

Werk

Titel: Homomorphieeigenschaften und mittlere Kantendichte von Graphen.

Autor: MADER, W.

Jahr: 1967

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?235181684_0174|log64

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

Homomorphieeigenschaften und mittlere Kantendichte von Graphen

W. MADER

Als Abschwächung der Hadwigervermutung hat K. WAGNER in [4] die Existenz einer zahlentheoretischen Funktion $c(n)$ mit der Eigenschaft nachgewiesen: Jeder Graph G mit der chromatischen Zahl $\chi(G) \geq c(n)$ ist homomorph (bezeichnet durch: $\succ$) dem vollständigen Graphen mit n Ecken, dem $S(n)$. G. A. DIRAC¹ und H. A. JUNG (in [3]) haben gleichzeitig und unabhängig voneinander sogar bewiesen, daß eine Funktion $\varphi(n)$ existiert, für welche gilt: Jeder Graph G mit $\chi(G) \geq \varphi(n)$ enthält eine Unterteilung des $S(n)$ (kurz: $U(S(n))$) als Teilgraph. In der vorliegenden Arbeit soll gezeigt werden, daß eine Funktion $f(n)$ mit der Eigenschaft existiert: Jeder endliche Graph G , der mindestens $f(n) \cdot e(G)$ Kanten enthält, hat einen $U(S(n))$ als Teilgraph².

(Die hier betrachteten Graphen G haben keine mehrfachen Kanten und keine Schlingen; ihre Eckenmenge sei nicht leer; $e(G)$ bezeichne die Anzahl der Ecken, $k(G)$ die Anzahl der Kanten von G .)

Zunächst zeigen wir

Satz 1. *G sei ein endlicher Graph mit $k(G) \geq 2^{n-3} \cdot e(G)$. Dann gilt: $G \succ S(n)$. (n beliebige natürliche Zahl.)*

Der Beweis wird durch folgenden Induktionsschritt geliefert:

Lemma 1. *Voraussetzung: Jeder endliche Graph, der mindestens $n/2 \cdot e(G)$ Kanten hat, ist homomorph dem $S(h(n))$.*

Behauptung: G ist ein endlicher Graph mit $k(G) \geq n \cdot e(G) \rightarrow G \succ S(h(n) + 1)$. (n natürliche Zahl.)

Es sei also ein endlicher Graph G mit $k(G) \geq n \cdot e(G)$ gegeben. Unter den homomorphen Bildern H von G , welche die Bedingung $k(H) \geq n \cdot e(H)$ erfüllen, wählen wir einen (bezüglich der Teilordnung $\succ$) minimalen Graphen G' aus. $N(a)$ bezeichne die Menge der mit a durch Kanten in G' verbundenen Ecken. Dann gilt für jede Ecke a aus G' :

(A) $|N(a)| > n$, d. h. jede Ecke von G' hat einen Grad $\geq n + 1$.

(B) Jede Ecke von $G'(N(a))$ ³ hat (in diesem Graphen) einen Grad $\geq n$.

Zu (A): Da $k(G') \geq n \cdot e(G')$ ist, folgt $e(G') > 1$, also ist $G'' = G' - a$ nicht leer. Wäre $|N(a)| \leq n$, dann würde gelten: $k(G'') \geq k(G') - n \geq n(e(G') - 1) = ne(G'')$. Also wäre G' nicht minimal.

¹ Es ist mir unbekannt, ob die betreffende Arbeit schon erschienen ist.

² Ich möchte auch erwähnen, daß ich der Arbeit [1] von G. A. DIRAC viel verdanke.

³ Für eine Teilmenge T der Eckenmenge eines Graphen G sei $G(T)$ der von T aufgespannte Untergraph von G .

Zu (B): γ bezeichne den Grad in $G'(N(a))$. Nehmen wir an, es sei für eine Ecke $b \in N(a)$ der Grad $\gamma(b) < n$. Dann gilt für den Graphen G'' , der sich aus G' durch Zusammenzug der Kante $\{a, b\}$ ergibt:

$$k(G'') = k(G') - N(a) + (N(a) - 1 - \gamma(b)) \geq k(G') - n \geq ne(G').$$

Dies widerspricht der Bestimmung von G' .

Für den Graphen $L = G'(N(a))$ gilt somit nach (B): $k(L) \geq (1/2) e(L) \cdot n$. Nach Voraussetzung folgt also $L \succ S(h(n))$ und somit ersichtlich $G \succ G' \succ S(h(n) + 1)$. Damit ist Lemma 1 bewiesen.

Ein endlicher Graph G mit mindestens $e(G)$ Kanten ist homomorph dem $S(3)$. Durch Induktion ergibt sich also Satz 1.

Auf ähnliche Weise ergibt sich nun

Satz 2. Jeder endliche Graph G mit $k(G) \geq 2^{\binom{n-1}{2}-1} \cdot (n-1) \cdot e(G)$ enthält einen $U(S(n))$ als Teilgraph.

$G(n, m)$ bezeichne einen Graphen mit n Ecken und $m \leq \binom{n}{2}$ Kanten. Wir zeigen zunächst

Lemma 2. Voraussetzung: Es sei $m < \binom{n}{2}$ und $f(n, m)$ eine natürliche Zahl mit der Eigenschaft: Jeder endliche Graph G mit mindestens $1/2 \cdot f(n, m) \cdot e(G)$ Kanten enthält einen $U(G(n, m))$ als Teilgraph.

Behauptung: Jeder endliche Graph G mit $k(G) \geq f(n, m) \cdot e(G)$ enthält einen $U(G(n, m+1))$.

G sei also ein endlicher Graph, der die Bedingung $k(G) \geq f(n, m) \cdot e(G)$ erfüllt. Man kann G offensichtlich als zusammenhängend voraussetzen. Für eine nicht leere Eckenmenge $T \subseteq E(G)$ ⁴ bezeichne G/T denjenigen Graphen, der die Ecken $a \in E(G) - T$ und die Ecke T hat, wobei zwei Ecken aus $E(G) - T$ in G/T genau dann durch eine Kante verbunden sind, wenn sie in G durch eine Kante verbunden sind, und T genau mit allen denjenigen $a \in E(G) - T$ in G/T verbunden ist, mit welchen wenigstens ein $t \in T$ in G durch eine Kante verbunden ist.

$\mathfrak{T}$ sei die Menge aller $T \subseteq E(G)$, $T \neq \emptyset$, für welche gilt: $G(T)$ zusammenhängend und G/T erfülle die Bedingung $k(G/T) \geq f(n, m) e(G/T)$. (Alle elementigen Teilmengen von $E(G)$ gehören z. B. zu $\mathfrak{T}$.) T' sei ein maximales (bezüglich $\subseteq$) Element von $\mathfrak{T}$. $N(T')$ bezeichne die Menge aller mit T' in G/T' durch Kanten verbundenen Ecken.

Da G zusammenhängend und T' maximal in $\mathfrak{T}$ ist, sieht man genauso wie beim Beweis von Lemma 1, daß jede Ecke des Graphen $(G/T')(N(T'))$ den Grad $\geq f(n, m)$ hat. Da $(G/T')(N(T')) = G(N(T'))$ nach Definition von G/T' gilt, enthält also $G(N(T'))$ nach Voraussetzung einen $U(G(n, m))$. Je zwei beliebige Ecken a und b aus $N(T')$ kann man aber durch einen Weg verbinden, der ganz in $G(T' \cup \{a, b\})$ verläuft. Also ergibt sich die Behauptung von Lemma 2.

Da ein Graph G mit $k(G) \geq \frac{(n-1)}{2} e(G)$ einen $G(n, n-1)$ enthält, folgt

leicht durch Induktion Satz 2.

⁴ $E(G)$ bezeichne die Eckenmenge des Graphen G .

Nach Satz 1 existiert also eine (minimale) zahlentheoretische Funktion $g(n)$ (bzw. $z(n)$), für welche gilt: Jeder endliche ⁵ Graph, der in jeder Ecke einen Grad $\geq g(n)$ hat (bzw. $z(n)$ -fach zusammenhängend ist), ist homomorph dem $S(n)$. Offensichtlich gilt: $z(n) \leq g(n)$.

Für g gilt, wie leicht zu sehen ist, $g(n+1) > g(n)$. (Analog für z und die entsprechenden (minimalen) Funktionen für die Unterteilung.) Da ja $g(5) > 5$ ist, folgt also $g(n) > n$ für $n \geq 5$.

Aus der Existenz der Funktion $g(n)$ folgt auch die Existenz der (in der Einleitung erwähnten) Funktion $c(n)$, und es gilt die Abschätzung:

$$(1) \quad c(n) \leq g(n) \quad \text{für } n \geq 5.$$

G sei ein $g(n)$ -chromatischer Graph. Nach [2] ist $G \succ S(g(n))$ oder $G \succ G'$, wobei jede Ecke des endlichen Graphen G' den Grad $\geq g(n)$ hat. Da $g(n) > n$ für $n \geq 5$ ist, folgt also in jedem Fall $G \succ S(n)$, also $c(n) \leq g(n)$. (Da jeder k -chromatische Graph einen k -chromatischen kritischen (also endlichen) Teilgraph enthält, welcher ja in jeder Ecke einen Grad $\geq k-1$ hat, folgt eine ähnliche Abschätzung für die „Unterteilungsfunktionen“.)

Für natürliche Zahlen $n > 1$ sei eine Funktion $d(n)$ definiert durch:

$$d(n) = \inf\{t \mid t \text{ reelle Zahl und jeder Graph } G \text{ mit } k(G) \geq t \cdot e(G) \text{ ist homomorph dem } S(n)\}.$$

Nach Satz 1 ist $d(n)$ endlich für alle n ; es ist $d(2) = 0$ und für $n > 2$ ersichtlich $d(n) > 0$.

Für $n \geq 3$ gilt auch noch:

$$(2) \quad G \text{ endlich mit } k(G) \geq d(n) \cdot e(G) \rightarrow G \succ S(n).$$

Betrachten wir einen Graphen G mit $k(G) \geq d(n) \cdot e(G)$. Falls $k(G) > d(n) \cdot e(G)$ folgt nach Definition von $d(n)$ die Behauptung. Wir können also annehmen, daß gilt: $k(G) = d(n) \cdot e(G)$.

G_1, G_2 seien zwei eckenfremde Graphen isomorph zu G ; a_v sei eine beliebige Ecke aus G_v ($v = 1, 2$). G' entstehe aus G_1 und G_2 durch Identifizieren der Ecken a_1 und a_2 .

Dann gilt: $k(G') = 2k(G)$ und $e(G') = 2e(G) - 1$; also

$$\frac{k(G')}{e(G')} = \frac{2k(G)}{2e(G)-1} > \frac{k(G)}{e(G)} = d(n).$$

Daraus folgt somit $G' \succ S(n)$, also auch $G \succ S(n)$.

Die Funktion $g(n)$ läßt sich durch $d(n)$ nach oben und unten abschätzen:

$$(3) \quad d(n) + 1 \leq g(n) \leq \{2 \cdot d(n)\} \quad \text{für } n \geq 3^6.$$

Da für einen Graphen G , der in jeder Ecke den Grad $\geq 2 \cdot d(n)$ hat, $k(G) \geq e(G) \cdot d(n)$ gilt, folgt $g(n) \leq \{2 \cdot d(n)\}$.

⁵ Ein unendlicher Graph, der in jeder Ecke den Grad $\geq m$ hat (m beliebig), braucht nicht einmal dem $S(3)$ homomorph zu sein, da es ja Bäume mit dieser Eigenschaft gibt.

⁶ Für eine reelle Zahl a bezeichne $\{a\}$ die kleinste ganze Zahl $\geq a$.

Betrachten wir andererseits einen endlichen Graphen G , welcher der Ungleichung $k(G) \geq (g(n) - 1) e(G)$ genügt. Es existiert ein zu G homomorpher Graph G' , der nach Aussage (A) aus dem Beweis von Lemma 1 in jeder Ecke den Grad $\geq g(n)$ hat; also $d(n) \leq g(n) - 1$.

Erstaunlicherweise gilt auch für die Funktion $d(n)$:

$$(4) \quad d(n+1) \geq d(n) + 1^7.$$

Nach Definition von $d(n)$ existiert zu jedem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ ein endlicher Graph G mit $k(G) \geq (d(n) - \varepsilon) e(G)$, welcher nicht homomorph dem $S(n)$ ist. $G_1, \dots, G_m$ seien paarweise eckenfremde Graphen isomorph zu G . Eine beliebige Ecke $a \notin \bigcup_{v=1}^m E(G_v)$ verbinde man mit jeder Ecke aus jedem der Graphen G_v ; der so entstehende Graph sei $G(m)$. $G(m) \not\prec S(n+1)$ und es ist $k(G(m)) = mk(G) + me(G)$ und $e(G(m)) = me(G) + 1$. Also ergibt sich

$$\frac{k(G(m))}{e(G(m))} = \frac{mk(G)}{me(G) + 1} + \frac{me(G)}{me(G) + 1}.$$

Für $m \rightarrow \infty$ konvergiert der 1. Summand gegen $\frac{k(G)}{e(G)} \geq d(n) - \varepsilon$ und der 2. Summand gegen 1. Daraus ergibt sich die Behauptung.

Somit folgt nach Satz 1 und (4):

$$n - 2 \leq d(n) \leq 2^{n-3}.$$

Literatur

1. DIRAC, G. A.: Homomorphism theorems for graphs. Math. Ann. **153**, 69—80 (1964).
2. — On the structure of 5- and 6-chromatic abstract graphs. J. Reine Angew. Math. **214/215**, 43—52 (1964).
3. JUNG, H. A.: Anwendung einer Methode von K. Wagner bei Färbungsproblemen für Graphen. Math. Ann. **161**, 325—326 (1965).
4. WAGNER, K.: Beweis einer Abschwächung der Hadwiger-Vermutung. Math. Ann. **153**, 139—141 (1964).

W. MADER
Mathematisches Institut der Universität
5 Köln, Weyertal 86

(Eingegangen am 2. Juni 1966)

⁷ Der „Durchschnittsgrad“ wächst also mindestens um 2.