Studien über die *Bernoulli*schen und *Euler*schen Zahlen.

(Von Herrn *J. Worpitzky.*)

Diejenigen Notizen über die Vorgeschichte des hier zu behandelnden Gegenstandes, welche ich voranschicke, beanspruchen keineswegs das Prädicat der Vollständigkeit. Sie dürften jedoch manchem Leser aus dem Grunde erwünscht sein, weil es bei der Zerstreutheit der einschlägigen Arbeiten viel Zeit und Mühe erfordert, das Material zusammenzutragen, ohne einige Sicherheit, Wesentliches nicht übersehen zu haben.

Es war *Jacob Bernoulli* in seiner „Ars conjectandi, Basileae. 1713" bei der Summation gleich hoher Potenzen der natürlichen Zahlen auf gewisse Zahlen aufmerksam geworden, für welche zuerst *Moivre* in seinen „Miscellanea analytica. 1730" eine Form des Recursionsgesetzes fand, und deren allgemeinere Bedeutsamkeit *Euler* in seinen „Institutiones calculi differentialis. 1755" dadurch ins Licht stellte, dass er einfache Beziehungen zu ihnen in anderen analytischen Gebilden klarlegte, z. B. in den Ausdrücken für $\underset{z=0}{D^{2r-1}}\operatorname{tng} z$. — Die Werthe des letztgenannten Differentialquotienten für die verschiedenen r hat man sich in neuerer Zeit gewöhnt „*Euler*sche Zahlen" zu nennen, während man nach dem Vorgange von *Euler* die Benennung „*Bernoulli*sche Zahlen" für die von *J. Bernoulli* entdeckten beibehält. Ich werde mir erlauben, im Anschluss an die Bezeichnung in meinem Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung, ausser den $\underset{z=0}{D^{2r-1}}\operatorname{tng} z = u_{2r}$ auch die $\underset{z=0}{D^{2r}}\sec z = u_{2r+1}$ als *Euler*sche Zahlen zu benennen, weil sie einerseits ebenfalls bei *Euler* vorkommen und andererseits mit jenen in enger Beziehung stehen, so wie sehr ähnlichen Relationen genügen, wie jene.

Die Werthe der 31 ersten *Bernoulli*schen Zahlen hat *Ohm* im 20. Bande dieses Journals, S. 11, aus den Rechnungen *Eulers* und *Rothes* zusammengestellt, diejenigen der 62 ersten *Bernoulli*schen Zahlen theilt *Adams* Bd. 85, p. 269 ff. mit. Die Anzahl der Recursionsformeln zu deren Berechnung ist allmählich stark angewachsen, da die meisten Relationen, in denen *Bernoulli*sche Zahlen auftreten, Anlass zur Vermehrung derselben bieten; neuerdings noch liegen Publicationen dieser Art von *Seidel, Radicke* und *Lucas* vor. — Meine Absicht ist nicht auf dasselbe Ziel gerichtet, sondern auf die Ableitung von independenten Ausdrücken für die *Bernoulli*schen und *Euler*schen Zahlen, indem ich darunter solche Ausdrücke verstehe, welche jene Zahlen vermittelst der Operationen der gemeinen Rechnungsarten völlig darstellen, ohne hinterher noch die Auflösung von Gleichungen oder Determinanten zu verlangen. Es werden sich dabei nebenher auch Recursionsformeln ergeben; sollten neue unter ihnen vorkommen, so lege ich darauf kein Gewicht, sondern nur auf ihren Zusammenhang mit anderen Relationen, aus denen sie gerade entspringen. Wo mir ihr erster Entdecker bekannt ist, werde ich ihn angeben.

Die erste in obigem Sinne independente Formel scheint von *Laplace* gefunden zu sein (vergl. *Lacroix:* Traité des différences, Paris. 1800, p. 106), nämlich die Formel (75.) dieser Abhandlung. *Lacroix* leitet sie aus der Theorie der Differenzen ab; *Grunert* (Mathematische Abhandlungen, Altona. 1822, S. 69—93) reproducirt sie mit veränderter Ableitung, desgleichen der vierte Band des *Klügel*schen Wörterbuchs (S. 608), wo aber der Beweis vermittelst divergenter Reihen geführt wird. Dann bringt *Scherk* sie wieder in Erinnerung in seiner Abhandlung „Über einen allgemeinen, die *Bernoulli*schen Zahlen und die Coefficienten der Secantenreihe zugleich darstellenden Ausdruck" vom Jahre 1829 (dieses Journal, Bd. 4, S. 299—304) und leitet die hier unter (88.) und (83.) für u_{2r} und u_{2r+1} aufgeführten Formeln ab, nachdem er bereits vier Jahre früher (Mathematische Abhandlungen. Berlin. 1825) die Secantencoefficienten u_{2r+1} independent dargestellt hatte. Einen anderen Beweis für die *Scherk*schen Formeln giebt 1846 *Schlömilch,* dieses Journ., Bd. 32, S. 360. Ferner sind mir noch bekannt geworden einige sehr complicirte independente Formeln für die *Bernoulli*schen Zahlen, welche *Eisenlohr* auf dem Wege der Induction gefunden hat (dieses Journ., 1844, Bd. 28, S. 193—212: Entwickelung der Functionsweise der *Bernoulli*schen Zahlen.) Sie gehören zur Gattung derjenigen Ausdrücke, welche sich aus den nachfolgenden beiden Formen (10.) und (16.) der *Bernoulli*schen Functionen in unbeschränkter Anzahl bilden lassen.

Von dieser Zeit an tritt ein neuer Gesichtspunkt für die Behandlung unseres Gegenstandes auf, indem *Raabe* diejenige einfachste algebraische Function, welche bei den ganzzahligen Werthen der Variabeln in die *Bernoulli*sche Summenformel übergeht, einer eingehenden Untersuchung unterwirft (Die *Jacob-Bernoulli*sche Function. Zürich. 1848.) und die gewonnenen Resultate in einer zweiten Abhandlung (Zurückführung einiger Summen und bestimmten Integrale auf die *Jacob-Bernoulli*sche Function. 1851. Dieses Journal, Bd. 42, S. 348—376.) wesentlich ergänzt. Hierauf stellte *Schlömilch* (im 1. Bande der Zeitschrift für Math. und Physik. 1856. S. 193) die *Bernoulli*schen Functionen als Specialwerthe von Differentialquotienten dar — bei uns die Formeln (27.) und (28.) — und leitete die wichtigsten Resultate der Untersuchungen *Raabe*s mit höchster Eleganz aus diesen Ausdrücken ab. Auf die Ausdrücke für u_{2r} und u_{2r+1} von *Laplace* und *Scherk* kommt er aber dabei nicht zurück.

Seitdem hat die Literatur über die *Bernoulli*schen und *Euler*schen Zahlen, abgesehen von neuen Recursionsformeln und von Beziehungen zahlentheoretischen Charakters, meines Wissens keine wesentliche Bereicherung erfahren.

Wenn ich nun einen so vielfach behandelten Stoff wieder in die Hand nehme, so brauche ich mich wohl nicht zu entschuldigen, dass ich manches nicht Neue von neuem vorführe, dagegen anderes unerwähnt lasse, was nicht übergangen werden dürfte, wenn es sich um eine Generalbearbeitung unseres Gegenstandes handelte. Das Erstere wird jeder Leser, dem das Thema von vorneherein weniger nahe liegt, verlangen, um im Zusammenhange erhalten zu bleiben; auch ist es häufig grade der Zusammenhang zwischen den Einzelresultaten, auf den ich das Gewicht lege. Auf manches hier Uebergangene gedenke ich a. a. O. zurückzukommen.

1. Der Gedanke, von welchem sich *Raabe* bei der Creirung der *Bernoulli*schen Functionen leiten liess, ist — wie gesagt — dieser: die einfachste algebraische Function zu discutiren, welche für die ganzen positiven Argumente in eine Summe gleich hoher Potenzen der ganzen Zahlen nach ihrer natürlichen Folge übergeht.

Als Vorarbeit hierfür fand er vor die Erweiterung der *Bernoulli*schen Summationsformel auf die Summe der m^{ten} Potenzen der Glieder einer arithmetischen Reihe mit der beliebigen Differenz h, welche auf Seite 70 des Traité des différences von *Lacroix* — unter Kürzung der Schreibweise — so lautet:

$$\Sigma x^m =$$
$$\frac{1}{(m+1)h}\left\{x^{m+1}-\tfrac{1}{2}(m+1)h.x^m+\binom{m+1}{2}\cdot B_1.h^2.x^{m-1}-\binom{m+1}{4}\cdot B_2.h^4.x^{m-3}+\cdots\right\}+\text{const.}$$

Es lag ihm somit ob, diese Formel unter der Substitution von $h=1$ so zu behandeln, wie man vom unbestimmten Integral zum bestimmten übergeht, und dabei die untere Grenze zweckmässig auszuwählen.

Er that dies so, dass die Function*)

$$(1.)\qquad \mathfrak{B}(x,n) = x^n-\tfrac{1}{2}n.x^{n-1}+\binom{n}{2}\cdot B_1.x^{n-2}-\binom{n}{4}\cdot B_2.x^{n-4}+\binom{n}{6}\cdot B_3.x^{n-6}-\cdots$$

für $x=0$ verschwindet, indem er die Bestimmung traf, dass das letzte Glied dieses Ausdrucks dasjenige sein soll, welches entweder x^1 oder x^2 enthält.

Die *Bernoulli*schen Zahlen B_1, B_2, B_3, ... bezeichnet *Raabe* ebenso, wie es in (1.) geschehen ist, schreibt aber $B'(x)$ oder $B''(x)$ für unser $\mathfrak{B}(x,n):n$, je nachdem n einen graden oder ungraden Werth hat **). *Schlömilch* schreibt***) $\varphi(x,n)$ für unser $\mathfrak{B}(x,n)$, worin ich hier nicht folge, um φ als allgemeines Functionszeichen frei zu behalten, und zugleich, um durch das Zeichen $\mathfrak{B}$ an die Bedeutung der Function zu erinnern.

Die Form (1.) der Function $\mathfrak{B}(x,n)$ soll die *Raabesche Form* der *Bernoulli*schen Functionen heissen, trotz der aus praktischen Gründen (zuerst von *Schlömilch*) vorgenommenen Abänderung.

Sie setzt voraus, dass man ausserdem ein Mittel kenne, die *Bernoulli*schen Zahlen B_r zu berechnen, etwa die Recursionsformel:

$$(2.)\qquad \binom{2r+1}{1}\cdot B_r-\binom{2r+1}{3}\cdot B_{r-1}+\binom{2r+1}{5}\cdot B_{r-2}-\cdots$$
$$\cdots+(-1)^{r-1}\cdot\binom{2r+1}{2r-1}\cdot B_1+(-1)^r\cdot\frac{2r-1}{2} = 0,$$

durch welche das Bildungsgesetz der B_r von *Moivre*†) zuerst fixirt worden ist.

*) Zwei Jahre früher (1846) hat *Arndt* (Bd. 31 dieses Journals, S. 249: Entwickelung der Summe der n^{ten} Potenzen der natürlichen Zahlen nach den Potenzen des Index vermittelst des *Taylor*schen Satzes.) diese Function ebenfalls dargestellt aber nicht discutirt.

**) Vergl.: *Raabe*, „Die *Jacob-Bernoulli*sche Function. Zürich. 1848". und die Abhandlung vom Jahre 1851, dieses Journal Bd. 42, S. 348—367.

***) Zeitschrift für Math. und Phys. 1856. Bd. I, S. 193, und in seinem Compendium der höheren Analysis.

†) *Moivre.* Miscellanea analytica. 1730.

Die oben citirte *Lacroix*sche Formel für Σx^m lässt sich nun als eine bestimmte Summenformel so schreiben:

$$(3.)\qquad \sum_{z=x}^{z=x+r-1} z^{n-1} = \frac{1}{n}\cdot\{\mathfrak{B}(x+r,n)-\mathfrak{B}(x,n)\}$$

und ergiebt für $x = 0$:

$$(4.)\qquad 0^{n-1}+1^{n-1}+2^{n-1}+3^{n-1}+\cdots+(r-1)^{n-1} = \frac{1}{n}\cdot\mathfrak{B}(r,n)$$

in Uebereinstimmung mit der *Bernoulli*schen Summationsformel*).

Den ursprünglichen Weg der Ableitung obiger Formeln vermittelst der Summation von Differenzenreihen wollen wir hier nicht nachgehen, da er wenig Anlass zu neuen Bemerkungen bietet.

Die mit jenen Hülfsmitteln gewonnenen Resultate werden im Folgenden nirgendwo als Grundlage der Deduction dienen. Die Aufzählung der Formeln (1.) bis (4.) konnte aber nicht umgangen werden, um den Gegenstand der folgenden Untersuchungen und ihrer Resultate mit den früheren gehörig zu identificiren.

2. Die *Raabe*sche Form der *Bernoulli*schen Functionen $\mathfrak{B}(x,n)$ verdankt ihre Entstehung im Grunde der Entwickelung von Σx^m in eine Potenzreihe unter Anwendung des binomischen Satzes.

Man kann auf einem ebenfalls ganz elementaren Wege noch andere Formen dadurch gewinnen, dass man x^n durch solche algebraische Functionen ausdrückt, welche sich leicht summiren lassen, sobald x die Reihe x, $x+1$, $x+2$, $x+3$, ... durchläuft; z. B. durch Tieffunctionen, welche im oberen Index den Summanden x haben.

Wir wollen einige Ausdrücke dieser Art näher betrachten.

Zunächst is es klar, dass die n Constanten $\overset{n}{\alpha}_1, \overset{n}{\alpha}_2, \overset{n}{\alpha}_3, \ldots, \overset{n}{\alpha}_n$ in geeigneter Weise bestimmt werden können, damit die Gleichung

$$(5.)\qquad x^n = \overset{n}{\alpha}_1\cdot\binom{x}{n}+\overset{n}{\alpha}_2\cdot\binom{x+1}{n}+\overset{n}{\alpha}_3\cdot\binom{x+2}{n}+\cdots+\overset{n}{\alpha}_n\cdot\binom{x+n-1}{n}$$

für jedes x gelte. Denn da beide Seiten dieser Gleichung durch x ohne Rest dividirt werden können, so enthält die Gleichung (5.), nach Potenzen von x geordnet, n Coefficienten, welche sämmtlich $= 0$ sein müssen. Diese Bedingung ergiebt für die Bestimmung der n Zahlen $\overset{n}{\alpha}_r$ genau eben so viele simultane, einander nicht widersprechende und von einander unabhängige Gleichungen.

*) *Jacob Bernoulli.* Ars conjectandi. Basileae. 1713.

Da die letzteren linear sind, so folgt ferner, dass die Transformation (5.) nur auf *eine* Weise bewirkt werden kann. Und diese Erkenntniss führt zu dem Schluss, dass

$$(6.)\qquad \overset{n}{\alpha}_r = \overset{n}{\alpha}_{n+1-r}$$

sein muss, weil die Formel (5.) ihre ursprüngliche Gestalt mit blosser Vertauschung der hier als gleich bezeichneten Coefficienten wieder annimmt, wenn man in ihr x durch $(-x)$ ersetzt und sie dann durch $(-1)^n$ dividirt.

Giebt man dem x die Werthe $1, 2, 3, \ldots, n$ oder die Werthe $-1, -2, -3, \ldots, -n$ und berechnet aus dem resultirenden Gleichungssystem die Constanten $\overset{n}{\alpha}_r$, so folgt ohne welche Schwierigkeit*):

$$(7.)\qquad \overset{n}{\alpha}_r = r^n - \binom{n+1}{1}\cdot(r-1)^n + \binom{n+1}{2}\cdot(r-2)^n - \cdots + (-1)^{r-1}\cdot\binom{n+1}{r-1}\cdot 1^n;$$

denn wenn man die rechte Seite dieser Gleichung aus (5.) darstellt, so erhält in dem gewonnenen Ausdruck $\overset{n}{\alpha}_{r-k}$ den Coefficienten

$$\binom{n+k}{n} - \binom{n+k-1}{n}\cdot\binom{n+1}{1} + \binom{n+k-2}{n}\cdot\binom{n+1}{2} - \cdots + (-1)^k\cdot\binom{n}{n}\cdot\binom{n+1}{k}$$

$$= (-1)^k\cdot\left\{\binom{-n-1}{k} + \binom{-n-1}{k-1}\cdot\binom{n+1}{1} + \binom{-n-1}{k-2}\cdot\binom{n+1}{2} + \cdots + \binom{-n-1}{0}\cdot\binom{n+1}{k}\right\}$$

$$= (-1)^k\cdot\binom{0}{k},$$

welcher für $k = 0$ den Werth $+1$ hat, sonst aber verschwindet.

Zum Zwecke einer anderweitigen Verification der Gleichung (6.) mag noch erwähnt werden, dass aus (7.) die Differenz $[\overset{n}{\alpha}_r - \overset{n}{\alpha}_{n+1-r}]$ als das

---

*) Die in (7.) dargestellten Zahlen $\overset{n}{\alpha}_r$ kommen bereits bei *Euler* (Instit. calc. diff. II. 1755.), *Laplace* und *Lacroix* (Traité des différences.) in Verbindung mit den *Bernoulli*schen Zahlen vor, dsgl. später bei *Grunert* (Mathem. Abhandlungen. Altona. 1822, Supplemente zu *Klügels* Wörterbuch. 1833.), ferner bei *Scherk* (Ueber einen allgemeinen, die *Bernoulli*schen Zahlen und die Coefficienten der Secantenreihe zugleich darstellenden Ausdruck. 1829. Dieses Journ. Bd. 4, S. 299.). Jedoch ist der Zusammenhang von dem obigen völlig verschieden, da jene Autoren die Gleichung (5.) nicht haben, welche bisher überhaupt noch nicht beachtet zu sein scheint. Daher weicht denn bei ihnen der Beweis der wichtigen Gleichung (6.) von dem obigen ab, da er entweder aus dem Ausdruck (7.) durch Umformung abgezogen wird oder aus der Entwickelung von $\frac{p-1}{p-e^u}$ nach u. — U. a. widmet *Scherk* dem Beweise der Gleichung (6.) auf letztgedachter Grundlage eine umfangreiche Anmerkung auf S. 302 im 4. Bande dieses Journals.

bekanntlich verschwindende allgemeine Glied der $(n+1)^{\text{ten}}$ Differenzenreihe der arithmetischen Reihe n^{ter} Ordnung $\ldots, (-2)^n, (-1)^n, 0^n, 1^n, 2^n, \ldots$ erkannt wird.

Die Formel (7.) weist $\overset{n}{\alpha}_r$ als eine ganze Zahl aus. Dass deren Werth ein positiver sei, ergiebt sich am augenfälligsten aus der Recursionsformel

$$(8.)\qquad \overset{n}{\alpha}_r = r.\overset{n-1}{\alpha}_r+(n+1-r).\overset{n-1}{\alpha}_{r-1}.$$

Dieselbe entspringt aus (5.), wenn man diese Gleichung nach der Erniedrigung von n um 1 links mit x, rechts aber gliederweise bezüglich mit

$(x-n+1)+(n-1)$, $(x-n+2)+(n-2)$, $(x-n+3)+(n-3)$, $\ldots$, $(x-1)+1$

multiplicirt und dann das Resultat so zusammenzieht, dass die Form (5.) von neuem hervorgeht.

Bildet man endlich aus (5.) den Ausdruck für Σx^n unter Berücksichtigung der Formel

$$\binom{x}{n}+\binom{x+1}{n}+\binom{x+2}{n}+\cdots+\binom{x+r-1}{n} = \binom{x+r}{n+1}-\binom{x}{n+1},$$

so erhält man:

$$(9.)\qquad x^n+(x+1)^n+(x+2)^n+\cdots+(x+r-1)^n = \frac{1}{n+1}\cdot\{\mathfrak{B}(x+r,n+1)-\mathfrak{B}(x,n+1)\},$$

wobei

$$(10.)\qquad \mathfrak{B}(x,n) = n\cdot\left\{\overset{n-1}{\alpha}_1\cdot\binom{x}{n}+\overset{n-1}{\alpha}_2\cdot\binom{x+1}{n}+\overset{n-1}{\alpha}_3\cdot\binom{x+2}{n}+\cdots+\overset{n-1}{\alpha}_{n-1}\cdot\binom{x+n-2}{n}\right\}$$

gesetzt ist.

Dies ist eine *zweite Form der Bernoullischen Functionen.*

Denn die in (10.) aufgestellte Function verschwindet für $x=0$, wie die *Raabe*sche (1.), hat den n^{ten} Grad, wie jene, und besitzt mit ihr mehr gleiche Werthe, als der Grad n anzeigt, da sie nach (9.) auch die Relation (4.) für *jeden* ganzen positiven Werth von r erfüllt.

3. Ein zweiter Ausdruck für x^n von der anfangs des vorigen Abschnitts charakterisirten Art ist der folgende*):

$$(11.)\qquad x^n = \overset{n}{a}_1\cdot\binom{x}{1}+\overset{n}{a}_2\cdot\binom{x}{2}+\overset{n}{a}_3\cdot\binom{x}{3}+\cdots+\overset{n}{a}_n\cdot\binom{x}{n}.$$

Dass die Constanten a dieser Relation gemäss bestimmt werden können,

---

*) Er findet sich bereits bei *Cauchy,* Résumés analytiques. Turin. 1833. pag. 35, der ihn auch benutzt, um Σr^n durch die Zahlen $\overset{n}{a}_r$ darzustellen.

lässt sich vermittelst derselben Erwägung, wie dort bezüglich der α, a priori feststellen. Man kann aber auch die dortige Gleichung (5.) zur Herleitung von (11.) benutzen, indem man aus der Formel

$$\binom{x+r}{n} = \binom{x}{n}+\binom{x}{n-1}\cdot\binom{r}{1}+\binom{x}{n-2}\cdot\binom{r}{2}+\cdots+\binom{x}{n-r}\cdot\binom{r}{r}$$

substituirt.

Setzt man in (11.) für x der Reihe nach die Werthe 1, 2, 3, ..., n und berechnet die Zahlen $\overset{n}{a}_r$ aus dem resultirenden Gleichungssystem, so findet man durch ein Verfahren, welches dem im vorigen Abschnitt an der entsprechenden Stelle ausführlich besprochenen ganz analog ist:

$$(12.)\qquad \overset{n}{a}_r = r^n-\binom{r}{1}\cdot(r-1)^n+\binom{r}{2}\cdot(r-2)^n-\cdots+(-1)^{r-1}\cdot\binom{r}{r-1}\cdot 1^n,$$

und*):

$$(13.)\qquad \overset{n}{a}_r = r.(\overset{n-1}{a}_r+\overset{n-1}{a}_{r-1}).$$

Aus (12.) wird $\overset{n}{a}_r$ als das erste Glied der r^{ten} Differenzenreihe der arithmetischen Reihe n^{ter} Ordnung 0^n, 1^n, 2^n, 3^n, ... erkannt; auch zeigen die Formeln (12.) und (13.), dass die $\overset{n}{a}_r$ sämmtlich ganze positive Zahlen sind.

Die oben erwähnte Ableitung von (11.) aus (5.) setzt die Zahlen α und a ohne eine nennenswerthe Rechnung in die folgenden Beziehungen zu einander:

$$(14.)\qquad \overset{n}{a}_r = \binom{n-1}{r-1}\cdot\overset{n}{\alpha}_1+\binom{n-2}{r-2}\cdot\overset{n}{\alpha}_2+\binom{n-3}{r-3}\cdot\overset{n}{\alpha}_3+\cdots+\binom{n-r}{0}\cdot\overset{n}{\alpha}_r,$$

$$(15.)\qquad \overset{n}{\alpha}_r = \overset{n}{a}_r-\binom{n-r+1}{1}\cdot\overset{n}{a}_{r-1}+\binom{n-r+2}{2}\cdot\overset{n}{a}_{r-2}-\cdots+(-1)^{r-1}\cdot\binom{n-1}{r-1}\cdot\overset{n}{a}_1.$$

Bildet man aus (11.) den Ausdruck für Σx^n, so ergiebt sich die Formel (9.), falls man

$$(16.)\qquad \mathfrak{B}(x,n) = n\cdot\left\{\overset{n-1}{a}_1\cdot\binom{x}{2}+\overset{n-1}{a}_2\cdot\binom{x}{3}+\overset{n-1}{a}_3\cdot\binom{x}{4}+\cdots+\overset{n-1}{a}_{n-1}\cdot\binom{x}{n}\right\}$$

setzt.

Dies ist eine *dritte Form der Bernoullischen Functionen.*

Um keinen Zweifel über die Richtigkeit dieser Behauptung bestehen zu lassen, braucht man die Erörterungen über (10.) nur wörtlich zu wiederholen.

---

*) Die Formel (13.) findet sich auch bei *Grunert:* Mathem. Abhandlungen. Ebendaselbst ist eine Tafel der $\overset{n}{a}_r$ berechnet.

Man kann ferner die Formeln dieses Abschnittes noch vereinfachen, wenn man die Bezeichnungen einführt:

$$(17.)\qquad r!\binom{x}{r} = x(x-1)(x-2)\dots(x+1-r) = x_r,$$

$$(18.)\qquad \overset{n}{a}_r = r!\,\overset{n}{\mathfrak{a}}_r,$$

wobei auch die Zahlen $\overset{n}{\mathfrak{a}}_r$, der aus (13.) folgenden Recursionsformel

$$(19.)\qquad \overset{n}{\mathfrak{a}}_r = r.\overset{n-1}{\mathfrak{a}}_r + \overset{n-1}{\mathfrak{a}}_{r-1}$$

gemäss, ganz und positiv sind.

Vermittelst derselben stellen sich (11.) und (16.) so dar:

$$(20.)\qquad x^n = \overset{n}{\mathfrak{a}}_1.x_1 + \overset{n}{\mathfrak{a}}_2.x_2 + \overset{n}{\mathfrak{a}}_3.x_3 + \dots + \overset{n}{\mathfrak{a}}_n.x_n,$$

$$(21.)\qquad \mathfrak{B}(x,n) = n\cdot\left\{\tfrac{1}{2}\overset{n-1}{\mathfrak{a}}_1.x_2 + \tfrac{1}{3}\overset{n-1}{\mathfrak{a}}_2.x_3 + \tfrac{1}{4}\overset{n-1}{\mathfrak{a}}_3.x_4 + \dots + \frac{1}{n}\overset{n-1}{\mathfrak{a}}_{n-1}.x_n\right\}.$$

Während die Formel (5.) durch die Substitution von $(-x)$ für x mit nachfolgender Division durch $(-1)^n$ zu keiner neuen Darstellung von x^n führt (dabei aber die Relation (6.) zwischen den Coefficienten liefert), entsteht auf diese Weise aus (11.) oder (20.):

$$(22.)\qquad x^n$$
$$= \overset{n}{\mathfrak{a}}_n.(x+n-1)_n - \overset{n}{\mathfrak{a}}_{n-1}.(x+n-2)_{n-1} + \overset{n}{\mathfrak{a}}_{n-2}.(x+n-3)_{n-2} - \dots + (-1)^{n-1}.\overset{n}{\mathfrak{a}}_1.x_1;$$

woraus als *vierte Form der Bernoullischen Functionen* erhalten wird:

$$(23.)\qquad \mathfrak{B}(x,n)$$
$$= n\cdot\left\{\frac{1}{n}\overset{n-1}{\mathfrak{a}}_{n-1}.(x+n-2)_n - \frac{1}{n-1}\overset{n-1}{\mathfrak{a}}_{n-2}.(x+n-3)_{n-1} + \dots + (-1)^n\cdot\tfrac{1}{2}\overset{n-1}{\mathfrak{a}}_1.x_2\right\}.$$

Es bedarf keiner besonderen Erörterung, dass die Anzahl von Ausdrücken für x^n und $\mathfrak{B}(x,n)$ auf dem anfangs des vorigen Abschnitts beschriebenen Wege sich ganz nach Belieben vermehren lässt, u. a. schon dadurch, dass man den Reichthum der Relationen zwischen den Tieffunctionen zur Substitution in den bereits gewonnenen Formeln ausnutzt. Dabei werden die verschiedenen Formen von x^n mehr oder minder wichtige Relationen zwischen den (vorher in entwickelter Gestalt bekannten) Coefficienten ergeben, wenn man in ihnen besondere Werthe von x substituirt; während diejenigen für $\mathfrak{B}(x,n)$ zu neuen Darstellungen der *Bernoulli*schen und *Euler*schen Zahlen führen, da die letzteren bekanntlich durch gewisse Specialwerthe von $\mathfrak{B}(x, n)$ und $\mathfrak{B}'(x, n)$ ausgedrückt werden können *).

Wir wollen hier nur noch zwei Formeln aufführen, deren Coefficienten sich sehr einfach durch die $\overset{n}{a}_r$ ausdrücken, und deren Ableitung aus den obigen auf der Hand liegt, nämlich:

$$(24.)\quad \begin{cases} x^n = \overset{n+1}{a}_1\cdot\binom{x-1}{0}+\frac{1}{2}\overset{n+1}{a}_2\cdot\binom{x-1}{1}+\frac{1}{3}\overset{n+1}{a}_3\cdot\binom{x-1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}\overset{n+1}{a}_{n+1}\cdot\binom{x-1}{n} \\ \quad = \overset{n+1}{\mathfrak{a}}_1\cdot(x-1)_0+\overset{n+1}{\mathfrak{a}}_2\cdot(x-1)_1+\overset{n+1}{\mathfrak{a}}_3\cdot(x-1)_2+\cdots+\overset{n+1}{\mathfrak{a}}_{n+1}\cdot(x-1)_n \end{cases}$$

und

$$(25.)\quad \begin{cases} \mathfrak{B}(x, n) = n\cdot\left\{\overset{n}{a}_1\cdot\binom{x-1}{1}+\frac{1}{2}\overset{n}{a}_2\cdot\binom{x-1}{2}+\frac{1}{3}\overset{n}{a}_3\cdot\binom{x-1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\overset{n}{a}_n\cdot\binom{x-1}{n}\right\} \\ \quad = n\cdot\left\{\overset{n}{\mathfrak{a}}_1\cdot(x-1)_1+\frac{1}{2}\overset{n}{\mathfrak{a}}_2\cdot(x-1)_2+\frac{1}{3}\overset{n}{\mathfrak{a}}_3\cdot(x-1)_3+\cdots+\frac{1}{n}\overset{n}{\mathfrak{a}}_n\cdot(x-1)_n\right\}. \end{cases}$$

4. Die ausgiebigsten Hülfsmittel für die Untersuchung der *Bernoulli*schen Functionen entspringen aus der Darstellung von x^n in der Form:

$$x^n = \underset{z=0}{D^n}\, e^{xz}.$$

Aus ihr ergiebt sich:

$$(26.)\quad \sum_{z=x}^{z=x+r-1} z^{n-1} = \underset{z=0}{D^{n-1}}\,\frac{e^{(x+r)z}-e^{xz}}{e^z-1} = \frac{1}{n}\cdot\{\mathfrak{B}(x+r,\ n)-\mathfrak{B}(x,\ n)\},$$

wenn man mit *Schlömilch*

$$(27.)\quad \mathfrak{B}(x,\ n) = n.\underset{z=0}{D^{n-1}}\,\frac{e^{xz}-1}{e^z-1}$$

setzt.

Die Identität dieser Function $\mathfrak{B}(x, n)$ mit der *Bernoulli*schen erhellt auf der Stelle, wenn man in Erwägung zieht, dass sie nach (27.) für $x = 0$ ebenfalls verschwindet, daher nach (26.) die Relation (4.) für jedes ganze positive r erfüllt und, wie wir sogleich erkennen werden, eine ganze algebraische Function n^{ten} Grades ist. Denn führt man auf der rechten Seite von (27.) für e^{xz} die bekannte Potenzreihe ein, so kommt im Coefficienten von x^r der Factor $\underset{z=0}{D^{n-1}}\frac{z^r}{e^z-1}$ vor, welcher für $r > n$ verschwindet, weil $z = 0$ eine $(r-1)$-fache Wurzel der differentiirten Function ist.

*) *Eisenlohr* gelangt in seiner Abhandlung „Entwickelung der Functionsweise der *Bernoulli*schen Zahlen“ (1844. Dieses Journal Bd. 28, S. 193—212) vermittelst Induction zu recht verwickelten Ausdrücken dieser Art.

Die Form (27.) der *Bernoulli*schen Function nebst der unmittelbar aus ihr folgenden

$$(28.)\qquad \mathfrak{B}(x,\ n) = \underset{z=0}{D^n} z\frac{e^{xz}-1}{e^z-1}$$

wollen wir die *Schlömilch*schen *) nennen.

Man kann aus ihnen die früher aufgezählten Formen und deren Coefficienten ohne grosse Umstände ableiten, am bequemsten die Form (16.) und die *Raabe*sche (1.). Und da die dabei vorzunehmenden Entwickelungen im engsten Zusammenhange mit der Darstellung der *Bernoulli*schen und *Euler*schen Zahlen stehen, so will ich die fraglichen Transformationen hier vorführen.

5. Substituirt man in (27.)

$$e^{xz} = [1+(e^z-1)]^x = 1+\binom{x}{1}\cdot(e^z-1)^1+\binom{x}{2}\cdot(e^z-1)^2+\binom{x}{3}\cdot(e^z-1)^3+\cdots,$$

was nach dem binomischen Satze für hinreichend kleine Werthe von z geschehen kann, so folgt zunächst:

$$\mathfrak{B}(x,\ n) = n\cdot\sum_{r=1}^{r=\infty}\binom{x}{r+1}\cdot\underset{z=0}{D^{n-1}}(e^z-1)^r;$$

und wenn man beachtet, dass $z=0$ eine r-fache Wurzel der Function $(e^z-1)^r$ ist, so erkennt man auch sofort, dass $\underset{z=0}{D^{n-1}}(e^z-1)^r$ für alle Werthe von r verschwindet, welche $>(n-1)$ sind, dass die gewonnene Reihe also mit demjenigen Gliede abbricht, welches $\binom{x}{n}$ enthält.

Entwickelt man endlich $(e^z-1)^r$ nach dem binomischen Satze und differentiirt hierauf nach z, so zeigt die Vergleichung des Resultats mit (12.) direct die Identität an:

$$(29.)\qquad \underset{z=0}{D^n}(e^z-1)^r = \overset{n}{a}_r.$$

Damit ist die Form (16.) *der Bernoullischen Functionen* bis in alle Einzelheiten *aus der Schlömilchschen* (27.) *abgeleitet.*

*) Sie sind 1856 von Herrn *Schlömilch* im ersten Bande der Zeitschr. f. Math. u. Phys., S. 193, zuerst aufgestellt und der Untersuchung der *Bernoulli*schen Functionen zu Grunde gelegt. Er benutzt sie aber nicht zur Ableitung anderer Formen und setzt die Bekanntschaft mit der *Raabe*schen Form, so wie mit der Potenzreihenentwickelung von $\frac{z}{e^z-1}$, voraus. — Man vergleiche auch sein Compendium der höheren Analysis, Bd. II, S. 207.

Auch die Recursionsformel (13.) ergiebt sich sehr leicht. Denn da

$$D_z^1(e^z-1)^r = r(e^z-1)^{r-1}e^z = r\cdot\{(e^z-1)^r+(e^z-1)^{r-1}\}$$

ist, so folgt:

$$\underset{z=0}{D^n}(e^z-1)^r = r\cdot\{\underset{z=0}{D^{n-1}}(e^z-1)^r+\underset{z=0}{D^{n-1}}(e^z-1)^{r-1}\}.$$

Wegen der wichtigen Rolle, welche die Function $\frac{e^z-1}{z}$ und namentlich ihr reciproker Werth bei dem vorliegenden Thema spielt, wollen wir hier noch anmerken, dass aus (29.) vermittelst der Transformation

$$(e^z-1)^r = z^r\cdot\left(\frac{e^z-1}{z}\right)^r$$

auch die Formel fliesst:

$$(30.)\quad \begin{cases} \overset{n}{a}_r = r!\binom{n}{r}\cdot\underset{z=0}{D^{n-r}}\left(\frac{e^z-1}{z}\right)^r, \\ \overset{n}{\mathfrak{a}}_r = \binom{n}{r}\cdot\underset{z=0}{D^{n-r}}\left(\frac{e^z-1}{z}\right)^r. \end{cases}$$

6. Zur *Raabe*schen Form gelangt man von der *Schlömilch*schen (28.), wenn man e^{xz} durch die bekannte Potenzreihe ersetzt.

Dies giebt zunächst:

$$\mathfrak{B}(x,\ n) = \sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{x^r}{r!}\cdot\underset{z=0}{D^n}\frac{z^{r+1}}{e^z-1},$$

oder, weil die Function $\frac{z^{r+1}}{e^z-1}$ offenbar die r-fache Wurzel $z=0$ besitzt:

$$\mathfrak{B}(x,\ n) = \sum_{r=1}^{r=n}\frac{x^r}{r!}\cdot\underset{z=0}{D^n}\frac{z^{r+1}}{e^z-1}.$$

Dies kann man, weil

$$\underset{z=0}{D^n}\frac{z^{r+1}}{e^z-1} = \underset{z=0}{D^n}z^r\cdot\frac{z}{e^z-1} = \binom{n}{r}\cdot r!\underset{z=0}{D^{n-r}}\frac{z}{e^z-1}$$

ist, auch so schreiben:

$$(31.)\quad \mathfrak{B}(x,\ n) = \sum_{r=1}^{r=n}\binom{n}{r}\cdot x^r.A_{n-r} = \sum_{r=0}^{r=n-1}\binom{n}{r}\cdot A_r.x^{n-r},$$

wobei der Abkürzung wegen die Bezeichnung

$$(32.)\quad A_r = \underset{z=0}{D^r}\frac{z}{e^z-1}$$

eingeführt ist, und offenbar $A_0 = +1$ wird.

Aus der identischen Gleichung

$$\frac{z}{e^z-1} = -z+\frac{-z}{e^{-z}-1}$$

folgt durch einmalige Differentiation unter Rücksicht auf (32.):

$$A_1 = -1-A_1$$

oder

$$A_1 = -\tfrac{1}{2};$$

durch mehrmalige Differentiation aber:

$$A_m = (-1)^m.A_m \qquad (m>1).$$

Führt man den hieraus fliessenden Werth

$$(33.)\qquad A_{2r+1} = 0 \qquad (r>0)$$

nebst $A_0=+1$ und $A_1=-\frac{1}{2}$ in (31.) ein und ersetzt ausserdem A_{2r} durch $(-1)^{r-1}.B_r$, *so ist die Raabesche Form* (1.) *aus der Schlömilchschen abgeleitet,* die Coefficienten

$$(34.)\qquad B_r=(-1)^{r-1}.A_{2r}=(-1)^{r-1}.\underset{z=0}{D^{2r}}\frac{z}{e^z-1}$$

miteinbegriffen *).

Die hier in der Form eines Differentialquotienten erhaltene Grösse A_r kann man, weil bei jedem hinreichend kleinen z

$$\frac{z}{e^z-1}=\frac{l[1+(e^z-1)]}{e^z-1}=1-\tfrac{1}{2}\cdot(e^z-1)^1+\tfrac{1}{3}\cdot(e^z-1)^2-\tfrac{1}{4}\cdot(e^z-1)^3+\cdots$$

ist, wegen (32.) und (29.) so darstellen:

$$(35.)\qquad A_r = -\tfrac{1}{2}\cdot\overset{r}{a}_1+\tfrac{1}{3}\cdot\overset{r}{a}_2-\tfrac{1}{4}\cdot\overset{r}{a}_3+\cdots+(-1)^r\cdot\frac{1}{r+1}\cdot\overset{r}{a}_r.$$

Daher erhält man *für die Bernoullischen Zahlen einen* vermittelst der Zeichen der gemeinen Rechnungsarten *völlig ausgeschriebenen Ausdruck:*

$$(36.)\qquad B_r = (-1)^r\cdot\left\{\tfrac{1}{2}\cdot\overset{2r}{a}_1-\tfrac{1}{3}\cdot\overset{2r}{a}_2+\tfrac{1}{4}\cdot\overset{2r}{a}_3-\tfrac{1}{5}\cdot\overset{2r}{a}_4+\cdots-\frac{1}{2r+1}\cdot\overset{2r}{a}_{2r}\right\},$$

wenn man noch für die a ihre aus (12.) bekannten Werthe setzt.

Wendet man auf den Ausdruck (36.) die Recursionsformel (13.) in Verbindung mit (35.) und (33.) an, so ist dies ein Weg zu neuen Ausdrücken für B_r. — Z. B. ergiebt sich auf diese Weise:

$$(37.)\qquad B_{r+1} = (-1)^r\cdot2\cdot\left\{\frac{1}{3.4}\cdot\overset{2r}{a}_1-\frac{1}{4.5}\cdot\overset{2r}{a}_2+\frac{1}{5.6}\cdot\overset{2r}{a}_3-\cdots-\frac{1}{(2r+2)(2r+3)}\cdot\overset{2r}{a}_{2r}\right\}.$$

7. Selbstverständlich kann man den Ausdruck (32.) auch zur Ableitung von Recursionsformeln zwischen den A benutzen.

---

*) Die Formel (34.) für die *Bernoulli*schen Zahlen findet sich schon bei *Euler* in den Instit. calc. diff.

Differentiirt man beispielsweise die identische Gleichung

$$\frac{z}{e^z-1}\cdot(e^z-1) = z$$

$(n+1)$-mal unter Anwendung des *Leibniz*schen Satzes, so folgt ohne weiteres:

$$\binom{n+1}{1}\cdot A_n+\binom{n+1}{2}\cdot A_{n-1}+\binom{n+1}{3}\cdot A_{n-2}+\cdots+\binom{n+1}{n}\cdot A_1+\binom{n+1}{n+1}\cdot A_0 = 0,$$

oder, wenn man noch die Werthe $A_0 = 1$, $A_1 = -\frac{1}{2}$ einsetzt:

$$\binom{n+1}{1}\cdot A_n+\binom{n+1}{2}\cdot A_{n-1}+\binom{n+1}{3}\cdot A_{n-2}+\cdots+\binom{n+1}{n-1}\cdot A_2-\frac{n-1}{2} = 0.$$

Für $n = 2r$ ist dies offenbar die *Moivre*sche Recursionsformel (2.), während für $n = 2r+1$ erhalten wird:

$$(38.)\quad \begin{cases} \binom{2r+2}{2}\cdot B_r-\binom{2r+2}{4}\cdot B_{r-1}+\binom{2r+2}{6}\cdot B_{r-2}-\cdots \\ \qquad\cdots+(-1)^{r-1}\cdot\binom{2r+2}{2r}\cdot B_1+(-1)^r.r = 0. \end{cases}$$

Subtrahirt man jene von der letzteren, so folgt noch:

$$(39.)\quad \begin{cases} \binom{2r+1}{2}\cdot B_r-\binom{2r+1}{4}\cdot B_{r-1}+\binom{2r+1}{6}\cdot B_{r-2}-\cdots \\ \qquad\cdots+(-1)^{r-1}\cdot\binom{2r+1}{2r}\cdot B_1+(-1)^r\cdot\frac{1}{2} = 0. \end{cases}$$

Differentiirt man ferner die identische Gleichung

$$\frac{(2z)}{e^{(2z)}-1}\cdot(e^z+1)-2\cdot\frac{z}{e^z-1} = 0,$$

n-mal und substituirt auch sofort die Werthe von A_0 und A_1, so findet man ohne eine weitere Transformation:

$$2.(2^n-1).A_n+\binom{n}{1}\cdot 2^{n-1}.A_{n-1}+\binom{n}{2}\cdot 2^{n-2}.A_{n-2}+\cdots+\binom{n}{n-2}\cdot 2^2.A_2-(n-1) = 0.$$

Dies giebt für $n = 2r$:

$$(40.)\quad \begin{cases} 2.(2^{2r}-1).B_r-\binom{2r}{2}\cdot 2^{2r-2}.B_{r-1}+\binom{2r}{4}\cdot 2^{2r-4}.B_{r-2}-\cdots \\ \qquad\cdots+(-1)^{r-1}\cdot\binom{2r}{2r-2}\cdot 2^2.B_1+(-1)^r.(2r-1) = 0, \end{cases}$$

für $n = 2r+1$ aber*):

*) Die Formel (41.) ist in *Klügels* Wörterbuch, Suppl. I, S. 60—63, auf dem Wege der Induction bewiesen.

$$(41.)\quad \begin{cases} \binom{2r+1}{1}\cdot 2^{2r-1}.B_r-\binom{2r+1}{3}\cdot 2^{2r-3}.B_{r-1}+\binom{2r+1}{5}\cdot 2^{2r-5}.B_{r-2}-\cdots \\ \qquad\qquad \cdots+(-1)^{r-1}\cdot\binom{2r+1}{2r-1}\cdot 2^1.B_1+(-1)^r.r = 0. \end{cases}$$

Wie man durch die Combination dieser Formeln ähnliche in beliebiger Anzahl ableiten kann, braucht nicht näher beschrieben zu werden.

Wir wollen uns hier mit den Recursionsformeln zwischen den *Bernoulli*schen Zahlen nicht eingehender beschäftigen. Es mag aber die Anmerkung am Platze sein, dass die zuletzt benutzte Ableitungsmethode leicht verallgemeinert werden kann, indem man von der identischen Gleichung ausgeht:

$$\frac{kz}{e^{kz}-1}\cdot\{e^{(k-1)z}+e^{(k-2)z}+\cdots+1\}-k\cdot\frac{z}{e^z-1} = 0,$$

oder, was dasselbe ist, von der Gleichung:

$$\frac{kz}{e^{kz}-1}\cdot\frac{e^{kz}-1}{e^z-1}-k\cdot\frac{z}{e^z-1} = 0.$$

Daraus folgt nach (32.) und (27.):

$$(42.)\quad \begin{cases} k.(k^n-1).A_n+\frac{1}{2}\mathfrak{B}(k,2)\cdot\binom{n}{1}k^{n-1}A_{n-1}+\frac{1}{3}\mathfrak{B}(k,3)\cdot\binom{n}{2}k^{n-2}A_{n-2}+\cdots \\ \cdots+\frac{1}{n-1}\mathfrak{B}(k,n-1)\cdot\binom{n}{n-2}k^2A_2-\frac{1}{2}\mathfrak{B}(k,n).k+\frac{1}{n+1}\mathfrak{B}(k,n+1) = 0; \end{cases}$$

und diese Gleichung giebt bei jedem besondern k wieder zwei verschieden gestaltete Recursionsformeln zwischen den *Bernoulli*schen Zahlen, je nachdem man $2r$ oder $(2r+1)$ für n setzt. Drückt man dann ausserdem noch die hier vorkommenden Specialwerthe der *Bernoulli*schen Functionen in der *Raabe*schen Form aus, so entstehen Relationen, in denen die *Bernoulli*schen Zahlen productweise auftreten.

8. In andrer Weise als in den beiden letzten Abschnitten gelangt man zu independenten und zu Recursionsformeln für die *Bernoulli*schen Zahlen von gewissen Specialwerthen der *Bernoulli*schen Functionen und ihrer Derivirten aus.

Wir wollen diese Specialwerthe zunächst zusammenstellen, um in dem bei unserm Gegenstand nun einmal bunten Gemisch von Formeln, die theilweise aus sehr verschiedenen Quellen gleich leicht entspringen, die Uebersicht zu fördern.

I. Differentiirt man den *Schlömilch*schen Ausdruck (27.) nach x, so erhält man wegen des Differentiationsresultates

$$D_x \cdot \frac{e^{xz}-1}{e^z-1} = z \cdot \frac{e^{xz}-1}{e^z-1} + \frac{z}{e^z-1}$$

unter Rücksicht auf (27.), (28.) und (32.) die folgende Gleichung:

$$\mathfrak{B}'(x, n) = n . \{\mathfrak{B}(x, n-1) + A_{n-1}\}.$$

Dieselbe lautet wegen der Ausdrücke (33.) und (34.) für A_n etwas verschieden, je nachdem n einen graden oder ungraden Werth hat, nämlich*):

$$(43.) \quad \begin{cases} \mathfrak{B}'(x, 2r) = 2r . \mathfrak{B}(x, 2r-1). \\ \mathfrak{B}'(x, 2r+1) = (2r+1)\{\mathfrak{B}(x, 2r) + (-1)^{r-1} . B_r\} \end{cases}$$

und ergiebt im besondern:

$$(44.) \quad \begin{cases} \mathfrak{B}'(0, 2r) = 0, \\ \mathfrak{B}'(0, 2r+1) = (-1)^{r-1} . (2r+1) . B_r . \end{cases}$$

II. Die zweite Grundlage für unsere weiteren Entwickelungen beruht auf dem Werthe von $\mathfrak{B}(\frac{1}{2}, n)$.

Herr *Schlömilch* deducirt im wesentlichen so: Da

$$z\frac{e^{\frac{1}{2}z}-1}{e^z-1} = z\frac{(e^{\frac{1}{2}z}+1)-2}{e^z-1} = 2 \cdot \frac{\frac{1}{2}z}{e^{\frac{1}{2}z}-1} - 2 \cdot \frac{z}{e^z-1}$$

ist, so folgt nach (28.) und (32.):

$$\mathfrak{B}(\tfrac{1}{2}, n) = \left[\frac{1}{2^{n-1}} - 2\right] \cdot A_n = -\frac{2^n-1}{2^{n-1}} \cdot A_n,$$

mithin wegen (33.) und (34.):

$$(45.) \quad \begin{cases} \mathfrak{B}(\frac{1}{2}, 2r+1) = 0 & (r > 0), \\ \mathfrak{B}(\frac{1}{2}, 2r) = (-1)^r \cdot \dfrac{2^{2r}-1}{2^{2r-1}} \cdot B_r . \end{cases}$$

Es verdient hierbei angemerkt zu werden, dass die einfachsten Formen für $\mathfrak{B}(\frac{1}{2}, n)$, welche sich aus der *Schlömilch*schen Darstellung der *Bernoulli*schen Functionen ergeben, diese sind:

$$\mathfrak{B}(\tfrac{1}{2}, n) = n \cdot \underset{z=0}{D^{n-1}} \frac{1}{e^{\frac{1}{2}z}+1} = \underset{z=0}{D^n} \frac{z}{e^{\frac{1}{2}z}+1},$$

oder, wenn man hier z für $\frac{1}{2}z$ setzt:

$$(46.) \quad \mathfrak{B}(\tfrac{1}{2}, n) = \frac{n}{2^{n-1}} \cdot \underset{z=0}{D^{n-1}} \frac{1}{e^z+1} = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \underset{z=0}{D^n} \frac{z}{e^z+1}.$$

---

*) Dies ist die *Schlömilch*sche Ableitung in der Zeitschr. f. Math. u. Phys. — Dasselbe Resultat ergiebt übrigens auch die Differentiation der *Raabe*schen Form sofort, während die Herleitung aus den andern elementaren Formen von $\mathfrak{B}(x, n)$ einige Rechnung erfordert.

Der Werth von $\mathfrak{B}(\frac{1}{2}, n)$ ist bekanntlich auch aus dem Grunde wichtig, weil die Relation besteht:

$$(47.)\qquad \mathfrak{B}(\tfrac{1}{2}+x, n) = (-1)^n.\mathfrak{B}(\tfrac{1}{2}-x, n),$$

welche anzeigt, dass $\mathfrak{B}(\frac{1}{2}+x, n)$ eine grade oder ungrade Function von x ist, je nachdem n einen graden oder ungraden Werth hat; so dass auch hieraus $\mathfrak{B}(\frac{1}{2}, 2r+1) = 0$, $\mathfrak{B}(\frac{1}{2}, 2r)$ aber als ein Maximal- oder Minimalwerth erkannt wird. — Man leitet die Formel (47.) entweder in der *Schlömilch*-schen Weise ab, oder dadurch, dass man in (10.) gliedweise

$$\binom{z}{n} = (-1)^n.\binom{n-1-z}{n},\quad \overset{n-1}{\alpha}_r = \overset{n-1}{\alpha}_{n-r}$$

substituirt — was zunächst

$$\mathfrak{B}(x, n) = (-1)^n.\mathfrak{B}(1-x, n)$$

ergiebt*) — und dann $(\frac{1}{2}+x)$ für x setzt.

III. Ausser den Ausdrücken (32.) für A_n und (46.) für $\mathfrak{B}(\frac{1}{2}, n)$ wird noch ein Ausdruck wichtig, den wir jetzt entwickeln wollen. Es ist

$$\frac{e^{\frac{1}{2}z}}{e^z+1} = \frac{e^{\frac{3}{2}z}-e^{\frac{1}{2}z}}{e^{2z}-1} = \frac{e^{\frac{3}{2}z}-1}{e^{2z}-1} - \frac{e^{\frac{1}{2}z}-1}{e^{2z}-1} = \frac{e^{\frac{3}{4}w}-1}{e^w-1} - \frac{e^{\frac{1}{4}w}-1}{e^w-1},$$

wo zuletzt $w = 2z$ gesetzt wurde. Hieraus folgt nach (27.):

$$\underset{z=0}{D^{n-1}} \frac{e^{\frac{1}{2}z}}{e^z+1} = \frac{2^{n-1}}{n}\cdot\{\mathfrak{B}(\tfrac{3}{4}, n) - \mathfrak{B}(\tfrac{1}{4}, n)\},$$

d. i. nach (47.):

$$(48.)\qquad \underset{z=0}{D^{n-1}} \frac{e^{\frac{1}{2}z}}{e^z+1} = \{(-1)^n-1\}\cdot\frac{2^{n-1}}{n}\cdot\mathfrak{B}(\tfrac{1}{4}, n),$$

also:

$$(49.)\qquad \begin{cases} \underset{z=0}{D^{2r-1}} \dfrac{e^{\frac{1}{2}z}}{e^z+1} = 0, \\ \underset{z=0}{D^{2r}} \dfrac{e^{\frac{1}{2}z}}{e^z+1} = -\dfrac{2^{2r+1}}{2r+1}\cdot\mathfrak{B}(\tfrac{1}{4}, 2r+1). \end{cases}$$

Da ferner

$$\frac{e^{\frac{1}{4}z}-1}{e^z-1} = \frac{1}{(e^{\frac{1}{4}z}+1)(e^{\frac{1}{2}z}+1)} = \frac{1}{2}\cdot\left\{\frac{1}{e^{\frac{1}{4}z}+1} + \frac{1}{e^{\frac{1}{2}z}+1} - \frac{e^{\frac{1}{4}z}}{e^{\frac{1}{2}z}+1}\right\}$$

---

*) Zuerst gefunden ist diese Formel von *Raabe* (dies. Journ. Bd. 42.). *Schlömilch* gewinnt sie sehr einfach durch die Differentiation der identischen Gleichung

$$\frac{e^{(1-x)z}-1}{e^z-1} = 1 - \frac{e^{-xz}-1}{e^{-z}-1}.$$

Die Herleitung aus (10.) ist wohl nicht umständlicher. — Auch zeigen die Formen (10.) und (16.) ohne weiteres die Theilbarkeit von $\mathfrak{B}(x, n)$ durch $x(x-1)$ für $n > 1$.

ist, so folgt vermittelst $(n-1)$-maliger Differentiation nach z wegen (27.), (46.) und (48.):

$$\mathfrak{B}(\tfrac{1}{4}, n) = \frac{2^{n-1}+1}{2^n}\cdot\mathfrak{B}(\tfrac{1}{2}, n) - \{(-1)^n - 1\}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\mathfrak{B}(\tfrac{1}{4}, n);$$

und hieraus für $n = 2r$:

$$(50.)\qquad \mathfrak{B}(\tfrac{1}{4}, 2r) = \frac{2^{2r-1}+1}{2^{2r}}\cdot\mathfrak{B}(\tfrac{1}{2}, 2r).$$

IV. Alle diese Grössen stehen in enger Beziehung zu den Kreisfunctionen.

Man hat nämlich:

$$z\cot z = iz\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}} = iz\frac{e^{i2z}+1}{e^{i2z}-1} = iz + \frac{i2z}{e^{i2z}-1},$$

$$\operatorname{tng} z = \frac{1}{i}\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}} = \frac{1}{i}\frac{e^{i2z}-1}{e^{i2z}+1} = \frac{1}{i} - \frac{2}{i}\cdot\frac{1}{e^{i2z}+1},$$

$$\sec z = \frac{2}{e^{iz}+e^{-iz}} = 2\cdot\frac{e^{iz}}{e^{i2z}+1}.$$

Daraus ergiebt sich nach (32.), (46.) und (48):

$$\underset{z=0}{D^n} z\cot z = i.\underset{z=0}{D^n} z + i^n.2^n.\underset{z=0}{D^n}\frac{z}{e^z-1} = i.\underset{z=0}{D^n} z + i^n.2^n.A_n,$$

$$\underset{z=0}{D^{n-1}}\operatorname{tng} z = i^n\ .2^n.\underset{z=0}{D^{n-1}}\frac{1}{e^z+1} = i^n\ \cdot\frac{2^{2n-1}}{n}\cdot\mathfrak{B}(\tfrac{1}{2}, n),$$

$$\underset{z=0}{D^{n-1}}\sec z = i^{n-1}.2^n.\underset{z=0}{D^{n-1}}\frac{e^{\frac{1}{2}z}}{e^z+1} = i^{n-1}\cdot\{(-1)^n-1)\}\cdot\frac{2^{2n-1}}{n}\cdot\mathfrak{B}(\tfrac{1}{4}, n).$$

Da die linken Seiten dieser Gleichungen und auch A_n, $\mathfrak{B}(\frac{1}{2}, n)$, $\mathfrak{B}(\frac{1}{4}, n)$ reell sind, so folgt aus diesen Ausdrücken einerseits:

$$(51.)\qquad \begin{cases} \underset{z=0}{D^{2r-1}} z\cot z = 0, \\ \underset{z=0}{D^{2r-1}}\operatorname{tng} z = i^{2r+1}.2^{2r+1}.\underset{z=0}{D^{2r}}\dfrac{1}{e^z+1} = 0, \\ \underset{z=0}{D^{2r-1}}\sec z = 0; \end{cases}$$

und andrerseits:

$$(52.)\qquad \begin{cases} \underset{z=0}{D^{2r}}\ z\cot z = (-1)^r.2^{2r}.A_{2r} = -2^{2r}.B_r, \\ \underset{z=0}{D^{2r-1}}\operatorname{tng} z = (-1)^r.2^{2r}.\underset{z=0}{D^{2r-1}}\dfrac{1}{e^z+1} = (-1)^r\cdot\dfrac{2^{4r-2}}{r}\cdot\mathfrak{B}(\tfrac{1}{2}, 2r) \\ \qquad\qquad = +\dfrac{1}{r}\cdot 2^{2r+1}.(2^{2r}-1).B_r = u_{2r}, \\ \underset{z=0}{D^{2r}}\ \sec z = (-1)^r.2^{2r-1}.\underset{z=0}{D^{2r}}\dfrac{e^{\frac{1}{2}z}}{e^z+1} \\ \qquad\qquad = (-1)^{r+1}\cdot\dfrac{2^{4r+2}}{2r+1}\cdot\mathfrak{B}(\tfrac{1}{4}, 2r+1) = u_{2r+1}; \end{cases}$$

wo die letzten Gleichungen ausserdem zur Definition der *Eulerschen Zahlen* u_{2r} und u_{2r+1} von grader und ungrader Ordnung dienen sollen.

Der Vollständigkeit wegen mögen hier noch die bekannten Formeln

$$(53.)\qquad \underset{z=0}{D^n}\operatorname{tng}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{z}{2}\right) = u_{n+1}$$

und

$$(54.)\qquad \begin{cases} \underset{z=0}{D^{2r}} z\operatorname{cosec} z = 2.(2^{2r-1}-1)B_r, \\ \underset{z=0}{D^{2r-1}} z\operatorname{cosec} z = 0 \end{cases}$$

Platz finden, welche sich aus den obigen leicht ableiten lassen; und endlich noch der aus (52.) und (50.) folgende neue Ausdruck:

$$(55.)\qquad u_{2r} = (-1)^r\cdot\frac{2^{6r-2}}{r(2^{2r-1}+1)}\cdot\mathfrak{B}(\tfrac{1}{4}, 2r).$$

Uebrigens lassen sich nicht nur die Constanten B_n und u_n als Derivirte von Kreisfunctionen darstellen, sondern es finden sich ähnliche Ausdrücke für die *Bernoulli*schen Functionen $\mathfrak{B}(x, n)$ selbst, wenn man das z in (27.) durch $2iz = 2e^{i\frac{\pi}{2}}z$ ersetzt. Es zeigt dann eine leichte Rechnung, dass

$$(56.)\qquad \mathfrak{B}(x, n) = \frac{n}{2^{n-1}}\cdot\underset{z=0}{D^{n-1}}\cdot\frac{\sin xz.\cos\left[(x-1)z-(n-1)\frac{\pi}{2}\right]}{\sin z}$$

ist, während

$$\underset{z=0}{D^{n-1}}\frac{\sin xz.\sin\left[(x-1)z-(n-1)\frac{\pi}{2}\right]}{\sin z} = 0$$

wird.

Der Ausdruck (56.) lässt noch mancherlei Transformationen zu, von denen hier nur die allernächst liegenden angeführt werden sollen:

$$(57.)\qquad \begin{cases} \mathfrak{B}(x, 2r) = (-1)^{r+1}.\frac{r}{2^{2r-2}}\cdot\underset{z=0}{D^{2r-1}}\frac{\sin xz.\sin(x-1)z}{\sin z} \\ \qquad = (-1)^r\cdot\frac{r}{2^{2r-1}}\cdot\underset{z=0}{D^{2r-1}}\left\{\frac{\cos(2x-1)z}{\sin z}-\cot z\right\}, \\ \mathfrak{B}(x, 2r+1) = (-1)^r\cdot\frac{2r+1}{2^{2r}}\cdot\underset{z=0}{D^{2r}}\frac{\sin xz.\cos(x-1)z}{\sin z} \\ \qquad = (-1)^r\cdot\frac{2r+1}{2^{2r-1}}\cdot\underset{z=0}{D^{2r}}\frac{\sin(2x-1)z}{\sin z}. \end{cases}$$

— Im letzten Ausdruck für $\mathfrak{B}(x, 2r+1)$ muss $r > 0$ sein.

9. Wir wollen jetzt die Verwendung der im vorigen Abschnitt abgeleiteten Formeln zur Gewinnung von Ausdrücken für die *Bernoulli*schen und *Euler*schen Zahlen durch einige Beispiele erläutern.

Um die Formel (44.) mit (10.) zu combiniren, berechne man aus der letzteren $\mathfrak{B}'(0,n) = \lim\limits_{x=0} \dfrac{\mathfrak{B}(x,n)}{x}$ und substituire in (44.). Dies giebt:

$$B_r = \frac{(-1)^{r-1}}{(2r+1)!}\cdot\Big\{(2r)!\overset{2r}{\alpha}_1-(2r-1)!1!\overset{2r}{\alpha}_2+(2r-2)!2!\overset{2r}{\alpha}_3-\cdots$$
$$\cdots+2!(2r-2)!\overset{2r}{\alpha}_{2r-1}-1!(2r-1)!\overset{2r}{\alpha}_{2r}\Big\},$$

oder unter Anwendung von (6.):

$$(58.)\quad B_r = \frac{1}{2r.(2r+1)}\cdot\left\{\frac{1.\overset{2r}{\alpha}_r}{\binom{2r-1}{r}}-\frac{3.\overset{2r}{\alpha}_{r-1}}{\binom{2r-1}{r+1}}+\frac{5.\overset{2r}{\alpha}_{r-2}}{\binom{2r-1}{r+2}}-\cdots+(-1)^{r-1}.\frac{(2r-1)\overset{2r}{\alpha}_1}{\binom{2r-1}{2r-1}}\right\}.$$

Diese Formel lässt sich noch vielfach umgestalten, wenn man die Recursionsformel (8.) für die α und die Relation $\mathfrak{B}'(0,2r)=0$ aus (44.) mit ihr verbindet; — z. B.:

$$(59.)\quad B_r = \frac{1}{r(2r+1)}\cdot\left\{\frac{1.\ \overset{2r-2}{\alpha}_{r-1}}{\binom{2r-1}{r-1}}-\frac{3.\ \overset{2r-2}{\alpha}_{r-2}}{\binom{2r-1}{r-2}}+\frac{5.\ \overset{2r-2}{\alpha}_{r-3}}{\binom{2r-1}{r-3}}-\cdots+(-1)^{r}.\frac{(2r-3).\ \overset{2r-1}{\alpha}_1}{\binom{2r-1}{1}}\right\}.$$

Substituirt man in (44.) für $\mathfrak{B}'(0,n)$ aus (16.), so folgen die Ausdrücke wieder, welche wir mit anderer Ableitung bereits in (36.) und (37.) aufgeführt haben.

Die Formeln (23.) und (25.) ergeben in Verbindung mit (44.):

$$(60.)\quad B_r = (-1)^{r-1}.\left\{\frac{1}{1.2}\cdot\overset{2r}{\alpha}_1-\frac{1}{2.3}\cdot\overset{2r}{\alpha}_2+\frac{1}{3.4}\cdot\overset{2r}{\alpha}_3-\cdots-\frac{1}{2r.(2r+1)}\cdot\overset{2r}{\alpha}_{2r}\right\}$$

und:

$$(61.)\quad B_r = (-1)^{r-1}.\left\{\frac{1}{1^2}\cdot\overset{2r+1}{\alpha}_1-\frac{1}{2^2}\cdot\overset{2r+1}{\alpha}_2+\frac{1}{3^2}\cdot\overset{2r+1}{\alpha}_3-\cdots+\frac{1}{(2r+1)^2}\cdot\overset{2r+1}{\alpha}_{2r+1}\right\},$$

wenn man bei der Ableitung aus (25.) noch die Gleichung

$$\mathfrak{B}'(x,n) = (-1)^{n+1}.\mathfrak{B}'(1-x,n)$$

hinzunimmt.

Uebrigens kann man die erwähnten Ausdrücke mit den α leicht in einander überführen, wenn man die Formel (13.) und diejenigen berücksichtigt, welche aus (23.) und (25.) für das verschwindende $\mathfrak{B}'(0, 2r)$ erhalten werden.

Unter den obigen Ausdrücken sind vielleicht diejenigen die complicirteren, in denen die Zahlen α vorkommen, obgleich sie nur halb so viel Glieder enthalten, als die andern. In gleichem Grade trifft dies zu, wenn man B_r vermittelst der Gleichung (45.) durch $\mathfrak{B}(\frac{1}{2}, 2r)$ ausdrückt. Wir werden, indem wir von ihnen Gebrauch machen, mehrfach der etwas bequemeren Schreibweise wegen lieber die *Euler*sche Zahl u_{2r} darstellen, für welche nach (52.) die Relation gilt:

$$u_{2r} = (-1)^r \cdot \frac{2^{4r-2}}{r} \cdot \mathfrak{B}(\tfrac{1}{2}, 2r),$$

uns aber auf wenige Ausdrücke beschränken.

Benutzt man hierbei die Gleichung (10.) unter Rücksicht auf (6.), so folgt:

$$(62.) \quad u_{2r} = (-1)^r . 2^{4r-1} \cdot \left\{ \binom{r-\frac{1}{2}}{2r} \cdot \overset{2r-1}{\alpha_r} + 2 \cdot \binom{r-\frac{3}{2}}{2r} \cdot \overset{2r-1}{\alpha_{r-1}} + 2 \cdot \binom{r-\frac{5}{2}}{2r} \cdot \overset{2r-1}{\alpha_{r-2}} + \cdots + 2 \cdot \binom{\frac{1}{2}}{2r} \cdot \overset{2r-1}{\alpha_1} \right\},$$

was sich auf mehrfache Weise noch vereinfachen lässt.

Benutzt man ferner die Gleichung (21.), so findet man für eine später näher zu betrachtende Zahl v_r das wichtigere Resultat:

$$(63.) \quad \begin{cases} v_r = 2.(2^{2r}-1).B_r = \dfrac{r.u_{2r}}{2^{2r-2}} \\ = (-1)^{r-1}. \ r \cdot \left\{ \dfrac{2^{2r-1}.1}{2} \cdot \overset{2r-1}{\mathfrak{a}_1} - \dfrac{2^{2r-2}.1.3}{3} \cdot \overset{2r-1}{\mathfrak{a}_2} + \cdots + \dfrac{2^1.1.3.5\ldots(4r-3)}{2r} \cdot \overset{2r-1}{\mathfrak{a}_{2r-1}} \right\} \\ = (-1)^{r-1}.3r \cdot \left\{ \dfrac{2^{2r-2}.1}{3} \cdot \overset{2r-2}{\mathfrak{a}_1} - \dfrac{2^{2r-3}.1.3}{4} \cdot \overset{2r-2}{\mathfrak{a}_2} + \cdots - \dfrac{2^1.1.3.5\ldots(4r-5)}{2r} \cdot \overset{2r-2}{\mathfrak{a}_{2r-2}} \right\}, \end{cases}$$

dessen zweite Form aus der ersten durch die Verwendung von (19.) und von $\mathfrak{B}(\frac{1}{2}, 2r-1) = 0$ hervorgeht.

Bei denjenigen Formeln des vorigen Abschnittes, welche auf $\mathfrak{B}(\frac{1}{4}, n)$ zurückgreifen, wollen wir hier diese Grösse nur aus (21.) darstellen, also nur den Ausdruck anführen:

$$\mathfrak{B}(\tfrac{1}{4}, n) = \frac{n}{4^n} \cdot \left\{ -\frac{4^{n-2}.3}{2} \cdot \overset{n-1}{\mathfrak{a}_1} + \frac{4^{n-3}.3.7}{3} \cdot \overset{n-1}{\mathfrak{a}_2} - \cdots + (-1)^{n-1} . \frac{4^0.3.7.11\ldots(4n-5)}{n} \cdot \overset{n-1}{\mathfrak{a}_{n-1}} \right\}.$$

Er ergiebt mit (55.) zusammen:

$$(64.) \quad v_r = 2.(2^{2r}-1).B_r = \frac{r.u_{2r}}{2^{2r-2}}$$

$$= (-1)^{r-1} . \frac{2r}{2^{2r-1}+1} \cdot \left\{ \frac{4^{2r-2}.3}{2} \cdot \overset{2r-1}{\mathfrak{a}_1} - \frac{4^{2r-3}.3.7}{3} \cdot \overset{2r-1}{\mathfrak{a}_2} + \cdots + \frac{4^0.3.7.11\ldots(8r-5)}{2r} \cdot \overset{2r-1}{\mathfrak{a}_{2r-1}} \right\},$$

in Vereinigung mit der letzten Gleichung in (52.) aber:

$$(65.)\quad \begin{cases} u_{2r+1} = (-1)^r \cdot \left\{ \dfrac{4^{2r-1}.3}{2} \cdot \overset{2r}{\mathfrak{a}}_1 - \dfrac{4^{2r-2}.3.7}{3} \cdot \overset{2r}{\mathfrak{a}}_2 + \cdots - \dfrac{4^0.3.7.11\ldots(8r-1)}{2r+1} \cdot \overset{2r}{\mathfrak{a}}_{2r} \right\} \\ \quad = (-1)^{r-1} \cdot \left\{ 4^{2r-2}.\overset{2r-1}{\mathfrak{a}}_1 - 7.4^{2r-4}.\overset{2r-1}{\mathfrak{a}}_2 \right. \\ \qquad \left. + \sum_{k=4}^{k=2r-1} (-1)^k \cdot \dfrac{4^{2r-k-1}.3.7\ldots4(k-1).(k-3)}{(k+1)(k+2)} \cdot \overset{2r-1}{\mathfrak{a}}_k \right\}. \end{cases}$$

— Der letzte Ausdruck für u_{2r+1} entsteht aus dem vorletzten durch blosse Anwendung von (19.) auf ihn; und es verschwindet dabei der Coefficient von $\overset{2r-1}{\mathfrak{a}}_3$.

Die Schlussfolgerungen aus der *Raabe*schen Form von $\mathfrak{B}(\frac{1}{4}, 2r)$ übergehe ich, weil es mir auf die aus ihr entspringenden Recursionsformeln für die B_r und u_{2r} weniger ankommt. Für die u_{2r+1} ergiebt sich:

$$(66.)\quad \begin{cases} (-1)^r.(2r+1).u_{2r+1} \\ = (4r-1) - \binom{2r+1}{2} \cdot 4^2.B_1 + \binom{2r+1}{4} \cdot 4^4.B_2 - \cdots + (-1)^r \cdot \binom{2r+1}{2r} \cdot 4^{2r}.B_r. \end{cases}$$

10. Die Formeln (52.) des 8. Abschnitts gestatten auch auf eine andere Weise, als es bisher geschehen ist, für die *Euler*schen Zahlen Ausdrücke abzuleiten, welche in den Zeichen der gemeinen Rechnungsarten völlig ausgeschrieben sind.

Was zunächst die Formel

$$u_{2r} = (-1)^r.2^{2r}.\underset{z=0}{D^{2r-1}} \frac{1}{e^z+1}$$

betrifft, so ist bei hinreichend kleinem z

$$\frac{1}{e^z+1} = \frac{1}{2+(e^z-1)} = \tfrac{1}{2} \cdot \left\{ 1 - \tfrac{1}{2} \cdot (e^z-1) + \frac{1}{2^2} \cdot (e^z-1)^2 - \frac{1}{2^3} \cdot (e^z-1)^3 + \cdots \right\},$$

mithin wegen (29.):

$$(67.)\quad \begin{cases} u_{2r} = (-1)^r.\underset{z=0}{D^{2r-1}}.\left\{ 2^{2r-1} - 2^{2r-2}.(e^z-1)^1 + 2^{2r-3}.(e^z-1)^2 - \cdots - 2^0.(e^z-1)^{2r-1} \right\} \\ \quad = (-1)^{r-1}.\left\{ 2^{2r-2}.\overset{2r-1}{a}_1 - 2^{2r-3}.\overset{2r-1}{a}_2 + 2^{2r-4}.\overset{2r-1}{a}_3 - \cdots + 2^0.\overset{2r-1}{a}_{2r-1} \right\}. \end{cases}$$

Hieraus folgt u. a., *dass u_{2r} eine ganze Zahl ist.*

Lässt man die Ordnung der Differentiation unentschieden, so entspringt nach (46.) die Gleichung:

$$(68.)\quad \mathfrak{B}(\tfrac{1}{2}, n)$$

$$= \frac{n}{2^{2n-1}} \cdot \underset{z=0}{D^{n-1}}.\left\{ 2^{n-1} - 2^{n-2}.(e^z-1)^1 + 2^{n-3}.(e^z-1)^2 - \cdots + (-1)^{n-1}.2^0.(e^z-1)^{n-1} \right\}$$

$$= \frac{n}{2^{2n-1}} \cdot \left\{ -2^{n-2}.\overset{n-1}{a}_1 + 2^{n-3}.\overset{n-1}{a}_2 - 2^{n-4}.\overset{n-1}{a}_3 + \cdots + (-1)^{n-1}.2^0.\overset{n-1}{a}_{n-1} \right\},$$

welche wegen (45.) zwischen den Zahlen a noch die Relation ergiebt:

$$(69.)\qquad 0 = -2^{2r-1}.\overset{2r}{a}_1 + 2^{2r-2}.\overset{2r}{a}_2 - 2^{2r-3}.\overset{2r}{a}_3 + \cdots + 2^0.\overset{2r}{a}_{2r}.$$

Diese Ausdrücke lassen eine bemerkenswerthe Transformation zu. Es ist nämlich:

$$\begin{aligned}
&(x-1)^n + (x-1)^{n-1}.(e^z-1)^1 + (x-1)^{n-2}.(e^z-1)^2 + \cdots + (x-1)^0.(e^z-1)^n \\
= \;& \frac{(x-1)^{n+1}-(e^z-1)^{n+1}}{x-e^z} \\
= \;& \frac{x^{n+1}-e^{(n+1)z}}{x-e^z} - \binom{n+1}{1}\cdot\frac{x^n-e^{nz}}{x-e^z} + \binom{n+1}{2}\cdot\frac{x^{n-1}-e^{(n-1)z}}{x-e^z} - \cdots + (-1)^n\cdot\binom{n+1}{n}\cdot\frac{x-e^z}{x-e^z} \\
= \;& x^n + x^{n-1}\cdot\left[e^z - \binom{n+1}{1}\right] + x^{n-2}\cdot\left[e^{2z} - \binom{n+1}{1}\cdot e^z + \binom{n+1}{2}\right] + \cdots \\
& \cdots + x^0\cdot\left[e^{nz} - \binom{n+1}{1}\cdot e^{(n-1)z} + \binom{n+1}{2}\cdot e^{(n-2)z} - \cdots + (-1)^n\cdot\binom{n+1}{n}\cdot e^{0.z}\right].
\end{aligned}$$

Durch die n-malige Differentiation nach z erhält man hieraus, weil nach (7.) offenbar

$$(70.)\qquad \overset{n}{\alpha}_r = \underset{z=0}{D^n}\cdot\left\{e^{rz} - \binom{n+1}{1}\cdot e^{(r-1)z} + \binom{n+1}{2}\cdot e^{(r-2)z} - \cdots + (-1)^r\cdot\binom{n+1}{r}\cdot e^{0.z}\right\}$$

geschrieben werden kann, die Gleichung *):

$$(71.)\qquad \left|\begin{aligned}
& \underset{z=0}{D^n}\frac{(x-1)^{n+1}-(e^z-1)^{n+1}}{x-e^z} \\
= \;& \overset{n}{a}_1.(x-1)^{n-1} + \overset{n}{a}_2.(x-1)^{n-2} + \overset{n}{a}_3.(x-1)^{n-3} + \cdots + \overset{n}{a}_n.(x-1)^0 \\
= \;& \overset{n}{\alpha}_1.x^{n-1} + \overset{n}{\alpha}_2.x^{n-2} + \overset{n}{\alpha}_3.x^{n-3} + \cdots + \overset{n}{\alpha}_n.x^0.
\end{aligned}\right.$$

Für $x = 1$ entsteht hieraus, weil $\underset{z=0}{D^n}(e^z-1)^n = n!$ ist:

$$(72.)\qquad \overset{n}{\alpha}_1 + \overset{n}{\alpha}_2 + \overset{n}{\alpha}_3 + \overset{n}{\alpha}_4 + \cdots + \overset{n}{\alpha}_n = \overset{n}{a}_n = n!,$$

was sich übrigens auch ohne weiteres aus (5.) und (11.) für $x = \infty$ ergiebt.

Weicht x von $+1$ ab, so ist **)

$$(73.)\qquad \underset{z=0}{D^n}\frac{(x-1)^{n+1}-(e^z-1)^{n+1}}{x-e^z} = (x-1)^{n+1}.\underset{z=0}{D^n}\frac{1}{x-e^z},$$

---

*) So weit in dieser Gleichung die Ausdrücke mit den a und den α verglichen werden, kann man sie auch aus (14.) oder (15.) herleiten.

) *Scherk* beruft sich im 4. Bande dieses Journals, S. 300, darauf, dass ***Euler* in den Instit. calc. diff. T. II, Cap. VII, § 173 ff. gefunden, ***Laplace*** aber direct bewiesen habe, es sei — was bei uns aus (73.) und (71.) hervorgeht —:

$$\underset{z=0}{D^n}\frac{x-1}{x-e^z} = \frac{1}{(x-1)^n}\cdot\{\overset{n}{\alpha}_1.x^{n-1} + \overset{n}{\alpha}_2.x^{n-2} + \overset{n}{\alpha}_3.x^{n-3} + \cdots + \overset{n}{\alpha}_n.x^0\},$$

weil dann $z = 0$ eine $(n+1)$-fache Wurzel der Function $\frac{(e^z-1)^{n+1}}{x-e^z}$ ist, deren n^{te} Derivirte also bei $z = 0$ verschwindet.

Bei den Anwendungen auf (46.) und (52.) ist $x = -1$ zu setzen, und daher gehen (68.) und (67.) über in:

$$(74.)\qquad \mathfrak{B}(\tfrac{1}{2}, n) = -\frac{n}{2^{2n-1}}\cdot\{\overset{n-1}{\alpha}_1 - \overset{n-1}{\alpha}_2 + \overset{n-1}{\alpha}_3 - \overset{n-1}{\alpha}_4 + \cdots + (-1)^n . \overset{n-1}{\alpha}_{n-1}\}$$

und

$$(75.)\qquad u_{2r} = (-1)^{r-1}\cdot\{\overset{2r-1}{\alpha}_1 - \overset{2r-1}{\alpha}_2 + \overset{2r-1}{\alpha}_3 - \overset{2r-1}{\alpha}_4 + \overset{2r-1}{\alpha}_5 - \cdots + \overset{2r-1}{\alpha}_{2r-1}\}.$$

Wenn es nicht sonst schon bekannt wäre, dass $\mathfrak{B}(\frac{1}{2}, 2r+1)$ verschwindet, so würde man es aus (74.) wegen der Relation (6.) schliessen. Die Anwendung von (6.) auf (75.) ergiebt:

$$(76.)\qquad u_{2r} = \overset{2r-1}{\alpha}_r - 2 . \overset{2r-1}{\alpha}_{r-1} + 2 . \overset{2r-1}{\alpha}_{r-2} - \cdots + (-1)^{r-1} . 2 . \overset{2r-1}{\alpha}_1,$$

was genau der in der voranstehenden Anmerkung erwähnte, von *Scherk* reproducirte *Laplace*sche Ausdruck ist.

Combinirt man mit (76.) die aus (72.) und (6.) hervorgehende Gleichung

$$(2r-1)! = \overset{2r-1}{\alpha}_r + 2 . \overset{2r-1}{\alpha}_{r-1} + 2 . \overset{2r-1}{\alpha}_{r-2} + \cdots + 2 . \overset{2r-1}{\alpha}_1,$$

so erhält man durch Subtraction die Ausdrücke:

$$(77.)\qquad \begin{cases} u_{4r} = (4r-1)! - 4\cdot\{\overset{4r-1}{\alpha}_1 + \overset{4r-1}{\alpha}_3 + \overset{4r-1}{\alpha}_5 + \cdots + \overset{4r-1}{\alpha}_{2r-1}\}, \\ u_{4r+2} = (4r+1)! - 4\cdot\{\overset{4r+1}{\alpha}_2 + \overset{4r+1}{\alpha}_4 + \overset{4r+1}{\alpha}_6 + \cdots + \overset{4r+1}{\alpha}_{2r}\}, \end{cases}$$

welche zur Berechnung von u_{4r} und u_{4r+2} nur die Kenntniss von r Zahlen α verlangen; und durch Addition:

$$u_{2r} = -(2r-1)! + 2\,\overset{2r-1}{\alpha}_r + 4\cdot\{\overset{2r-1}{\alpha}_{r-2} + \overset{2r-1}{\alpha}_{r-4} + \overset{2r-1}{\alpha}_{r-6} + \cdots\},$$

was nicht viel complicirter ist *).

---

und stützt darauf seine Deductionen. Dass diese Gleichung ihre Gültigkeit für $x = +1$ verliert, merkt er nicht an und notirt daher auch nicht die Relation (72.); desgl. thut dies auch nicht *Lacroix,* welcher sie im Traité des diff. p. 107 auf einem ganz anderen Wege ableitet, als es oben geschehen ist. Der andere Ausdruck in (71.) mit den Zahlen a kommt, wie es scheint, früher nicht vor, daher auch nicht der Ausdruck (67.) für u_{2r}; dagegen ist (75.) bereits von *Laplace* aufgefunden und von *Lacroix* im Traité des diff. p. 114, entwickelt, wenngleich mit weniger einfachen Mitteln als oben.

*) Der Ausdruck (77.) ist ungefähr ebenso compendiös, wie der *Scherk*sche (88.).

11. Andere Ausdrücke für u_{2r} und u_{2r+1} greifen nach Abschnitt 8. auf die Derivirten der Function $\frac{e^{\frac{1}{2}z}}{e^z+1}$ zurück. Die letzteren lassen sich nach der im vorigen Abschnitt angewandten Methode auf mehrfache Weise entwickeln.

Wir wollen zunächst von der Zerlegung ausgehen:

$$\frac{e^{\frac{1}{2}z}}{e^z+1} = -i\cdot\frac{1}{e^z+1}-\frac{1}{i-e^{\frac{1}{2}z}},$$

aus welcher folgt:

$$(78.)\qquad \underset{z=0}{D^n}\frac{e^{\frac{1}{2}z}}{e^z+1} = -i.\underset{z=0}{D^n}\frac{1}{e^z+1}-\frac{1}{2^n}\cdot\underset{z=0}{D^n}\frac{1}{i-e^z}.$$

Die Entwickelung des ersten Summanden der rechten Seite ist in dem vorigen Abschnitt völlig ausgeführt.

Für den zweiten Summanden ergiebt sich aus (73.) und (71.):

$$\begin{aligned}\underset{z=0}{D^n}\frac{1}{i-e^z} &= \frac{\overset{n}{a}_1}{(i-1)^2}+\frac{\overset{n}{a}_2}{(i-1)^3}+\frac{\overset{n}{a}_3}{(i-1)^4}+\cdots+\frac{\overset{n}{a}_n}{(i-1)^{n+1}}\\ &= \frac{1}{(i-1)^{n+1}}\cdot\left\{\overset{n}{\alpha}_1.i^{n-1}+\overset{n}{\alpha}_2.i^{n-2}+\overset{n}{\alpha}_3.i^{n-3}+\cdots+\overset{n}{\alpha}_n.i^0\right\}.\end{aligned}$$

Substituirt man hierin

$$\frac{1}{i-1}=\frac{-1-i}{2}=\frac{e^{-i\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}},\quad i=e^{i\frac{\pi}{2}},$$

so erhält man:

$$(79.)\quad\left\{\begin{aligned}&2^{\frac{n+1}{2}}.\underset{z=0}{D^n}\frac{1}{i-e^z}\\ &= \sqrt{2}^{n-1}.\overset{n}{a}_1.e^{-i2.\frac{3\pi}{4}}+\sqrt{2}^{n-2}.\overset{n}{a}_2.e^{-i3.\frac{3\pi}{4}}+\cdots+\sqrt{2}^0.\overset{n}{a}_n.e^{-i(n+1)\frac{3\pi}{4}}\\ &= \overset{n}{\alpha}_1.e^{-i(n+5)\frac{\pi}{4}}+\overset{n}{\alpha}_2.e^{-i(n+7)\frac{\pi}{4}}+\cdots+\overset{n}{\alpha}_n.e^{-i(3n+3)\frac{\pi}{4}}.\end{aligned}\right.$$

Da nach (52.)

$$u_{2r+1} = (-1)^r.2^{2r+1}.\underset{z=0}{D^{2r}}\frac{e^{\frac{1}{2}z}}{e^z+1}$$

ist, so folgert man demnach unter Rücksicht auf (51.) zunächst:

$$(80.)\qquad u_{2r+1} = (-1)^{r+1}.2.\underset{z=0}{D^{2r}}\frac{1}{i-e^z}.$$

Und hieraus ergiebt sich nach dem Obigen einerseits:

$$(81.)\quad\left\{\begin{aligned}(-1)^{r+1}.u_{2r+1} &= \tfrac{1}{2}\cdot(\overset{2r}{a}_2-\overset{2r}{a}_3)+\tfrac{1}{4}\cdot\overset{2r}{a}_4-\tfrac{1}{8}\cdot(\overset{2r}{a}_6-\overset{2r}{a}_7)-\tfrac{1}{16}\cdot\overset{2r}{a}_8+\tfrac{1}{32}\cdot(\overset{2r}{a}_{10}-\overset{2r}{a}_{11})\\ &\quad+\tfrac{1}{64}\cdot\overset{2r}{a}_{12}-\tfrac{1}{128}\cdot(\overset{2r}{a}_{14}-\overset{2r}{a}_{15})-\tfrac{1}{256}\cdot\overset{2r}{a}_{16}+\cdots\end{aligned}\right.$$

nebst:

$$(82.)\quad 0 = \overset{2r}{a}_1 - \tfrac{1}{2}\cdot\overset{2r}{a}_2 + \tfrac{1}{4}\cdot(\overset{2r}{a}_4 - \overset{2r}{a}_5) + \tfrac{1}{8}\cdot\overset{2r}{a}_6 - \tfrac{1}{16}\cdot(\overset{2r}{a}_8 - \overset{2r}{a}_9) - \tfrac{1}{32}\cdot\overset{2r}{a}_{10} + \cdots;$$

andrerseits *):

$$(83.)\quad 2^{r-1}.u_{2r+1} = \overset{2r}{\alpha}_r - \overset{2r}{\alpha}_{r-1} - \overset{2r}{\alpha}_{r-2} + \overset{2r}{\alpha}_{r-3} + \overset{2r}{\alpha}_{r-4} - \overset{2r}{\alpha}_{r-5} - \overset{2r}{\alpha}_{r-6} + \cdots \pm \overset{2r}{\alpha}_1.$$

Formeln für u_{2r+1}, welche aus der Vereinigung von (81.) mit (82.) entstehen, will ich übergehen, in Bezug auf (83.) aber noch anmerken, dass sie mit der aus (72.) und (6.) folgenden Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\cdot(2r)! = \overset{2r}{\alpha}_r + \overset{2r}{\alpha}_{r-1} + \overset{2r}{\alpha}_{r-2} + \cdots + \overset{2r}{\alpha}_1$$

zusammen die noch einfacheren Ausdrücke liefert:

$$(84.)\quad \begin{cases} u_{2r+1} = +\dfrac{(2r)!}{2^r} - \dfrac{1}{2^{r-2}}\cdot\{(\overset{2r}{\alpha}_{r-1} + \overset{2r}{\alpha}_{r-2}) + (\overset{2r}{\alpha}_{r-5} + \overset{2r}{\alpha}_{r-6}) + (\overset{2r}{\alpha}_{r-9} + \overset{2r}{\alpha}_{r-10}) + \cdots\} \\[2mm] \phantom{u_{2r+1}} = -\dfrac{(2r)!}{2^r} + \dfrac{1}{2^{r-2}}\cdot\{\overset{2r}{\alpha}_r + (\overset{2r}{\alpha}_{r-3} + \overset{2r}{\alpha}_{r-4}) + (\overset{2r}{\alpha}_{r-7} + \overset{2r}{\alpha}_{r-8}) + \cdots\}. \end{cases}$$

Setzt man ferner in (78.) für n die ungrade Zahl $(2r-1)$, so verschwindet ihre linke Seite nach (49.), und es folgt mit Rücksicht auf (52.):

$$(85.)\quad u_{2r} = (-1)^r.2i.\underset{z=0}{D^{2r-1}}\frac{1}{i-e^z}.$$

Dies giebt nach (78.) einerseits:

$$(86.)\quad (-1)^{r+1}.u_{2r} = \overset{2r-1}{a}_1 - \tfrac{1}{2}\cdot\overset{2r-1}{a}_2 + \tfrac{1}{4}\cdot(\overset{2r-1}{a}_4 - \overset{2r-1}{a}_5) + \tfrac{1}{8}\cdot\overset{2r-1}{a}_6 - \tfrac{1}{16}\cdot(\overset{2r-1}{a}_8 - \overset{2r-1}{a}_9) - \tfrac{1}{32}\cdot\overset{2r-1}{a}_{10} + \cdots$$

nebst:

$$(87.)\quad 0 = (\overset{2r-1}{a}_2 - \overset{2r-1}{a}_3) + \tfrac{1}{2}\cdot\overset{2r-1}{a}_4 - \tfrac{1}{4}\cdot(\overset{2r-1}{a}_6 - \overset{2r-1}{a}_7) - \tfrac{1}{8}\cdot\overset{2r-1}{a}_8 + \tfrac{1}{16}\cdot(\overset{2r-1}{a}_{10} - \overset{2r-1}{a}_{11}) + \tfrac{1}{32}\cdot\overset{2r-1}{a}_{12} + \cdots;$$

und andererseits **):

$$(88.)\quad u_{2r} = \frac{1}{2^{r-1}}\cdot\{\overset{2r-1}{\alpha}_r - 2.\overset{2r-1}{\alpha}_{r-2} + 2.\overset{2r-1}{\alpha}_{r-4} - 2.\overset{2r-1}{\alpha}_{r-6} + \cdots\}.$$

Dass nicht bloss die u_{2r} ganze Zahlen sind — wie im Abschnitt 10. aus Anlass der Formel (67.) angemerkt wurde — sondern auch die u_{2r+1}, ersieht man, ausser aus (81.) nach der Substitution $\overset{2r}{a}_n = n!\overset{2r}{\mathfrak{a}}_n$, auch ohne weiteres aus der Entwickelung von

$$u_{2r+1} = (-1)^r.2^{2r+1}.\underset{z=0}{D^{2r}}\frac{e^{\frac{1}{2}z}}{e^z+1},$$

wenn man den Ausdruck

*) Dies ist der nur weiter entwickelte *Scherk*sche Ausdruck für die Secantencoefficienten. (Dieses Journal Bd. 4. S. 304.)

**) Der Ausdruck (88.) ist der *Scherk*sche. (Dieses Journal Bd. 4, S. 304.)

$$\frac{e^{\frac{1}{2}z}}{e^z+1} = e^{\frac{1}{2}z}\cdot\frac{1}{e^z+1}$$

nach dem *Leibniz*schen Satz mit Rücksicht auf diejenigen Werthe differentiirt, welche die Derivirten von $\frac{1}{e^z+1}$ für $z=0$ erlangen. Es kommt nämlich heraus:

$$(89.)\quad u_{2r+1} = \binom{2r}{1}\cdot u_{2r}-\binom{2r}{3}\cdot u_{2r-2}+\binom{2r}{5}\cdot u_{2r-4}-\cdots+(-1)^{r-1}\cdot\binom{2r}{2r-1}\cdot u_2+(-1)^r;$$

wo u_{2r+1} offenbar aus ganzen Zahlen durch Addition und Subtraction zusammengesetzt ist; *so dass,* wie gesagt, u_{2r+1} *selbst eine ganze Zahl sein muss.* — Umgekehrt erhält man durch die analoge Behandlung von

$$\frac{1}{e^z+1} = e^{-\frac{1}{2}z}\cdot\frac{e^{\frac{1}{2}z}}{e^z+1}$$

die Relation*):

$$(90.)\quad u_{2r} = \binom{2r-1}{1}\cdot u_{2r-1}-\binom{2r-1}{3}\cdot u_{2r-3}+\cdots+(-1)^{r-1}\cdot\binom{2r-1}{2r-1}\cdot u_1.$$

12. Im 8. Abschnitt II haben wir den bekannten Satz reproducirt, dass $\mathfrak{B}(\frac{1}{2}+x, n)$ eine grade oder ungrade Function von x ist, je nachdem n einen graden oder ungraden Werth hat.

Wir wollen diese Function in entwickelter Form darstellen.

Zu dem Zweck entnehmen wir aus (27.):

$$\mathfrak{B}(\tfrac{1}{2}+x, n) = n.\,D^{n-1}_{z=0}\frac{e^{\frac{1}{2}z+xz}-1}{e^z-1} = n.\,D^{n-1}_{z=0}\left\{\frac{e^{xz}-1}{e^z-1}+e^{xz}\cdot\frac{e^{\frac{1}{2}z}-1}{e^z-1}\right\}$$

$$= \mathfrak{B}(x,n)+n\cdot\left\{\tfrac{1}{2}x^{n-1}+\binom{n-1}{1}\cdot x^{n-2}\cdot\tfrac{1}{2}\mathfrak{B}(\tfrac{1}{2},2)+\binom{n-1}{2}\cdot x^{n-3}\cdot\tfrac{1}{3}\mathfrak{B}(\tfrac{1}{2},3)+\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+\binom{n-1}{n-1}\cdot x^0\cdot\frac{1}{n}\mathfrak{B}(\tfrac{1}{2},n)\right\},$$

oder wegen (45.):

$$\mathfrak{B}(\tfrac{1}{2}+x, n) = \mathfrak{B}(x,n)+\tfrac{1}{2}nx^{n-1}-\binom{n}{2}\cdot x^{n-2}\cdot\frac{2^2-1}{2^1}\cdot B_1+\binom{n}{4}\cdot x^{n-4}\cdot\frac{2^4-1}{2^3}\cdot B_2$$

$$-\binom{n}{6}\cdot x^{n-6}\cdot\frac{2^6-1}{2^5}\cdot B_3+\cdots.$$

Substituirt man hier $\mathfrak{B}(x,n)$ in der *Raabe*schen Form (1.), so folgt**):

---

*) Die Relationen (89.) und (90.) finden sich, in anderer Weise abgeleitet, bei *Raabe* im 42. Bande dieses Journals.

Man kann sie so zusammenfassen:

$$u_{n+1} = \sin\frac{(n+1)\pi}{2}+\binom{n}{1}\cdot u_n-\binom{n}{3}\cdot u_{n-2}+\binom{n}{5}\cdot u_{n-4}-\cdots.$$

**) Vergl. die *Raabe*schen Formeln im 42. Bande dieses Journals.

$$(91.)\quad \begin{cases} \mathfrak{B}(\tfrac{1}{2}+x,n) = x^n-\binom{n}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2^1}\right)\cdot B_1.x^{n-2}+\binom{n}{4}\cdot\left(1-\frac{1}{2^3}\right)\cdot B_2.x^{n-4} \\ \qquad\qquad -\binom{n}{6}\cdot\left(1-\frac{1}{2^5}\right)\cdot B_3.x^{n-6}+\binom{n}{8}\cdot\left(1-\frac{1}{2^7}\right)\cdot B_4.x^{n-8}-\cdots, \end{cases}$$

wo aber, wenn $n=2r$ eine *grade* Zahl ist, das letzte Glied dem hier angegebenen Bildungsgesetz nicht folgt, weil in (1.) das Glied $(-1)^{r-1}B_r.x^0$ fehlt; so dass $\mathfrak{B}(\frac{1}{2}+x, 2r)$ mit dem Gliede

$$(-1)^r\cdot\binom{2r}{2r}\cdot\left(2-\frac{1}{2^{2r-1}}\right)\cdot B_r$$

schliesst, wie es ja auch die Formel (45.) verlangt.

Für $x=-\frac{1}{4}$ ergeben sich hieraus in Verbindung mit (55.) und (52.) Relationen für u_{2r} oder B_r und für u_{2r+1}, welche aber kein grosses Interesse in Anspruch nehmen dürften, weil sie sich auch aus früher schon entwickelten Relationen leicht ableiten lassen und im Vergleich mit jenen weniger einfach sind.

13. Wir wollen uns noch mit den Zahlen $\overset{n}{\mathfrak{a}}_r$ etwas näher beschäftigen, um aus den Formeln des 9. Abschnitts ein nicht unwichtiges Resultat abzuleiten.

Es ist bereits in (72.) constatirt worden, dass $\overset{n}{a}_n = n!$ sei, weshalb nach (18.)

$$(92.)\quad \overset{n}{\mathfrak{a}}_n = 1$$

sein muss. Daher folgt aus (19.):

$$\overset{n}{\mathfrak{a}}_{n-1} = (n-1).\overset{n-1}{\mathfrak{a}}_{n-1}+\overset{n-1}{\mathfrak{a}}_{n-2} = (n-1)+\overset{n-1}{\mathfrak{a}}_{n-2};$$

und durch Summation des Gleichungssystems, welches hieraus entsteht, wenn man n der Reihe nach durch 1, 2, 3, ..., n ersetzt:

$$(93.)\quad \overset{n}{\mathfrak{a}}_{n-1} = \binom{n}{2}.$$

Verfährt man in analoger Weise mit der aus (19.) folgenden Gleichung

$$\overset{n}{\mathfrak{a}}_{n-2} = (n-2).\overset{n-1}{\mathfrak{a}}_{n-2}+\overset{n-1}{\mathfrak{a}}_{n-3},$$

so ergiebt sich:

$$(94.)\quad \overset{n}{\mathfrak{a}}_{n-2} = 3\cdot\binom{n}{4}+\binom{n}{3}.$$

In ähnlicher Weise folgert man:

$$(95.)\qquad \overset{n}{\mathfrak{a}}_{n-3} = 15\cdot\binom{n}{6}+10\cdot\binom{n}{5}+\binom{n}{4},$$

$$(96.)\qquad \overset{n}{\mathfrak{a}}_{n-4} = 105\cdot\binom{n}{8}+105\cdot\binom{n}{7}+25\cdot\binom{n}{6}+\binom{n}{5},$$

u. s. w.

oder bei einer etwas veränderten Zusammenfassung:

$$(97.)\qquad \begin{cases} \overset{n}{\mathfrak{a}}_{n-2} = 2\cdot\binom{n}{4}+\binom{n+1}{4}, \\ \overset{n}{\mathfrak{a}}_{n-3} = 6\cdot\binom{n}{6}+8\cdot\binom{n+1}{6}+\binom{n+2}{6}, \\ \overset{n}{\mathfrak{a}}_{n-4} = 24\cdot\binom{n}{8}+58\cdot\binom{n+1}{8}+22\cdot\binom{n+2}{8}+\binom{n+3}{8}, \end{cases}$$

u. s. w.

Die Aufstellung des allgemeinen Gesetzes für die Bildungsweise von $\overset{n}{\mathfrak{a}}_{n-r}$ in dieser Form ist leicht. Wir sehen hier von ihr ab, weil sie uns keinen Nutzen bietet.

Betrachtet man nun den ersten Ausdruck (63.) für v_r, so erkennt man ohne weiteres, dass — nachdem mit r ausmultiplicirt ist — alle Summanden ganze Zahlen werden, so lange $r \leqq 8$ ist, weil sich dann der Nenner jedes Coefficienten der $\mathfrak{a}$ gegen einen Factor des Zählers hebt.

Macht man $r = 9$, so gilt dasselbe von allen einzelnen Summanden ausser dem drittletzten

$$\frac{9.2^3.1.3.5\ldots29}{16}\cdot\overset{17}{\mathfrak{a}}_{15},$$

welcher nur dann eine ganze Zahl ist, wenn 2 in

$$\overset{17}{\mathfrak{a}}_{15} = 3\cdot\binom{17}{4}+\binom{17}{3} = 4.17.15.7+8.17.5$$

aufgeht. Da dies zutrifft, so ist auch v_9 eine ganze Zahl.

Dass v_{10} bis v_{16} incl. ganze Zahlen sind, erhellt aus (63.) wieder unmittelbar, weil die Nenner der Coefficienten der $\mathfrak{a}$ sich gegen einen Factor des Zählers heben.

Damit v_{17} eine ganze Zahl sei, muss 2^2 in $\overset{33}{\mathfrak{a}}_{31}$ aufgehen; was der Fall ist, weil aus (94.) folgt:

$$\overset{33}{\mathfrak{a}}_{31} = 3\cdot\binom{33}{4}+\binom{33}{3} = 8.33.31.15+16.11.31.$$

Für v_{18} bis v_{32} incl. bleibt dann wieder kein Bedenken.

Man erkennt, wenn man auf dem eingeschlagenen Wege weitergeht, dass es überhaupt nur darauf ankommt, ob $\overset{2r+1}{\mathfrak{a}}_{2r-1}$ für $r = 2^n$ durch 2^{n-3} theilbar ist.

Nun ist aber nach (94.)

$$\overset{2r+1}{\mathfrak{a}}_{2r-1} = \tfrac{1}{6}\cdot r(4r^2-1)(3r-1),$$

was für $r = 2^n$ in

$$2^{n-1}\cdot\frac{4^{n+1}-1}{4-1}\cdot(3.2^n-1)$$

übergeht; und die Division mit 2^{n-3} ergiebt eine ganze Zahl mit dem Theiler $2^2 = 4$.

Alle Summanden des Ausdrucks (63.), nachdem völlig ausmultiplicirt ist, werden ersichtlich grade Zahlen, mit Ausnahme des letzten, welcher eben so offenkundig ungrade ist. Daher ist v_r selbst ungrade.

Nimmt man noch hinzu, dass u_{2r} als eine ganze Zahl erkannt ist (Abschnitt 10.), so erhält man demnach den folgenden Lehrsatz:

Die Zahl

$$v_r = 2.(2^{2r}-1).B_r = \frac{r.u_{2r}}{2^{2r-2}}$$

ist ganz, ungrade und durch jeden ungraden Theiler von r theilbar. Die Zahl u_{2r} ist durch die $(2r-2-n)^{te}$ Potenz von 2, aber durch keine höhere, theilbar, wenn 2^n die höchste Potenz von 2 bedeutet, welche in r aufgeht.

Die neun ersten Werthe von v_r sind:

$v_1 = 1$, $v_2 = 1$, $v_3 = 3$, $v_4 = 17$, $v_5 = 5.31$, $v_6 = 3.691$, $v_7 = 7.127.43$, $v_8 = 257.3617$, $v_9 = 9.73.43867$.

Uebrigens lassen sich für die Zahlen v_r aus den bei uns angemerkten Recursionsformeln für B_r auch leicht Recursionsformeln aufstellen. Z. B. folgt, wenn man zu (40.) die Gleichung (38.) addirt, nachdem man in der letzteren r um 1 erniedrigt hat:

$$(98.)\quad v_r - \tfrac{1}{2}\cdot\binom{2r}{2}\cdot v_{r-1} + \tfrac{1}{2}\cdot\binom{2r}{4}\cdot v_{r-2} - \cdots + (-1)^{r-1}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\binom{2r}{2r-2}\cdot v_1 + (-1)^r.r = 0;$$

und aus (41.) in Verbindung mit (39.) ergiebt sich:

$$(99.)\quad v_r - \tfrac{1}{3}\cdot\binom{2r}{2}\cdot v_{r-1} + \tfrac{1}{5}\cdot\binom{2r}{4}\cdot v_{r-2} - \cdots + (-1)^{r-1}\cdot\frac{1}{2r-1}\binom{2r}{2r-2}\cdot v_1 + (-1)^r = 0.$$

Die Zahlen u_{2r+1} sind sämmtlich ungrade, wie nun die Formel (89.) ohne weiteres zeigt, weil man sämmtliche Glieder dieser Formel mit Ausnahme des letzten durch 2 theilen kann.

Berlin, October 1882.