ungleichheiten müssen indessen stattfinden, wenn

$$\frac{E^{n-1} q_1}{q_0^{\left[\left(1-\frac{2}{\theta}\right)h-\left(\frac{r-2}{2}+\frac{1}{\theta}\right)\right](n-1)}} < \frac{1}{2},$$

$$\frac{C D^{n-1} q_0^{\left[\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{\theta}\right)(n-1)+1\right]}}{q_1^h} < \frac{1}{2}$$

oder wenn

$$(40.)\quad \frac{\log q_1 + \log 2}{\left[\left(1-\frac{2}{\theta}\right)h-\left(\frac{r-2}{2}+\frac{1}{\theta}\right)\right]\log q_0 - \log E} < n-1 < \frac{h\log q_1 - \log 2 C q_0}{\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{\theta}\right)\log q_0 + \log D}.$$

Da $h > \frac{r}{2}$, könnte man θ so groß gewählt haben, daß auch

$$\theta > \frac{2h^2 + h + 1}{\left(h - \frac{r}{2}\right)(h+1)}. \tag{41.}$$

Wir bekämen dann

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{2}{\theta}\right) h - \left(\frac{r-2}{2} + \frac{1}{\theta}\right)} < \frac{h}{\frac{r}{2} + \frac{1}{\theta}}. \tag{42.}$$

Hätte folglich die Relation (1.) unendlich viele Auflösungen in ganzen positiven Zahlen p und q, so könnte man zwei Auflösungen (p_0, q_0) und (p_1, q_1) finden, wo q_0 und $\frac{q_1}{q_0}$ so groß wären, daß die Differenz der Grenzen für $n-1$ in (40.) größer als 1 und die Grenzen selbst größer als jede beliebig gegebene Größe würden.

Man wäre dann imstande, ganze Zahlen n, die den Bedingungen (40.) genüge leisten, zu finden.

Hiermit ist unser Theorem (I.) bewiesen.

Nach (36.) und (37.) wird

$$C\left[\frac{q_0}{q_1^h} + \frac{q_1}{q_0^h}\right] \geqq 1,$$

wenn

$$\frac{p_0}{q_0} \gtrless \frac{p_1}{q_1}.$$

Man kann folglich eine so große positive Größe G bestimmen, daß der Relation (1.) höchstens durch ein einziges Paar von ganzen positiven Zahlen p und q genügt werden kann, wenn q größer als G sein soll.

Wir haben oben die Existenz einer oberen Grenze für die Zahlen p und q, die der Relation (1.) genüge leisten, nachgewiesen. Aber, wie man sofort sieht, gibt uns der Beweis im allgemeinen doch keine direkte Methode, eine solche Grenze zu bestimmen.

Aus Theorem (I.) folgt unmittelbar:

Theorem II. *Setzt man, wenn* ϱ *positiv ist,*

$$\varrho = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n + \cdots}}}},$$

$$\frac{P_n}{Q_n} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_{n-1}}}},$$

wo jedes a *eine positive ganze Zahl bedeutet, während* P_n *und* Q_n *relative positive Primzahlen sind, so wird der Relation*

$$(43.) \qquad a_n > Q_n^{k+\frac{r}{2}-1},$$

wo k *eine beliebig gegebene positive Größe bezeichnet, nicht durch unendlich viele ganze positive Zahlen* n *genügt.*

Theorem III. *Bezeichnet* ϱ *eine positive Wurzel einer ganzen Funktion* F *mit ganzen Koeffizienten und vom Grade* r, *während* k *und* h *zwei beliebig gegebene positive Größen bedeuten, so kann man eine so große positive Größe* G_0 *bestimmen, daß, wenn zwei positive ganze Zahlen* p_0 *und* q_0 *existieren, wo*

$$q_0 > G_0,$$

während

$$0 < |\varrho q_0 - p_0| < \frac{1}{q_0^{\frac{r}{2}+k}},$$

daß man dann eine so große positive Größe G *definieren kann, daß sich nicht zwei positive ganze Zahlen* p *und* q *finden, wo*

$$q > G$$

und

$$0<|\varrho q-p|<\frac{1}{q^{\frac{r}{2(k+1)}+h}}.$$

Beweis. Hätten wir nämlich

$$\varrho q_0-p_0=\frac{\varepsilon_0}{q_0^{\frac{r}{2}+k}},$$

$$\varrho q-p=\frac{\varepsilon}{q^{\frac{r}{2(k+1)}+h}},$$

wo

$$0<|\varepsilon_0|<1 \text{ und } 0<|\varepsilon|<1,$$

so bekommt man nach dem zweiten Hilfsatz zwei ganze Zahlen A und B, für die

$$Aq \gtrless Bp,$$

$$\varrho B-A=\frac{\varphi C^{n-1}}{q_0^{\left[\left(1-\frac{2}{\theta}\right)\left(\frac{r}{2}+k\right)-\left(\frac{r-2}{2}+\frac{1}{\theta}\right)\right](n-1)}},$$

$$|B|<D^{n-1}q_0^{\left[\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{\theta}\right)(n-1)+1\right]},$$

wo $|\varphi|<1$, während C, D, n, θ die früheren Bedeutungen haben. $\theta>r+1$.

Da $|pB-qA|\geqq 1$, darf hier nicht sein

$$\frac{D^{n-1}q_0^{\left[\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{\theta}\right)(n-1)+1\right]}}{q^{\frac{r}{2(k+1)}+h}}<\frac{1}{2},$$

$$\frac{C^{n-1}q}{q_0^{\left[\left(1-\frac{2}{\theta}\right)\left(\frac{r}{2}+k\right)-\left(\frac{r-2}{2}+\frac{1}{\theta}\right)\right](n-1)}}<\frac{1}{2}$$

oder

$$(44.)\quad \frac{\log q+\log 2}{\left[\left(1-\frac{2}{\theta}\right)\left(\frac{r}{2}+k\right)-\left(\frac{r-2}{2}+\frac{1}{\theta}\right)\right]\log q_0-\log C}$$

$$<n-1<\frac{\left(\frac{r}{2(k+1)}+h\right)\log q-\log 2q_0}{\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{\theta}\right)\log q_0+\log D}.$$

Wenn nun θ auch so groß gewählt wird, daß

$$\theta>\frac{(r+2k+1)\left(\frac{r}{2(k+1)}+h\right)+1}{h(k+1)},$$

so wird

$$\frac{1}{\left(1-\frac{2}{\theta}\right)\left(\frac{r}{2}+k\right)-\left(\frac{r-2}{2}+\frac{1}{\theta}\right)}<\frac{\frac{r}{2(k+1)}+h}{\frac{r}{2}+\frac{1}{\theta}}.$$

Wir könnten dann folglich, wenn unser Theorem III. nicht richtig wäre, Zahlen p_0, q_0, p, q und n finden, die den unmöglichen Relationen (44.) Genüge leisten.

Man beachte den Fall

$$\frac{r}{2}+k=r-1,$$

$$\frac{r}{2(k+1)}+h=1+h.$$

Theorem IV. *Die Gleichung*

$$U(p,q)=c,$$

wo c eine gegebene Konstante ist, während U eine in bezug auf p und q ganze homogene und irreduktible Funktion mit ganzen Koeffizienten bedeutet, besitzt nicht unendlich viele Auflösungen in ganzen positiven Zahlen p und q, wenn der Grad von U größer als 2 ist.

Sind die Wurzeln einer beliebigen ganzen Funktion $F(x)$ von x mit ganzen Koeffizienten und vom Grade r sämtlich verschieden, dann wollen wir allgemeiner beweisen, daß die Relation

$$(45.) \qquad 0 < \left| q^r F\left(\frac{p}{q}\right) \right| < c q^h,$$

wo c eine gegebene positive und h eine gegebene reelle Größe bedeuten, nur eine endliche Anzahl Auflösungen in ganzen von Null verschiedenen Zahlen p und q haben kann, wenn

$$h < \frac{r-2}{2} \quad \text{und} \quad q > 0$$

sind.

Setzen wir nämlich

$$F(x) = a(x-\varrho_1)(x-\varrho_2)\cdots(x-\varrho_r)$$

oder nach (45.)

$$|a(p-q\varrho_1)(p-q\varrho_2)\cdots(p-q\varrho_r)| < c q^h,$$

so sieht man, daß der Modulus einer der Faktoren $p-q\varrho_s$, den man mit $p-q\varrho$ bezeichnen kann, kleiner als [illegible]

$$c^{\frac{1}{r}} q^{\frac{h}{r}}$$

sein muß.

Da nun die Differenz zwischen $p-q\varrho$ und einem der anderen Faktoren $p-q\varrho_a$ gleich $q(\varrho_a-\varrho)$ ist, wo mod $q(\varrho_a-\varrho) > bq$ wird, wo

b eine von Null verschiedene und von α unabhängige positive Größe bedeutet, bekommt man folglich

$$\operatorname{mod}(p - q\varrho_\alpha) > bq - c^{\frac{1}{r}} q^{\frac{h}{r}} > dq,$$

wo d eine positive Größe bezeichnet.

Wir bekommen somit

$$\operatorname{mod}(p - q\varrho) < \frac{cq^h}{|a|\, d^{r-1} q^{r-1}} < \frac{f}{q^{\frac{r}{2}+k}},$$

wo f und k gegebene positive Größen bedeuten*).

Könnten hier $|p|$ und q größer als jede beliebige positive Größe werden, so müßte ϱ reell sein und man bekäme

$$|p - q\varrho| < \frac{f}{q^{\frac{r}{2}+k}},$$

was nach Theorem I. unmöglich ist.

---

*) Vergleiche den Beweis von *Liouville* für die Existenz transzendenter Größen; Journ. de Math. t. XVI, 1851.