Über einige Verallgemeinerungen der fast periodischen Funktionen.

Von

W. Stepanoff in Moskau.

In seiner Abhandlung „Zur Theorie der fast periodischen Funktionen I" (Acta Mathematica **45**) hat Herr H. Bohr eine Reihe von wichtigen Resultaten über diese Funktionenklasse gegeben. Die von ihm betrachteten Funktionen sind gleichmäßig stetig im ganzen Gebiete $(-\infty, +\infty)$.

In dem vorliegenden Aufsatze will ich einige neue Definitionen einführen, welche den Begriff der Fastperiodizität auf meßbare, dann auf summierbare und endlich auf quadratisch summierbare Funktionen verallgemeinern. Weiter zeige ich, daß in jeder dieser neuen Klassen der fast periodischen Funktionen einige von H. Bohr gegebene Eigenschaften erhalten bleiben, in der letzten insbesondere alle Resultate über die verallgemeinerten Fourierreihen.

Die Bezeichnungen stimmen mit denjenigen von H. Bohr überein.

§ 1.

Sei $f(x)$ eine komplexe Funktion des reellen Argumentes x, $f(x) = u(x) + i\,v(x)$, definiert für $-\infty < x < +\infty$. Die Definition von H. Bohr[1]) lautet folgendermaßen:

„Eine (stetige) Funktion $f(x)$ soll fast periodisch heißen, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Länge $l = l(\varepsilon) > 0$ derart gibt, daß jedes Intervall $\alpha < x < \beta$ der Länge $\beta - \alpha = l$ mindestens eine Verschiebungszahl $\tau = \tau(f, \varepsilon)$ enthält." (Unter einer Verschiebungszahl $\tau = \tau(f, \varepsilon)$ ist hierbei irgendeine Zahl zu verstehen, die für alle x der Ungleichung $|f(x+\tau) - f(x)| \leqq \varepsilon$ genügt.)

Ich werde zunächst eine Verallgemeinerung dieser Definition geben, welche nur die Meßbarkeit (im Lebesgueschen Sinne) von $f(x)$ voraussetzt.

[1]) Acta Mathematica **45**, S. 30.

Definition I. *Eine meßbare, fast überall*[2]) *auf* $(-\infty, +\infty)$ *definierte und endliche Funktion* $f(x)$ *soll fast periodisch* (I) *heißen, wenn es zu zwei vorgeschriebenen positiven Zahlen* $\varepsilon < 1$ *und* d *eine Länge* l *derart gibt, daß jedes Intervall* $(X, X + l)$ *mindestens eine Zahl* $\tau = \tau(\varepsilon, d)$ *von der Beschaffenheit enthält, daß die Ungleichung* $|f(x+\tau) - f(x)| \leqq \varepsilon$ *für alle* x *gültig ist, mit etwaiger Ausnahme einer Punktmenge* $\{x\}$ *von mittlerer Dichte* $< \varepsilon$ *in jedem Intervalle der Länge* $= d$. (Die mittlere Dichte einer Menge ist der Quotient des Maßes dieser Menge durch die Länge des Intervalls.)

Bemerkungen. 1. Man könnte in der Definition (I) drei positive Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ und d vorgeben und die Verschiebungszahl $\tau = \tau(\varepsilon_1, \varepsilon_2, d)$ durch die Bedingung definieren, daß $|f(x+\tau) - f(x)| \leqq \varepsilon_1$ ist, mit Ausnahme einer Menge von Werten x, die eine mittlere Dichte $< \varepsilon_2$ in jedem Intervalle der Länge $= d$ hat. Da aber ein solches $\tau(\varepsilon_1', \varepsilon_2', d)$ zugleich ein $\tau(\varepsilon_1, \varepsilon_2, d)$ für $\varepsilon_1' \leqq \varepsilon_1$, $\varepsilon_2' \leqq \varepsilon_2$ ist, sind wir imstande, $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ zu setzen und nur die Verschiebungszahlen $\tau(\varepsilon, \varepsilon, d)$ zu betrachten.

2. Nach der Definition soll die Dichte der Ausnahmemenge $< \varepsilon$ in jedem Intervalle der Länge $= d$ sein. Daraus folgt, daß für jedes Intervall der Länge $L > d$ die mittlere Dichte dieser Menge $< 2\varepsilon$ ist. In der Tat, sei $md \leqq L < (m+1)d$ $(m \geqq 1$, ganz$)$. Dann ist das Maß der Ausnahmemenge im Intervalle der Länge L kleiner, als $(m+1)d\varepsilon$, und ihre Dichte $< \frac{(m+1)d\varepsilon}{md} \leqq 2\varepsilon$.

3. Infolge der letzteren Bemerkung ist ein $\tau(\varepsilon'', d'')$ zugleich ein $\tau(\varepsilon', d')$ für $d'' \leqq d'$, $2\varepsilon'' \leqq \varepsilon'$. Wir könnten uns also auf Verschiebungszahlen $\tau(\varepsilon, \varepsilon)$ beschränken, die von nur einer vorgeschriebenen Zahl abhängig wären, indem wir $\varepsilon = \min\left(\frac{\varepsilon'}{2}, d'\right)$ wählten. Andererseits ist für $d < \tau$ $\tau(\varepsilon_1, \varepsilon_2 d, 1)$ (im Sinne der Bemerkung 1) zugleich ein $\tau(\varepsilon_1, \varepsilon_2, d)$, da die Menge, welche in jedem Intervalle der Länge $= 1$ die mittlere Dichte $< \varepsilon_2 d$ hat, im Intervalle der Länge $d < 1$ die mittlere Dichte $< \frac{d\varepsilon_2}{d} = \varepsilon_2$ besitzt. Wir könnten also überall d gleich einer und derselben Konstante z. B. $= 1$ setzen.

Die Klasse der fast periodischen (I) Funktionen ist invariant gegenüber der Addition und Multiplikation.

Zuerst beweise ich den

Hilfssatz I. *Es sei* $f(x)$ *fast periodisch* (I) *und* d, ε' *und* $\varepsilon'' > \varepsilon'$ *beliebig gegeben. Dann kann man* $\eta_0 > 0$ *so klein angeben, daß, falls* τ_0 *eine beliebige zu* d *und* ε' *gehörige Verschiebungszahl ist, jedes* τ *mit*

[2]) D. h. mit eventueller Ausnahme einer Menge vom Maße Null.

$|\tau - \tau_0| < \eta_0$ *eine derselben Funktion gehörende Verschiebungszahl in bezug auf d und ε'' darstellt.*

Zum Beweise werde ich zuerst zeigen, daß bei gegebenen ε und d die positive Zahl η_0 so klein gewählt werden kann, daß für ein festes η mit $|\eta| \leqq \eta_0$ die Ungleichung $|f(x+\eta) - f(x)| \leqq \varepsilon$ für alle x besteht, mit etwaiger Ausnahme einer Menge der Werte x von mittlerer Dichte $< \varepsilon$ in jedem Intervalle der Länge d. Mit andern Worten, jede solche Zahl η ist eine Verschiebungszahl $\tau(\varepsilon, d)$.

Gegeben sei irgendein Intervall $(X, X+d)$; nach der Definition (I) gibt es für $f(x)$ eine Zahl $l\left(\frac{\varepsilon}{3}, d\right)$ und eine Verschiebungszahl $\tau = \tau\left(\frac{\varepsilon}{3}, d\right)$ mit $-X+1 < \tau < -X+1+l$; mittels dieser Verschiebung geht das Intervall $(X-1, X+d+1)$ in $(X+\tau-1, X+d+\tau+1)$ über, das ganz in $(0, d+l+2)$ liegt. In diesem letzteren nehmen wir eine stetige Funktion $\bar{f}(x)$, welche mit $f(x)$ übereinstimmt, außer für eine Menge vom Maße $< \frac{\varepsilon d}{6}$.[3]) Wir nehmen die positive Zahl $\eta_0 < 1$ und so klein, daß für die stetige Funktion $\bar{f}(x)$ im Intervalle $(0, d+l+2)$ die Ungleichung gilt:

$$|\bar{f}(x') - \bar{f}(x'')| \leqq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{falls} \quad |x' - x''| \leqq \eta_0.$$

Jetzt haben wir für ein festes η mit $|\eta| \leqq \eta_0$, sobald $X \leqq x \leqq X+d$ ist:

$|f(x+\tau) - f(x)| \leqq \frac{\varepsilon}{3}$, außer für eine Wertmenge x von mittlerer Dichte $< \frac{\varepsilon}{3}$;

$|f(x+\tau+\eta) - f(x+\eta)| \leqq \frac{\varepsilon}{3}$, außer für eine Wertmenge x von mittlerer Dichte $< \frac{\varepsilon}{3}$;

$f(x+\tau) = \bar{f}(x+\tau)$, außer für eine Wertmenge $x+\tau$ vom Maße $< \frac{\varepsilon d}{6}$ in $(0, d+l+2)$, also außer für eine Wertmenge x von der Dichte $< \frac{\varepsilon}{6}$ im Intervalle $(X, X+d)$.

$f(x+\tau+\eta) = \bar{f}(x+\tau+\eta)$, außer auf einer Menge von der Dichte $< \frac{\varepsilon}{6}$ in $(X, X+d)$.

$|\bar{f}(x+\tau+\eta) - \bar{f}(x+\tau)| \leqq \frac{\varepsilon}{3}$ für jedes x in $(X, X+d)$.

---

[3]) Die Existenz einer solchen Funktion folgt aus einem Theorem von Herrn N. Lusin, C. R. Paris **154** (1912), S. 1688–1690.

Daraus folgt: $|f(x+\eta)-f(x)| \leqq \varepsilon$, mit Ausnahme einer Menge von der. Dichte $< \varepsilon$ in jedem Intervalle $(X, X+d)$.

Jetzt läßt sich der Hilfsatz leicht beweisen, indem wir $\varepsilon'' - \varepsilon' = \varepsilon$ setzen und zu diesem ε die Zahl η_0 bestimmen. In der Tat, wir haben (mit Ausnahme einer Menge von der mittleren Dichte $< \varepsilon'$ bzw. ε auf jedem Intervalle der Länge d)

$$|f(x+\tau_0)-f(x)| \leqq \varepsilon', \quad |f(x+\tau_0)-f(x+\tau)| \leqq \varepsilon, \quad (|\tau-\tau_0| \leqq \eta_0),$$

woraus die Ungleichung folgt:

$$|f(x+\tau)-f(x)| \leqq \varepsilon'', \quad \text{wenn} \quad |\tau-\tau_0| \leqq \eta_0 \quad \text{ist}$$

(wobei wir eine Menge von der mittleren Dichte $< \varepsilon''$ vernachlässigen), w. z. b. w.

Dieser Hilfssatz ist im Falle der Definition (I) dem Korollar von H. Bohr (l. c., S. 36) analog. Mit Hilfe desselben kann man den Beweis des Satzes III von H. Bohr fast wörtlich wiederholen, wenn man sich noch vergegenwärtigt, daß die Differenz von zwei zu ε und d gehörigen Verschiebungszahlen einer fast periodischen (I) Funktion wiederum eine Verschiebungszahl liefert, die zu d und 2ε gehört; wir erhalten also das folgende Resultat:

Die Summe von zwei fast periodischen (I) *Funktionen ist wieder fast periodisch* (I).

Um die Invarianz der Funktionenklasse der Definition (I) gegenüber der Multiplikation zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß das Quadrat einer fast periodischen Funktion auch fast periodisch ist. Zu diesem Zwecke beweisen wir den

Hilfssatz II. *Für jede fast periodische* (I) *Funktion* $f(x)$ *kann man zu gegebenen Zahlen* d *und* ε' *eine positive Zahl* M *derart angeben, daß* $E\{|f(x)| > M\}$ *eine mittlere Dichte* $< \varepsilon'$ *in jedem Intervalle von der Länge* d *hat*[4]).

Es sei jetzt wieder das Intervall $(X, X+d)$ gegeben (X beliebig, aber fest). Mittels der Funktion $l\left(\frac{\varepsilon'}{2}, d\right)$ bestimmen wir eine Verschiebungszahl τ, so daß $(X+\tau, X+d+\tau)$ in $(0, l+d)$ enthalten ist. Da $f(x)$ im letzteren Intervalle meßbar und fast überall endlich ist, kann man eine Zahl M angeben, so daß $|f(x)| \leqq M - \frac{\varepsilon'}{2}$ für alle x, mit $0 \leqq x \leqq l+d$, ist, mit Ausnahme einer Menge vom Maße $< \frac{\varepsilon' d}{2}$. Die Dichte der Ausnahmemenge ist $< \frac{\varepsilon'}{2}$ in einem Intervalle der Länge $= d$.

[4]) $E\{|f(x)| > M\}$ bezeichnet die Menge aller Punkte x, in denen $|f(x)| > M$ ist.

Daraus folgt leicht, daß die mittlere Dichte von $E\{|f(x)| > M\}$ in $(X, X+d)$ kleiner als ε' ausfällt.

Jetzt beweisen wir den

Satz I. *Falls $f(x)$ fast periodisch* (I) *ist, gilt dasselbe auch für* $\{f(x)\}^2$.

In der Tat,

$$\{f(x+\tau)\}^2 - \{f(x)\}^2 = \{f(x+\tau) - f(x)\}\cdot\{f(x+\tau) + f(x)\}.$$

Wir bestimmen für $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{3}$ die Zahl $M \geqq 1$ des Hilfssatzes II und betrachten $l\left(\frac{\varepsilon}{3M}, d, f\right)$. Es wird

$$|\{f(x+\tau)\}^2 - \{f(x)\}^2| \leqq 2M\cdot\frac{\varepsilon}{3M} < \varepsilon,$$

außer vielleicht auf den Mengen $E\{|f(x+\tau)| > M\}$ bzw. $E\{|f(x)| > M\}$ oder $E\left\{|f(x+\tau) - f(x)| > \frac{\varepsilon}{3M}\right\}$; die erste und die zweite dieser Mengen haben ihre Dichte $< \frac{\varepsilon}{3}$ in jedem Intervalle der Länge d, die Dichte der dritten Menge ist $< \frac{\varepsilon}{3M} \leqq \frac{\varepsilon}{3}$. Die Vereinigung derselben hat die mittlere Dichte $< \varepsilon$ in jedem Intervalle der Länge d. Folglich ist f^2 fast periodisch (I), und jedes

$$l\left(\frac{\varepsilon}{3M}, d, f\right) \quad \text{liefert ein} \quad l(\varepsilon, d, f^2).$$

Die Invarianz der Fastperiodizität (I) gegenüber der Multiplikation ergibt sich jetzt (wie bei H. Bohr) aus der Identität

$$fg = \frac{1}{4}\{(f+g)^2 - (f-g)^2\}.\,[5]$$

Über eine Reihe von fast periodischen Funktionen können wir den folgenden Satz aussprechen:

Satz II. *Es sei eine Reihe $\sum_1^\infty f_k(x)$ von fast periodischen* (I) *Funktionen gegeben. Wenn man zu jedem vorgeschriebenen ε eine Zahl N bestimmen kann, so daß $\left|\sum_{n+1}^{n+m} f_k(x)\right| \leqq \varepsilon$ für ein beliebiges festes $n > N(\varepsilon)$ und eine beliebige feste natürliche Zahl m ist, mit etwaiger Ausnahme*

[5]) Der reziproke Wert $\frac{1}{f(x)}$ einer fast periodischen (I) Funktion ist fast periodisch, wenn $f(x)$ folgende Eigenschaft besitzt, die notwendig und hinreichend ist: Zu jedem vorgeschriebenen ε kann man eine Zahl α angeben, so daß $E\{|f(x)| \leqq \alpha\}$ eine mittlere Dichte $< \varepsilon$ in jedem Intervalle der Länge $= d$ hat. Mit derselben Beschränkung in bezug auf den Nenner ist also der Quotient von zwei fast periodischen (I) Funktionen auch fast periodisch.

einer Wertmenge x *von mittlerer Dichte* $< \varepsilon$ *in jedem Intervalle der Länge* $= d$, *so bestimmt diese Reihe eine fast periodische* (I) *Funktion.*

Die Reihe konvergiert nämlich im Sinne von F. Riesz (convergence en mesure) fast überall gegen eine Funktion $\Phi(x)$.[6]) Es bleibt nur zu beweisen, daß $\Phi(x)$ fast periodisch ist. Sei ε gegeben. Wir bestimmen n so groß, daß $\left|\sum_1^n f_k(x) - \Phi(x)\right| \leqq \frac{\varepsilon}{3}$ ist, außer auf einer Menge von der Dichte $< \frac{\varepsilon}{3}$ in jedem Intervalle der Länge $= d$; nun ist $S_n(x) = \sum_1^n f_k(x)$ fast periodisch (I), als eine endliche Summe von fast periodischen Funktionen. Wir bestimmen $l\left(\frac{\varepsilon}{3}, d, S_n\right)$ und haben für eine zugehörige Verschiebungszahl τ:

$$\left.\begin{array}{l} |S_n(x+\tau) - S_n(x)| \leqq \frac{\varepsilon}{3} \\ |S_n(x+\tau) - \Phi(x+\tau)| \leqq \frac{\varepsilon}{3} \\ |S_n(x) - \Phi(x)| \leqq \frac{\varepsilon}{3} \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{außer auf einer Menge von mittlerer} \\ \text{Dichte } < \frac{\varepsilon}{3} \text{ in jedem Intervalle der} \\ \text{Länge } = d. \end{array}$$

Daraus folgt: $|\Phi(x+\tau) - \Phi(x)| \leqq \varepsilon$ bis auf eine Menge von der mittleren Dichte $< \varepsilon$ im Intervalle der Länge d. Also ist $\Phi(x)$ fast periodisch (I), und $l\left(\frac{\varepsilon}{3}, d, S_n\right) =$ einem $l(\varepsilon, d, \Phi)$.

Zuletzt will ich zeigen, daß, wenn wir von der Funktion $f(x)$ die gleichmäßige Stetigkeit fordern, unsere Definition (I) in diejenige von H. Bohr übergeht[7]).

In der Tat, im Falle der gleichmäßigen Stetigkeit kann man zu einem gegebenen $\varepsilon < 3$ eine Zahl $\delta > 0$ bestimmen, so daß $|f(x') - f(x'')| \leqq \frac{\varepsilon}{3}$, sobald $|x' - x''| \leqq \delta$ ist. Unserer Definition gemäß gibt es ein $l\left(\frac{\varepsilon}{3}, d\right)$ mit $d = 2\delta$. Von den zugehörigen Verschiebungszahlen τ wissen wir dann, daß $|f(x+\tau) - f(x)| \leqq \frac{\varepsilon}{3}$ ist, in einer Gesamtheit von Punkten von der mittleren Dichte $\geqq 1 - \frac{\varepsilon}{3} > 0$ in jedem Intervalle der Länge $= d$. Man kann also in jedem Intervalle $(x - \delta, x + \delta)$ einen Punkt ξ finden, welcher nicht zur Ausnahmemenge gehört. Dann haben wir:

---

[6]) F. Riesz, Sur les suites de fonctions mesurables, C. R. Paris **148** (1909). Die Funktion $\Phi(x)$ ist bis auf eine Menge vom Maße Null definiert.

[7]) Falls $f(x)$ nur fast überall definiert ist, kann man sie mittels Grenzwerten zu einer überall definierten, gleichmäßig stetigen Funktion ergänzen.

$$|f(\xi+\tau)-f(\xi)\quad|\leqq\frac{\varepsilon}{3},$$
$$|f(\xi+\tau)-f(x+\tau)|\leqq\frac{\varepsilon}{3},$$
$$|f(\xi)\quad-f(x)\quad|\leqq\frac{\varepsilon}{3},$$

woraus $|f(x+\tau)-f(x)|\leqq\varepsilon$ ist (für jedes x), also ist $l\left(\frac{\varepsilon}{3}, d\right)$ eine Verschiebungslänge $l(\varepsilon)$ im Bohrschen Sinne.

Anderseits gibt es überall stetige Funktionen, die nicht gleichmäßig stetig und doch im Sinne der Definition (I) fast periodisch sind.

Beispiel. Wir bezeichnen der Kürze wegen durch $J(a, \lambda)$ das Intervall $\left(a-\frac{\lambda}{2}, a+\frac{\lambda}{2}\right)$. Die reelle Funktion $f(x)$ sei für $-\infty<x<+\infty$ folgendermaßen definiert.

$f(x)=0$ in allen Intervallen $J(3n, 1)$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ („Nullte Reihe von Intervallen"). Ferner in den Intervallen $J(9n\pm 1, 1)$ definieren wir $f(x)$ wie folgt: In $J(9n\pm 1, \frac{1}{2})$ sei $f(x)$ durch zwei Seiten eines gleichschenkeligen Dreiecks von der Höhe $=1$ dargestellt, in $J(9n\pm 1, 1)-J(9n\pm 1, \frac{1}{2})$ sei $f(x)=0$ („erste Reihe von Intervallen und Dreiecken"). In allen Intervallen $J(27n\pm 3\pm 1, 1)$ ist $f(x)=0$, außer in $J(27n\pm 3\pm 1, \frac{1}{4})$, wo $f(x)$ durch die Schenkel eines Dreiecks von der Höhe 2 dargestellt wird („zweite Reihe"). Im allgemeinen, in allen Intervallen

$$J(3^{m+1}\cdot n\pm 3^{m-1}\pm 3^{m-2}\pm\ldots\pm 3\pm 1, 1),\quad n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

ist $f(x)$ Null mit Ausnahme von $J\left(3^{m+1}\cdot n\pm 3^{m-1}\pm\ldots\pm 1, \frac{1}{2^m}\right)$, wo sie für jedes n durch die Schenkel eines Dreiecks der Höhe $=2^{m-1}$ dargestellt wird („m-te Reihe"). (Fig. 1.) Also ist $f(x)$ überall definiert, da

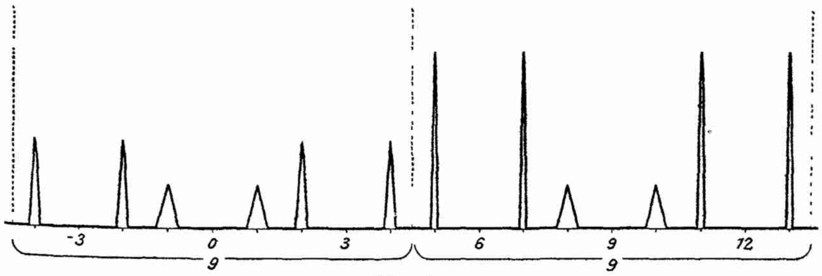

Fig. 1.

die Mittelpunkte der Intervalle die Menge aller ganzen Zahlen erschöpfen. In der Tat läßt sich jede ganze Zahl N eindeutig in der Form darstellen: $N=a_0+a_1\cdot 3+a_2\cdot 3^2+\ldots+a_{p-1}\cdot 3^{p-1}+a_p\cdot 3^p$ mit $a_i=0, +1$ oder -1. Wenn $a_0=0$, so ist $N=3n$ und gehört zu nullter Reihe; wenn allgemein $a_0 \neq 0,\ a_1 \neq 0, \ldots, a_{m-1} \neq 0,\ a_m = 0\ (1 \leqq m \leqq p+1)$, dann ist $N = 3^{m+1} \cdot n \pm 3^{m-1} + \ldots \pm 3 \pm 1$ und gehört zu m-ter Reihe.

Die so definierte Funktion ist stetig (aber nicht gleichmäßig!) und sie ist fast periodisch im Sinne der Definition (I). Für $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $d = 1$ sind alle ganzen Zahlen Verschiebungszahlen, für $\varepsilon = \frac{1}{4}$, $d = 1$ (oder $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $d = \frac{1}{2}$) sind alle Verschiebungszahlen von der Form $3n$. Im allgemeinen sei ε beliebig und $d = 1$ gegeben. Wir bestimmen m durch die Ungleichung: $\frac{1}{2^m} \leqq \varepsilon$; dann sind die Zahlen $3^m \cdot n$ zu $(\varepsilon, 1)$ gehörige Verschiebungszahlen (n ist eine beliebige ganze Zahl). In der Tat, nehmen wir $J(3^m \cdot n, 3^m)$ und vergleichen wir den Verlauf unserer Funktion in diesem Intervalle mit dem in $J(0, 3^m)$ und denken uns das letztere Intervall aus dem ersteren durch eine Verschiebung der Variablen x um $-3^m \cdot n$ hervorgegangen. In denjenigen Teilen der Intervalle $J(3^m \cdot n, 3^m)$ und $J(0, 3^m)$, die den ersten $m-1$ „Reihen" angehören, stimmen die entsprechenden Werte der Funktion überein; nur in $J(\pm 3^{m-1} \pm 3^{m-2} \pm \ldots \pm 3 + 1, 1)$ ist die Funktion durch Dreiecke m-ter Reihe dargestellt, und in bezüglichen Intervallen $J(3^m \cdot n \pm 3^{m-1} \pm 3^{m-2} \pm \ldots \pm 1, 1)$ können die analogen Dreiecke von höherer Ordnung sein, dann nämlich, wenn $n \not\equiv 0 \pmod 3$ ist. Aber die Basis eines Dreiecks von der Ordnung $\geqq m$ ist $\leqq \frac{1}{2^m} \leqq \varepsilon$. Also ist das Maß der Wertmenge, in welcher die Werte der Funktion nicht übereinstimmen, gewiß $\leqq \varepsilon$ in jedem Intervalle der Länge 1.

§ 2.

Jetzt werde ich eine engere Definition der Fastperiodizität geben, welche die Summierbarkeit von $f(x)$ (im Lebesgueschen Sinne) voraussetzt und mittlere Fastperiodizität genannt werden könnte.

Definition II. *Die fast überall auf* $-\infty < x < +\infty$ *definierte und in jedem Intervalle summierbare Funktion* $f(x)$ *soll fast periodisch* (II) *heißen, falls es zu je zwei vorgeschriebenen Zahlen* $\varepsilon > 0$ *und* $d > 0$ *eine Länge* $l(\varepsilon, d)$ *derart gibt, daß in jedem Intervalle* $(X, X+l)$ *mindestens eine Verschiebungszahl* τ *von der Beschaffenheit*

$$\frac{1}{d}\int_{\alpha}^{\alpha+d} |f(x+\tau) - f(x)|\, dx \leqq \varepsilon$$

existiert (α beliebige reelle Zahl).

Bemerkungen. 1. Sei $L > d$, sonst beliebig. Aus der Definition folgt, indem wir $\left[\frac{L}{d}\right] = m \geqq 1$ setzen:

$$\frac{1}{L}\int_a^{a+L}|f(x+\tau)-f(x)|\,dx$$

$$=\frac{1}{L}\left\{\int_a^{a+d}+\int_{a+d}^{a+2d}+\cdots+\int_{a+(m-1)d}^{a+md}+\int_{a+md}^{a+L}|f(x+\tau)-f(x)|\,dx\right\}<\frac{(m+1)\,d\varepsilon}{m\,d}\leqq 2\varepsilon.$$

2. Wenn $d<1$ ist, so folgt aus $\int_a^{a+1}|f(x+\tau)-f(x)|\,dx\leqq d\varepsilon$ die Ungleichung:

$$\frac{1}{d}\int_a^{a+d}|f(x+\tau)-f(x)|\,dx\leqq\varepsilon.$$

Jede zu $(d\varepsilon, 1)$ gehörige Verschiebungszahl gehört also auch zu (ε, d), falls $d<1$ ist. Ebenso wie in der Definition (I), könnten wir auch hier d ein für allemal gleich einer festen Zahl, z. B. $d=1$, setzen.

Aus der Definition (II) folgt, daß das Maß von $E\{|f(x+\tau)-f(x)|>k\varepsilon\}$ im Intervalle $(\alpha, \alpha+d)$ kleiner als $\frac{\varepsilon d}{k\varepsilon}=\frac{d}{k}$ ist und die mittlere Dichte dieser Menge $<\frac{1}{k}$ ausfällt. Indem wir $k=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ setzen, sehen wir, daß die obige Länge $l=l(\varepsilon, d)$ ebenfalls eine Länge $l(\varepsilon', d)$ mit $\varepsilon'=\sqrt{\varepsilon}$ im Sinne der Definition (I) ist, daß also $f(x)$ auch *fast periodisch* (I) ist.

Aus der Definition (II) folgt für die Funktion $f(x)$ die *gleichmäßige Summierbarkeit* in dem Sinne, daß man für jedes $\varepsilon>0$ und $d>0$ eine Zahl $\delta>0$ angeben kann, so daß

$$\int_E|f(x)|\,dx<\varepsilon$$

ist, wobei E eine beliebige Menge vom Maße $\mu E<\delta$ und Durchmesser $D(E)\leqq d$ ist.

Es sei in der Tat $f(x)$ fast periodisch (II) und $E\subset(X, X+d)$. Wir bestimmen $l\left(\frac{\varepsilon}{2d}, d\right)$ und nehmen ein zugehöriges τ, welches den Bedingungen $-X<\tau<l-X$ genügt; wenn x das Intervall $(X, X+d)$ durchläuft, befindet sich $x+\tau$ im Intervalle $(0, l+d)$. Wir haben also: $\frac{1}{d}\int_E|f(x+\tau)-f(x)|\,dx<\frac{\varepsilon}{2d}$ infolge der Definition (II). Alsdann nehmen wir für das feste Intervall $(0, l+d)$ eine Zahl δ derart, daß $\int_{E'}|f(x)|\,dx<\frac{\varepsilon}{2}$ ausfällt, sobald $\mu E'<\delta$ ist. (Die Existenz von $\delta>0$ folgt aus der Totalstetigkeit des Lebesgueschen Integrals.) Wir haben also, wenn $\mu E<\delta$ ist,

$$\int_E |f(x)|\,dx = \int_E |f(x+\tau) - f(x) - f(x+\tau)|\,dx$$

$$\leqq \int_E |f(x+\tau) - f(x)|\,dx + \int_E |f(x+\tau)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

w. z. b. w.

Umgekehrt, wenn wir von einer fast periodischen (I) Funktion $f(x)$ die gleichmäßige Summierbarkeit im eben beschriebenen Sinne voraussetzen, so folgt daraus, daß $f(x)$ auch fast periodisch (II) ist.

In der Tat, es seien ε und $d < 1$ gegeben; nach der Definition der gleichmäßigen Summierbarkeit gibt es eine Zahl $\delta > 0$ derart, daß $\int\limits_E |f(x)|\,dx < \frac{\varepsilon d}{3}$ ausfällt für $\mu E < \delta$ und $D(E) \leqq d$. Es sei $\varepsilon' = \min\left(\frac{\varepsilon}{3}, \frac{\delta}{d}\right)$; wir bilden $l(\varepsilon', d)$ im Sinne der Definition (I), nehmen ein zugehöriges τ und betrachten $\frac{1}{d}\int\limits_a^{a+d} |f(x+\tau) - f(x)|\,dx$.

In einer Menge vom Maße $\geqq d(1-\varepsilon')$ ist der Integrand $\leqq \frac{\varepsilon}{3}$, also das Integral selbst $\leqq \frac{\varepsilon}{3}$. In der Komplementärmenge vom Maße $< d\varepsilon' \leqq \delta$ sind $\frac{1}{d}\int |f(x)|\,dx$ und $\frac{1}{d}\int |f(x+\tau)|\,dx$ jedes kleiner als $\frac{1}{d}\cdot\frac{\varepsilon d}{3} = \frac{\varepsilon}{3}$. Also ist

$$\frac{1}{d}\int\limits_a^{a+d} |f(x+\tau) - f(x)|\,dx < \varepsilon,$$

w. z. b. w.

Aus der gleichmäßigen Summierbarkeit einer fast periodischen (II) Funktion $f(x)$ folgt *die gleichmäßige Stetigkeit von* $F(x) = \int\limits_0^x f(\alpha)\,d\alpha$ *und* $\Phi(x) = \int\limits_0^x |f(\alpha)|\,d\alpha$.

Betrachten wir z. B. die zweite Funktion. Sei ε beliebig positiv gegeben. Wir können eine positive Zahl $\delta < 1$ so angeben, daß für $\mu E < \delta$ und $D(E) < 1$ die Ungleichung $\int\limits_E |f(x)|\,dx < \varepsilon$ gilt. Nehmen wir insbesondere für diese Menge E das Intervall $(x, x+h)$ mit $|h| < \delta$. Dann ist gleichmäßig für alle x:

$$|\Phi(x+h) - \Phi(x)| = \left|\int\limits_x^{x+h} |f(x)|\,dx\right| < \varepsilon,$$

und diese Ungleichung bedeutet die gleichmäßige Stetigkeit. Daraus folgt insbesondere, daß

$$\frac{1}{L}\int\limits_a^{a+L} |f(x)|\,dx < K(d)$$

ist, wo $L \geqq d$, und d eine positive feste Zahl bedeutet, und $K(d)$ von α und L unabhängig ist.

Wir können leicht die folgende Eigenschaft beweisen:

Die Summe von zwei fast periodischen (II) *Funktionen ist fast periodisch* (II). Diese Eigenschaft gilt nämlich für alle fast periodischen (I) Funktionen; die Summe von zwei gleichmäßig summierbaren Funktionen ist aber gleichmäßig summierbar. Daraus folgt die zu beweisende Eigenschaft.

Aber das Produkt von zwei fast periodischen (II) Funktionen ist im allgemeinen nur fast periodisch (I).

Als Gegenstück zum Satze II läßt sich für eine Reihe von fast periodischen (II) Funktionen folgender Satz aussprechen:

Wenn eine Reihe $\sum\limits_1^\infty f_k(x)$ *von fast periodischen* (II) *Funktionen die Eigenschaft besitzt, daß sich zu zwei vorgeschriebenen positiven Zahlen, ε und d, ein N auffinden läßt, so daß* $\frac{1}{d}\int\limits_\alpha^{\alpha+d}\left|\sum\limits_{n+1}^{n+m} f_k(x)\right| dx < \varepsilon$ *für* $n > N$ (bei einem beliebigen natürlichen m und einem beliebigen reellen α) *ist, so bestimmt die Reihe eine fast periodische* (II) *Funktion.*

Die Reihe konvergiert nämlich im Mittel gegen eine Funktion $\Phi(x)$, gleichmäßig für $-\infty < x < +\infty$ in dem Sinne, daß

$$\frac{1}{d}\int\limits_\alpha^{\alpha+d}\left|\Phi(x) - \sum_1^n f_k(x)\right| dx$$

bei genügend großem n gleichmäßig beliebig klein wird (d ist eine feste Zahl). Es ist weiter leicht zu zeigen, daß $\Phi(x)$ fast periodisch (II) ist.

Von den von H. Bohr entdeckten Eigenschaften der fast periodischen Funktionen *gilt im Falle* (II) noch *die Existenz des Mittelwertes.* In diesem Falle existiert nämlich der Grenzwert

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T f(x)\,dx = M\{f(x)\}.$$

Der Beweis kann analog wie bei H. Bohr[8]) durchgeführt werden. Es genügt nämlich zu zeigen, daß man zum vorgeschriebenen ε eine Zahl $T_0(\varepsilon)$ bestimmen kann, so daß $\left|\frac{1}{T_1}\int\limits_0^{T_1} f(x)\,dx - \frac{1}{T_2}\int\limits_0^{T_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$ für $T_1, T_2 > T_0$ ist. Zu diesem Zwecke nehmen wir d konstant, z. B. $= 1$,

[8]) Loc. cit. S. 42—45.

und bestimmen ein $l_0 = l\left(\frac{\varepsilon}{10}, d, f\right)$, im Sinne der Definition (II); dann bezeichnen wir mit G die obere Grenze von $\frac{1}{Y}\int\limits_{a}^{a+Y} |f(x)|\,dx$ für $Y \geqq d$ und ein beliebiges reelles α (nach einer früheren Bemerkung ist G endlich). Weiter, ebenso wie in der Abhandlung von H. Bohr, bestimmen wir X durch die Ungleichung $\frac{l_0 G}{X} < \frac{\varepsilon}{10}$ und dann T_0 durch $\frac{XG}{T_0} < \frac{\varepsilon}{10}$; endlich beweisen wir wie bei H. Bohr für $T > T_0$ die Ungleichung: $\left|\frac{1}{T}\int\limits_0^T f(x)\,dx - \frac{1}{X}\int\limits_0^X f(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}$, woraus dann hier wie dort die zu beweisende Ungleichung unmittelbar folgt.

Für das Folgende brauchen wir die Feststellung von Bedingungen, unter welchen der Mittelwert gleichmäßig für eine Klasse von fast periodischen (II) Funktionen existiert, d. h. Bedingungen dafür, daß man zu einem vorgeschriebenen ε eine Zahl T_0 für die ganze Klasse $\{\psi(x)\}$ angeben kann, so daß für jede Funktion $\psi(x)$ die Ungleichung gilt: $\left|\frac{1}{T}\int\limits_0^T \psi(x)\,dx - M\{\psi(x)\}\right| < \varepsilon$, falls $T > T_0$ ist. Eine Antwort auf diese Frage gibt der folgende

Hilfssatz III. *Damit der Mittelwertsatz gleichmäßig für eine Menge $\{\psi(x)\}$ von fast periodischen* (II) *Funktionen gelte, genügt es: 1. Daß es für alle $\psi(x)$ für ein vorgeschriebenes ε und ein festes d gemeinsame Verschiebungszahlen τ in jedem Intervalle der Länge $l(\varepsilon, d)$ gebe; 2. daß eine feste Zahl g existiere, so daß $\frac{1}{d}\int\limits_{a}^{a+d} |\psi(x)|\,dx < g$ für jede $\psi(x)$ gelte (für jedes α).*

In der Tat sind in dem oben skizzierten Beweise für die Gültigkeit der Abschätzung $\leqq \varepsilon$ nur die Größen $l_0\left(\frac{\varepsilon}{10}, d, \psi\right)$, X, T_0 und G, letztere Größe als Schranke für $\frac{1}{Y}\int\limits_{a}^{a+Y} |\psi(x)|\,dx$ $(Y \geqq d)$ maßgebend. Nach einer früheren Bemerkung kann man $G = 2g$ annehmen, und nach den Voraussetzungen des Hilfssatzes kann man gerade alle fraglichen Zahlen so bestimmen, daß sie für alle ψ gemeinsame Gültigkeit haben.

Wir erinnern noch, daß d eine *feste* aber sonst beliebige Zahl bedeutet, etwa $d = 1$.

Aus dem Mittelwertsatze folgt für jede fast periodische (II) Funktion die Existenz des Mittelwertes

$$M\{f(x)\,e^{-i\lambda x}\} = a(\lambda) \qquad (\lambda \text{ beliebige reelle Zahl}),$$

da das Produkt $f(x)e^{-i\lambda x}$ als Produkt zweier Funktionen (I) jedenfalls fast periodisch (I) ist, weiterhin auf Grund der Abschätzung

$$\int_E |f(x)e^{-i\lambda x}|\,dx = \int_E |f(x)|\,dx < \varepsilon \text{ ist, falls } \mu E < \delta,\ D(E) \leqq d$$

gleichmäßig summierbar, also auch fastperiodisch (II) ist.

Wir werden beweisen, daß auch für fast periodische (II) Funktionen der Wertevorrat von λ, für welche $a(\lambda) \neq 0$ ausfällt, höchstens abzählbar ist. Zuerst werde ich einen Hilfssatz beweisen.

Hilfssatz IV. *Wenn $f(x)$ fast periodisch* (II) *ist, können wir zu einem beliebig gegebenen $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so klein angeben, daß bei jedem festen h mit $|h| < \delta$ die Ungleichung $M\{|f(x+h) - f(x)|\} < \varepsilon$ besteht.*

In der Tat folgt aus der Existenz des Mittelwertes, daß für genügend großes X

$$\left|\frac{1}{X}\int_0^X |f(x+h) - f(x)|\,dx - M\{|f(x+h) - f(x)|\}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist, und zwar, nach dem Hilfssatze III, gleichmäßig in bezug auf h, da jede zu $f(x)$ und ε gehörige Verschiebungszahl zugleich zu $|f(x+h) - f(x)|$ und 2ε gehört; auch die Zahl g kann für alle $|f(x+h) - f(x)|$ zweimal so groß als für $f(x)$ angenommen werden. Nach einem Theorem von Lebesgue[9]) kann man (bei einem festen X) ein δ so klein angeben, daß für $|h| < \delta$ die Ungleichung gilt:

$$\int_0^X |f(x+h) - f(x)|\,dx < \frac{\varepsilon X}{2}.$$

Aus diesen beiden Ungleichungen ergibt sich:

$$M\{|f(x+h) - f(x)|\} < \varepsilon.$$

Jetzt beweisen wir das Analogon zum Satze XXIV von H. Bohr: *Wenn $f(x)$ fast periodisch* (II) *ist, so ist bei beliebigem positiven festen $c > 0$ die stetige Funktion $F(x) = \int_x^{x+c} f(y)\,dy$ fast periodisch,* sogar im Sinne von H. Bohr.

Zum Beweise nehmen wir ein $l\left(\frac{\varepsilon}{c}, c\right)$ für $f(x)$ im Sinne der Definition (II), dann haben wir für ein zugehöriges τ:

---

[9]) Leçons sur les séries trigonométriques, Paris (1906), p. 15.

$$|F(x+\tau)-F(x)| = \left|\int_x^{x+c}\{f(y+\tau)-f(y)\}\,dy\right|$$
$$\leqq \int_x^{x+c}|f(y+\tau)-f(y)|\,dy \leqq c\,\frac{\varepsilon}{c}=\varepsilon.$$

Also ist $l\left(\frac{\varepsilon}{c}, c, f\right)$ ein $l(\varepsilon, F)$ (die letzte Verschiebungslänge ist im Sinne von H. Bohr zu verstehen).

Ferner können wir, ebenso wie H. Bohr[10]), folgende Gleichungen beweisen:

$$M\{F(x)e^{-i\lambda x}\} = M\{f(x)e^{-i\lambda x}\}\cdot\frac{e^{i\lambda c}-1}{i\lambda} \qquad (\lambda \neq 0)$$

und

$$M\{F(x)\} = c\cdot M\{f(x)\}.$$

Jetzt ist es leicht, den oben erwähnten Satz zu beweisen.

Satz II. *$M\{f(x)e^{-i\lambda x}\} = a(\lambda)$ ist nur für höchstens abzählbar viele Werte von λ ungleich Null.*

Tatsächlich gilt nach dem Satze X von H. Bohr (l. c. S. 49) die Aussage für $M\{F(x)e^{-i\lambda x}\}$. Zufolge unserer letzten Gleichungen kann $a(\lambda)$ nur für die zu $F(x)$ bezüglichen Werte von λ von Null verschieden sein, sowie vielleicht auch für solche, wo $\lambda c = 2k\pi$ ist (k ganz), also insgesamt nur für abzählbar viele Werte. (Um alle Werte von λ mit $a(\lambda) \neq 0$ zu ermitteln, genügt es zwei Funktionen $F_1(x)$ und $F_2(x)$ zu bilden derart, daß die zugehörigen c_1 und c_2 im irrationalen Verhältnisse stehen; es müssen alsdann die gesuchten Werte von λ genau diejenigen sein, für welche mindestens einer der Mittelwerte $M\{F_1(x)e^{-i\lambda x}\}$ und $M\{F_2(x)e^{-i\lambda x}\}$ von 0 verschieden ist.)

Also bekommen wir die „*Fourierreihe*" der Funktion $f(x)$:

$$f(x) \sim \sum_1^{\infty} A_n e^{i\Lambda_n x},$$

wo Λ_n die Werte von λ mit $a(\lambda) \neq 0$ sind, und

$$A_n = a(\Lambda_n) = M\{f(x)e^{-i\Lambda_n x}\}.$$

Ferner gilt der folgende Satz:

Satz III. *Für eine fast periodische* (II) *Funktion $f(x)$ gibt es nur endlich viele A_n, welche dem absoluten Betrage nach die vorgeschriebene positive Zahl α übertreffen.*

Betrachten wir die Funktion

$$a(\lambda) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-i\lambda x}\,dx.$$

[10]) Loc. cit [1]), S. 60—62.

Zuerst bestimmen wir Λ_0 positiv und genügend groß, um für $|\lambda| > \Lambda_0$ die Ungleichungen

$$M\left\{\left|f\left(x+\frac{\pi}{|\lambda|}\right)-f(x)\right|\right\}<\frac{\alpha}{4} \quad \text{und} \quad \int\limits_{X}^{X+\frac{2\pi}{|\lambda|}} |f(x)|\,dx<\frac{\alpha}{4} \quad (X \text{ beliebig})$$

zu haben. (Die Möglichkeit für die erste Ungleichung folgt aus dem Hilfssatze IV, für die zweite aus der gleichmäßigen Summierbarkeit von $f(x)$).

Nun nehmen wir ein beliebiges, aber festes λ mit $|\lambda| > \Lambda_0$ und bestimmen ein so großes positives $T > 1$, daß die Ungleichungen gelten:

$$\left|M\{f(x)e^{-i\lambda x}\}-\frac{1}{T}\int\limits_0^T f(x)e^{-i\lambda x}\,dx\right|<\frac{\alpha}{4}$$

und

$$\left|M\left\{\left|f\left(x+\frac{\pi}{|\lambda|}\right)-f(x)\right|\right\}-\frac{1}{T}\int\limits_0^T\left|f\left(x+\frac{\pi}{|\lambda|}\right)-f(x)\right|dx\right|<\frac{\alpha}{4}.$$

Die Bestimmung von T ist möglich wegen der Existenz des Mittelwertes.

Jetzt schätzen wir das Integral ab:

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^T f(x)e^{-i\lambda x}\,dx=\frac{1}{T}\left\{\int\limits_0^{\frac{\pi}{|\lambda|}}+\int\limits_{\frac{\pi}{|\lambda|}}^{\frac{2\pi}{|\lambda|}}+\dots+\int\limits_{\frac{(2k-2)\pi}{|\lambda|}}^{\frac{(2k-1)\pi}{|\lambda|}}+\int\limits_{\frac{(2k-1)\pi}{|\lambda|}}^{\frac{2k\pi}{|\lambda|}}+\int\limits_{\frac{2k\pi}{|\lambda|}}^{T}\right\}\quad\left(k=\left[\frac{T|\lambda|}{2\pi}\right]\right)$$

$$=\frac{1}{T}\sum_{m=0}^{k-1}\int\limits_{\frac{2m\pi}{|\lambda|}}^{\frac{(2m+1)\pi}{|\lambda|}}\left\{f(x)-f\left(x+\frac{\pi}{|\lambda|}\right)\right\}e^{-i\lambda x}\,dx+\frac{1}{T}\int\limits_{\frac{2k\pi}{|\lambda|}}^{T} f(x)e^{-i\lambda x}\,dx;$$

wir haben für den absoluten Betrag:

$$\left|\frac{1}{T}\int\limits_0^T f(x)e^{-i\lambda x}\,dx\right|\leqq\frac{1}{T}\sum_{m=0}^{k-1}\int\limits_{\frac{2m\pi}{|\lambda|}}^{\frac{(2m+1)\pi}{|\lambda|}}\left|f\left(x+\frac{\pi}{|\lambda|}\right)-f(x)\right|dx+\frac{1}{T}\int\limits_{\frac{2k\pi}{|\lambda|}}^{T}|f(x)|\,dx$$

$$<\frac{1}{T}\int\limits_0^T\left|f\left(x+\frac{\pi}{|\lambda|}\right)-f(x)\right|dx+\int\limits_{T-\frac{2\pi}{|\lambda|}}^{T}|f(x)|\,dx<\frac{3\alpha}{4}.$$

Daraus folgt:

$$|M\{f(x)e^{-i\lambda x}\}|<\alpha.$$

Also für jeden Wert von λ mit $|\lambda| > \Lambda_0$ ist $|a(\lambda)| < \alpha$. Folglich ist $|A_n| < \alpha$, sobald $|\Lambda_n| > \Lambda_0$ ist.

Jetzt betrachten wir die Werte von Λ_n mit $|\Lambda_n| \leqq \Lambda_0$. Wir nehmen c positiv und $\leqq \frac{\pi}{\Lambda_0}$ und bilden $F(x) = \int\limits_x^{x+c} f(y)\,dy$. Es sei

$$f(x) \sim \sum_1^\infty A_n e^{i\Lambda_n x}; \quad F(x) \sim \sum_1^\infty B_n e^{i\Lambda_n x},$$

dann ist $B_n = A_n \frac{e^{i\Lambda_n c} - 1}{i\Lambda_n}$ oder eventuell $B_n = cA_n$ (wenn $\Lambda_n = 0$ ist).

Für die Λ_n mit $|\Lambda_n| \leqq \Lambda_0$ haben wir:

$$\left|\frac{e^{i\Lambda_n c} - 1}{i\Lambda_n}\right| = \frac{2\sin\frac{|\Lambda_n|c}{2}}{|\Lambda_n|} = c\frac{\sin\frac{|\Lambda_n|c}{2}}{\frac{|\Lambda_n|c}{2}} \geqq \frac{2c}{\pi}.$$

Also ist $|A_n|\cdot\frac{2c}{\pi} \leqq |B_n|$ oder $|A_n| \leqq \frac{\pi}{2c}|B_n|$.

Nun ist aber $F(x)$ fast periodisch im Sinne von H. Bohr, also ist die Summe der Quadrate ihrer Fourierkoeffizienten konvergent [11]); also gibt es nur endlich viele von ihnen, die der Ungleichung $|B_n| > \frac{2c\alpha}{\pi}$ genügen; nur für die betreffenden Werte von n kann die Ungleichung $|A_n| > \alpha$ stattfinden. Also ist der Satz bewiesen.

Ich bemerke noch, daß für die fast periodischen (II) Funktionen folgende Eigenschaften der Bohrschen Fourrierreihen erhalten bleiben:

Die Fourierreihe der Summe $f(x) + g(x)$ ist gleich der formalen Summe der beiden Fourrierreihen.

Falls $f(x) \sim \sum A_n e^{i\Lambda_n x}$, so ist

$$cf(x) \sim \sum cA_n e^{i\Lambda_n x}; \quad e^{i\nu x} f(x) \sim \sum A_n e^{i(\Lambda_n + \nu)x}; \quad \bar{f}(x) \sim \sum \bar{A}_n e^{i(-\Lambda_n)x};$$
$$f(x+c) \sim \sum A_n e^{i\Lambda_n c}\cdot e^{i\Lambda_n x}; \quad f(cx) \sim \sum A_n e^{i(\Lambda_n c)x}.$$

Die Beweise sind klar.

Im Falle einer rein periodischen Funktion ist $\sum A_n e^{i\Lambda_n x}$ eine gewöhnliche Reihe von Fourier-Lebesgue.

In der Tat, sei $f(x)$ periodisch; wegen der letzten Äquivalenz können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Periode $= 2\pi$ annehmen; sei dann $f(x) \sim a_0 + \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{inx}$ die gewöhnliche Fourierreihe von $f(x)$; $F(x) = \int\limits_0^x (f(\alpha) - a_0)\,d\alpha$ ist eine stetige periodische Funktion mit der Periode 2π; wenn wir ferner $\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} F(\alpha)\,d\alpha = a_0'$ setzen, so ist $\Phi(x) = \int\limits_0^x (F(\alpha) - a_0')\,d\alpha$

[11]) Loc. cit. S. 52.

eine periodische Funktion mit gleichmäßig konvergenter Fourierreihe, $\Phi(x) = a_0'' + \sum_{-\infty}^{+\infty} -\frac{a_n}{n^2} e^{inx}$.

Wir wollen für $f(x)$ die Funktion $a(\lambda)$ berechnen. Es ist klar, daß $a(0) = M\{f(x)\} = a_0$ ist, und es genügt daher $\lambda \neq 0$ zu betrachten. Wir nehmen $\frac{1}{T}\int_0^T f(x) e^{-i\lambda x}\,dx$ und formen das Integral mittels partieller Integration um.

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(x) e^{-i\lambda x}\,dx = \frac{1}{T}\int_0^T (f(x) - a_0) e^{-i\lambda x}\,dx + \frac{a_0}{T}\int_0^T e^{-i\lambda x}\,dx$$

$$= \frac{F(T)\,e^{-i\lambda T}}{T} + \frac{i\lambda}{T}\int_0^T F(x) e^{-i\lambda x}\,dx + \frac{a_0(e^{-i\lambda T} - 1)}{-i\lambda T}$$

$$= \frac{i\lambda}{T}\int_0^T F(x) e^{-i\lambda x}\,dx + O\left(\frac{1}{T}\right).$$

Ferner ergibt sich, indem wir noch einmal partiell integrieren,

$$\frac{i\lambda}{T}\int_0^T F(x) e^{-i\lambda x}\,dx = \frac{i\lambda}{T}\int_0^T (F(x) - a_0') e^{-i\lambda x}\,dx + \frac{i\lambda}{T}\int_0^T a_0' e^{-i\lambda x}\,dx$$

$$= -\frac{\lambda^2}{T}\int_0^T \Phi(x) e^{-i\lambda x}\,dx + O\left(\frac{1}{T}\right).$$

Im letzten Integral kann man $\Phi(x)$ durch die gleichmäßig konvergente Reihe $a_0'' + \sum_{-\infty}^{+\infty} -\frac{a_n}{n^2} e^{inx}$ ersetzen und dann die Integration und den Grenzübergang gliedweise vollziehen; infolge der Gleichungen $M\{e^{i\lambda x}\} = 0$ für $\lambda \neq 0$, $M\{1\} = 1$, ergibt sich dann $a(n) = a_n$, $a(\lambda) = 0$ für $\lambda \neq n$ (n ganze Zahl), d. h. die verallgemeinerte Fourierreihe stimmt mit der gewöhnlichen überein.

Die Funktion des Beispiels von § 1 ist nicht fast periodisch (II), da sie nicht gleichmäßig summierbar ist. Um eine Funktion zu gewinnen, die auch im Sinne dieses Paragraphen faßt periodisch ist, kann man die Definition der Funktion so modifizieren:

Die m-te Reihe von Dreiecken hat ihre Höhe $= 2^{\frac{m-1}{2}}$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$. Dann ist die Funktion fast periodisch (I) und gleichmäßig summierbar, folglich fast periodisch (II).

§ 3.

Alle allgemeinen Eigenschaften der fast periodischen Funktionen, die H. Bohr in der zitierten Abhandlung bewiesen hat, bleiben erhalten, wenn wir die folgende Definition einführen, welche als mittlere quadratische Fastperiodizität bezeichnet werden dürfte.

Definition III. *Die fast überall endliche und in jedem Intervalle quadratisch summierbare Funktion* $f(x)$ *soll fast periodisch* (III) *heißen, falls es zu zwei vorgeschriebenen Zahlen* $\varepsilon > 0$ *und* $d > 0$ *eine Länge* $l(\varepsilon, d)$ *derart gibt, daß in jedem Intervalle* $(X, X+l)$ *eine Verschiebungszahl* $\tau = \tau(\varepsilon, d)$ *von der Beschaffenheit* $\frac{1}{d}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+d} |f(x+\tau) - f(x)|^2 dx \leqq \varepsilon$ *existiert* (für ein beliebiges reelles α).

Die Bemerkungen zur Definition (II) gelten auch hier: für $L > d$ ist $\frac{1}{L}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+L} |f(x+\tau) - f(x)|^2 dx < 2\varepsilon$; d könnte im folgenden fest, z. B. $d = 1$ angenommen werden.

Aus der Definition III folgt: 1. $f(x)$ ist summierbar; 2. $f(x)$ ist auch fast periodisch (II). Zum Beweise der letzten Tatsache wenden wir die Schwarzsche Ungleichung an, indem wir im Sinne der Definition (III) die Länge $l(\varepsilon^2, d)$ konstruieren und ein dazu gehöriges τ nehmen:

$$\left(\int\limits_{\alpha}^{\alpha+d} |f(x+\tau) - f(x)|\, dx\right)^2 \leqq \int\limits_{\alpha}^{\alpha+d} |f(x+\tau) - f(x)|^2 dx \int\limits_{\alpha}^{\alpha+d} dx \leqq d\varepsilon^2 \cdot d,$$

oder

$$\frac{1}{d}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+d} |f(x+\tau) - f(x)|\, dx \leqq \varepsilon.$$

Analog dem Falle der Definition (II) werden wir den folgenden Satz beweisen.

Satz IV. *Wenn* $f(x)$ *der Definition* (III) *genügt, so ist* $|f(x)|^2$ *gleichmäßig summierbar,* d. h. zu jedem ε und d läßt sich ein δ so angeben, daß

$$\int\limits_{E} |f(x)|^2 dx < \varepsilon$$

ausfällt, falls $D(E) \leqq d$ und $\mu E < \delta$ ist.

Es sei α eine beliebige reelle Zahl, und E eine im Intervalle $(\alpha, \alpha+d)$ liegende Menge. Nehmen wir $l\left(\frac{\varepsilon}{4d}, d\right)$ (im Sinne der Definition III) und eine zugehörige, den Ungleichungen $-\alpha < \tau < l - \alpha$ genügende Verschiebungszahl τ. Es ist

$$\int_E |f(x)|^2 dx \leqq \int_E (|f(x+\tau) - f(x)| + |f(x+\tau)|)^2 dx$$
$$\leqq 2\int_E |f(x+\tau) - f(x)|^2 dx + 2\left|\int_E f(x+\tau)\right|^2 dx.$$

Aus der Definition (III) folgt, daß der erste Summand $\leqq 2d \cdot \frac{\varepsilon}{4d} = \frac{\varepsilon}{2}$ ist; andererseits, befinden sich die Werte von $x+\tau$ im Intervalle $(0, l+d)$. Für das feste Intervall $(0, l+d)$ können wir ein δ bestimmen, so daß $\int_E |f(x)|^2 dx < \frac{\varepsilon}{2}$ ausfällt, sobald $E \subset (0, l+d)$ und $\mu E < \delta$ ist. Dann ist der zweite Summand $< \frac{\varepsilon}{2}$, folglich

$$\int_E |(f(x)|^2 dx < \varepsilon$$

für jede Menge E ist, die den Bedingungen $\mu E < \delta$ und $D(E) \leqq d$ genügt.

Korollar I. *Falls* $f(x)$ *fast periodisch* (III) *ist, so ist* $|f(x)|^2$ (*und* $(f(x))^2$) *fast periodisch* (II).

In der Tat, nach dem Satze I von § 1 ist das Quadrat einer fast periodischen (I) Funktion noch fast periodisch (I); nun ist $|f(x)|^2$ gleichmäßig summierbar, folglich nach dem Ergebnisse des § 2 fast periodisch (II)[12]).

Daraus folgt, daß $\int_0^x |f(\alpha)|^2 d\alpha$ gleichmäßig stetig und daß für $L \geqq d$ der Ausdruck $\frac{1}{L}\int_a^{a+L} |f(x)|^2 dx$ gleichmäßig beschränkt ist. Seine obere Grenze bezeichnen wir mit $K(d)$.

Korollar II. *Wenn* $f(x)$ *fast periodisch* (III) *ist, so existiert der Mittelwert* $M\{|f(x)|^2\}$.

Jetzt will ich die Umkehrung des Satzes IV beweisen.

Satz V. *Es sei* $f(x)$ *fast periodisch* (II) *und* $|f(x)|^2$ *gleichmäßig summierbar*; $f(x)$ *ist fast periodisch* (III)[13]).

Es seien die positiven Zahlen ε und d beliebig gegeben. Zuerst können

---

[12]) Man kann jetzt leicht beweisen, daß das Produkt zweier fast periodischer (III) Funktionen immer fast periodisch (II) ist.

[13]) Man könnte $f(x)$ nur fast periodisch (I) voraussetzen, da aus der gleichmäßigen Summierbarkeit von $|f(x)|^2$ die gleichmäßige Summierbarkeit von $|f(x)|$ folgt.

wir wegen der gleichmäßigen Summierbarkeit von $|f(x)|^2$ eine Zahl δ derart angeben, daß $\int\limits_E |f(x)|^2 dx < \frac{\varepsilon d}{8}$ ausfällt, falls $\mu E < \delta$ und $D(E) \leqq d$ ist. Wir bestimmen dann k so groß, daß $\frac{d}{k} < \delta$ sei, und endlich ε' so klein, daß $k\varepsilon' < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$ und $k\varepsilon' < 1$ sei. Dann nehme ich eine Verschiebungszahl τ für $f(x)$ (im Sinne der Def. II), die zu ε' und d gehört. Wir werden $\frac{1}{d}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+d} |f(x+\tau) - f(x)|^2 dx$ abschätzen.

Nach der Definition von τ ist:

$$\int\limits_{\alpha}^{\alpha+d} |f(x+\tau) - f(x)| dx \leqq \varepsilon' d,$$

also ist

$$\mu E\{|f(x+\tau) - f(x)| > k\varepsilon'\} < \frac{\varepsilon' d}{k\varepsilon'} = \frac{d}{k} < \delta.$$

Sei $(\alpha, \alpha+d) - E = \mathfrak{E}$; wir haben:

$$\frac{1}{d}\int\limits_{\mathfrak{E}} |f(x+\tau) - f(x)|^2 dx \leqq \frac{1}{d} d (k\varepsilon')^2 < \frac{\varepsilon}{2};$$

$$\frac{1}{d}\int\limits_{E} |f(x+\tau) - f(x)|^2 dx \leqq \frac{2}{d}\int\limits_{E} (|f(x)+\tau)|^2 + |f(x)|^2) dx < 2 \cdot \frac{2}{d}\frac{\varepsilon d}{8} = \frac{\varepsilon}{2},$$

da $\mu E < \delta$ ist. Also ist

$$\frac{1}{d}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+d} |f(x+\tau) - f(x)|^2 dx < \varepsilon;$$

$f(x)$ ist demnach im Sinne der Definition (III) fast periodisch.

Aus den Sätzen IV und V folgt, daß man statt der Definition (III) folgende äquivalente einführen könnte:

$f(x)$ ist fast periodisch (III), *falls $f(x)$ und $|f(x)|^2$ fast periodisch* (II) *sind.*

Man kann leicht zeigen, daß $\{\varphi(x) + \psi(x)\}^2$ gleichmäßig summierbar ist, sobald das gleiche für $\{\varphi(x)\}^2$ und $\{\psi(x)\}^2$ gilt. Daraus folgt, daß *die Summe zweier Funktionen, die fast periodisch* (III) *sind, ebenfalls diese Eigenschaft besitzt.*

Es gilt noch folgender Reihensatz:

Die Reihe $\sum\limits_1^\infty f_k(x)$ von fast periodischen (III) *Funktionen konvergiert* *im Mittel* (quadratisch) *gegen eine fast periodische* (III) *Funktion, falls sich für jedes positive* ε *ein* N *bestimmen läßt, so daß*

$$\frac{1}{d}\int_{\alpha}^{\alpha+d}\left|\sum_{k=n+1}^{n+m} f_k(x)\right|^2 dx < \varepsilon$$

für $n > N$, *ein beliebiges reelles* α *und beliebiges natürliches* m *ist.*

Der Beweis kann analog den Reihensätzen von § 1 und 2 durchgeführt werden.

Indem wir im Beispiele des § 1 die Höhe der Dreiecke von m-ter Reihe gleich $2^{\frac{m-1}{3}}$ setzen, gewinnen wir eine Funktion, die im Sinne der Definition (III) und nicht im Sinne von H. Bohr fast periodisch ist.

§ 4.

Ich werde nun beweisen, daß im Falle (III) auch das Analogon des Parsevalschen Satzes gilt, daß wir nämlich die *Gleichung*

$$\text{(P)} \qquad M\{|f(x)|^2\} = \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^2$$

haben, wobei A_n die „Fourierkoeffizienten" von $f(x)$ sind (*Fundamentalsatz* von H. Bohr).

Zuerst bemerke ich, daß die Betrachtungen von H. Bohr[14]) genügen, um auch in diesem Falle die bezügliche Ungleichung abzuleiten.

In der Tat, wir haben:

$$M\{|f(x) - \sum_1^N A_n e^{i\Lambda_n x}|^2\} = M\{(f(x) - \sum_1^N A_n e^{i\Lambda_n x})(\bar{f}(x) - \sum_1^N \bar{A}_n e^{-i\Lambda_n x})\}$$
$$= M\{|f(x)|^2\} - \sum_1^N |A_n|^2 \geqq 0.$$

Folglich konvergiert die Reihe $\Sigma |A_n|^2$, und für ihre Summe gilt die Ungleichung: $\sum_1^{\infty} |A_n|^2 \leqq M\{|f(x)|^2\}$.

Um die Gleichung (P) zu beweisen, betrachten wir die Funktion

$$\varphi_c(x) = \frac{1}{c}\int_x^{x+c} f(y)\,dy.$$

Nach den Ergebnissen von § 2 ist $\varphi_c(x)$ fast periodisch im Bohrschen Sinne. Aus der Fundamentaleigenschaft des Lebesgueschen Integrals ist fast überall

$$\lim_{c\to 0} \varphi_c(x) = f(x).$$

[14]) L. c. S. 48–49.

Die Fourierreihen von $f(x)$ und $\varphi_c(x)$ hängen folgendermaßen zusammen (vgl. § 2): Es sei

$$f(x) \sim \sum_1^\infty A_n e^{i\Lambda_n x},$$

dann ist

$$\varphi_c(x) \sim \sum_1^\infty B_n e^{i\Lambda_n x},$$

wobei $B_n = A_n \frac{e^{i\Lambda_n c}-1}{i\Lambda_n c}$ (für $\Lambda_n \neq 0$) und $B_n = A_n$ (wenn eventuell $\Lambda_n = 0$ ist).

Nach dem *Fundamentalsatze* von H. Bohr gilt für $\varphi_c(x)$ die Gleichung:

$$(1) \qquad M\{|\varphi_c(x)|^2\} = \sum_1^\infty |B_n|^2.$$

Um die Gleichung (P) im Falle (III) zu beweisen, genügt es, zu zeigen, daß $\sum\limits_1^\infty |B_n|^2$ gegen $\sum\limits_1^\infty |A_n|^2$ und $M\{|\varphi_c(x)|^2\}$ gegen $M\{|f(x)|^2\}$ für $c \to 0$ strebt.

Ich beginne mit dem Beweise der ersten Tatsache. Wir haben:

$$B_n = A_n \frac{e^{i\Lambda_n c}-1}{i\Lambda_n c}, \qquad |B_n| = |A_n| \cdot \left| \frac{\sin \frac{\Lambda_n c}{2}}{\frac{\Lambda_n c}{2}} \right|,$$

(oder eventuell $|B_n| = |A_n|$) also $|B_n| \leqq |A_n|$.

Da die Zahlenreihe $\Sigma |A_n|^2$ konvergiert, so konvergiert die Reihe $\Sigma |B_n|^2$ gleichmäßig (in bezug auf c); da anderseits $\lim\limits_{c\to 0} B_n = A_n$ ist, so können wir den Grenzübergang gliedweise vollziehen, und wir bekommen also

$$(2) \qquad \lim_{c\to 0} \sum_1^\infty |B_n|^2 = \sum_1^\infty |A_n|^2.$$

Jetzt schreiten wir zum zweiten Teile des Beweises.

Es handelt sich darum, die Limesgleichung $\lim\limits_{c\to 0} M\{|\varphi_c(x)|^2\} = M\{|f(x)|^2\}$ zu beweisen. Dazu genügt es, indem wir uns auf den Hilfssatz III von § 2 stützen, folgende Eigenschaften festzustellen:

1. $\frac{1}{d}\int\limits_a^{a+d} |\varphi_c(x)|^2 dx$ ist gleichmäßig (in bezug auf c) beschränkt für eine feste positive Zahl d. Wir denken uns im folgenden $d = 1$ gesetzt.

2. Die fast periodischen Funktionen $|\varphi_c(x)|^2$ besitzen gemeinsame Verschiebungszahlen (im Sinne von Definition II).

3. Für ein beliebiges festes T gilt die Gleichung:

$$\lim_{c\to 0} \frac{1}{T}\int_0^T |\varphi_c(x)|^2 dx = \frac{1}{T}\int_0^T |f(x)|^2 dx.$$

Es genügt offenbar, nur solche positive Werte von c zu betrachten, die unterhalb einer festen Schranke C liegen. Wir werden im Laufe des Beweises eine solche Schranke finden, und setzen sie vorläufig $= d$ an:

$$c \leqq d (= 1)$$

Beweis. 1. Es sei $\psi(x) = \int_0^x |f(y)|^2 dy$; $\psi(x)$ ist gleichmäßig stetig. Nun bekommen wir, indem wir die Schwarzsche Ungleichung anwenden:

$$(3) \qquad |\varphi_c(x)|^2 = \left|\frac{1}{c}\int_x^{x+c} f(y)\,dy\right|^2 \leqq \frac{1}{c^2}\int_x^{x+c} |f(y)|^2 dy \cdot \int_x^{x+c} dy$$

$$= \frac{1}{c}\int_x^{x+c} |f(y)|^2 dy = \frac{1}{c}\{\psi(x+c) - \psi(x)\}.$$

Wir nehmen das Intervall $(\alpha, \alpha + d)$ (α beliebig). Wir haben:

$$\int_\alpha^{\alpha+d} |\varphi_c(x)|^2 dx \leqq \frac{1}{c}\int_\alpha^{\alpha+d} (\psi(x+c) - \psi(x))\,dx$$

$$= \frac{1}{c}\int_{\alpha+c}^{\alpha+d+c} \psi(x)\,dx - \frac{1}{c}\int_\alpha^{\alpha+d} \psi(x)\,dx = \frac{1}{c}\int_{\alpha+d}^{\alpha+d+c} \psi(x)\,dx - \frac{1}{c}\int_\alpha^{\alpha+c} \psi(x)\,dx$$

$$= \psi(\alpha + d + \theta c) - \psi(\alpha + \theta' c); \; (0 < \theta < 1, \; 0 < \theta' < 1).$$

Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von $\psi(x)$ kann man $c_1 \leqq 1$ unabhängig von α so klein nehmen, daß für $c < C = c_1$

$$\psi(\alpha + \theta' c) - \psi(\alpha) < \frac{d}{2}, \qquad \psi(\alpha + d + \theta c) - \psi(\alpha + d) < \frac{d}{2}$$

ist. Daraus folgt:

$$\int_\alpha^{\alpha+d} |\varphi_c(x)|^2 dx < \psi(\alpha + d) - \psi(\alpha) + d = \int_\alpha^{\alpha+d} |f(x)|^2 dx + d; \quad (c < C = c_1).$$

Also erhalten wir:

$$\text{Obere Grenze von } \frac{1}{d}\int_\alpha^{\alpha+d} |\varphi_c(x)|^2 dx$$

$$\leqq \text{ob. Gr. von } \frac{1}{d}\int_\alpha^{\alpha+d} |f(x)|^2 dx + 1 = K + 1 \quad \text{für} \quad c < C = c_1$$

(vgl. die Bemerkung vom Korollar I des § 3).

2. Wir brauchen die Abschätzung des Ausdruckes

$$D = \frac{1}{d}\int_\alpha^{\alpha+d} |\varphi_c(x + \tau) - \varphi_c(x)|^2 dx.$$

Es ist:

$$\frac{1}{d}\int\limits_a^{a+d} |\varphi_c(x+\tau)-\varphi_c(x)|^2\,dx = \frac{1}{c^2 d}\int\limits_a^{a+d}\left|\int\limits_x^{x+c}(f(y+\tau)-f(y))\,dy\right|^2 dx$$

$$\leqq \frac{1}{c^2 d}\int\limits_a^{a+d}\left\{\int\limits_x^{x+c}|f(y+\tau)-f(y)|\,dy\right\}^2 dx.$$

Das innere Integral ist nach der Schwarzschen Ungleichung

$$\leqq c\int\limits_x^{x+c}|f(y+\tau)-f(y)|^2\,dy,$$

und also ist

$$D \leqq \frac{1}{cd}\int\limits_a^{a+d} dx \int\limits_x^{x+c}|f(y+\tau)-f(y)|^2\,dy.$$

In dem gewonnenen Doppelintegrale vertauschen wir die Folge der Integrationen und vergrößern das Integrationsgebiet durch Hinzufügung zweier Dreiecke[15]). Dann ist unter Berücksichtigung von $C \leqq d$

$$D \leqq \frac{1}{cd}\int\limits_a^{a+d+c}|f(y+\tau)-f(y)|^2\,dy\int\limits_{y-c}^{y}dx = \frac{1}{d}\int\limits_a^{a+d+c}|f(y+\tau)-f(y)|^2\,dy$$

$$\leqq \frac{1}{d}\int\limits_a^{a+2d}|f(y+\tau)-f(y)|^2\,dy \leqq 2\varepsilon',$$

wenn τ eine (im Sinne der Definition III) zu (ε', d) gehörende Verschiebungszahl der Funktion $f(y)$ bedeutet.

Um nun für die Funktionen $|\varphi_c(x)|^2$ das Vorhandensein einer gemeinsamen Verschiebungslänge $l(\varepsilon, d)$ bei jedem ε nachzuweisen, müssen wir den Ausdruck

$$J = \frac{1}{d}\int\limits_a^{a+d}\left||\varphi_c(x+\tau)|^2 - |\varphi_c(x)|^2\right|dx$$

abschätzen. Auf Grund der bisherigen Rechnungen gilt nun unter Benutzung der Schwarzschen Ungleichung (gleichmäßig für $c \leqq C = c_1$):

$$J^2 \leqq \frac{1}{d}\int\limits_a^{a+d}\left||\varphi_c(x+\tau)|+|\varphi_c(x)|\right|^2 dx\cdot\frac{1}{d}\int\limits_a^{a+d}\left||\varphi_c(x+\tau)|-|\varphi_c(x)|\right|^2 dx$$

$$\leqq 4(K+1)\,\frac{1}{d}\int\limits_a^{a+d}|\varphi_c(x+\tau)-\varphi_c(x)|^2\,dx \leqq 4(K+1)\,2\varepsilon'$$

---

[15]) Vgl. H. Bohr, l. c. S. 61, Fig. 6.

für alle diejenigen Werte von τ, die Verschiebungszahlen zu (ε', d, f) sind. Um also

$$J \leqq \varepsilon$$

zu erhalten, braucht man nur $\varepsilon' = \frac{\varepsilon^{2}}{8(K+1)}$ zu setzen, und jedes $l(\varepsilon' d, f)$ im Sinne von (III) ist ein $l(\varepsilon, d, |\varphi_c|^2)$ im Sinne von (II), gemeinsam für alle $c \leqq C = c_1$.

3. Wir haben zu beweisen, daß bei festem T für genügend kleines c die Differenz $\frac{1}{T}\int_0^T |\varphi_c(x)|^2\,dx - \frac{1}{T}\int_0^T |f(x)|^2\,dx$ dem absoluten Betrage nach $< \varepsilon$ gemacht werden kann.

Wir bestimmen $c_2(\varepsilon)$, so daß $|\psi(x+h) - \psi(x)| < \frac{T\varepsilon}{2}$ für $|h| < c_2$ ist; dann haben wir, infolge der Ungleichung (3):

$$\frac{1}{T}\int_0^T |\varphi_c(x)|^2\,dx \leqq \frac{1}{cT}\int_0^T \{\psi(x+c) - \psi(x)\}\,dx$$

$$= \frac{1}{T}\Big\{\psi(T+\theta c) - \psi(\theta' c)\Big\} < \frac{1}{T}\Big\{\psi(T) - \psi(0) + \frac{2T\varepsilon}{2}\Big\}.$$

Unter Bezugnahme auf die Definition von $\psi(x)$ erhalten wir:

$$(4) \qquad \frac{1}{T}\int_0^T |\varphi_c(x)|^2\,dx < \frac{1}{T}\int_0^T |f(x)|^2\,dx + \varepsilon \quad \text{für} \quad c < c_2(\varepsilon).$$

Andererseits folgt aus der Summierbarkeit von $|f(x)|^2$ die Existenz einer Zahl $\delta > 0$, so daß $\int_E |f(x)|^2\,dx < \frac{T\varepsilon}{2}$ für jede Menge $E \subset (0, T)$ mit $\mu E < \delta$ ist.

Fast überall aber konvergiert $|\varphi_c(x)|^2$ gegen $|f(x)|^2$ in $(0, T)$; wir können also $c_3(\varepsilon)$ so klein nehmen, daß $\Big||\varphi_c(x)|^2 - |f(x)|^2\Big| < \frac{T\varepsilon}{2}$ ist (für $c < c_3$), außer auf einer Menge E vom Maße $< \delta$. Indem wir dann $(0, T) - E$ mit $\mathfrak{E}$ bezeichnen, erhalten wir:

$$\frac{1}{T}\int_0^T |\varphi_c(x)|^2\,dx - \frac{1}{T}\int_0^T |f(x)|^2\,dx = \frac{1}{T}\int_{\mathfrak{E}} \Big(|\varphi_c(x)|^2 - |f(x)|^2\Big)\,dx$$

$$+ \frac{1}{T}\int_E |\varphi_c(x)|^2\,dx - \frac{1}{T}\int_E |f(x)|^2\,dx \geqq \frac{1}{T}\int_{\mathfrak{E}} \Big(|\varphi_c(x)|^2 - |f(x)|^2\Big)\,dx$$

$$- \frac{1}{T}\int_E |f(x)|^2\,dx > -\frac{1}{T}\cdot T \cdot \frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{T}\cdot\frac{T\varepsilon}{2} = -\varepsilon \quad \text{für} \quad c < c_3(\varepsilon).$$

Indem wir die eben erhaltene Ungleichung der Ungleichung (4) gegenüberstellen, erhalten wir:

$$(5)\qquad -\varepsilon < \frac{1}{T}\int_0^T |\varphi_c(x)|^2 dx - \frac{1}{T}\int_0^T |f(x)|^2 dx < \varepsilon \quad \text{für} \quad c < c_2(\varepsilon), c_3(\varepsilon),$$

also bei festem T

$$\lim_{c\to 0} \frac{1}{T}\int_0^T |\varphi_c(x)|^2 dx = \frac{1}{T}\int_0^T |f(x)|^2 dx.$$

Nachdem hiermit auch die Bedingung 3. verifiziert ist, können wir, wie bereits erwähnt, Hilfssatz III aus § 2 heranziehen, und wir erhalten:

$$(6)\qquad \lim_{c\to 0} M\{|\varphi_c(x)|\}^2 = M\{|f(x)|^2\}.$$

Aus (1), (2) und (6) folgt jetzt der verallgemeinerte *Fundamentalsatz* von H. Bohr:

Für die Funktion $f(x)$, *die fast periodisch* (III) *ist, gilt die Gleichung*

$$(\mathrm{P})\qquad \sum_1^\infty |A_n|^2 = M\{|f(x)|^2\}.$$

Aus dem Fundamentalsatze kann man (ebenso wie H. Bohr, loc. cit. S. 54—55) den *Eindeutigkeitssatz* erhalten, nämlich: falls alle Fourierkoeffizienten einer fast periodischen (III) Funktion gleich 0 sind, ist diese Funktion fast überall Null[16]).

Aus dem Fundamentalsatze folgt weiter, daß die Fourierreihe einer fast periodischen (III) Funktion gegen diese Funktion im Mittel konvergiert, d. h. daß

$$\underset{N\to\infty}{M}\left\{\left|f(x) - \sum_1^N A_n e^{i\Lambda_n x}\right|^2\right\} \to 0.$$

Januar 1925.

---

[16]) Einer freundlichen Mitteilung von Herrn H. Bohr verdanke ich die Bemerkung, die Herrn Dr. Bochner gehört, daß der Eindeutigkeitssatz schon im Falle der fast periodischen (II) Funktionen gilt. Denn $\varphi_c(x) = \frac{1}{c}\int_x^{x+c} f(y)\,dy$ ist fast periodisch im Sinne von H. Bohr, und falls die Fourierreihe von $f(x)$ keine Glieder enthält, enthält auch die Fourierreihe von $\varphi_c(x)$ gar keine Glieder; also ist $\varphi_c(x)$ nach dem Eindeutigkeitssatze von H. Bohr identisch $= 0$ für jedes c; daraus folgt durch den Grenzübergang $c \to 0$, daß $f(x)$ fast überall gleich Null sein muß.

(Eingegangen am 2. 6. 1925.)