Mathematik und Musik und der griechische Geist.

Von

Erich Frank (Heidelberg).

Mathematik und Musik, logische klarste Rationalität und die irrationalste Macht dämonischer Psychagogie, in der Weite dieses Gegensatzes findet der griechische Geist erst den ganzen Ausdruck seines eigenen Wesens. Wie Mathematik für die Griechen die Wissenschaft, so war ihnen Musik die Kunst, wie schon der Name sagt. Noch nie ist einer Zeit Musik so viel, so alles gewesen; in ihrer Welt gingen sie ganz auf, sie war das eigentliche Element, in dem sie lebten. Wie sehr, das zeigt allein schon die Tatsache, daß die Griechen das Wort Musik geschaffen haben. Die Inder benützen wohl Worte wie Stimme, Pfeife, Gesang im allgemeineren Sinne, aber für jene rein abstrakte innerliche Welt der Töne und Rhythmen hatten sie ebensowenig ein besonderes Wort wie die Chinesen oder wie die Völker des Abendlandes, deren Musik nicht nur ihrem Namen nach bis auf den heutigen Tag griechisch geblieben ist.

Nicht allein die Tragödie ist aus dem Geist der Musik geboren, die Musik ist für den Griechen überhaupt nicht eine Kunst neben anderen, nicht ein künstlerischer Genuß wie für den abendländischen Menschen, sondern die alles überwältigende kosmische Macht, der unmittelbare Ausdruck des metaphysischen Urgrundes des Lebens selbst. Das Wesen der Welt ist Musik, das ist der Sinn der tiefen Lehre von der Harmonie der Sphären: Die Weltseele, die das All und in ihm uns selbst trägt und durchdringt, ist ihrem Wesen nach nichts anderes als Musik; wer ihre ewige Melodie kennt wie Orpheus, der beherrscht mit ihrer dämonischen Macht Natur und Menschenwelt. Von der Musik hängt daher das Schicksal der Staaten, wie das jedes einzelnen ab, sie ist die Grundlage aller Erziehung und wahren Bildung. Selbst für Plato, der die Gefahr des »phantastischen Selbstbewußtseins« in aller Kunst so unbarmherzig durchschaut und bekämpft, bleibt doch die Musik das selbstverständliche, längst gefundene Fundament aller Erziehung. Sie ist die eigentliche Propädeutik der Philosophie, die eigentliche Seele des staatlichen Lebens; »auf ihr muß der Staat aufgebaut werden«, »jede Neuerung in der Musik erschüttert ihn in seiner Grundlage« (Staat IV. S. 400 ff.). Dieser echt griechische Satz stammt von keinem Beliebigen, keinem »Pythagoreer«. Damon, einer der großen Musiktheoretiker und zugleich der bedeutendste Politiker der kimonischen Zeit, hat in ihm den Geist seiner Politik ausgedrückt und damit den seines von ihm in diesem Sinne beeinflußten Schülers Perikles, des größten politischen Genius der Griechen überhaupt. Das griechische Wort für Gesetz »Nomos« ist zugleich das für Tonart. So tief ist diese Anschauung von der Verwandtschaft von Musik und staatlichem Leben, die sich in dem Maße sonst vielleicht nur noch bei den Chinesen findet, in der griechischen Seele verwurzelt. Die Luft, in der der Grieche atmet, ist Musik, aus ihrem Geiste ist seine ganze Kultur entstanden und allein zu verstehen. Die Würdigung dieser ihrer fundamentalen Bedeutung für die griechische Welt sucht man in der Konstruktion, die Spengler im »Untergang des Abendlandes« von der griechischen Seele gibt, vergebens. Nach ihm wäre die Musik, als die Kunst des Grenzenlosen, neben der Infinitesimalmathematik und der perspektivischen Oelmalerei der eigentümliche Ausdruck abendländischer Kultur, erst das 18. Jahrhundert hätte den entscheidenden Sieg der Musik über alle anderen Künste gebracht. Der »apollinisch-euklidischen Seele des Griechen« soll dagegen »diese visionäre Art des Kunstgenießens fremd gewesen sein« (S. 314). Seine Welt sei der anschauliche Körper, er kenne nur »was er sieht und greift« (S. 120). Was dem Abendlande die Musik, soll daher dem Griechen die Plastik sein. Das ist ein völliges Mißverständnis griechischen Empfindens. Für dieses ist die Plastik, wie Malerei und Architektur, nie in dem Sinne wie die Musik Kunst gewesen. Schöpferischer Künstler (ποιητής) ist nur der Musiker, der Dichterkomponist — denn Dichtung und Musik ist eins —, der Bildhauer ist bloß Handwerker (δημιουργός). Die Auffassung der Plastik als einer der Musik neben- oder gar übergeordneten Kunst ist gerade eigentümlich abendländisch und für die klassische griechische Zeit kaum vorstellbar. Erst später, als der lebendige Strom griechischer Musik allmählich versiegt, vor allem unter den amusischen Römern, wird es anders. Freilich neigen wir heutzutage um so leichter dazu, die Bedeutung der Plastik für den Griechen selbst zu überschätzen, als deren Werke die einzigen sind, die von aller griechischen Kunst noch heute unmittelbar zu uns sprechen. Von der Musik, dieser vergänglichsten aller Künste, nicht nur im materiellen Sinne, sind uns nur wenige und kurze Fragmente erhalten. Selbst wenn wir von ihr mehr Reste hätten, als wir wirklich besitzen, bliebe ihre Welt unserem musikalischen Empfinden wahrscheinlich nie ganz verständlich. Läßt uns die erhaltene Komposition von Pindars herrlicher Ode »*Χρυσέα φόρμιγξ*« die Erhabenheit ihrer großen Linie und den Adlerschwung ihrer rauschenden Rhythmen erst ganz fühlen, so stehen wir vor dem 1892 gefundenen Bruchstück aus des Euripides Musikdrama »Orestes« völlig ratlos. Mag die Deutung der Noten hier noch nicht ganz gelungen sein, mag es an der hier verwendeten antiken, uns so fremden Enharmonik liegen, diese Komposition, die gerade zu den berühmtesten dieses von seinen Zeitgenossen umjubelten Musikers gehörte — *τὸ δρᾶμα τῶν ἐπὶ σκηνῆς εὐδοκιμούντων* heißt es beim Scholiasten —, ist für uns nur eine zusammenhanglose Aufeinanderfolge sinnloser Töne. Hier wo sich das Individuelle der Seele am unmittelbarsten ausspricht, fühlen wir erst, wie ganz anders ein Grieche empfand. Nur mit dem Verstand können wir versuchen, es uns begreiflich zu machen, wie jene Musik innerhalb ihrer linearen Homophonie den ganzen Reichtum der griechischen Seele mit so unwiderstehlicher Wirkung aussprach. Diese Musik, die mit unserer Instrumentalmusik verglichen, bei aller starken Betonung und Selbständigkeit der Instrumentalbegleitung, ihrem Wesen nach doch immer Vokalmusik blieb, kennt unsere Harmonik nicht, bildet aber dafür die Melodik und Rhythmik zu einem Reichtum und einer Höhe der Vollendung aus, hinter der die moderne Musik weit zurückbleibt. In den Grenzen ihres linearen Stils bedeutet ihr Weg vom Volksepos und der Lyrik zur Chormusik mit Aulosbegleitung (ein Instrument wahrscheinlich vom Klang unserer Oboe) und zum attischen Drama und schließlich zur »nuove musiche« des Phrynis und Timotheus eine ähnliche Tendenz zu größerer Fülle und tieferem Volumen und schließlich zur absoluten Musik, wie wir sie in der Entwicklung des Abendlandes beobachten. Wir können diesen Siegeszug der griechischen Musik an seinen Wirkungen verfolgen, wir sehen deutlich, wie sie etwa vom 8./7. Jahrhundert an eine immer größere Macht über die Seele des Griechen gewinnt, ein Gebiet des Lebens nach dem anderen erobert und endlich in dem attischen Drama ihren künstlerischen Höhepunkt erreicht. Weiterhin bleibt ihr Wesen durch das ganze Mittelalter hindurch im gregorianischen Kirchenchoral erhalten. Aus ihm wieder ist die ganze abendländische Musik hervorgegangen und noch heute übt er, wenn auch unter stark veränderter Gestalt, seine Macht über Millionen von Gläubigen in der katholischen Kirchenmusik aus. Obwohl so in mittelbarer Tradition griechische Musik in gewissem Sinne noch in unserer Zeit lebendig ist, ist sie uns doch ebensowenig wie die des früheren Mittelalters in ihrer individuellen Gefühlswelt noch faßbar.

Ganz anders ist es mit der bildenden Kunst. Hier spricht sich das Empfinden in körperlichen Gestalten, also in einem Medium von einer gewissen abstrakten Allgemeinheit aus, hier scheinen der Individualität durch das Vorbild der Natur bestimmte Grenzen gesteckt, und tatsächlich wirkt der unsagbare Reiz griechischer Plastik noch heute so elementar und unwiderstehlich auf unser Auge, daß wir nicht zweifeln, hier unmittelbar griechisches Fühlen zu verstehen. In ihren Werken haben wir tatsächlich den einzigen Zugang in die innere Welt der griechischen Seele. Aber sah der Grieche seine Bildwerke mit denselben Augen an wie wir? Was war ihm an ihnen das Wesentliche? Um diese Frage befriedigend beantworten zu können, ist das Gebiet der griechischen Aesthetik, Kunsttheorie und -philosophie noch viel zu ungenügend erforscht, aber soviel kann man schon sagen, daß der griechische Künstler und Kunstbetrachter an die Werke seiner Plastik ganz anders herantrat als der moderne Mensch. Ihn interessiert weniger der einzelne dargestellte Körper als die in ihm ausgedrückten Proportionen. Ihn entzückt die Schönheit und der Rhythmus jener Verhältnisse, die weniger sinnlich als geistig faßbare Harmonie ihres Zusammenspiels. Daß diese merkwürdige, uns heute so fremd anmutende Kunstanschauung nicht bloß auf eine kleine Künstlergruppe oder philosophische Schule beschränkt, sondern tief im Wesen griechischen Geistes begründet war, zeigen die Worte, mit denen die Griechen ihr Gefühl für die künstlerische Schönheit eines Bildwerkes ausdrücken: »Symmetrie«, »Eurhythmie« und »Euharmostie«. Daß diese Begriffe aus der musikalischen Sphäre stammen und welche eigentümliche Bedeutung sie dort haben, lehren Stellen, wie etwa die folgende: »Die Dichterkomponisten schaffen alles im Metrum und Rhythmus (*μετὰ μέτρων καὶ ῥυθμῶν*) ... und dies hat schon an sich so hohen Reiz, daß wenn ihre Werke auch in der Diktion und in den Gedanken nichts taugen sollten, sie doch allein durch die Eurhythmien und Symmetrien die Seelen der Hörer mit sich reißen (*ψυχαγωγοῦσιν*)« (Isokrates, Euagoras 10). »Schönheit der Rhythmik«, des »metrischen Aufbaus und der Gliederung« und »Schönheit der Harmonik« machen also für den Griechen das Eigentümliche gerade der musikalischen ästhetischen Wirkung aus. Der Grieche spricht nun aber ebenso von der Eurhythmie, der Symmetrie und der Euharmostie eines Kunstwerks, eines schönen Körpers, eines Bildes, eines Teppichs, einer Vase u. ä., ja sogar von der Eurhythmie eines Panzers oder wieder von »den Rhythmen der Bauwerke« (vgl. etwa Plato, Staat III, 401, Philo mechanicus IV, 4 Sch., Damianos S. 28 Sch.). Wenn dem modernen Betrachter in den Werken griechischer Kunst ein fast musikalisch anmutender Sinn für Rhythmus der Linie und Harmonie im Aufbau auffällt, so fühlt er tatsächlich das, was dem Griechen selbst daran das Wesentliche war. Die neueren Forschungen von Puchstein, Koldewey, Jolles haben gezeigt, wie ein ganzes System bestimmter zahlenmäßiger Proportionen, gleichsam eine Art plastischer Kontrapunkt der griechischen Kunst zugrunde liegt, und Max Theuer hat neulich versucht, dieses Zahlensystem an einigen dorischen Tempeln nachzuweisen (Der dorische Peripteraltempel. Ein Beitrag zur antiken Proportionenlehre, Berlin 1918). So stehen z. B. beim Parthenon die Triglyphen zu den Metopen nach ihm im Verhältnis von 2 : 3; Thesis und Arsis, Licht und Schatten, wechseln hier also im kretischen Rhythmus. Die anderen Proportionen dieses edlen Bauwerks sind gewissermaßen aus diesem Hauptmotiv abgeleitet. Es verhält sich Breite und Länge des Unterbaues wie $2^2 : 3^2$; Höhe zur Breite zur Länge des ganzen Parthenons wie $4^2 : 6^2 : 9^2$. Hätten wir noch den Bericht des Architekten Iktinos über seinen Bau, so würden wir wahrscheinlich die Wunder- und Zahlenwelt seiner Rhythmik noch besser verstehen können. Einen ähnlichen Inhalt muß auch die Schrift gehabt haben, worin der ungefähr gleichzeitige Bildhauer Polyklet Rechenschaft über sein plastisches Werk ablegte. Hier wird er die ganze Musik und rhythmische Schönheit, die sich in den Proportionen des menschlichen Körpers ausspricht, aufgewiesen haben. Das scheint schon der Titel des Buches: »Kanon« anzudeuten, denn Kanon ist ein spezifischer Begriff der griechischen Musiklehre, in der es die reine Normalstimmung — die Tonskala und die sie bestimmenden mathematischen Zahlenverhältnisse der schwingenden Saite — bedeutet. Danach hieß die Tonlehre auch Kanonik und die Vertreter der mathematischen Richtung in der griechischen Musik die Kanoniker. Nach dem Vorbild dieser Musiktheorie hat wohl Polyklet hier bewußt eine Theorie seiner Kunst schaffen wollen, in der er die absoluten Zahlenverhältnisse, gewissermaßen die reine tonale Stimmung des menschlichen Körpers, feststellte, um so die Plastik zur Würde einer wirklichen Kunst wie die Musik emporzuheben. Es liegt der tief in griechischer Anschauung verwurzelte Gedanke zugrunde, daß der Mensch als der Mikrokosmos in den Proportionen seines Körpers die kosmischen Proportionen des Universums ausdrückt. Wenn Spengler auch nicht unrichtig die dorische Säule mit einer griechischen Statue vergleicht, so liegt doch eine ganz andere Nuance darin, wenn die Griechen von ihr sagen, »sie zeigt die Proportionen und ganze Schönheit des männlichen Körpers in den Gebäuden« (Vitruv p. 85, 26 R).

Das ist überhaupt die uns überall auffallende Eigentümlichkeit des griechischen Geistes: der Grieche denkt recht eigentlich in Proportionen. Der wissenschaftliche Terminus für Proportion ist »Logos« (vgl. noch unser »Analogie«), zugleich der eigentliche Ausdruck für reines Denken überhaupt. Nicht auf die begrenzte Anschauung geht das griechische Bewußtsein, sondern gerade die unanschauliche Proportion, die Beziehung zwischen den Körpern, jenes geistige Hin und Her der Dialektik, ist das, was es vorzüglich interessiert. Selbst die Anhänger der mimetischen Kunstrichtung verstanden unter der Mimesis nicht so sehr ein treues Abbilden des Gegenstandes, als die Wiedergabe seiner objektiven mathematischen Proportionen. Nur danach, ob die Darstellung der tatsächlichen Verhältnisse — die »Symmetrie« — oder die »Eurhythmie« — die Proportionen des schönen Scheins —, zum Ziel der Kunst gemacht wird, scheiden sich die beiden großen Kunstrichtungen, die wir mit unseren Begriffen Idealismus, Realismus oder Naturalismus ganz schief wiedergeben würden. Wir müssen vielmehr dabei eher an den Gegensatz der beiden großen Musikerschulen denken: auf der einen Seite die strengen »Kanoniker«, die der sinnlichen Wahrnehmung alle Bedeutung absprachen und nur die mathematisch zu berechnenden Zahlenverhältnisse als Norm für die musikalische Wahrheit gelten ließen, ihnen gegenüber die Empiriker, die »Organiker«, für die die Schönheit des sinnlichen Klanges umgekehrt den mathematischen Proportionen das Gesetz gab. Aus all dem sieht man, wie im tiefsten Grunde ungriechisch, wie »abendländisch« Spenglers Auffassung der antiken Plastik ist, wenn er meint, »der Grieche betastet den Marmor mit dem Auge« (S. 314).

Den eigentlichen und für manchen eindrucksvollsten Beweis für die angeblich »euklidisch-apollinische« Seele der Griechen entnimmt aber Spengler der griechischen Mathematik: »Der antike Mathematiker kenne nur das, was er sieht und greift« (S. 120); die leibhaft sinnliche Gestalt, der »Körper« und seine »Konstruktion« sei sein Ziel; die griechische Seele kenne das Unendliche nicht, die Infinitesimalmethode sei darum erst die eigentümliche Schöpfung des Abendlandes; auf ihr beruhe die Barockmathematik, »die Schwesterkunst der Musik, als der Kunst des Grenzenlosen«.

Es ist aber heute eine nicht mehr bestreitbare Tatsache, daß die Griechen nicht nur überhaupt die Infinitesimalmethode gekannt haben, es zeigt sich immer mehr, daß das Infinitesimalproblem von früh an eines der wichtigsten Probleme der griechischen Mathematik gewesen ist. Ihre besten Kenner haben schon immer behauptet, daß die Griechen sich den heutigen ganz ähnlicher Untersuchungsmethoden bedient haben, und namentlich das Exhaustionsverfahren des Archimedes etwas der modernen Integralmethode sehr Verwandtes gewesen sein müsse. Die Heiberg vor einigen Jahren (1907) auf einem Palimpsest geglückte Auffindung der verschollen gewesenen Schrift des Archimedes über seine eigene »bei der Erforschung mechanischer Theoreme befolgte Methode« hat diese Vermutung in verblüffendster Weise bestätigt, ja alle Erwartungen noch weit übertroffen. Denn das Verfahren, das Archimedes hier mit dem vollen Bewußtsein seiner Bedeutung und dem ausgesprochenen Willen, seine mathematischen Fachgenossen zu seiner Verwertung anzuregen, auseinandersetzt, ist tatsächlich nicht nur etwas der modernen Methode Analoges, sondern im Grunde und in ihrem Prinzip identisch mit ihr. Will man diesem Urteil nicht ohne weiteres trauen, so kann auf eine mathematische Autorität wie Zeuthen hingewiesen werden, der zusammenfassend urteilt, daß »die infinitesimalen Betrachtungen des Archimedes in dieser Schrift dieselbe Gültigkeit haben, wie diejenigen, die sich jetzt auf Cauchys Infinitesimalbegriff stützen«.

Das Schriftchen des Archimedes ist noch deshalb für uns von so unschätzbarem Wert, weil es uns zum erstenmal überhaupt einen Blick auf die Mittel tun läßt, durch die die griechischen Mathematiker zu ihren Ergebnissen gelangten. Denn in ihren Veröffentlichungen geben sie nur die fertigen Beweise und auf deren logisch korrekter und unantastbarer Form liegt ihr ganzes Augenmerk. Seine Studien gewissermaßen vor der Oeffentlichkeit zu absolvieren, ist eben nicht griechische Art. Aber der logisch »gepanzerte« Beweis eines Theorems sagt uns natürlich nichts über die Art, auf der man zur Erkenntnis desselben gelangt ist. Da ist es bezeichnend, daß auch jene kleine Schrift des Archimedes über seine eigentliche Methode die Form eines scheinbar gar nicht für die weitere Oeffentlichkeit bestimmten Briefes an seinen Zeit- und Fachgenossen Eratosthenes trägt. Auch hierin zeigt sich übrigens eine auffallende Aehnlichkeit mit der Gewohnheit, die Leibniz in der Veröffentlichung seiner Forschungen zu beobachten pflegte.

Dieser Brief des Archimedes bietet noch in anderer Hinsicht für das wahre Wesen der griechischen höheren Mathematik überraschenden Aufschluß. Nachdem er nämlich auseinandergesetzt hat, wie ihm gewisse Dinge durch seine Methode klargeworden sind, die allerdings nachher noch »geometrisch bewiesen werden mußten, weil die

Behandlung nach der bewußten Methode allein nicht den vollkommenen Beweis gibt«, streift er kurz seine Vorgänger in diesem Verfahren. Und da erfahren wir die überraschende Tatsache, daß kein anderer als Demokrit es gewesen ist, der zuerst dieses Verfahren anwandte und der dadurch die Tatsache entdeckte, daß der Kegel der dritte Teil des Zylinders und die Pyramide der dritte Teil des Prismas mit derselben Grundfläche und Höhe ist. Den »geometrischen Beweis« dieses Satzes habe dann freilich erst Eudoxos gegeben. In diesen Worten erfahren wir nun endlich einmal etwas von den wirklichen Problemen, mit denen sich die schöpferischen Mathematiker der klassischen Zeit beschäftigten. Da hören wir nichts von Pythagoras oder Plato, nichts von den abgeschmackten Geschichten wodurch Neupythagoreer und Neuplatoniker über die Geschichte der griechischen Mathematik einen schwer zu durchschauenden Nebel gebreitet haben; hier tun wir endlich einmal einen Blick auf den tatsächlichen Entwicklungsgang griechischer, wissenschaftlicher Mathematik: und da steht am Anfang Demokrit, der Philosoph des atomistischen Materialismus, dessen Namen die neuplatonische Tradition, von der wir leider so sehr abhängig sind, wie den des leibhaftigen Gottseibeiuns sich auch nur auszusprechen scheut. Demokrit ist also der eigentliche Begründer der griechischen Infinitesimalmethode. Und nun werden erst die wenigen Bruchstücke in ihrer Bedeutung und in ihrem Zusammenhang klar, die uns der Zufall aus seinem großen Werke gerettet hat. Jenen Lehrsatz über das Volumen von Kegel und Pyramide fand Demokrit dadurch, daß er sich den Kegel parallel zur Grundfläche durch unendlich viele Ebenen, die einander unendlich nahe liegen, geschnitten dachte, so daß der Körper aus einer Summe von unendlich vielen, unendlich dünnen Blättchen von abnehmender Größe bestand (Diels, Vorsokratiker Fr. 55 B 155). Wie er nun von da weiter zu seinem Satze kam, das läßt sich wenigstens mit einiger Wahrscheinlichkeit erraten. Er wird wohl gesehen haben, daß zwei Kegel oder Pyramiden dann gleich sind, wenn sie die Summe derselben unendlichen Anzahl gleicher ebener Schnitte sind. Damit hätte er aber, wie man richtig bemerkte, teilweise schon den Satz Cavalieris (1685) vorweg genommen. Demokrit, dieses gewaltige und größte nur noch mit Leibniz zu vergleichende Universalgenie, dessen überragende Bedeutung für die Entwicklung der griechischen Wissenschaft überhaupt die neueren Forschungen immer deutlicher erkennen lassen, hat sich also schon einer der modernen ähnlichen Methode bei seinen mathematischen Untersuchungen bedient, mag sein Verfahren auch noch so unvollkommen gewesen sein. Zum Infinitesimalproblem ist er aber durch seine atomistische Philosophie ebenso notwendig geführt worden, wie zwei Jahrtausende später Leibniz durch seine Monadologie.

Wir sehen also die griechische Mathematik schon zur Zeit Demokrits, d. h. vor 400 v. Chr., mit Problemen beschäftigt, die Spengler erst der abendländischen Mathematik zutrauen will. Die eigentliche Absicht und das eigentliche Wesen der Mathematik dieser frühen Zeit deckt aber eine andere zufällig bei Vitruv gerettete Nachricht auf, deren Bedeutung nicht immer genügend beachtet wurde. In dem auch sonst viel Interessantes bringenden Prooemium des 7. Buches lesen wir: »Unter den Besagten hat nun zuerst Agatharchos, als Aeschylos die Tragödie auf die Bühne brachte, eine perspektivische Bühnendekoration gemalt und eine Abhandlung über diese Art der Malerei hinterlassen. Durch ihn angeregt, haben Demokrit und Anaxagoras über denselben Gegenstand geschrieben und gezeigt, auf welche Weise von einem an einem bestimmten Orte angenommenen Mittelpunkte (der Bildfläche) aus die Linien (perspektivisch) zu ziehen seien, damit sie dem Blick der Augen, sowie dem Verhältnis der gradlinigen Ausbreitung der Lichtstrahlen nach dem Gesetz der Natur entsprechen, so daß über eine unklare Sache klare Abbilder eine Darstellung von Gebäuden auf der Bühnendekoration wiedergeben und so die in einer geraden Fläche aufgezeichneten Gegenstände doch in einzelnen Teilen vor-, in anderen zurückzutreten scheinen.« (Diels 46 A 39.) Es ist also gar nicht richtig, daß sich die historische Entwicklung der Mathematik in Wirklichkeit an das Schema gehalten hätte, das ihr manche aufzwingen wollten: nach Spengler soll »die antike Mathematik ursprünglich beinahe rein planimetrisch gewesen sein« (S. 91). Perspektive und Projektion soll sie ebensowenig, wie die griechische Malerei gekannt haben; »erst in der geometrischen Analysis und der projektiven Geometrie des 17. Jahrhunderts« soll sich »dieselbe Ordnung offenbaren, welche ... die ihr verschwisterte Oelmalerei durch das Prinzip einer nur dem Abendlande bekannten Perspektive ... des Bildraumes ins Leben zu rufen, ergreifen, durchdringen möchte« (S. 90). Dagegen soll auch »die Planimetrie zum strengsten Flächenstil Polygnots, der weder Licht noch Schatten, noch perspektivische Verhältnisse kennt« gehören (S. 321). Nun sehen wir aber schon vor 460 (Aeschylos starb 456/455) — also gerade zur Zeit Polygnots — griechische Maler sich mit perspektivischen Aufgaben und den Verhältnissen von Licht und Schatten (die perspektivische Malerei hieß auch »Skiagraphie«, d. h. »Licht- und Schattenmalerei«) beschäftigen und sie auch theoretisch behandeln. Anaxagoras dürfte etwa 463 nach Athen gekommen sein, also gerade zu der Zeit, wo die neue Malerei die athenische Bevölkerung noch aufs lebhafteste erregte. In diese Zeit müssen wir seine Beschäftigung mit den mathematischen Problemen, die sie aufwarf, setzen. Wir können hier an einem interessanten einzelnen Fall verfolgen, wie die griechische wissenschaftliche Mathematik aus der lebendigen Praxis der griechischen Maler hervorgeht. Auch hier übrigens eine vollkommene Parallele zur abendländischen Entwicklung, die, wie die interessanten Ergebnisse der Forschungen Olschkis zeigen, ganz denselben Weg aus den Malerschulen hervor genommen hat. (Geschichte der neusprachlichen wissenschaftlichen Literatur Bd. I. Literatur der Technik und der angewandten Wissenschaften 1919.) Die Probleme und Methoden der modernen experimentell-mathematischen Naturwissenschaft der Renaissance gehen danach nicht, wie man bisher meinte, aus der Spekulation, sondern gerade aus der Optik der Maler und der praktischen Mechanik der Architekten und Ingenieure hervor. Aus den Traktaten über Perspektive von Alberti, Ghiberti, Piero de' Franceschi und von des Architekten Francesco di Giorgio Martini Militärtechnik führt die Entwicklung durch Vermittlung Leonardo da Vincis, Dürers und Tartaglias zu Benedetti und schließlich zu Galileï. Ganz ebenso nimmt Anaxagoras die Anregungen zu seinen mathematischen Forschungen aus den Schriften der Maler seiner Zeit und wird so der Begründer der wissenschaftlichen Perspektive, d. h. jenes Zweiges der Mathematik, den die Alten »Skenographie«, aber auch »Optik im engeren Sinne« nannten und der die Gesetze unseres perspektivischen Sehens sowie die gradlinige Ausbreitung der Lichtstrahlen in Form des Kegels mathematisch behandelte. Anaxagoras begreift nun sofort auch die kosmische Bedeutung dieser Phänomene und wendet die Resultate seiner Forschungen auf die Optik des Weltraums an. Er konstruiert mit unerhörter Kühnheit als erster Sterblicher den Schattenkegel der Erde und zeigt mit Hilfe seiner Konstruktion, wie durch Eintreten in ihn der Mond und ähnlich die Sonne mit mathematischer Notwendigkeit verfinstert werden müsse. Zugleich benutzt er die Gesetze perspektivischer Verkleinerung zur Größenschätzung von Sonne und Mond und erkennt im »Gesicht des Mondes« die Schattenwirkung seiner Berge, auf deren Höhe er daraus, freilich sehr annähernd, schließt. Damit war ein entscheidender Schritt nicht nur in der Mathematik der Astronomie und in der Anwendung mathematischer Methode auf die Erforschung des Weltalls, sondern in der philosophischen Weltanschauung überhaupt geschehen. An die Forschungen des Anaxagoras knüpft aber unmittelbar Demokrit an und führt sie weiter. Der Perspektive scheint er ein eigenes Werk, die »Aktinographie«, d. i. Konstruktion der Lichtstrahlen (Diels, 55 B 15 b) gewidmet zu haben und eine andere Schrift (»Ekpetasmata« wörtlich das Ausgebreitete) dürfte die Projektion der Kugel oder ähnlicher Körper auf die Ebene zum Zweck der Kartenzeichnung (vgl. fr. 14 b, c) behandelt haben, Probleme, die uns leider erst in der späten Bearbeitung des Ptolemäus erhalten sind.

Es sind also ganz andere Dinge als man gemeinhin denkt, die die griechische Mathematik im 5. Jahrhundert interessieren. Nicht »leibhaft faßbare Körper«, sondern gerade die Geometrie des Lichts und die Perspektive des Bildraums. Als Anaxagoras um 460 diesen neuen Zweig der Mathematik begründete, muß es aber schon eine mathematische Wissenschaft gegeben haben. Was das Wesen dieser ältesten archaïschen Mathematik gewesen ist, daran läßt sich eigentlich nicht zweifeln. Sie war Proportionenlehre. Die Mathematik wurde zudem in dieser frühesten für uns schwer erkennbaren Zeit vielleicht gar nicht »Geometrie« genannt. Damit wurden auch noch alle die Schlüsse, die Spengler aus dem »nicht zu beseitigenden apollinischen Sinn des Wortes Geometrie« (S. 108) auf die Bedeutung des sinnlich Konkreten und körperhaft Anschaulichen als »spezifischen Ausdrucks des antiken Grenzgefühls« ziehen zu können glaubt, in sich zusammen fallen. Die Proportionenlehre ist jedenfalls der älteste Bestandteil der griechischen Mathematik. Diese alte Theorie der Proportionen ist aber, wie der grundgelehrte Paul Tannery in einer seiner aufschlußreichsten Untersuchungen gezeigt hat, bei Gelegenheit der Erforschung der musikalischen Intervalle ausgebaut worden. Sie hat also ihren eigentlichen Ursprung in der »Musik«, der Harmonielehre. Diese Musik ist ja bis in die späteste Zeit ein Bestandteil der Mathematik geblieben. Vielleicht schon im 5. Jahrhundert bilden bei den Pythagoreern und später in der Akademie die vier Schwesterwissenschaften, Geometrie, Arithmetik, Sphärik (Astronomie) und Musik zusammen die »Mathemata«, und noch im späten Mittelalter machen diese selben Disziplinen das Quadrivium aus. Die umständliche und für uns heute nur schwer verständliche Art, wie die griechischen Mathematiker in Proportionen denken und rechnen (λογίζεσθαι!) z. B. $2 : 1 = (3 : 2) \times (4 : 3)$ (d. i. $\frac{2}{1} = \frac{3}{2} \times \frac{4}{3}$) oder $2 : 1 = (4 : 3)^2 \times (9 : 8)$ (d. i. $\frac{2}{1} = (\frac{4}{3})^2 \times \frac{9}{8}$) wird sofort verständlich und natürlich, wenn wir sie in die Sprache der Musiktheorie umsetzen. Denn die erste Gleichung heißt nichts anderes als »die Oktave besteht aus Quinte und Quart«, die zweite: »die Oktave besteht aus zwei Quarten und einem Ganzton«. (Vgl. Philolaos bei Diels 32 B 6.) Der Ursprung der griechischen Proportionenlehre ist also ein wesentlich musikalischer und die Rolle der Musik in der Entwicklung der reinen Mathematik kann in der Tat, wie Tannery zeigt, der fundamentalen Bedeutung dieses Prinzips entsprechend, nicht hoch genug geschätzt werden.

Nichts kennzeichnet besser das eigentliche und tiefste Wesen griechischer Mathematik als diese Tatsache: der Grieche zeigt auch in dieser, vielleicht seiner bedeutendsten Schöpfung die ganz merkwürdige Art, in Proportionen zu denken; die Proportion ist aber nichts sinnlich Anschauliches wie ein Körper, sie kann vielmehr schon als ein, wenn auch noch einfacher Ausdruck funktionalen Denkens aufgefaßt werden. Tatsächlich ist die moderne funktionale Mathematik in ihren Anfängen gerade von dieser griechischen Theorie der Proportionen inspiriert. Wie stark Nikolaus von Oresme, den ja auch Spengler als den Vater der abendländischen Mathematik betrachtet, unter ihrem Einfluß steht, braucht kaum betont zu werden, das zeigt schon der Titel seines Hauptwerkes »Algorismus proportionum«. Und der von John Napier (1614) geprägte Ausdruck Logarithmus — den Grundgedanken des logarithmischen Rechnens hat bereits Archimedes in seiner Sandrechnung ausgesprochen — weist schon in seiner Form (*λόγου ἀριθμός* d. i. Proportionszahl) auf die griechische Terminologie und seine Herkunft aus der Proportionenlehre hin.

Man sieht, von jener Beschränktheit auf sinnliche Anschaulichkeit, von jenem »antiken Grenzgefühl« kann bei der griechischen Mathematik nicht im entferntesten die Rede sein. Die alte griechische Theorie der Proportionen gerät aber in einen Umbildungsprozeß dadurch, daß in ihre Gedankenentwicklung eine ganz neue Problemreihe einmündet — das Infinitesimalproblem, das nun das eigentlich treibende Motiv in der Entwicklung der höheren mathematischen Theorie wird. Daß schon vor Demokrit infinitesimale Betrachtungen in der griechischen Mathematik gebräuchlich waren, zeigen die Zenonischen Paradoxa, die sich gegen eine infinitesimale, allerdings noch diskrete Auffassung des Raumes wenden: Von Zenon wird den Exhaustionsversuchen die Unmöglichkeit entgegengesetzt, das Stetige durch fortgesetzte Teilung zu erschöpfen. Die Exhaustionsmethode muß also schon damals den Mathematikern bekannt gewesen sein, und der Sophist Antiphon benutzt sie auch wie etwas Bekanntes für seinen Lösungsversuch der Quadratur des Kreises, dem mathematischen Paradestück der damaligen Popularphilosophie. Gab es schon vor Demokrit somit sicherlich nicht unbedeutende Ansätze zur Infinitesimalmethode, an die er anknüpfen konnte, so scheint doch erst dieser Denker den allgemeinen Wert und die Bedeutung dieses Verfahrens als eines heuristischen Prinzips mathematischer Untersuchungen überhaupt erkannt zu haben. Und seit Demokrit verschwindet nun dies Problem nicht mehr, vielmehr sehen wir alle schöpferischen Mathematiker der folgenden Zeit an seiner theoretischen Bewältigung arbeiten. Der nächste entscheidende Fortschritt über Demokrit hinaus bedeutete hier die alle bisherigen mathematischen Vorstellungen evolutionierende Entdeckung des Irrationalen. Seit den befreienden Untersuchungen von Zeuthen, Jung, Vogt und Eva Sachs wissen wir heute (und zwar aus bester Quelle, nämlich aus Eudems, des Aristoteles-Schülers Geschichte der Mathematik), daß diese Entdeckung, die Theorie, die Definition und Klassifikation der irrationalen Größen, wie wir sie noch heute im X. Buch des Euklid lesen, ferner ihre Zuteilung an die Geometrie, Arithmetik und Harmonielehre (!) im großen und ganzen die Leistung des genialen Mathematikers Theätet war, des früh verstorbenen Freundes Platos, dessen Andenken er den schönen diesen Namen als Titel tragenden Dialog gewidmet hat. Theätet ist wohl von Demokrits Raumauffassung ausgegangen, zu dessen Philosophie er, wie wir aus dem vaticinium ex eventu im »Sophisten« S. 265, schließen dürfen; in seiner Jugend überhaupt stark hinneigte. Die Entdeckung des Irrationalen als einer allgemeinen und beweisbaren Eigenschaft des Raumes, macht nun aber die Demokritische Auffassung des Raumes unmöglich. Denn der Raum kann nun nicht mehr als in letzte Raumelemente teilbar und durch sie als meßbar gedacht werden, wenn Raumgrößen nachgewiesen sind, die kein gemeinsames Maß haben. Wie tief der Eindruck dieser Entdeckung auf die wissenschaftliche Welt jener Zeit war, können wir noch in den Dialogen Platos sehen. In den »Gesetzen« erzählt er, wie er selbst erst spät die Lehre vom Irrationalen kennen lernte, sie mit Eifer studierte und nun über die tief eingewurzelte ebenso lächerliche wie schimpfliche Unwissenheit in diesen Dingen sehr erstaunte. »Dieser Zustand schien mir nicht menschenwürdig zu sein, sondern eher für Schweine zu passen; und ich schämte mich seiner nicht nur für mich selbst, sondern noch für alle Hellenen mit,« das müsse nun anders werden; »dieses Problem muß man untersuchen und durchdenken oder man ist gar nichts wert; indem man es sich immer wieder vorlegt, hat man einen Zeitvertreib, der für alte Leute viel hübscher ist als das Brettspiel, und diese können ihren Ehrgeiz so in einer dem Alter angemesseneren Beschäftigung suchen« (Gesetze VII. S. 820). Wir haben diese Stelle hier angeführt, um gleich zu zeigen, wie ganz unbekannt dem Griechen der klassischen Zeit jene angebliche Angst vor dem Irrationalen war, die auch Spengler ihm andichten will. Das Irrationale soll nach ihm »dem antiken Weltgefühl im tiefsten Innern fremd und darum unheimlich« gewesen sein; »wer dies Gefühl, die tiefe metaphysische Angst der Auflösung des Greifbar-Sinnlichen und Gegenwärtigen, mit dem sich das antike Dasein wie mit einer Schutzmauer umgeben hatte, begreift«, der soll auch »den letzten Sinn der antiken Zahl des Maßes im Gegensatz zum Unermeßlichen und das hohe religiöse Ethos in ihrer Beschränkung begriffen haben«. (S. 96.) Nun, von solcher metaphysischen Angst ist hier bei Plato — und ihm wird man doch wenn irgend einem ein philosophisches Verständnis für den antiken Zahlenbegriff zutrauen dürfen — doch nichts zu spüren. Die Beschäftigung damit ist ihm wahrhaftig nicht »unheimlich«, er nennt sie ganz vergnügt und etwas boshaft einen angenehmen Zeitvertreib, hübscher als Schach. Man sieht wie ungriechisch im Sinne der klassischen Zeit jener längst als späte Erfindung erkannte, neupythagoreische Mythos bei Jamblichus ist, wonach der, welcher zuerst das Irrationale in die Oeffentlichkeit brachte, wegen dieses Frevels auf dem Meere umgekommen sei. Plato denkt gerade umgekehrt nur daran, die epochemachende Entdeckung des Irrationalen möglichst schnell unter allen Hellenen zu verbreiten.

Theätet starb zu früh (368 v. Chr.), um die durch seine Entdeckung der Irrationalität notwendig gewordene Reform der ganzen griechischen Mathematik noch selbst in Angriff nehmen zu können. Dies ist das Verdienst des anderen großen Mathematikers des platonischen Kreises, des Eudoxus. Er ist mit Recht der Neuschöpfer der Mathematik genannt worden. Seine Leistung besteht aber in der Schaffung der neuen mathematischen Theorie, die das Irrationale theoretisch bewältigt. Die alte Theorie der Proportionen kannte nur Verhältnisse zwischen kommensurablen Größen, d. h. zwischen Größen, die sich wie (ganze) Zahlen zueinander verhalten. Nun galt es den Proportionsbegriff so umzugestalten, daß er auch auf irrationale Größen anwendbar wurde. Das erreichte Eudoxus durch die neue Definition der gleichartigen Größen als solcher, »deren Multipla einander übertreffen können« (Euklid V, Def. 3—4). Die Bedeutung des auf dieser Definition beruhenden »Eudoxischen Prinzips«, das also mit Unrecht auch das »Archimedische« genannt wird, besteht darin, daß dadurch dem in diskreten und kommensurablen Größen denkenden abstrakten Verstand Stetigkeit und Inkommensurabilität theoretisch zugänglich wird. Eudoxus richtet sich aber mit diesem seinem Axiom, wie wir aus einem zufällig erhaltenen Scholion (Euklid V, 436 Heiberg) schließen dürfen, gegen die Mathematik der Demokritener, und ihren Grundsatz, »daß es kleinste Größen gibt«: denn aus diesem Axiom folgt, daß man bei jeder beliebig kleinen Größe, die man annimmt, immer noch eine erhalten kann, die kleiner ist als jene.

Durch Eudoxus erhält die griechische Mathematik nun jene Form, die sie uns noch jetzt bei Euklid zeigt. An Eudoxus knüpft aber unmittelbar wieder Archimedes an, dessen Exhaustionsbeweise der Sätze infinitesimaler Natur auf diesem eudoxischen Postulat beruhen. Auf dem Postulat des Eudoxus beruht auch jene uns ganz modern anmutende Ausdrucksweise des Archimedes, daß »die eine Figur die andere um weniger als jede beliebige Größe übertrifft«. Zeuthen hat also vollkommen recht, wenn er meint, daß die diesem oder jenem Verfasser in der neueren Zeit, wie z. B. Wallis (in Arithmetica Infinitorum 1655), zugeschriebene Erfindung dieses Ausdrucks für einen exakten Grenzübergang in der Tat nur besagt, was schon im Exhaustionsbeweise der Alten enthalten ist, und »damit sei den Alten noch kaum alles, was ihnen gebührt, gegeben«.

So ist jetzt die große Linie der inneren Problementwicklung in der griechischen Mathematik klar geworden. Es ist ein gewaltiger Weg von innerer Notwendigkeit, auf dem jeder Schritt den folgenden logisch bedingt. Die wissenschaftliche Mathematik beginnt als Musiktheorie wohl nicht viel vor 500 — damals soll Lasos von Hermione, angeblich der Lehrer Pindars, das erste musiktheoretische Werk geschrieben haben. Auf dem Boden dieser alten Proportionenlehre baut dann Demokrit kaum vor 440 seine Infinitesimalmathematik auf. Eine neue Epoche bringt dann die Entdeckung des Irrationalen durch Theätet wohl spätestens um 380, — denn Theätet scheint nach Platos Darstellung seine bahnbrechende Entdeckung noch in ganz jungen Jahren gemacht zu haben —, worauf dann Eudoxus die neue mathematische Theorie schafft und durch sie die Schwierigkeiten des Irrationalen überwindet (etwa in den Jahren 380—350). Von dem durch Eudoxus geschaffenen Boden ausgehend, gelangt dann schließlich Archimedes in der zweiten Hälfte des 3. Jahrhunderts v. Chr. zu einer Methode, die dem modernen Infinitesimalverfahren in seinem Wert schon ganz nahe kommt. Man sieht, die Infinitesimalmethode ist nicht ein Einfall, der blitzartig im Kopfe eines Griechen einmal auftaucht und sonst für das Wesen griechischer Mathematik bedeutungslos wäre, es ist vielmehr gerade das fundamentale Problem, um das die Griechen in einem mehr als zwei Jahrhunderte währenden, ununterbrochenen Gedankenkampf rangen. Nur der (demokritische?) Terminus für das

Unendliche (ἄπειρον) ist in der späteren Mathematik verpönt. Welche Wirkung jener Brief des Archimedes an Eratosthenes über seine neu gefundene Methode in der mathematischen Welt hervorrief, darüber wissen wir leider nichts. Archimedes soll unter den rohen Händen römischer Soldaten, da er, ohne des Kampfes zu achten, seine geometrischen Figuren ruhig weiter in den Sand zeichnete, umgekommen sein. Dieser Vorgang hat fast symbolische Bedeutung. Unter dem Waffenlärm der neuen, nun heraufziehenden Zeit der Römerherrschaft fand der lebendige Strom griechischen Geistes und schöpferischer Forschung bald ein Ende. Erst als im Abendlande wieder selbständige Forschung begann, lernte man allmählich die eigentlichen Gedanken griechischer Mathematik verstehen. Leibniz ist sich wohl der nahen Verwandtschaft seiner Infinitesimalmethode mit der des Archimedes bewußt. Er sagt selbst in seinem Brief an Varignon, den treuen Kämpfer für das neue Verfahren: »Der Vorzug unserer Infinitesimalmethode liegt darin, daß sie unmittelbar und *augenscheinlich* in einer Art, die den eigentlichen Quell der Entdeckung freilegt, dasjenige gibt, was die Alten so z. B. *Archimedes* auf Umwegen vermittelst des indirekten Beweises erreichten« (Brief vom 1. Februar 1702). Und in ähnlichem Sinne spricht er in seiner »Rechtfertigung der Infinitesimalrechnung« 1702 von der Methode des Archimedes. Leibniz ist sich also vollkommen bewußt, daß sein Verfahren mit dem der griechischen Mathematiker und vor allem dem des Archimedes eine große Aehnlichkeit besitzt. Ihren Vorzug vor dem »indirekten Beweise der Alten« sieht er aber gerade in ihrer größeren Anschaulichkeit. Leibniz empfindet also, wie es jeder muß, sehr deutlich die merkwürdig logische, unanschauliche Art des antiken Exhaustionsverfahrens, aber nichts von jenem »euklidisch-apollinischen« Grenzbewußtsein.

Was soll überhaupt dieses Schlagwort »euklidisch« bedeuten? Euklid ist ein ganz elementares Schulbuch, ein in einer ganz bestimmten didaktischen Absicht zusammengestelltes Elementarsystem der Mathematik. Der Zweck, auf den es abzielt, ist die Konstruktion der fünf regulären sogenannten platonischen Körper. Um deren Bedeutung ganz zu verstehen, muß man sich erinnern, daß Plato die Natur als die Welt der Körper im Anschluß an Demokrit aus Atomen konstruiert. Hatte aber Demokrit die Gestalt der Atome und den Aufbau der Materie aus ihnen als unendlich verschieden angenommen, so genügte das Plato nicht. Er war überzeugt, daß sich hier ebenso mathematische Gesetzmäßigkeit finden lassen müsse, wie sie sich in den Bewegungen der Himmelskörper zeige. Sie zu erkennen war nur die mathematische Wissenschaft damals noch nicht weit genug. Sie hatte wohl die Planimetrie zu einem systematischen Abschluß gebracht, aber die Stereometrie war über ihre ersten Anfänge bei Demokrit noch nicht hinaus. Darum stellte Plato den Mathematikern seines Kreises die Aufgabe, die Gesetzmäßigkeit der irrationalen Körperlichkeit zu erforschen. Das tat Theätet, und dieser bahnbrechende Genius löste diese Aufgabe nicht nur, sondern machte dabei auch die überraschende Entdeckung, daß die Körperwelt nicht von unendlicher Vielgestaltigkeit sei, wie noch Demokrit angenommen hatte, sondern daß es nur 5 reine Formen der körperlichen Dimension gäbe: Würfel, Ikosaeder, Oktaeder, Tetraeder und Dodekaeder; es gelang ihm diese Körper in ihre Kugel, wie Vielecke in ihre Kreise einzuschreiben und zu konstruieren, allerdings nur mit Hilfe des Irrationalen. Damit schien das bewiesen, was man früher nicht für möglich gehalten hatte, daß auch die empirische, scheinbar so gänzlich irrationale Körperlichkeit in ihrem Aufbau mathematischer Gesetzmäßigkeit und nicht der bloßen Willkür des Zufalls folge, daß sie sich konstruieren lasse. Der Eindruck dieser Theätetschen Entdeckung auf Plato war tief. Nun schien das innere Gesetz körperlicher Dimension gefunden. Mehr als jene 5 reinen Formen derselben gab es nicht. Alles Körperliche ist aber eins der 5 Elemente; entweder Erde, Wasser, Luft, Feuer oder Aether, die wieder alle ineinander übergehen können. Also kann, so schloß Plato, die Materie nicht aus verschiedengestaltigen Atomen bestehen, sondern alle Atome müssen von gleicher Form sein, aber je nachdem sie in der mathematischen Form eines Würfels, Ikosaeders usw. angeordnet sind, ergeben sie die verschiedenen »Körper« der Welt d. h. die Elemente Erde, Wasser, Luft, Feuer, Aether. Eine geniale Intuition, die merkwürdig an die Ergebnisse der modernsten Forschungen über den inneren Aufbau der Materie und die Struktur der Kristalle erinnert.

Die platonische Philosophie setzt zu ihrem Verständnis also mindestens so viel mathematische Kenntnisse voraus, als die Konstruktion der 5 regulären Körper erfordert, mit denen sie beginnt. Der junge Akademiker mußte daher, ehe er zu dem eigentlichen Studium der platonischen Philosophie zugelassen wurde, erst einen Lehrgang in der Mathematik durchmachen, der ihn bis zu der Konstruktion dieser Körper führte. Euklids »Elemente« enthalten somit die mathematische Propädeutik der platonischen Akademie oder sind zum mindesten nach dem Vorbild einer solchen verfaßt, und durch diesen Zweck ist wenigstens das Buch, wie schon der Titel andeutet, in

Form und Inhalt durchaus bestimmt. Genau nach den Vorschriften, die Plato gibt, wird aus einigen wenigen zugrunde gelegten ersten Voraussetzungen, »Hypothesen«, streng logisch eines nach dem anderen bis zu diesem seinem »Ziel« abgeleitet. So bleibt denn alles, was für diesen Zweck unnötig ist, unberücksichtigt. Nur die Lehre vom Irrationalen macht hier vielleicht eine Ausnahme. Ihre Schwierigkeiten werden mit einer Ausführlichkeit und einer Gründlichkeit behandelt — das zehnte Buch, das diese Lehre bringt, nimmt fast die Hälfte des Raumes ein, wie die anderen 12 Bücher zusammen — die über den Rahmen einer Elementarmathematik hinauszugehen scheint. Aber auch hier hat sich Euklid nur streng an die Forderungen Platos gehalten, der für den propädeutischen Unterricht ja gerade eine gründliche und genaue Belehrung über das Wesen des Irrationalen forderte.

So läßt sich Euklid nicht allein aus sich heraus, sondern mit aus der Philosophie der platonischen Akademie und den besonderen Bedürfnissen ihres Unterrichts heraus verstehen. Aus einem Schulbuch darf man nicht so ohne weiteres auf das Wesen der wissenschaftlichen und schöpferischen Mathematik, die ihm zugrunde liegt, schließen. Das gilt für die griechische Mathematik ebensogut, wie für die heutige, auch wenn es sich um das beste Schulbuch handelt, das vielleicht überhaupt je geschrieben wurde. Wenn also im Euklid allerdings die Stereometrie stark in den Vordergrund tritt, so geschieht dies doch aus ganz bestimmten Gründen und man kann deshalb noch nicht mit Spengler sagen, daß »alle antike Mathematik im letzten Grunde Stereometrie ist«.

Indessen hat heute im Zeitalter der sog. »nichteuklidischen« Geometrie das Wort euklidisch einen ganz bestimmten Sinn, es bedeutet ein geometrisches System, das auf dem euklidischen Axiom beruht, daß Parallelen beliebig verlängert, nie zusammentreffen. Wie aber diese dem Ganzen vorausgeschickten Axiome zu verstehen sind, das sagt uns wieder Plato: »Die Wissenschaften, die sich mit den Problemen der Geometrie, der (Proportionen?)rechnung und derartigem beschäftigen, legen, wie bekannt, Begriffe wie die von »Gerade« und »Ungerade«, von den geometrischen Figuren, von den drei Arten der Winkel oder andere diesen verwandte je nach der jeweils notwendigen Methode als Hypothesen zugrunde; diese Begriffe setzen sie mit dem vollen Bewußtsein als Hypothesen voraus, ohne von sich oder anderen darüber, als etwas jedem deutlichen, eine Definition zu verlangen. Indem sie aber nun mit diesen (sc. Axiomen) einmal den Anfang machen, gelangen sie

Schritt für Schritt in streng logischer Ableitung an das Ziel, zu dessen Untersuchung sie ausgegangen waren« (Staat VII, S. 510). Die dem mathematischen System Euklids vorangestellten sogenannten ὅροι sind als solche »Hypothesen« anzusehen, keine absolute Wahrheiten, nicht einmal Definitionen — die meisten sind bloße Tautologien — überhaupt nicht wirkliche Prinzipien (ἀρχαί), sondern »Konventionen«, gewissermaßen »Einschritt und Sprungbrett«, mit denen man beginnt, von denen man sich abstößt, also im wahren Sinne bloße termini a quo, »Hypothesen«, über die man nun einmal nicht höher hinaus kann, oder wie Leibniz sie versteht »Pflöcke, durch die der Wissenschaft ein fester Halt gegeben wurde«. Wie wenig die griechischen Mathematiker sich tatsächlich darüber täuschten, daß auch das Parallelaxiom keine Selbstverständlichkeit, sondern eine bloße und sehr bezweifelbare Hypothese war, zeigt seine lebhafte Diskussion in der Mathematik der nacheuklidischen Zeit. Jedenfalls ist der Glaube an die Absolutheit des Parallelenaxioms ganz und gar ungriechisch. Aus Spengler könnte man freilich den Eindruck gewinnen, als hätten die antiken Mathematiker, »auf Gegenstände der Nähe und des Kleinen beschränkt«, nur über ihre »winzigen Figuren« gebeugt, gar nicht bemerkt, daß die Parallelen sich am Horizont berühren (S. 99). Nun ist aber gerade das Hauptproblem jenes Teils der projektiven Geometrie, den die Griechen in der Optik im engeren Sinne behandelten, »der Grund des Zusammenfallens der Parallelen«. Noch weniger Glück dürfte Spengler mit seiner anderen Behauptung haben, daß die griechische Seele »vor der Mathematik der Ferne auswich« und es vermied, sich »etwa auf ein Dreieck zu berufen, dessen Punkte durch den Standpunkt des Beobachters und zwei Fixsterne gebildet werden, daß also weder gezeichnet noch angeschaut werden kann«. Denn Philolaos spricht von Dreiecken und Vierecken, die durch bestimmte Fixsterne des Tierkreises gebildet werden und von dem Zwölfeck, das in den Kreis der Ekliptik eingeschrieben gedacht, diesen in seine 12 Teile, die 12 Sternbilder (zu je 30 Grad) zerteilen. Es ist das von ihm sogenannte »Zwölfeck des (Planeten) Jupiter«, der diese 12 Zeichen in ungefähr 12 Jahren durchläuft. (Diels 32 A 14). Als dann Theätet die Konstruktion des Dodekaeders gefunden hatte, da zeichnete Plato (Eudoxus?) in die Fixsternkugel statt des philolaischen Zwölfecks den Zwölfflächner ein, vermutlich um auf analoge Weise ihre Oberfläche in 12 regelmäßige, einander gleiche sphärische Fünfecke zu teilen — eine Konstruktion, die Euklid am Schluß des letzten Buchs als die Krone des Ganzen lehrt. Ueberhaupt ist die Lehre vom Kreis und von den ihm eingeschriebenen Figuren sowie die Lehre von der Kugel nicht, wie Spengler meint, »auf dem Papier«, sondern am Himmel entwickelt worden. Diese elementare Mathematik, ebenso wie die Theorie der höheren Kurven ist aus dem Bedürfnis der Astronomen entstanden, die scheinbaren und wirklichen Bahnen der Himmelskörper mathematisch darzustellen. Ja die Sphärik ist geradezu identisch mit der sphärischen Astronomie gewesen, so daß dieser Zweig der Mathematik bald mit diesem, bald mit jenem Namen genannt wird. Erst Menelaos von Alexandria scheint im ersten Jahrhundert nach Christus bestimmte sphärische Probleme aus der Astronomie ausgeschieden zu haben. Und wie die Wissenschaft der Perspektive, die »Optik« schon von Anaxagoras an den kosmischen Verhältnissen entwickelt wurde, haben wir eben gesehen; seitdem hat bei den Griechen immer die »Optik« als Hilfswissenschaft zu der Astronomie gehört; sogar die Proportionenlehre der Musik wurde, wie man aus Platos Timäus lernen kann, auf die Astronomie angewandt. Wie jede wirkliche wissenschaftliche Mathematik ist auch die griechische in den Weiten des Weltraums groß geworden.

Man sieht aus dem allem, wie ganz sinnlos jene Meinung ist, als enthalte Euklid alles, was die Griechen an mathematischem Wissen bis zu jener Zeit besaßen, eine Auffassung, die letzten Endes aus den Schriften der späten Neuplatoniker stammt. In der Akademie, in der Generation für Generation den Lehrgang des Euklid immer wieder treulich durchmachte, gewann dieses Elementarbuch geradezu kanonisches Ansehen und galt als das A und O alles mathematischen Wissens zu Platos Zeit, als eine Art mathematischen Kommentars zur platonischen Philosophie. Für den etwas beschränkten historischen Horizont dieser Neuplatoniker der späteren Kaiserzeit, deren philosophisches Interesse sich eigentlich in der Interpretation Platos erschöpfte, wie ihr mathematisches in der Euklids, existierte außer diesen beiden höchstens noch Pythagoras. Die allerdings noch junge, aber in den letzten Jahrzehnten zu einer eigenen und bedeutenden Wissenschaft gewordene Geschichte der Mathematik hat hier gründlich aufgeräumt; und ebenso zerstört ist von ihr heute jenes andere aus denselben neuplatonischen Quellen geschöpfte Märchen von der »Mathematik des Pythagoras«. Nach diesem wäre das ganze von Euklid kodifizierte mathematische Wissen das Werk jenes Philosophen, der schon um 540 das alles entdeckt hätte: also Theätets Theorie vom Irrationalen ebenso, wie dessen Konstruktion der regulären Körper oder die Proportionenlehre des Eudoxus, und damit nicht genug auch noch viele von den Resultaten, die Medizin, Astronomie, Musiktheorie und Philosophie erst des 4. Jahrhunderts gezeitigt hatten. Was in Wahrheit der reife Ertrag eines mehr als 200jährigen unerhört fruchtbaren und intensiven Ringens war, soll nun, wie Spengler es ausdrückt, von einem einzigen in wenigen Jahren »aus dem Nichts geschaffen sein«. Das hätte Pythagoras auch nicht gekonnt, wenn er wirklich die fünf Leben zur Verfügung gehabt hätte, die ihm fromme Sage zuschrieb.

In Wahrheit hat Pythagoras selbst mit der wissenschaftlichen Mathematik und ihrer Entwicklung kaum etwas zu tun gehabt. Pythagoras war ein Philosoph, vor allem ein großer sittlich-religiöser Erwecker der griechischen Menschheit. Als solchen kennt ihn noch Plato, der sehr schön von ihm spricht als den, der »seinen Jüngern ein Führer in der sittlichen Bildung geworden ist, so er lebte; sie liebten ihn über alle Maßen, da er mit ihnen umging, und sie gaben den Weg des wahren Lebens, wie er ihn gelehrt, an die späteren weiter, die ihn noch jetzt treulich bewahren und ihn die »pythagoreische Weise des wahren Lebens« nennen und durch sie hervorleuchten unter allen anderen«. (Staat X S. 600.) So gut dieser Pythagoras in die mystagogische Luft des 6. Jahrhunderts, in die Zeit der Orphiker, des Pherekydes, Epimenides usw. paßt, so unvorstellbar ist in dieser archaischen Atmosphäre streng wissenschaftliche Mathematik mit der ganzen souveränen Freiheit des Geistes, die sie voraussetzt. Der ganze Entwicklungsprozeß der wissenschaftlichen Mathematik vor Euklid scheint sich im großen und ganzen in Athen abgespielt zu haben, wenigstens scheinen fast alle großen Mathematiker, deren Namen wir kennen, Anaxagoras ebenso wie Oinopides und Hippokrates von Chios, die Sophisten Antiphon und Hippias, dann Theodorus, Theätet und Eudoxus hier gewirkt zu haben. Selbst Demokrit kann die starken Einflüsse von der Mathematik des Anaxagoras hier erfahren haben. Ist daneben die Bedeutung der abderitischen Schule für die Mathematik nicht zu leugnen (Theodor und Demokrit), so ist dagegen vor dem 4. Jahrhundert auch nicht ein historisch wirklich faßbarer Mathematiker bekannt, der mit Sicherheit für Unter-Italien in Anspruch genommen werden könnte. Die »klare, städtisch-intellektuelle Fassung«, die Spengler an der griechischen Mathematik auffällt, dürfte sie also im Athen des 5. Jahrhunderts erhalten haben, das damals der Mittelpunkt des großen attischen Reichs (nicht eines »winzigen Stadtstaats«), das eigentliche Zentrum der griechischen Geistigkeit jener Zeit war. Und in der Tat könnte man in der peinlichen Gewissenhaftigkeit, in dem fast pedantischen Ordnungssinn der griechischen Mathematik eine gewisse innere Verwandtschaft mit dem attischen Stil finden. Jedenfalls muß die Mathematik um die Mitte des 5. Jahrhunderts in ihren Fundamenten schon als ein festes wissenschaftliches Gebäude dagestanden haben. Das zeigt Anaxagoras. Damit war zum erstenmal in der Geschichte das erstaunliche Phänomen der strengen, beweisbaren Wissenschaft ins Bewußtsein der Menschheit getreten. Die bloße Logik des abstrakten Denkens hatte die Macht erwiesen, die tiefsten Geheimnisse der Realität zu enthüllen. Eine ganz neue bisher ungeahnte Welt des abstrakten Begriffs tat sich hier auf und der Eindruck dieses Ereignisses muß eine völlige Umwälzung der Philosophie zustande gebracht haben. Was ist es denn, was uns Demokrit, Plato und Aristoteles im Gegensatz zu den archaischen Giganten, den Parmenides, Anaximander, Heraklit und Empedokles, noch heute so modern erscheinen läßt? Wie fern schon der Zeit Platos jene »alten« großen Philosophen (οἱ παλαιοί) schienen, das zeigt allein die Tatsache, daß schon unter ihm im Kreise der Akademie (vor allem durch den jungen Aristoteles) jene systematische historische Durchforschung der »alten« Philosophen begann, in der die Doxographie des Theophrast und der anderen Peripatetiker ihre eigentliche Wurzel hat. Aus der romantischen Sehnsucht einer kleinen Zeit nach der Größe einer unwiederbringlich verlorenen Vergangenheit sind auch jene Neigungen zu einem bewußten Archaismus und Klassizismus zu erklären, die sich in der Philosophie Platos oft bemerkbar machen. Welches Ereignis in der Geschichte des Geistes hat diese gänzliche Aenderung seiner Denkart hervorgebracht? Das kann nichts anderes gewesen sein, als das Auftreten der Wissenschaft, der Mathematik. Anaxagoras ist es, bei dem diese Revolution der Philosophie durch den mathematischen Geist beginnt. Er ist es darum auch, der das Prinzip des logisch abstrakten, beweisenden Denkens, den Verstand, den »Nus« als das Wesen der Wirklichkeit erkennt. Dem feinen historischen Sinne des Aristoteles ist es nicht entgangen, daß mit Anaxagoras und Demokrit eine neue Epoche in der Geschichte der Philosophie beginnt und er merkt ausdrücklich an, wie viel moderner (καινοπρεπεστέρως) die Gedanken z. B. des Anaxagoras trotz ihres oft noch altertümlichen Gewandes im Vergleich zu denen etwa des Empedokles im Grunde anmuten. (Aristoteles, Metaphysik A 8 S. 989b, 6 vgl. »Ueber den Himmel« IV, 2 S. 308b, 31.) Und wenn andererseits uns heute noch die Philosophie Platos so modern erscheint, daß man sie sogar mit kantischen Gedanken glaubte interpretieren zu können, so muß man sich erinnern, daß es fast dasselbe Buch ist, nämlich der Euklid, das als das unerreichte Vorbild wahrhaft wissenschaftlicher Methode (more geometrico) sowohl Plato wie fast allen abendländischen Philosophen und nicht am wenigsten Kant selbst vorschwebte, der seine wichtigsten Begriffe (theoretisch, praktisch, Problem, Postulat u. a.) im Sinne der griechischen mathematischen Theorie verstand.

Man muß sich dies alles vor Augen halten, um die ganze Unmöglichkeit jener Konstruktion einzusehen, die Pythagoras schon um die Mitte des 6. Jahrhunderts die gesamte mathematische Wissenschaft aus dem Nichts hervorzaubern läßt. Noch die älteren Pythagoreer Unter-Italiens scheinen sich wohl mit Musik, Astronomie, Gymnastik und Medizin — die berühmte krotonische Aerzteschule, der Demokedes und Alkmaion angehören, wird aus ihrem Kreise hervorgegangen sein — aber kaum mit eigentlich wissenschaftlicher Mathematik beschäftigt zu haben. Die Titel der Schriften, die uns von ihnen genannt werden, — denn daß es kein altpythagoreisches Schrifttum gab, wird sich schwerlich beweisen lassen — wie z. B. »das heilige (mystische) Wort«, die »Höllenfahrt«, das »Weltenkleid« und ähnliches, weisen in eine ganz andere Richtung. Die bewußte Gestaltung des Lebens nach dem höchsten offenbarten Zwecke, das »pythagoreische wahre Leben«, war offenbar das Zentrum dieser Lehre. Leib und Seele zu diesem Zwecke fähig zu machen und zu reinigen, ist die Aufgabe der pythagoreischen »Kultur« (παιδεία), die Harmonie, die die Körper- und Seelenkräfte untereinander und mit dem All einstimmend macht, zu finden, der Sinn ihrer Beschäftigung mit Gymnastik, Medizin, Musik und Astronomie. Erst als etwa um die Mitte des 5. Jahrhunderts v. Chr. die demokratische Revolution die in Unter-Italien herrschende theokratische Aristokratie der Pythagoreer stürzte, und »überall in Groß-Griechenland die Synedrien der Pythagoreer von den Pöbelhaufen angezündet wurden« und die Vertriebenen nach dem griechischen Festland flohen, läßt sich mit Sicherheit auch bei den pythagoreischen Emigranten (vielleicht sogar erst unter dem Eindruck der attischen Mathematik) eine intensivere Beschäftigung mit den wissenschaftlichen Problemen der Mathematik nachweisen. Philolaos ist der erste hier historisch faßbare pythagoreische Mathematiker — vorausgesetzt, daß die ihm zugeschriebene Schrift nicht erst aus dem 4. Jahrhundert stammt! — und bei ihm zeigt sich schon jene merkwürdige Verbindung, die der religiös symbolische Geist der alten pythagoreischen Tradition mit dem modernen mathematischen Denken eingegangen ist, jene merkwürdige Zahlenmystik und mathematische Symbolik, die oft für das besondere Kennzeichen der Philosophie des Pythagoras selbst gilt

Aber wie wenig in Wahrheit dies alles mit dem echten, alten Pythagoreismus zu tun hatte, zeigt die Ueberlieferung, daß die Anhänger der alten, wahren Tradition des Pythagoras, die »Akusmatiker«, wie sie sich nannten, jenen »Mathematikern« als Neuerern und Ketzern das Recht streitig machten, sich überhaupt Pythagoreer zu nennen, da ihre Richtung gar nicht auf Pythagoras selbst zurückgehe, der mit all dem nichts zu tun gehabt habe, sondern erst auf — »Hippasus«, und noch Aristoteles spricht von ihnen meist nur als den »sogenannten Pythagoreern«. Die »Mathematiker« suchten andererseits diesen Angriffen gegenüber, deren politischer Hintergrund nicht zu verkennen ist (es handelt sich offenbar hier um die Frage der Rückkehr der Emigranten zur Macht), die Echtheit ihres Pythagoreertums, schon im 4. Jahrhundert scheinbar dadurch zu beweisen, daß sie ihre Beschäftigung mit mathematischen Dingen schon dem Pythagoras selbst zuschrieben: Wenn die Ueberlieferung nichts davon wisse, so liege das daran, daß er seine Mathematik nur einem ausgewählten Kreise von Würdigen mitgeteilt habe mit der strengen Weisung, sie vor den anderen geheim zu halten. Es hätte also schon zu den Zeiten des Pythagoras selbst »Mathematiker« unter den Pythagoreern gegeben, es hätte nur niemand etwas davon gewußt. Ja ihre philosophisch-mathematische Lehre sei gerade die wahre Tradition des Pythagoras, nur sei die Mathematik als strenges Geheimnis einer kleinen Gruppe von Generation zu Generation überliefert worden und erst im 5. Jahrhundert sei sie durch die Indiskretion eines Unwürdigen — nämlich des »Hippasus«, jenes »enfant terrible«, dem beide Parteien immer alles Böse zuschieben —, in die Oeffentlichkeit gebracht worden. Daher gäbe es auch »echte« d. h. mathematische pythagoreische Schriften erst seit Philolaos. Die alten pythagoreischen Schriften dagegen, wie das »Mystische Wort«, die dem Pythagoras selbst und seinen nächsten Jüngern zugeschrieben werden und von all dieser (mathematischen) Tradition scheinbar nichts wissen und mit ihr so wenig vereinbar scheinen, seien eben gefälscht und dem Pythagoras und den Pythagoreern »um sie zu verleumden« untergeschoben (natürlich fehlt auch hierbei nicht der unvermeidliche »Hippasus«). Ihnen zum Trotz seien die Mathematiker im Besitz der eigentlichen und wahren Tradition des Pythagoras, nicht sie hätten die Mathematik als fremdes heterodoxes Element in die pythagoreische Lehre hineingebracht, sondern gerade umgekehrt; was an Mathematik sonst auf der Welt vorhanden sei, stamme im Grunde alles von Pythagoras und alle bekannten Mathematiker des 5. Jahrhunderts wären zu ihrer Mathematik erst durch jenen Bruch des pythagoreischen Geheimnisses gekommen. So werden Oinopides und sogar Demokrit zu Schülern pythagoreischer Mathematiker. Diese in ihren Motiven so durchsichtige Version der Mathematiker, wie sie sich aus Jamblichus erschließen läßt[1]), ist in dieser Form ganz unglaubwürdig und hat auch die Akusmatiker nicht überzeugt. Die »mathematische« Schule der Pythagoreer ist dann allerdings, namentlich von 400 an, durch den starken Einfluß, den sie auf Plato und den ganzen Kreis der Akademie gewann — auch hierbei vergesse man nicht den politischen Einfluß auf die äußere Politik der Akademie — von großer Bedeutung für die Entwicklung und philosophische Durchbildung der Mathematik geworden. Das Ende des 4. Jahrhunderts scheint aber diese »mathematische« Schule der Pythagoreer nicht überlebt zu haben. In der literarischen Ueberlieferung hat freilich ihre Tradition, vor allem durch den Aristotelesschüler Aristoxenos wirkungsvoll propagiert, gesiegt.

Wie nun auch die Entstehung jener Sage von der Mathematik des Pythagoras selbst zu erklären sei, für den, der die neuere Forschung über diese Dinge kennt, ist sie unglaublich. Die Nachricht, daß Pythagoras den noch heute unter seinem Namen bekannten Lehrsatz vom Hypotenusenquadrat gefunden und bewiesen habe, eine Fabel, die eigentlich jene Vorstellung von der Mathematik des Pythagoras noch heute in die Köpfe schon der Schüler so unausrottbar einpflanzt, scheint zwar bereits im IV. Jahrhundert v. Chr. verbreitet gewesen zu sein, wird aber darum um nichts glaubhafter. Wenn so von einer wissenschaftlichen Mathematik des Pythagoras und überhaupt von einer wirklichen mathematischen Wissenschaft im 6. Jahrhundert keine Rede sein kann, so ist damit natürlich nicht die Existenz eines großen Schatzes an praktischem, vorwissenschaftlichem, mathematischem Wissen sogar für noch frühere Zeit geleugnet. Der angrenzende Orient und besonders Aegypten verfügte über ein hochstehendes mathemati-

1) Jamblichus de communi mathematica scientia 25 p. 76 F. Die Lesart der Parallelstelle in der Vita Pythagorea 81 p. 59 N. (Diels 8, 2) kann wohl dem konfusen Jamblichus selbst zugeschrieben werden, seine Quelle aber (Nikomachus?), die er hier wie dort ausschreibt, kann, wie der Zusammenhang lehrt, nur die Lesart der Stelle in de communi math. scientia gehabt haben, deren Sinn wir oben wiedergaben (vgl. auch Nauck zur Stelle p. LXVIII). Spuren einer damit übereinstimmenden Unterscheidung zweier Pythagoreerschulen: *»οἱ ἀπὸ Πυθαγόρου«* und *»οἱ ἀπὸ τῶν μαθηματικῶν«* finden sich u. a. auch bei den Doxographen (vgl. vor allem p. 405 b 15, 362, 611, 345 Diels), die vielleicht bis auf Theophrast zurückgehen. Es ließ sich nicht vermeiden, daß hier und auch schon vorher Resultate von Untersuchungen benutzt wurden, deren genauere philologische Belege zu bringen, der Rahmen, in der dieser Aufsatz erscheint, verbietet. Für diese sei ein für allemal auf eine spätere Arbeit über die Pythagoreer verwiesen.

sches Können. Wie die Griechen vom Orient und von Aegypten die stärksten Einflüsse auf allen Gebieten, namentlich in ihrer bildenden Kunst, erfuhren, so werden sie auch die Mathematik von dort übernommen haben. Aber die Notwendigkeit, sich diese fremde höhere Mathematik anzueignen, ergab sich für die Griechen doch erst in der Zeit, als ihre Architekten vor größere Bauaufgaben gestellt wurden, die sich in der Art der bisher gebräuchlichen, mehr handwerksmäßigen Bauübung nicht mehr bewältigen ließen. Wie die gotischen Baumeister des Mittelalters, müssen auch die griechischen Architekten des 7. und 6. Jahrhunderts schon ansehnliche mathematische Kenntnisse besessen haben. Denn solche Riesenbauten, wie sie die damalige Zeit gerade in Angriff nahm, verlangten gründlichste Berechnung und exakt konstruierte Pläne, von der hohen Entwicklung technischen Könnens, das sie voraussetzen, ganz zu schweigen. Die lange Bauzeit — am Artemision von Ephesus wurde 120 Jahre gebaut — setzt zudem Bauhütten voraus, in denen die Leitung dieser Bauten lag. Hier, in den Bauhütten — daneben höchstens noch in den Buchhaltereien der großen Handelshäuser jener Zeit — werden wir die ersten Stätten höherer mathematischer (bzw. technischer) Fähigkeiten annehmen müssen. Die drei berühmtesten Monumentalbauten jener Zeit waren aber das Apollonheiligtum im Milet, das Heräon in Samos und das Artemision in Ephesus. Hier in Milet, Samos und Ephesus müssen wir also die Existenz solcher Bauhütten voraussetzen. Daß gerade aus diesen drei Städten die ältesten griechischen Philosophen hervorgegangen sind, das muß nicht gerade Zufall sein. Diese galten, wie vor allem Thales, für das Bewußtsein ihrer Zeitgenossen vielleicht in erster Linie, als Techniker, Ingenieure, Erfinder. Die hierzu notwendige mathematische und technische Schulung können sie sich sehr wohl in der Einflußsphäre dieser Bauhütten erworben haben. Wir besitzen noch einzelne Exzerpte aus der Schrift, in der Chersiphron, der Architekt des Artimisions und nicht viel später als Thales, über seine Bautätigkeit berichtete. Wir ersehen daraus, daß ihn und seine Zeitgenossen vor allem die Bewältigung der schwierigen technischen Probleme dabei interessierte, die Konstruktion der Maschinen zum Transport der riesenhaften Werkstücke und ähnliches. Hier in der handwerksmäßigen Ueberlieferung der Bauhütten, wie dann in der Praxis der Musiker, haben wir also einen der ältesten Ursprünge griechischer Mathematik und Technik zu suchen. Trotzdem wird man dieser Zeit noch keine eigentlich wissenschaftliche, d. h. theoretisch systematische Mathematk zuschreiben können, selbst wenn Thales die paar primitiven mathematischen Erkenntnisse, die ihm Eudems

Geschichte der Mathematik als dem Vater der Philosophie zuschreibt, wirklich zuerst gefunden haben sollte. Spengler zieht aber aus jener Legende über die wissenschaftliche Mathematik des Pythagoras die kühnsten Schlüsse: »Der ahistorische griechische Geist schuf seine Mathematik aus dem Nichts; der historisch angelegte Geist des Abendlandes .... mußte die eigne durch ein scheinbares Aendern und Verbessern der ihm inadäquaten euklidischen gewinnen« (S. 89).

Man sieht: was Spengler über das angebliche Wesen griechischer Mathematik vorbringt, kann man schwer ernst nehmen, und ebensowenig wird man zugeben können, was er von jener angeblichen Beschränktheit des griechischen Geistes auf die statische Grenze und die anschauliche Gestalt im allgemeinen behauptet; hieße das doch im Grunde nichts anderes, als den Griechen das Denken überhaupt absprechen, denn die Funktion des Denkens besteht ja in der Ueberwindung der Grenze aller Anschauung, in der Zertrümmerung ihrer Starrheit, aus der Schule gesprochen, in der Synthesis von Grenze und Unbegrenztem. Gerade dies Problem ist das Hauptmotiv des griechischen wie alles Denkens von Anfang an. Nie war ihm das Begrenzte d a s Prinzip. Schon bei Parmenides ist die anschauliche, starr begrenzte Körperlichkeit (*πυκινὸν δέμας ἐμβριθές τε* fr. 8, 59, Diels) nicht Sein, sondern Schein des Nichtseins. Das »wahre Sein« dagegen ist geistig, identisch mit dem Denken (Subjekt-Objekt Identität) und besteht im Nichtsein jenes Scheins der Materie. In der Sinnenwelt erscheint ihm darum die Identität des wahren Seins (*ἑωυτῷ πάντοσε τωὐτόν*) als Vernichtung der anschaulichen Materie, d. h. als die die Unterschiedlichkeit der Körperwelt in seine Identität auflösende, die Materie (die Erde) verzehrende Einheit des Feuers (vgl. fr. 8, 56); das ist die grandiose Vision des Parmenideischen Lehrgedichtes, durch die nun die ganze Welt des Scheins durchdrungen und verstanden wird, von der Entstehung des Weltalls bis zu der des Menschen auf der Erde: alles scheinbare Entstehen ist ihm in Wahrheit ein Werden zum Nichtsein (zu Erde), alle scheinbare, materielle Vernichtung (Verbrennung) erst die Entstehung zum wahren Sein (vgl. Aristoteles, über Entstehen und Vergehen I, 3, S. 318b). Unsere Geburt als Körper ist für ihn in Wahrheit unser Tod, je mehr wir aber im Leben das Materielle, die Sinnlichkeit in uns von der Flamme des Denkens verzehren lassen, je mehr wir also dem Scheine nach sterben, desto mehr kommen wir zum Denken, zum wahren Sein, w e r d e n wir in Wahrheit, bis endlich unser Tod mit der Vernichtung unseres Körpers die wahre Geburt unserer Seele bringt, oder wie Heraklit diesen selben Gedanken ausgedrückt hat: »Hades und Dionysos ist dasselbe.« Wo ist in diesen visionären Gedanken etwas von der immer wieder berufenen eleatischen Starrheit und statischen Begrenztheit des Seins zu merken! Man höre endlich auf, sich dafür auf die sogenannte »Seinskugel« des Parmenides zu berufen. Wohl nennt er das in sich vollendete identische Sein »einer Kugel vergleichbar« (σφαίρης ἐναλίγκιον), aber gerade um mit diesem Gleichnis die innere Grenzenlosigkeit, die unendliche Identität und Ununterschiedenheit des Seins der Anschauung verständlich zu machen (μεσσόθεν ἰσοπαλὲς πάντῃ fr. 8, 44). Wer das nicht versteht, der lese den fünften von Giordano Brunos Dialogen della causa, principio ed uno. Hier gebraucht dieser Philosoph, der doch immer als Vertreter des dynamischen Unendlichkeitsbegriffs im Gegensatz zur antiken Begrenztheit hingestellt wird, zur Veranschaulichung seines Begriffs des Unendlichen ganz dasselbe Bild: »Es (das All) ist ganz in dem Sinne, daß es nicht Grenze ist. In ihm ist sicherlich die Höhe nicht größer als Länge und Tiefe. Daher ist es einer Kugel vergleichbar, ist aber keine Kugel. In der Kugel ist dieselbe Länge, wie dieselbe Breite und Tiefe, weil sie eine gleiche Grenze haben. Im All ist dieselbe Länge, Breite und Tiefe, weil in ihm alle Dimensionen unbegrenzt und unendlich sind.« Will man vielleicht aus dieser Stelle auch Bruno einen Strick drehen? Das absolute Sein ist eben schon bei Parmenides sowohl begrenzt als unendlich. Wenn später Demokrit, Philolaos, die Pythagoreer und Plato beides als gleichberechtigte absolute Prinzipien der Realität nebeneinanderstellen, so ist damit nur dieser Parmenideische Gedanke weiter ausgeführt. Gerade am Beispiel der Musik, »der Kunst des Grenzenlosen«, zeigen Philolaos und Plato, wie alle Harmonie und Einheit im Sein auf der Synthesis von Grenze und Unendlichem beruht. Und der tiefste Sinn der platonischen, von so wenigen verstandenen Dialektik besteht gerade darin, den dialektischen Prozeß des absoluten schöpferischen Denkens nachzudenken, der aus der Grenze oder dem Prinzip der diskreten Differenz (διαίρεσις, Analysis, Differentiation) als Kette und dem Unendlichen oder dem Prinzip der stetigen Identität (σύμμιξις, Synthesis, Integration) als Einschlag das Gewebe der Ideen des wahren Seins webt.

Daß die ältere griechische Astronomie die Fixsterne zunächst in der Gestalt einer Kugeloberfläche angeordnet halten mußte, hat mit diesen philosophischen Prinzipien nichts zu tun. Das ist einfach eine empirische Tatsache wissenschaftlicher Beobachtung, über die man ohne Fernrohr nur schwer herauskommen kann. Aber für die griechische Philosophie in der Epoche der Wissenschaft bedeutet die anschauliche Himmelskugel nie die Grenze der Welt oder des Seins. Daß der Weltraum unendlich ist, lehrt ebenso Demokrit, der den Raum übrigens geradezu das Apeiron, das Unendliche nennt — dies zu der Bemerkung Spenglers über die tiefe »Symbolik« der Tatsache, daß die Griechen kein Wort für Raum besaßen! —, wie sein Gegenpart die pythagoreische Mathematikerschule, die außerhalb der Himmelskugel den unendlichen Weltraum oder eine Vielheit von anderen Welten annahm. Nikolaus von Cues und Giordano Bruno, die Väter des modernen abendländischen Unendlichkeitsbegriffs, haben, wie sie selbst nicht nur einmal betonen, gerade aus diesen voraristotelischen Lehren ihre Ideen über das Unendliche geschöpft. Hier stehe eine Stelle für viele aus Brunos La cena delle ceneri (Aschermittwochsmahl, 5. Dialog, Anfang): »Diese Verteilung der Weltkörper (d. h. der Fixsterne, ebenso wie der Planeten und der Erde) im Aetherreiche (d. h. in demselben Raume) haben schon Heraklit, Demokrit, Epikur, Pythagoras, Parmenides, Melissos gekannt, wie die Fetzen kundtun, die wir noch von ihnen haben; aus ihnen ersieht man, daß sie einen unendlichen Raum, ein unendliches Reich, einen unendlichen Wald (*ὕλη*!), einen unendlichen Fassungsraum unzählbarer Welten, ähnlich dieser, kannten, welche ebenso ihre Kreise vollenden, wie die Erde den ihren.« Es ist der alte griechische Unendlichkeitsbegriff, der hier von abendländischen Philosophen zum erstenmal wieder verstanden wird und nun seinen Siegeszug auch im Abendlande antritt.

Ebenso beginnen sich auch in der griechischen Astronomie schon die Dimensionen der Fixsternkugel ins Unendliche zu weiten. Aristarch bestimmt um 280 v. Chr. das Verhältnis der Größe der Erdbahn zur Entfernung der Fixsterne als das des Mittelpunktes der Kugel zu ihrer Oberfläche, also als unendlich (vgl. Archimedes' Sandrechnung). Um dieselbe Zeit etwa weichen sogar die starren Mauern des Firmaments: auf Grund exakter Beobachtungen dringt in der wissenschaftlichen Astronomie immer mehr die Ueberzeugung durch, daß die Fixsterne nur für das Auge auf einer einzigen Fläche liegen, daß sie sich in Wahrheit teils in größerer, teils in geringerer Höhe befinden, die Region der Fixsterne also unendlich ist (Geminus, »Einführung in die Astronomie« p. 12, vgl. Doxographi p. 344 und über den Astronomen Seleukos p. 328).

Aber den entscheidenden Schritt tut der Geist erst da, wo er sein Prinzip der Ueberwindung der Grenze durch das Denken in seinem Weltbild, in seinem Begriff von der Totalität ausdrückt, d. h. wo die für die Anschauung in den starren Grenzen ihres Seins ruhende Erde, die Basis der Welt, durch den Gedanken bewegt wird. Dieses kopernikanische Weltbild soll nach Spengler wie nichts anderes Ausdruck des abendländischen Geistes sein. Aber gerade dieses Weltbild ist ursprünglich und eigentlich griechisch. Denn das Wesentliche dieses genialen, die ganze Welt umwälzenden Gedankens ist ja, wie es Kant gut formuliert hat, der Einfall, daß, »nachdem es mit der Erklärung der Himmelsbewegungen nicht gut fortwollte, wenn man annahm, das ganze Sternenheer drehe sich um den Zuschauer, man versuchte, ob es nicht besser gelingen möchte, wenn man den Zuschauer sich drehen und dagegen die Sterne in Ruhe ließe« (Kritik der reinen Vernunft. Vorrede zur zweiten Auflage S. 16). Dieser Gedanke ist nie einem abendländischen Gehirn von selbst aufgegangen. Nikolaus von Cues, wie Kopernikus, beide haben ihn bei den Pythagoreern gefunden, und Kopernikus führt in seinem Brief an Papst Paul III. die entscheidende Stelle (bei Diels 32 A 21) ausdrücklich mit dem Bedeuten an: »I n d e igitur occasionem nactus coepi et ego de terrae mobilitate cogitare.« Daß er aber auch das vollkommene heliozentrische System Aristarchs kannte, beweist sein handschriftlicher Entwurf (Boll, »Die Entwicklung des astronomischen Weltbildes«, Kultur der Gegenwart III. 3, S. 36).

Es ist auch nicht richtig, daß dieser »kopernikanische« Gedanke, wie es Spengler darstellt, nur einmal in der griechischen Geschichte als ein zufälliger Einfall in dem Kopf des einen Aristarch aufgeblitzt und ebenso schnell und wirkungslos wieder verschwunden wäre (S. 100). Die wesentliche Idee, die scheinbare Sternbewegung durch die wirkliche Bewegung der Erde um ihre Achse zu erklären, taucht vielmehr schon um 400 in der griechischen Astronomie auf. Die Ueberlieferung nennt einen Astronomen Ekphantus von Syrakus, als den bewundernswerten Mann, der diesen revolutionierenden Schritt getan hat; seitdem ist dieser Gedanke nicht wieder aus der wissenschaftlichen Astronomie der Griechen verschwunden und hat sich trotz aller Widerstände hier immer mehr durchgesetzt. Wohl schon vorher hatte man erkannt, daß die s c h e i n b a r so wirren und unregelmäßigen Bahnen der Planeten am Himmel sich mathematisch verstehen lassen, wenn man annahm, daß sie sich in W i r k l i c h k e i t in Kreisbahnen um den Mittelpunkt ihres Systems bewegten. Plato hat, wie er selbst erzählt (Gesetze VII S. 821), erst im vorgerückten Alter (*οὔτε νέος οὔτε πάλαι ἀκηκοώς*) diese neuen astronomischen Entdeckungen (*καλόν τε καὶ ἀληθὲς μάθημα*) kennengelernt und sich ihrer durch mühsames Studium bemächtigt. Während für ihn im Phädo, einem seiner früheren Dialoge, die Erde noch ruht, lehrt er bereits im letzten Buch des Staates und dann im Timaeus, daß die Erde sich um ihre mit der Weltachse zusammenfallende Achse dreht, und um sie in konzentrischen Kreisen Mond, Sonne und die fünf Planeten (Staat X S. 616, Timaeus 40b, vgl. Aristoteles, Himmel II, 13). Dieser kopernikanische Gedanke wurde in ununterbrochener ernster und konsequenter Arbeit von Astronomen — nicht von Philosophen — durch die Ergebnisse exakter Beobachtung und mathematischer Berechnung immer mehr vervollkommnet: um die Mitte des 4. Jahrhunderts war schon neben der Bewegung der Erde um ihre Achse auch ihre Bewegung in einer Kreisbahn um einen ideellen Mittelpunkt (angeblich von Astronomen der pythagoreischen Mathematikerschule) erkannt und noch von dem greisen Plato angenommen (Theophrast (!) bei Plutarch »Platonische Fragen« 8, 1 p. 1006 C. vgl. Numa c. XI). Nicht viel nach Platos Tode wußte man schon, daß Venus und Merkur sich um die Sonne bewegen — das System Tycho de Brahes —, und wieder nicht viel später, spätestens aber von Aristarch war das Endziel dieses ganzen Ringens um die Wahrheit erreicht und das heliozentrische System als mathematische »Hypothesis« aufgestellt. Es kann also keine Rede davon sein, daß der Gedanke Aristarchs unvermittelt oder unorganisch in der griechischen Wissenschaft aufgetreten sei, ein solcher Gedanke wird der Menschheit nicht an einem Tage geschenkt, sondern ist nur möglich als der Ertrag jahrzehntelanger ernster wissenschaftlicher Arbeit vieler Köpfe. Kopernikus freilich konnte einfach das fertige Resultat Aristarchs aufnehmen und da anfangen, wo die Griechen aufgehört haben.

Man sieht, wie gering der eigentlich schöpferische Anteil des abendländischen Geistes an dem kopernikanischen Weltbild ist. Tatsächlich war sich das 16. Jahrhundert darin einig, die kopernikanische Lehre als eine Erneuerung der antiken zu betrachten. Man darf es in der Tat für ein echt griechisches erklären. Freilich darf man es nicht bei den Philosophen suchen, es ist immer nur auf den engen Kreis der wissenschaftlichen Mathematiker beschränkt geblieben, der damals noch exklusiver war, als er es je im Abendlande mit seinem organisierten höheren Unterricht sein konnte. Nichts falscher darum als Spenglers Vorstellung, daß die antike Mathematik im Gegensatz zur modernen »populär« gewesen wäre, da ihr »die unendliche Ferne, die Distanz« dieser gefehlt habe (S. 125). Der Glaube, daß etwa die griechischen Philosophen noch alle einzelnen Wissenschaften in sich vereinigt hätten, ist für die spätere Zeit wenigstens eine schöne Täuschung. Seit dem 5. Jahrhundert nehmen die Einzelwissenschaften, namentlich Astronomie, Musiktheorie, Optik, Mechanik, Medizin, Geologie, Zoologie, Botanik eine so selbständige schleunige Entwicklung, daß es den Philosophen ganz unmöglich ist, ihnen in ihren Fortschritten auch nur zu folgen. Jede dieser Wissenschaften erforderte schon damals, wie der gute Xenophon warnend hervorhebt, »ein ganzes Menschenleben« (Memorabilien IV, 7, 3). Demokrit ist der letzte, der noch alle Einzelwissenschaften in sich vereinigt und fast in allen schöpferisch tätig gewesen zu sein scheint. Plato schon verzichtet bewußt auf alle produktive einzelwissenschaftliche Arbeit (vgl. sein Geständnis am Schluß des »Theätet«!) und vermag nur noch mit Mühe, wie er selbst gesteht, den Ergebnissen der Wissenschaften zu folgen. Die Rede von dem schöpferischen Mathematiker und Astronomen Plato ist ein Märchen, das heute niemand mehr glauben sollte. Spätere Autoren haben freilich sogar den liebenswürdigen popularphilosophischen Schriftsteller Heraklides, den Pontiker, der von der lesegierigen Jugend verschlungen wurde, zu einem »Astronomen« gemacht, weil er in einem seiner Dialoge von den neuesten Resultaten und Theorien der astronomischen Wissenschaft seiner Zeit erzählte! Dem Aristoteles schon war es nicht mehr möglich, alle Wissenschaften gleichmäßig auch nur rezeptiv zu umfassen. Dieses große historische und philosophische Ingenium war ein im Grunde unmathematischer Kopf und hat es nie weit über die elementare Mathematik, die er in der Akademie gelernt hatte, hinausgebracht. Kein Wunder, daß er den großen Fortschritten der Mathematik und Astronomie seiner Zeit verständnislos gegenüberstand, und wären wir auf ihn allein angewiesen, so würden wir nie ahnen, was die Mathematiker dieser Zeit bewegte. Durch die Autorität, die Aristoteles schon im Altertum genoß, wurde freilich der natürliche Widerstand gegen das heliozentrische System noch verstärkt. Wie jeder große schöpferische Gedanke, stieß auch dieser bei der großen Masse und bei den Philosophen auf erbitterte Gegnerschaft. Auch innerhalb der Mathematik und Astronomie fand er allerdings ernste Gegner, aber das unterscheidet die griechische Entwicklung dieser Idee noch nicht von der des Abendlandes. Trotz alledem blieb das Aristarchische System in der Wissenschaft lebendig. Und um 150 v. Chr. fand der Astronom Seleukos von Seleukia den exakt mathematischen Beweis für die aristarchische »Hypothesis«. Die römische Zeit hatte freilich für das Feinste und eigentlich Geistige griechischer Gedanken, gewissermaßen für ihr musikalisches Element, kein Verständnis. Wie die Originale griechischer Plastik unter der Hand römischer Kopisten die steife Marmorstütze erhalten, dadurch ihre innerlich frei bewegte Haltung verlieren und in jeder Beziehung vergröbert werden, so wird auch das echt griechische Weltbild im

Ptolemäischen System mit einer Marmorstütze wiedergegeben: Die Erde, welche der griechische Geist bewegt hatte, wird wieder starr und unbeweglich. Indem Kopernikus unter den Zutaten der römischen Kopie das griechische Weltbild wieder entdeckt, beginnt nun jene großartige Entwicklung der abendländischen Wissenschaft, durch die die geistigen Prinzipien und Voraussetzungen, auf denen es beruht, gewissermaßen in umgekehrter Richtung aufgerollt und wieder verstanden werden.

»Es gibt keine Mathematik, es gibt nur Mathematiken«, jede vom »Stil« ihrer Zeitkultur nicht von irgendwelchen objektiven Tatsachen bestimmt, so lautet die These Spenglers. Hätte er diesen Gedanken konsequent zu Ende gedacht, so müßte er jede allgemeine Grundlage der Mathematik leugnen. Das kann er nun nicht, er muß sogar angesichts jenes Briefes des Archimedes an Eratosthenes über die Infinitesimalmethode, den er nicht übergehen kann, und seiner »schönen Berechnung der Spirale« zugestehen, daß Archimedes »gewisse allgemeine Tatsachen berührt, die auch der Methode des bestimmten Integrals bei Leibniz zugrunde liegen« (S. 101 und 123). Ist aber einmal zuzugeben, daß doch auch »gewisse allgemeine Tatsachen« der Mathematik zugrunde liegen, was will dann die mit solchem Nachdruck vorgebrachte Behauptung, daß es keine Mathematik und nur Mathematiken gibt, besagen? Etwa die Trivialität, daß die griechische von der abendländischen in ihrer besonderen Eigenart verschieden ist? Das ist sie allerdings, und die indische und die arabische ist es in anderer Hinsicht noch mehr. Zu verstehen, wie und warum der indische, der griechische, der abendländische Mathematiker dieselben allgemeinen Tatsachen und Probleme so ganz anders anfaßt und auf so verschiedenem Wege löst, ist ja gerade die reizvollste Aufgabe für den Historiker und Philosophen: warum bedienen sich die Griechen zur Darstellung etwa der Wurzel oder gewisser, wie wir es auffassen, algebraischer Gleichungen, jener merkwürdigen Methode, die man so treffend als eine Art von »geometrischer Algebra« bezeichnet hat? Diese fundamentalen Unterschiede in der Auffassung derselben mathematischen Verhältnisse müssen allerdings tief in der seelischen Individualität der Völker begründet sein. Aber solchen letzten Geheimnissen darf man doch nicht meinen mit so grob-schematischen Begriffen, wie »begrenzt-plastisch-apollinisch« und »unbegrenzt-musikalisch-faustisch« auch nur nahezukommen! Ist das doch eine Antithese, in der sich überhaupt alles geistige Leben bewegt. Zudem ist das eigentlich hier liegende Problem damit noch gar nicht berührt. Denn so fremd uns zunächst diese geometrische Algebra der Griechen ist, wir verstehen sie ja doch in dem Augenblick, wo wir begreifen, was mit ihr gewollt ist. Sie drückt, wie überhaupt jede Sprache, gewisse allgemeine Tatsachen in der Sprache ihrer individuellen Welt aus. Zu »verstehen« d. h. die fremde Sprache in der eigenen auszudrücken, das ist das Problem aller historischen und hermeneutischen Kunst. Griechische Musik scheint allerdings unübersetzbar; sie unserm musikalischen Empfinden zugänglich machen, indem man sie etwa harmonisiert, heißt ihr gerade das ihr Wesentliche nehmen. Griechische Dichtung läßt sich wenigstens in einem gewissen Grade übertragen, aber nur soweit als ihre Worte (λέξις) gewisse allgemeine Begriffe auch unserer Sprache ausdrücken, das ist aber gerade das künstlerisch Gleichgültigere an ihr. Die Sprache der fremden Mathematik aber läßt sich wirklich verstehen und auch mit den uns gewohnten Symbolen ausdrücken, etwa die Figur des Gnomon durch eine Gleichung wie $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$. Denn hier ist die darin gemeinte Sache, nicht die individuell zufällige Form des Symbols das Wesentliche. Die Möglichkeit solches Verstehens und Uebersetzens ist der Beweis, daß es zwar nicht hinter, aber in den verschiedenen Mathematiken eine Mathematik, eine einheitliche Wissenschaft gibt. Diese Einheit und Allgemeingültigkeit der Mathematik darf man sich freilich nicht nach der Weise des unhistorischen abstrakten Verstandes vorstellen, als wäre die Mathematik bei allen Völkern und zu allen Zeiten stets in derselben stereotypen Art angefaßt und gedacht worden. Darin besteht gerade das Schöpferische aller Individualität, daß sie, um auch nur das Gelernte wirklich zu verstehen, es in ihrer Welt neu ausdrücken und schaffen muß. Plato sagt einmal, das Gesetz ist einfältig, denn es sagt bei den verschiedensten Dingen immer dasselbe. Das gilt überhaupt vom abstrakten Verstand, von jeder Theorie, jedem Dogma. Jede Theorie ist als feststehendes Dogma betrachtet einfältig d. h. nur einseitig richtig, nur bedingterweise wahr. Die abstrakte Theorie ist höchstens für den Popularisator und den Laien da. Das wissenschaftlich einzig Interessante an jeder Theorie ist das ihr zugrunde liegende Sachliche, das der abstrakte Gedanke in ihr bewältigen will. Die ganze Macht dieses Sachlichen zeigt sich aber nirgends unwiderstehlicher als in ihrer Widerlegung. Das wahre, objektiv Allgemeine vermag sich eben nur in der Form des individuellen Schöpferischen zu offenbaren. Gerade weil die antike Mathematik in ihrer Form von der Individualität des Geistes, aus dem sie entstanden, ganz durchdrungen ist, ist das eigentlich in ihr Gemeinte nie so tief von ihr selbst erfaßt worden, wie in jenem großen Prozeß, durch den sich das Abendland von der dogmatischen Autorität ihres Vorbildes befreite und den darin auch einmal lebendig gewesenen Geist in der Welt seines eigenen Denkens neu zum Ausdruck brachte. Nicht in dogmatischer Aneignung, sondern in der schöpferischen Widerlegung dogmatischer Vorurteile zeigt sich der eigentliche Prozeß der Erkenntnis und die Einheit der Wissenschaft. Was Spengler vom Geist des Abendlandes meint, daß er »die angelernte antike Wissenschaft schon besaß — äußerlich, nicht innerlich —, die eigene durch ein scheinbares Aendern und Verbessern, durch ein tatsächliches Vernichten der ihm inadäquaten euklidischen gewann«, mit diesen Worten ist nichts anderes als der schöpferische Prozeß der Tradition überhaupt beschrieben. Was hier vom Verhältnis der abendländischen zur antiken Mathematik gesagt ist, das gilt überhaupt von dem Kampf zwischen Zeiten, Völkern, Generationen, Ständen, ja zwischen Individuen. Darin beruht gerade auf allen Gebieten das eigentliche Wesen der Geschichte; in diesem Prozeß, in diesem Kampf der Individualitäten gegeneinander offenbart sich die Einheit im Bewußtsein der Menschheit.

Nach Spengler gäbe es allerdings keine Einheit in der Geschichte, gäbe es nur »Kulturen, Völker, Sprachen, Wahrheiten, Götter, Landschaften so, wie es Eichen und Pinien nebeneinander gibt« (29). Welche Barbarei des Gedankens! Es besteht doch ein gewisser Unterschied zwischen griechischem, indischem oder arabischem Geist und einer Eiche. Eichen und Pinien sind freilich außer einander und außer uns, in der Natur, und haben nichts miteinander und nichts mit uns zu tun. Was ist aber der griechische Geist? Etwa ein historisches »Ding an sich«, wie ein Stein oder ein Baum? Sein eigentliches Wesen, sein »An sich« hat er ja gerade darin, daß er »für etwas« ist. Er ist nicht einmal in einem Punkte, in einer Zeit gewesen und dann für uns verschwunden wie Eiche und Pinie, sondern hat seine lebendige Existenz heute auf nicht andere Weise in unserem historischen Bewußtsein, als er sie in dem seiner Zeit hatte. Die Auffassung vom Griechentum ist notwendig in jeder Zeit immer wieder eine andere. Aber gerade darin hat es seine geistige Realität und offenbart es sein objektiv tiefstes Wesen, daß jede Zeit, ja jedes Individuum es stets aufs neue für sich erobern, es verstehen d. h. seine Bedeutung in der Sprache seiner eigenen Welt schöpferisch ausdrücken muß. Ein faktisches Ereignis wird zu einem »historischen« erst dadurch, daß es aufhört, nur für sich zu sein und für das Bewußtsein eines anderen etwas wird. Geschichte ist nicht das bloß Gewesene, auch nicht das Jetzt, sondern die ewige Gegenwart des Gewesenen im Bewußtsein des Jetzt. Die Einheit dieses Bewußtseins — und das heißt »Menschheit« — ist aber Tatsache, eben die Tatsache der Geschichte.

Auf dem Niveau der Philosophie Spenglers muß freilich die »Menschheit ein leeres Wort, ein Phantom« sein. Was sind dann aber jene »Kulturen«? Was Spengler antike oder arabische Kultur oder ähnliches nennt, das hat sicher nie existiert außer in seinem Kopfe, und diese Kulturen sollen das Absolute, die letzten Individuen, »die eigentlichen Substanzen der Weltgeschichte« (S. 104) sein, also unbedingte Monaden, voneinander schlechthin geschieden, ohne jeden gegenseitigen Zusammenhang und wahren Einfluß aufeinander. Dieser, philosophisch doch etwas zu naiven und primitiven Konstruktion zuliebe muß die Tatsache der Tradition einfach geleugnet werden, die etwa die abendländische Mathematik mit der griechischen oder die noch die modernste Musik, wie gerade die musikalischen Neuerer des Expressionismus in unseren Tagen es uns deutlich zum Bewußtsein bringen, mit der griechischen Kanonik verbindet. Für Spengler darf es eine Tradition nicht geben, nur diskrete Kulturatome. Nicht nur die »Menschheit« wird so zum Phantom, auch die schöpferische Individualität und Persönlichkeit sinkt zur bloßen Erscheinung und zum inhärierenden Akzidens der unbedingten Kultursubstanz herunter. Diese Kulturen selbst sind aber in Wahrheit nichts als hypostasierte Allgemeinbegriffe, die durch vergleichende Abstraktion ähnlicher Merkmale ganz heterogener Erscheinungen eines äußerlich und schematisch abgesteckten Zeitabschnittes gewonnen werden; auf diese Weise umfaßt etwa die »antike Kultur« so im Grunde verschiedene Dinge wie die griechische und römische Welt. Und diese leeren Abstrakta sollen »entstehen, sich entwickeln, altern und sterben wie wirkliche lebendige organische Formen«, wie »Pflanzen, Bäume oder Tiere«, und in diesem Werden und Vergehen soll das letzte Wesen der Geschichte bestehen. Dann wird die Geschichte wieder zur bloßen Natur im Sinne der biologischen Wissenschaft, obwohl wir doch immer wieder versichern hören, daß es gar keine Natur, kein allgemeines Naturgesetz gibt, daß jede Kultur ihre besondere Natur habe und die Geschichte das unbedingte Primat vor der Natur besitze, von der sie bloß eine Funktion darstelle.

Was hat der Begriff, der hier Geschichte genannt wird, noch mit wirklicher Geschichte gemein? Etwa das Merkmal der Entwicklung? Aber der naturalistische Entwicklungsbegriff ist gar nicht imstande, das eigentliche Wesen eines so eminent geistigen Phänomens, wie es die Geschichte ist, zu erfassen. Denn Entwicklung schafft nie etwas wirklich Neues, sondern entfaltet nur das, was schon im Anfang war. Aristoteles, der wie kein anderer vielleicht diesen Begriff durchdacht hat, zeigt einmal gegenüber der pythagoreischen Auffassung der Welt als ewige Entwicklung und »Aufgabe«, daß das Vollkommene in dem Entwicklungsprozeß z. B. des Kindes nicht erst an seinem Ende, sondern an seinem Anfang liegt. Dieser Anfang ist eben nicht der Same, sondern der Vater als der Mensch auf der Höhe seiner Kraft oder Gott in der Energie seines einmaligen Schöpfungsaktes. Die natürliche Entwicklung schafft so nie etwas wirklich Neues, sondern reproduziert nur das Alte. Der Inhalt der Geschichte ist aber nur das Neue, Schöpferische, »die Freiheit«, wie der deutsche Idealismus sich ausdrückt, das was noch nicht war, was aus der bloßen Entwicklung des schon im Alten liegenden allein nie zu erklären ist. Das schöpferisch Neue ist immer ein unerklärlicher irrationaler Sprung. In seinem Stoff ist es allerdings immer auf das Alte, das ihm die Ueberlieferung gibt, angewiesen, mit dem es so trotz des Sprunges in stetem Zusammenhange bleibt. Das erklärt aber noch nicht die neue, schöpferische Form, die aus dem Nichts entsteht, wie eine generatio aequivoca. Die individuelle Energie eines solchen einmaligen Schöpfungsaktes bleibt nun in der Geschichte erhalten, und die Tradition ist gewissermaßen das historische Gesetz, ihrer allerdings selbst wieder schöpferischen Erhaltung. Auf der Autorität und Kontinuität der Tradition beruht die Macht des Allgemeinen in der Geschichte, das in den großen Gewalten in Volk, Sprache, Staat und Kirche, aber auch in der bloßen Zeit oder Kultur erscheint. Die individuelle Persönlichkeit ist aber der Ursprung unendlicher Schöpferkraft, in ihr ist die Quelle aller Offenbarung überhaupt und aller historischen Energie. Für Spengler kann es in letzter Wahrheit in der Geschichte weder schöpferische Persönlichkeit noch Religion, noch Volk noch Staat geben. Die Geschichte ist nach ihm vielmehr nichts als »die Verwirklichung möglicher Kultur«, d. h. die Verkörperung ihrer Idee, ihrer Seele, »die Summe ihres versinnlichten, räumlich und faßlich gewordenen Ausdrucks als: Taten und Gesinnungen, Religion und Staaten, Künste und Wissenschaften, Völker und Städte, wirtschaftliche und gesellschaftliche Formen, Sprache, Rechte, Sitten, Charaktere, Gesichtszüge und Trachten« (S. 80). Da haben wir den modernen Kulturbegriff in seiner ganzen Verschwommenheit und Unklarheit. Wirtschaft und Trachten stehen gleichberechtigt neben Recht, Sitte und Religion. Im Grunde hat diese Verabsolutierung und zugleich Entwürdigung der »Kultur« ihren Ursprung in der Philosophie der Aufklärungszeit. Als diese die Religion zersetzt hatte, blieb ihr als letzter Sinn und Zweck des Menschenlebens nur der Mensch selbst, die Entwicklung aller seiner »Naturanlagen« ohne jeden Unterschied, die Menschheits- und Fortschrittsidee im Sinne der Emanzipation der »Vernunft« und des Individuums von allen mittelalterlichen und kirchlichen Fesseln, mit einem Wort die »Kultur«, wie sie noch Kant definiert: »Die Hervorbringung der Tauglichkeit eines vernünftigen Wesens zu beliebigen Zwecken überhaupt, der letzte Zweck, den man der Natur, in Ansehung der Menschengattung beizulegen Ursache hat.« Ob diese Kultur als Totalität in der Fortschrittsidee oder atomistisch aufgefaßt wird, wie bei Spengler, als letzter Zweck der Kultur bleibt nichts anderes als die Kultur selbst. Diese bloße »Tauglichkeit zu beliebigen Zwecken«, dieser Inbegriff bloßer Mittel zu einem Zweck überhaupt, soll also Selbstzweck alles Menschenlebens sein. Kultur setzt aber doch ein Etwas voraus, zu dem sie den Menschen bildet. Spengler definiert sie als »die Summe versinnlichten Ausdrucks möglicher Kultur«. Aber was ist denn nach ihm das, was sie ausdrückt? Ihre Seele, ihre Idee, ihre Möglichkeit heißt es. Und worin besteht diese Möglichkeit für Spengler? In nichts anderem als in der Möglichkeit der wirklichen Kultur. Sie drückt also nichts anderes als ihr eigenes Ausdrücken aus. Darum also, um dieses Ausdruckes willen, dieser ganze Kampf auf Leben und Tod, der den Inhalt der Geschichte ausmacht. Für diesen Kulturbegriff muß die Tragödie der Geschichte zum Satyrspiel werden.