Werk

Titel: Ueber die asyzygetischen Covarianten dritten Grades einer binären Form

Autor: Stroh

Jahr: 1888

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?235181684_0031|log43

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Ueber die asyzygetischen Covarianten dritten Grades einer binären Form.

Von

E. Stroh in München.

Die von Clebsch begründete symbolische Methode gestattet bekanntlich, zu einer binären Form eine beliebige Menge Covarianten ohne Schwierigkeit anzugeben, während die von Gordan entdeckten Criterien aus dieser Menge von Formen alle diejenigen zu entfernen suchen, welche durch die übrigen rational und ganz ausgedrückt werden können. Man hat jedoch bis jetzt kein Criterium dafür, dass eine zurückbleibende Form nicht mehr reducibel ist und es herrscht desshalb bei Aufstellung eines vollständigen Formensystems völlige Unklarheit darüber, ob auch alle überflüssigen Formen entfernt worden sind oder nicht. Dieser Fall tritt insbesondere bei Covarianten ein, die von hohem Grade in den Coefficienten sind — wie dies bei der Covariante i_4'' einer binären Form achter Ordnung der Fall war — allein eine genauere Untersuchung hat mir ergeben, dass sogar schon bei den *Covarianten dritten Grades* die Gordan'schen Criterien (Formensystem pag. 12 und 13) nicht mehr durchweg ausreichen.

Im Folgenden werden daher *neue Criterien* aufgestellt und zugleich der Nachweis geführt, dass dieselben *in allen Fällen* ausreichen. Von den zurückbleibenden Formen kann nämlich bewiesen werden, dass dieselben asyzygetisch sind und auch für die *Anzahl* dieser Formen ergiebt sich ein ganz einfacher Ausdruck.

§ 1.

Gruppen aus Ueberschiebungen dreier verschiedener Formen.

Die vorliegende Aufgabe kann auf eine andere *allgemeinerer* Art zurückgeführt werden. Jede Covariante dritten Grades, welche zu einer binären Form f gehört, kann bekanntlich als Aggregat von Ueberschiebungen $U_i = ((ff)^{2\lambda} f)^{\mu}$ dargestellt werden und es können daher solche Ueberschiebungen als *Grundformen* gewählt werden. Aus sämmtlichen Ueberschiebungen U_i, die das gleiche Gewicht*) $2\lambda+\mu=g$ haben und die man sich in eine *Gruppe* nach steigendem μ geordnet denken kann, sollen nun diejenigen ausgeschieden werden, welche durch die übrigen linear ausgedrückt werden können. Jede derartige lineare Relation

$$\sum_{i,\lambda,\mu} c_i\,((ff)^{2\lambda}f)^{\mu}=0 \qquad 2\lambda+\mu=g \tag{1}$$

hängt nun aber mit der allgemeinen Relation

$$\sum_{i,\lambda,\mu} c_i\,[((f_1f_2)^{2\lambda}f_3)^{\mu}+((f_2f_3)^{2\lambda}f_1)^{\mu}+((f_3f_1)^{2\lambda}f_2)^{\mu}]=0 \tag{2}$$

wo f_1, f_2, f_3 *verschiedene* Formen von gleicher Ordnung wie f sind, und i, λ, μ dieselben Werthe wie in (1) durchlaufen, derart zusammen, dass eine aus der anderen gefolgert werden kann. Setzt man in (2) die Formen f_i einander gleich, dann folgt die Relation (1). Wird andrerseits in (1) statt f die Combination $k_1f_1+k_2f_2+k_3f_3$ eingeführt, nach Potenzen von k_1, k_2 und k_3 entwickelt, dann liefert der Coefficient von $k_1.k_2.k_3$, der wie alle übrigen für sich verschwinden muss, die Relation (2). Sind demnach *alle* Relationen letzterer Art gefunden, dann ergeben sich daraus durch Gleichsetzen der Formen auch *alle* Relationen der ersteren Art.

Wir werden demnach die aus drei beliebigen Formen f_1, f_2, f_3, deren Ordnungen auch verschieden angenommen werden sollen, gebildeten Ueberschiebungen einer genaueren Untersuchung unterziehen und in dieser Hinsicht zunächst den Satz beweisen:

Ordnet man die sämmtlichen aus drei binären Formen zu bildenden einfachen Ueberschiebungen vom Gewicht g in drei Gruppen (nach steigendem äusseren Index):

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & ((f_1f_2)^{\alpha_1}f_3)^{\beta_1},\ ((f_1f_2)^{\alpha_1-1}f_3)^{\beta_1+1},\ \ldots \text{ etc.}\\ \text{II.} & ((f_2f_3)^{\alpha_2}f_1)^{\beta_2},\ ((f_2f_3)^{\alpha_2-1}f_1)^{\beta_2+1},\ \ldots \text{ etc.}\\ \text{III.} & ((f_3f_1)^{\alpha_3}f_2)^{\beta_3},\ ((f_3f_1)^{\alpha_3-1}f_2)^{\beta_3+1},\ \ldots \text{ etc.} \end{array} \tag{3}$$

dann enthält jede Gruppe $N=g+1-\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3$ Formen, wobei $\varepsilon_i=g-n_i$ statt negativ stets Null, zu nehmen ist; und die Formen jeder Gruppe sind unter sich linear unabhängig.

Der erste Theil des Satzes ergiebt sich am einfachsten mit Hilfe des Cayley'schen Satzes über die Anzahl der linear unabhängigen

*) Unter „Gewicht" einer Covariante wird stets dasjenige ihrer ersten Coefficienten oder symbolisch die Anzahl der darin vorkommenden Klammerfactoren verstanden.

Covarianten. Danach wird die gesuchte Zahl N durch den Coefficienten von x^g in der Entwicklung

$$(1 - x^{n_1+1})(1 - x^{n_2+1})(1 - x^{n_3+1})(1 - x)^{-2}$$
$$= (1 - x^{n_1+1} - x^{n_2+1} - x^{n_3+1} + \cdots) \sum_\lambda (\lambda + 1) x^\lambda$$

angegeben. Da nun g die Summe zweier Ordnungszahlen z. B. $n_1 + n_2$ nicht überschreiten darf, weil sonst alle Ueberschiebungen identisch verschwinden würden, so kommen die weggelassenen Glieder des ersten Factors nicht in Betracht und die Entwicklung nimmt die einfache Form an

$$\sum_g (g + 1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3) x^g,$$

worin die Zahlen ε die im Satze angegebene Bedeutung haben. Führt man statt g das *reducirte Gewicht* $\gamma = g - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3$ ein, dann wird die Zahl der linear unabhängigen Covarianten *in allen Fällen* durch $\gamma + 1$ angegeben.

Um den zweiten Theil des Satzes zu beweisen, wodurch die Zahl N eigentlich erst ihre Bedeutung für die Gruppen erlangt, sei bemerkt, dass jede lineare Relation zwischen den Ueberschiebungen der ersten Gruppe ebensolche Relationen zwischen den Ueberschiebungen $(f_1 f_2)^\lambda$ nach sich ziehen würde, die offenbar nicht existiren können. Diese würden sich nämlich ergeben, sobald f_3 zu einer Potenz einer linearen Function (xy) specialisirt und die Variabeln x und y nach Entfernung eines gemeinsamen Factors $(xy)^\varrho$ einander gleich gesetzt würden. Um nun zeigen zu können, dass die linear unabhängigen Covarianten auch aus *verschiedenen* Gruppen gewählt werden dürfen, muss zunächst eine Formel entwickelt werden, die als eine Erweiterung der wichtigen Gordan'schen Formel III (Formensystem pag. 11) zu betrachten ist.

§ 2.

Ableitung einer elementaren Hilfsformel.

Wenn zwischen drei Grössen u_1, u_2 und u_3 die einzige Relation $u_1 + u_2 + u_3 = 0$ stattfindet, dann bestehen zwischen den Producten derselben von der allgemeinen Form $u_1^{\varrho_1} u_2^{\varrho_2} u_3^{\varrho_3}$ ebenfalls lineare Relationen, von welchen eine hier entwickelt werden soll. Zunächst hat man unmittelbar die Beziehung:

$$u_1^{g-i} u_2^i = (-1)^{g-i} \sum_\lambda \binom{g-i}{\lambda} u_2^{g-\lambda} u_3^\lambda = (-1)^{g-i} \sum_\lambda \frac{\binom{g}{\lambda}\binom{g-\lambda}{i}}{\binom{g}{i}} u_2^{g-\lambda} u_3^\lambda.$$

Multiplicirt man beiderseits mit $(-1)^{k_2-i}\cdot\binom{g}{i}\binom{-k_1-1}{k_2-i}$, wo k_1, k_2 beliebige ganze Zahlen kleiner als g sein sollen, und bildet die Summe von $i=0$ bis $i=k_2$, so ergiebt sich nach einer leichten Umformung:

$$\sum_{i=0}^{k_2}(-1)^{k_2-i}\binom{g}{i}\binom{-k_1-1}{k_2-i}u_1^{g-i}u_2^{i}$$

$$=(-1)^{g+k_2}\sum_{\lambda=0}^{g}\binom{g}{\lambda}\binom{g-\lambda-k_1-1}{k_2}u_2^{g-\lambda}u_3^{\lambda}.$$

Diese letztere Summe zerfällt nun in zwei Theile. Da nämlich diejenigen Terme, für welche λ der Bedingung

$$g-k_1>\lambda>g-k_1-k_2-1$$

genügt, verschwinden, so lässt sich für diese Summe auch schreiben:

$$\sum_{i=0}^{k_3}\binom{g}{i}\binom{k_2+k_3-i}{k_2}u_2^{g-i}u_3^{i}+(-1)^{k_2}\sum_{i=0}^{k_1}\binom{g}{i}\binom{k_1+k_2-i}{k_2}u_3^{g-i}u_2^{i},$$

worin zur Abkürzung $g-k_1-k_2-1=k_3$ gesetzt ist. Um die Formel noch symmetrisch zu machen, kann in der letzten Theilsumme u_2 durch $-(u_1+u_3)$ ersetzt und sodann nach Potenzen von u_1 und u_3 entwickelt werden. Dann ergiebt sich die gesuchte Formel:

$$(4)\qquad \begin{aligned}&(-1)^{k_2}\sum_{i=0}^{k_1}\binom{g}{i}\binom{k_1+k_3-i}{k_3}u_3^{g-i}u_1^{i}\\ &+(-1)^{k_3}\sum_{i=0}^{k_2}\binom{g}{i}\binom{k_2+k_1-i}{k_1}u_1^{g-i}u_2^{i}\\ &+(-1)^{k_1}\sum_{i=0}^{k_3}\binom{g}{i}\binom{k_3+k_2-i}{k_2}u_2^{g-i}u_3^{i}=0\end{aligned}$$

durch welche im ganzen, da $k_1+k_2+k_3=g-1$ ist, $g+2$ Producte der Grössen u_1, u_2, u_3 linear verbunden sind. Auch lässt sich zeigen, dass dies die einzige Relation zwischen diesen Producten ist; doch ist es wichtiger, diesen Beweis erst zu führen, wenn die Relation (4) in eine solche zwischen Ueberschiebungen umgewandelt ist.

§ 3.

Relationen zwischen den einfachen Ueberschiebungen dreier Formen.

Die bekannte Beziehung $a_x(bc)+b_x(ca)+c_x(ab)=0$ führt darauf, in der soeben entwickelten Formel an Stelle von u_1, u_2 und u_3 bez. $a_x(bc)$, $b_x(ca)$ und $c_x(ab)$ zu setzen und mit $a_x^{n_1-g}\,b_x^{n_2-g}\,c_x^{n_3-g}$ zu multipliciren. Dann kann die erhaltene Gleichung als eine Beziehung zwischen Covarianten der Formen $f_1 = a_x^{n_1}$, $f_2 = b_x^{n_2}$, $f_3 = c_x^{n_3}$ aufgefasst werden. Geht man in bekannter Weise von den symbolischen Producten zu Ueberschiebungen über, dann ergiebt sich die Formel:

$$(5)\qquad \begin{aligned} &(-1)^{k_2}\sum_{i=0}^{k_1} a_i^{(1)}\left((f_1 f_2)^{g-i} f_3\right)^i + (-1)^{k_3}\sum_{i=0}^{k_2} a_i^{(2)}\left((f_2 f_3)^{g-i} f_1\right)^i \\ &+ (-1)^{k_1}\sum_{i=0}^{k_3} a_i^{(3)}\left((f_3 f_1)^{g-i} f_2\right)^i = 0 \qquad (k_1+k_2+k_3=g-1) \end{aligned}$$

worin die Zahlencoefficienten $a_i^{(1)}$ die Bedeutung haben:

$$a_i^{(1)} = \binom{g}{i}\sum_{\lambda=0}^{k_1-i}(-1)^\lambda\binom{k_1+k_3-i-\lambda}{k_3}\frac{\binom{n_1-g+i+\lambda}{\lambda}\binom{g-i}{\lambda}}{\binom{n_1+n_2-2g+2i+\lambda+1}{\lambda}},$$

während $a_i^{(2)}$ und $a_i^{(3)}$ durch cyklische Vertauschung der k und n hieraus hervorgehen.

Diese Formel ist jedoch nur so lange brauchbar, als das Gewicht g nicht grösser ist als eine der Ordnungen n. Sollte dies der Fall sein, so hat dies auf die Entwicklung der analogen Formel nur insoferne Einfluss, als die Gleichung des vorigen Paragraphen mit einem andern Factor zu multipliciren ist, während g durch das reducirte Gewicht γ zu ersetzen ist. Nehmen wir beispielsweise $g > n_3 > n_2 > n_1$ an, so wäre mit $(bc)^{g-n_1}(ca)^{g-n_2}(ab)^{g-n_3}$ zu multipliciren. Nun lassen sich aber alle so entstehenden Specialformeln in *eine einzige* Formel zusammenfassen. Führen wir nämlich die Differenzen

$$g - n_1 = \varepsilon_1, \quad g - n_2 = \varepsilon_2, \quad g - n_3 = \varepsilon_3$$

mit der schon erwähnten Bedingung ein, dass dieselben statt negativ stets Null sein sollen, sowie auch an Stelle von g das *reducirte* Gewicht

$$\gamma = g - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3,$$

dann kann die gesuchte Formel in folgender allgemeinen Form geschrieben werden:

$$(6)\qquad \begin{aligned} &(-1)^{k_2+\varepsilon_2}\sum_{i=0}^{k_1} a_i^{(1)}\left((f_1 f_2)^{\gamma+\varepsilon_3-i} f_3\right)^{\varepsilon_1+\varepsilon_2+i} \\ &+(-1)^{k_3+\varepsilon_3}\sum_{i=0}^{k_2} a_i^{(2)}\left((f_2 f_3)^{\gamma+\varepsilon_1-i} f_1\right)^{\varepsilon_2+\varepsilon_3+i} \\ &+(-1)^{k_1+\varepsilon_1}\sum_{i=0}^{k_3} a_i^{(3)}\left((f_3 f_1)^{\gamma+\varepsilon_2-i} f_2\right)^{\varepsilon_3+\varepsilon_1+i} = 0 \end{aligned}$$

worin die Zahlencoefficienten die Bedeutung haben:

$$a_i^{(1)} = \sum_{\lambda=0}^{k_1-i} (-1)^\lambda \binom{k_1+k_3-i-\lambda}{k_3} \binom{\gamma}{i+\lambda} \frac{\binom{n_1-\gamma-\varepsilon_2-\varepsilon_3+i+\lambda}{\lambda}\binom{\varepsilon_1+i+\lambda}{\lambda}}{\binom{n_1+n_2-2\gamma-2\varepsilon_3+2i+\lambda+1}{\lambda}}$$

nebst ähnlichen durch cyklische Vertauschung der n, k und ε hieraus hervorgehenden Ausdrücken für $a_i^{(2)}$ und $a_i^{(3)}$. Die Zahlen k haben auch hier die Bedingung

$$k_1 + k_2 + k_3 = \gamma - 1$$

zu erfüllen.

Um die *Bedeutung* der gefundenen Formel zu erkennen, sei bemerkt, dass in derselben Ueberschiebungen aus allen drei Gruppen vorkommen und zwar aus der ersten $k_1 + 1$, aus der zweiten $k_2 + 1$ und aus der dritten $k_3 + 1$ Formen. Sind die Ueberschiebungen innerhalb jeder Gruppe nach steigendem äusseren Index geordnet, dann befinden sich die in der Formel auftretenden Formen gleich im Anfange jeder der drei Gruppen und sie mögen daher kurz *Anfangsformen* genannt werden. *Es sind demnach je $\gamma + 2$ Anfangsformen der drei Gruppen durch eine lineare Relation verbunden.*

Wählt man diese Anfangsformen *nur aus zwei* Gruppen, dann ergiebt sich die bekannte Gordan'sche Formel III. In der That geht für $k_3 = -1$ die Formel (6) in die Gordan'sche Formel über.

§ 4.

Eine Eigenschaft der $\gamma + 1$ Anfangsformen dreier Gruppen.

Die entwickelte Formel kann nun dazu dienen, eine wichtige Eigenschaft der $(\gamma + 1)$ Anfangsformen nachzuweisen. Seien diese durch

$$A_0\, A_1 \ldots A_{k_1}, \quad B_0\, B_1 \ldots B_{k_2}, \quad C_0\, C_1 \ldots C_{k_3-1}$$

bezeichnet, dann lässt sich mittelst Formel (6) die Form C_{k_3}, die den Coefficienten (γ_{k_3}) hat, stets durch die Anfangsformen linear ausdrücken. Dasselbe gilt von den Formen A_{k_1+1} und B_{k_2+1}, wenn nur die Werthe der k_i derart modificirt werden, dass diese Formen in Formel (6) auftreten. Weiterhin lässt sich durch eine ähnliche Veränderung in den Werthen der k_i eine Formel herstellen, welche C_{k_3+1} durch C_{k_3} und Anfangsformen auszudrücken gestattet, und da C_{k_3} schon vorher durch die Anfangsformen ausgedrückt wurde, so folgt, dass auch C_{k_3+1} durch diese linear darstellbar sein muss. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens können dann schliesslich *alle Formen* der drei Gruppen durch die $\gamma + 1$ Anfangsformen linear ausgedrückt werden.

Wählen wir diese Anfangsformen *nur aus einer Gruppe*, dann folgt also auch, dass alle Formen der andern beiden Gruppen durch die $\gamma + 1$ Formen der ersten Gruppe linear darstellbar sind.

Wie oben bewiesen wurde, sind nun aber die Ueberschiebungen *einer* Gruppe linear unabhängig. Da nun diese und $\gamma + 1$ beliebige Anfangsformen gegenseitig linear ausdrückbar sind, so überträgt sich diese Eigenschaft auch auf letztere und wir haben den Satz:

(7) *Wählt man $\gamma + 1$ beliebige Anfangsformen aus den drei Gruppen, dann sind dieselben linear unabhängig und alle übrigen Formen können mittelst Formel* (6) *durch sie linear ausgedrückt werden.*

Dass die Formel (6) eindeutig ist, versteht sich dann von selbst und ganz ebenso hätte dies auch schon für die Formel (4) bewiesen werden können. An Stelle der Ueberschiebungen wären dort die Producte der Grössen u getreten und es ist merkwürdig, wie der vorstehende formentheoretische Satz auf einen ganz elementaren Satz zurückführbar ist.

§ 5.

Die Covarianten dritten Grades einer binären Form.

Alle Eigenschaften der Covarianten dritten Grades einer binären Form ergeben sich nun durch *Specialisirung* der gewonnenen allgemeinen Sätze.

Vor Allem sind die Ordnungen n_1, n_2, n_3 der drei Formen $f_1 f_2 f_3$ als gleich anzunehmen. Ferner wählen wir die linear unabhängigen Anfangsformen aus den drei Gruppen derart, dass aus jeder Gruppe womöglich die *gleiche Zahl* Anfangsformen darunter enthalten ist. Sei $\gamma = 3\mu + \delta_1 + \delta_2$, wo δ_1 und δ_2 nur Null oder 1 sein können, dann werden wir demnach aus der ersten Gruppe $\mu + 1$ Formen, aus der zweiten $\mu + \delta_1$ und aus der dritten $\mu + \delta_2$ Formen wählen, so dass ihre Summe $\gamma + 1$ ausmacht. Nehmen wir aber aus jeder Gruppe $\mu + 1$ Formen, dann bestehen zwischen denselben $2 - \delta_1 - \delta_2$ lineare Relationen, die sich aus Formel (6) unmittelbar ergeben.

Diese Relationen vermehren sich nun nicht, wenn die Formen f_i einander gleich gesetzt werden. Denn nach § 1 ist jede Relation letzterer Art (1) aus einer solchen zwischen den entsprechenden Anfangsformen (2) entstanden und es können daher nach Gleichsetzen der Formen höchstens $2 - \delta_1 - \delta_2$ lineare Relationen zwischen denjenigen Covarianten dritten Grades existiren, welche aus den $3\mu + 3$ Anfangsformen hervorgehen. Jedoch nur, wenn $\delta_2 = 0$, $\delta_1 = 1$ und ε ungerade ist, ergiebt sich eine brauchbare Relation, in allen übrigen Fällen verschwindet die Formel (6) identisch. Daher ist auch nur in ersterem Falle eine der Formen, am besten die letzte, reducibel und kann weggelassen werden. Die *letzte* der *linear unabhängigen* Formen, die noch bleiben, kann dann allgemein durch

$$((ff)^{2k+\varepsilon}f)^{2\varepsilon+k-\delta} \quad \text{wenn } \varepsilon \text{ gerade ist}$$

und

$$((ff)^{2k+\varepsilon+1}f)^{2\varepsilon+k-1-\delta} \quad \text{wenn } \varepsilon \text{ ungerade ist}$$

dargestellt werden, wobei $\gamma = 3k - \delta$, $\delta < 3$ gesetzt ist.

Um die *Anzahl* dieser Formen zu bestimmen, bezeichne $\left[\frac{a}{b}\right]$ die grösste in $\frac{a}{b}$ enthaltene ganze Zahl. In ersterem Falle, wenn ε gerade ist, beträgt dann diese Zahl $\left[\frac{k-\delta}{2}\right] + 1 = \left[\frac{\gamma+2}{2}\right] - \left[\frac{\gamma+2}{3}\right]$, im andern Falle: $\left[\frac{k+1-\delta}{2}\right] + 1 = \left[\frac{\gamma-1}{2}\right] - \left[\frac{\gamma-1}{3}\right]$.*) Ist $\varepsilon = 0$ und g gerade, dann ist die erste der linear unabhängigen Covarianten ein Product und kann auch weggelassen werden. Es bleiben dann noch $\left[\frac{g-1}{2}\right] - \left[\frac{g-1}{3}\right]$ nicht zerfallende Formen, welche Zahl auch für ein ungerades g den richtigen Werth liefert.

Diese Resultate lassen sich in folgendem kurzen Satze zusammenfassen:

(8) *Unter den Covarianten dritten Grades* $((ff)^{2\alpha}f)^{\beta}$ *sind alle diejenigen, für welche* $\alpha \gtreqless \beta - 3\left[\frac{\varepsilon}{2}\right]$ *ist, linear unabhängig (asyzygetisch) und alle übrigen sind durch sie linear ausdrückbar.*

Die Zahl ersterer Formen vom reducirten Gewichte γ *ist*

für ein gerades ε: $\quad \left[\frac{\gamma+2}{2}\right] - \left[\frac{\gamma+2}{3}\right]$

und für ein ungerades ε, $\quad \left[\frac{\gamma-1}{2}\right] - \left[\frac{\gamma-1}{3}\right]$

wobei ε *und* γ *die früher angegebene Bedeutung haben, während die* [ ] *eine ganzzahlige Abrundung anzeigt.*

Ein entsprechendes Criterium dafür, dass eine Form *reducibel* ist, ergiebt sich hieraus ohne Weiteres. Doch ist die angegebene Fassung vorzuziehen, weil sie die *geringere* Anzahl von Covarianten umfasst.

§ 6.

Vergleich mit den Gordan'schen Criterien. Besondere Fälle.

Der Grund, warum die Gordan'schen Criterien nicht in allen Fällen ausreichend sind, ist nun darin zu suchen, dass die linear unabhängigen Anfangsformen nicht aus drei, sondern blos aus zwei

*) Auch lassen sich beide Zahlen durch $\left[\frac{g+2}{2}\right] - \left[\frac{g+2}{3}\right] - \left[\frac{\varepsilon+1}{2}\right]$ darstellen, wobei ε einen beliebigen Werth haben kann. Diese Zahl ergiebt sich auch aus der Cayley'schen Formel, doch ist diese besondere Form der Zahl bis jetzt nicht bekannt geworden.

Gruppen gewählt wurden. Wenn die Gruppen nicht sehr gross sind, dann hat dies keinen bedeutenden Einfluss, allein bei grösseren Gruppen würden viele Formen zurückbleiben, die noch reducibel wären. So würde dies beispielsweise für die Covariante $((ff)^6 f)^4$ einer Form 10^{ter} Ordnung der Fall sein.

Diejenigen Fälle, in denen die in (8) angegebene Anzahl verschwindet, bieten ein besonderes Interesse. Es tritt dies ein für

$$\begin{aligned} \gamma &= 1 \text{ und } \varepsilon \text{ beliebig}, \\ \gamma &= 2 \quad \text{„} \quad \varepsilon \text{ ungerade}, \\ \gamma &= 4 \quad \text{„} \quad \varepsilon \text{ ungerade}, \end{aligned}$$

abgesehen von dem Falle $\gamma = 0$, ε ungerade, der kein Interesse bietet. In den entsprechenden allgemeinen Gruppen, die bez. 2, 3 und 5 Ueberschiebungen enthalten, müssen demnach beim Gleichsetzen der Formen $f_1 f_2 f_3$ *alle* Ueberschiebungen identisch verschwinden. Darunter befinden sich insbesondere auch die folgenden:

$$(9) \quad \begin{aligned} &((ff)^{2\lambda} f)^{n-1} = 0 \quad \text{für} \quad n = 4\lambda,\ n = 4\lambda - 1,\ n = 4\lambda + 2, \\ &((ff)^{2\lambda} f)^{n} = 0 \quad \text{für} \quad n = 4\lambda + 1 \\ &\text{und} \\ &((ff)^{2\lambda+2} f)^{n-3} = 0 \quad \text{für} \quad n = 4\lambda + 2 \end{aligned}$$

und es geht daraus hervor, dass jede *binäre Form beliebiger Ordnung eine verschwindende Covariante dritten Grades besitzt*, deren Ordnung in den Variablen entweder 1, 2 oder 4 ist. Dieser Satz war nur für eine Form von der Ordnung $n = 4\lambda - 1$ bis jetzt allgemein bewiesen worden (Gordan, Formensystem pag. 13). Zugleich folgt aus Satz (8), dass ausser den genannten keine anderen Gruppen existiren, welche beim Gleichsetzen der Formen $f_1 f_2 f_3$ im Ganzen verschwinden. In den besonderen Fällen $n = 8, 9, 10, 11, \ldots$ existiren z. B. nur die folgenden verschwindenden Covarianten:

$$((ff)^4 f)^7 = 0; \quad ((ff)^4 f)^9 = 0; \quad ((ff)^4 f)^9 = ((ff)^6 f)^7 = 0;$$

und

$$((ff)^6 f)^{10} = 0.$$

§ 7.

Anwendung des Criteriums (8) auf Formen höheren Grades.

Zum Schlusse soll noch gezeigt werden, wie der Satz (8), der zunächst nur für Covarianten *dritten Grades* gilt, leicht zu einem Satz erweitert werden kann, der für Covarianten höheren Grades von Wichtigkeit ist.

Bekanntlich kann jede Covariante K, welche den symbolischen Factor $(ab)^{2\mu}(bc)^{\nu}(ca)^{\lambda}$ besitzt, durch Ueberschiebungen der Formen dritten Grades

$$A_{ik} = ((ff)^{2\mu+2i} f)^{\nu+\lambda+k} \quad i, k = 0, 1, 2, \ldots$$

über fremde Formen linear ausgedrückt werden. Wenn es nun gelingt, die Formen

$$A_{0k} = ((ff)^{2\mu} f)^{\nu+\lambda+k} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

durch die übrigen Formen, für welche $i > 0$, linear auszudrücken, dann ist die Covariante K durch ein Aggregat anderer Covarianten dargestellt, die mindestens den symbolischen Factor $(ab)^{2\mu+2}$ enthalten. Ersetzen wir $\nu + \lambda$ durch ϱ, dann können nun mit Hilfe des Criteriums (8) in der Reihe

$$(10) \qquad ((ff)^{2\mu} f)^{\varrho},\ ((ff)^{2\mu} f)^{\varrho+1}, \ldots ((ff)^{2\mu} f)^{\varrho+l}, \text{ etc.}$$

leicht diejenigen Covarianten namhaft gemacht werden, welche zu den asyzygetischen gehören. Man hat für die $(l+1)^{\text{te}}$ Form dieser Reihe die Bedingung

$$(11) \qquad \mu \gtreqless \varrho + l - 3\left[\frac{\varepsilon}{2}\right]$$

die, wenn ε die Werthe 0 oder 1 hat, in die einfachere

$$\mu \gtreqless \varrho + l$$

übergeht. In diesem *ersten* Theil der Reihe, der bis zur $(n-2\mu-\varrho+2)^{\text{ten}}$ Form reicht, sind demnach alle Formen von der ersten bis zur $(\mu-\varrho+1)^{\text{ten}}$ asyzygetische. Wenn also dieser Theil der Formenreihe überhaupt vorhanden ist, was für $n > 2\mu + \varrho - 2$ stattfindet, und es soll *keine* asyzygetische Form darin vorkommen, dann muss $\varrho > \mu$ sein.

In Bezug auf den zweiten Theil der Reihe (10), der alle Formen von der $(n-2\mu-\varrho+3)^{\text{ten}}$ bis zur letzten umfasst, kann nun zunächst gezeigt werden, dass, wenn eine Form derselben asyzygetisch ist, auch die zweite, dritte etc. der folgenden es sein muss. Denn wenn die $(l+1)^{\text{te}}$ Form die Bedingung (11) erfüllt, dann wird dieselbe auch erfüllt sein, wenn für l die Werthe $l+2$, $l+3$, etc. eingesetzt werden, da zugleich für ε die entsprechenden Werthe $\varepsilon+2$, $\varepsilon+3$, etc. einzusetzen sind. Die $(l+2)^{\text{te}}$ Form dagegen kann möglicherweise nicht zu den asyzygetischen Formen gehören. Es ist dies dann der Fall, wenn ε gerade ist und zugleich

$$(12) \qquad \mu = \varrho + l - 3\left[\frac{\varepsilon}{2}\right].$$

Dann wird bei einer Zunahme des l um 1 die rechte Seite der Gleichung zunächst auch um 1 zunehmen, daher das Criterium (11) nicht mehr erfüllt sein. Dasselbe gilt auch von den Formen, welche dieser ausgezeichneten Form vorangehen. *Diese Form muss demnach die erste asyzygetische Form im zweiten Theile der Reihe* (10) *sein.* Aus Gleichung (12) ergiebt sich für dieselbe:

$$l = 3n - 8\mu - \varrho \quad \text{und} \quad \varepsilon = 2n - 6\mu.$$

Der grösste Werth, den l überhaupt annehmen kann, ist gleich der kleineren der beiden Zahlen $n - \varrho$ und $2n - 4\mu - \varrho$. Soll also auch im zweiten Theile der Reihe (10) keine asyzygetische Form vorkommen, dann muss

$$3n - 8\mu - \varrho > n - \varrho \quad \text{bez.} \quad 3n - 8\mu - \varrho > 2n - 4\mu - \varrho$$

oder übereinstimmend

$$n > 4\mu$$

sein. Ist $n = 4\mu$, dann ist zwar die letzte Form der Reihe (10) eine asyzygetische, allein dieselbe ist eine Invariante, über welche keine Ueberschiebungen gebildet werden können und die folglich in der Entwicklung von K nur als Factor eines Gliedes auftreten kann.

Das Resultat ist also folgendes: *Ist* $\varrho > \mu$ *und zugleich* $n \geqq 4\mu$, *so ist in der Reihe* (10) *höchstens eine asyzygetische Form vorhanden, die aber dann die Invariante* $(ab)^{2\mu}(bc)^{2\mu}(ca)^{2\mu}$ *ist.*

Hieraus ergiebt sich dann der folgende allgemeine Satz:

Jede Covariante beliebigen Grades mit dem symbolischen Factor $(ab)^{2\mu}(bc)^{\nu}(ca)^{\lambda}$, *für welche die Bedingungen*

$$\lambda + \nu > \mu \quad \text{und} \quad n \geqq 4\mu$$

erfüllt sind, kann durch ein Aggregat anderer Covarianten ausgedrückt werden, welche entweder den symbolischen Factor $(ab)^{2\mu+2}$ *oder den wirklichen Factor* $(ab)^{2\mu}(bc)^{2\mu}(ca)^{2\mu}$, *letzteren nur für* $n = 4\mu$, *enthalten.*

So ergeben sich beispielsweise für $n = 8, 12, 16, \ldots$ u. a. die reducirenden Factoren

$$(ab)^4(bc)^3, \quad (ab)^6(bc)^4, \quad (ab)^8(bc)^5, \text{ etc.}$$

Setzt man $\nu = 2\mu$ und $\lambda = 0$, wodurch die Bedingung $\lambda + \nu > \mu$ selbstverständlich wird, dann folgt als besonderer Fall der von Gordan in seinen Vorlesungen über Invariantentheorie II. Theil, pag. 105—108 bewiesene Satz.

Auch mag schliesslich noch besonders darauf hingewiesen werden, dass der gefundene Satz eine weitere Vervollständigung in dem Sinne, dass noch mehr Covarianten durch ihn betroffen werden, nicht mehr zulässt.

München, den 21. December 1887.