XIV.

Ueber Kartenprojection.

Von Prof. Dr. Friedr. Eisenlohr in Heidelberg.

Herr Dr. August hat in dieser Zeitschrift*) die an einem andern Orte**) vom Verfasser entwickelte Theorie der Kartenprojektion erwähnt, und zugleich über die aus dieser Theorie abgeleitete Darstellung der ganzen Erdoberfläche die Meinung ausgesprochen, dass dieselbe für die Berechnung zu grosse Schwierigkeiten biete. Dies giebt mir Veranlassung, die a. o. O. rein mathematisch entwickelte Theorie zu erläutern, und zugleich zu zeigen wie aus derselben in einzelnen Fällen die Projection berechnet werden kann, insbesondere auch die Berechnung für die Darstellung der ganzen Erdoberfläche zu geben, welche in der That verhältnissmässig einfach ist, und zum Schlusse allgemeine Regeln für die zweckmässigste Auswahl der Projektionsart aufzustellen.

Soll eine Karte eines Theils der Erdoberfläche entworfen werden, so muss man bekanntlich darauf verzichten, das Original vollkommen treu, oder durchaus in gleichem Massstabe abzubilden, und zwar deshalb, weil es nicht möglich ist, die Oberfläche einer Kugel (als solche wollen wir hier die Erde betrachten) ohne Zerrung auf eine Ebene auszubreiten. Da also die Karten nur verzerrte Bilder der Erdoberfläche geben können, so haben sich die Mathematiker darauf beschränkt, Abbildungen mit möglichst kleiner Verzerrung aufzusuchen. Sie haben sich hierin seit Lambert und Lagrange zunächst über ein Prinzip geeinigt, welches als nothwendige Vorbedingung für jede gute Kartenzeichnung anzusehen ist, aber derselben noch immer grosse Willkür lässt. Es ist dies das Prinzip der sogenannten conformen oder in den kleinsten

*) Band IX. 1874 p. 1.

**) Journal für reine und angew. Mathematik. Bd. 72 p. 143.

Theilen ähnlichen Abbildung, nach welchem, wenn auch an verschiedenen Punkten der Karte der Massstab verschieden ist, doch sehr kleine Linien, welche durch denselben Punkt nach verschiedenen Richtungen gehen, in gleichem Verhältnisse verkleinert werden. Die Folge davon ist, dass die Winkel, unter welchen sich zwei Linien schneiden, bei der Abbildung unverändert bleiben. Man hat nun, je nach dem abzubildenden Theile der Erdoberfläche, solche dem Grundsatze genügende Projectionsarten vorgeschlagen, wie die Mercator's und die stereographische Projection. Dennoch haben sich die Kartenzeichner, wahrscheinlich, weil die gewöhnlichen Methoden nicht für jeden Fall eine zweckmässige Darstellung gaben, verleiten lassen, von dem Prinzipe der Conformität abzuweichen. Man wird in den meisten neueren Kartenwerken derartige Darstellungen (besonders für die Erdtheile) finden, bei welchen somit nicht einmal in einem Punkte derselbe Massstab für verschiedene Richtungen gilt; sie sind daran zu erkennen, dass Längen- und Breitengrade sich nicht, wie in conformen Darstellungen, rechtwinklig schneiden.

So unbedingt nun auch die Forderung der Conformität gestellt werden muss, so lässt sich doch nicht verkennen, dass bisher eine feste Regel fehlte, um aus der grossen Mannigfaltigkeit von Darstellungen, welche jener genügen, in jedem einzelnen Falle die zweckmässigste, d. h. diejenige auszuwählen, welche die geringste Verzerrung des Originals gibt. Ich will hier versuchen, die Grundlagen und Anwendungen einer solchen Regel auseinanderzusetzen, die ich an einem andern Orte aufgestellt und mathematisch begründet habe.

Nehmen wir an, in jedem Punkte der Karte sei der Massstab ein bestimmter und, wie es in der Regel der Fall ist, an einer Stelle am kleinsten, so kann man durch die Punkte, in welchen er um 1 Tausendtheil grösser ist, eine Linie legen, und eine zweite durch diejenigen, in welchen er wieder um den tausendsten Theil grösser ist, als bei jenen und sofort; dann wird die ganze Karte von einem System von Linien gleicher Vergrösserung (isometrischen Linien) überzogen erscheinen. Nun findet man, dass Linien auf der abzubildenden Oberfläche, welche durch einen gespannten Faden angegeben werden (sogenannte kürzeste Linien, auf der Kugel sind es die grössten Kreise), und deren treues Abbild gerade Linien sein müssten, nur wenn sie senkrecht auf einer isometrischen Linie stehen, auf der Karte gerade bleiben; wenn sie ihr hingegen parallel sind, am stärksten gekrümmt werden, und zwar um so mehr, je dichter die isometrischen Linien beisammen stehen. Dass solche kürzesten Linien, wenn sich auf ihren beiden Seiten Strecken befinden, die in verschiedenem Masse verkleinert werden, gekrümmt werden, kann vielleicht ein Metallthermometer veranschaulichen, welches aus zwei Metallstreifen von ungleicher Ausdehnungsfähigkeit besteht und sich deshalb beim Erwärmen krümmt.

Wäre es möglich, die Kugel ohne Zerrung auf eine Ebene abzuwickeln, so müssten jene kürzesten Linien oder grössten Kreise gerade Linien werden, in der That aber werden sie, wie wir gesehen haben, gekrümmt und damit auch alle krummen Linien auf der Kugel verzerrt; die Aufgabe, das Original in der Abbildung so wenig als möglich zu verzerren, schien mir nun bestimmter dahin ausgesprochen werden zu können, dass die grössten Kreise so wenig als möglich gekrümmt würden. Der Fehler der Karte in jedem Punkte wird hiernach am passendsten durch die Krümmung gemessen, welche die grössten Kreise daselbst erleiden, die den isometrischen Linien parallel sind, da die dazu senkrechten ohnehin nicht gekrümmt werden. Aus den so bestimmten Fehlern eines jeden kleinen Theiles der Karte von gleicher Fläche kann man sodann den Fehler der ganzen Karte ableiten nach einer Methode, welche Gauss ursprünglich für Fehler in physikalischen Beobachtungen angegeben hat, welche aber auch auf viele andere Probleme angewandt worden ist*).

Die mathematische Untersuchung führte nun zu dem sehr einfachen Resultate, dass eine Karte eines Theils der Erdoberfläche mit dem kleinsten Fehler behaftet ist, wenn auf der Begrenzung desselben der Massstab überall gleich gross ist, d. h. wenn die Begrenzung mit einer isometrischen Linie zusammenfällt; vorausgesetzt, dass der Massstab nirgends unendlich gross oder unendlich klein wird, sich auch nirgends plötzlich ändert.

Durch diesen zweiten Grundsatz der kleinsten Verzerrung zusammen mit dem Grundsatze der Conformität erhält man nun für eine bestimmte Begrenzung des abzubildenden Stückes stets eine bestimmte Abbildungsart. Ich habe denselben an a. o. O. vorzüglich auf den Fall angewendet, wo die Begrenzung aus zwei Meridianen besteht. Sind die Meridiane z. B. um 60^0 von einander entfernt, so ist die Abbildung des sechsten Theils der Erdoberfläche so genau, dass die Vergrösserung in der Mitte $^8/_9$ von der am Rande ist. Bei einer Entfernung der Meridiane um 180^0 erhält man die stereographische Projection, bei einer solchen um 360^0 eine Abbildung der ganzen Erdoberfläche, welche viel treuer ist als Mercator's Projection.

In der folgenden Tabelle ist das Gradnetz für die Abbildung

*) Es besteht dieselbe darin, jeden Fehler mit sich zu multipliziren und die sämmtlichen Produkte zu addiren.

der ganzen Erdoberfläche von 10 zu 10^0 Breite und Länge berechnet, natürlich nur auf einer Seite des Aequators und mittleren Meridians, da die Karte für beide Linien symmetrisch ist*). Die beiden Zahlen bedeuten die vertikale und horizontale Entfernung des Kartenpunkts von der Mitte in Hunderttausendtheilen des Erdradius, wenn der Massstab am Rande 1 ist.

---

*) Die Berechnang ist nach folgenden Formeln ausgeführt: Sind x und y rechtwinklige Coordinaten, ϑ und φ geographische Breite und Länge, und setzt man

$$\sin w = tg\frac{\vartheta}{2};\quad tg\, u_1 = tg\frac{w}{2}\cdot tg\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\varphi}{4}\right);\quad tg\, u_2 = tg\frac{w}{2}\cdot tg\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\varphi}{4}\right),$$

$$\text{so ist } x = \frac{\sin w_1}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)} + \frac{\sin w_2}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)} - 2u_1 - 2u_2;$$

$$y = 2\,cotg\, w \,.\, \sin(u_2-u_1)\cos(u_2+u_1) - 2{,}302585\, lg\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)\sin 2u_2}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)\sin 2u_1}\right).$$

Wegen der Ableitung der Formeln vergl. den angeführten Aufsatz p. 148, nur ist dort Zeile 16 statt $z : e^{z'}$, statt $2\sqrt{2} : i\sqrt{2}$ und statt $v - ui$ zweimal $v + ui$ zu lesen; sonst sind die dort angegebenen Formeln hier etwas bequemer für die logarithmische Berechnung eingerichtet. Die Vergrösserung ist $\dfrac{\sin^2(u_1+u_2)}{\sin^2\frac{\vartheta}{2}}$, am Rande 1, in der Mitte 0,1716.

Breite	Länge: 0^0	10^0	20^0	30^0	40^0	50^0	60^0	70^0	80^0	90^0	100^0	110^0	120^0	130^0	140^0	150^0	160^0	170^0	180^0
0^0	0 0	0 2999	0 6025	0 9108	0 12271	0 15552	0 18989	0 22622	0 26496	0 30685	0 35249	0 40300	0 45940	0 52339	0 59699	0 68306	0 78557	0 91025	0 106561
10^0	3004 0	3019 2984	3061 5996	3129 9064	3229 12212	3363 15476	3538 18890	3756 22496	4030 26344	4372 30495	4796 35025	5325 40000	5990 45564	6832 51855	7913 59076	9323 67486	11194 77457	13734 89521	17277 104380
20^0	6078 0	6105 2943	6186 5913	6324 8931	6522 12030	6791 15237	7136 18585	7572 22115	8117 25870	8794 29905	9633 34283	10675 39084	11982 44412	13629 50392	15734 57189	18460 65017	22048 74162	26868 85019	33497 98116
30^0	9287 0	9328 2869	9450 5761	9655 8700	9952 11709	10352 14818	10866 18050	11515 21445	12320 25037	13316 28875	14547 33006	16071 37499	17966 42425	20341 47880	23346 53976	27194 60853	32190 68670	38782 77637	47640 87951
40^0	12729 0	12782 2755	12942 5531	13214 8345	13605 11228	14130 14170	14804 17229	15651 20422	16700 23774	17989 27316	19572 31088	21517 35127	23914 39479	26883 44199	30590 49332	35259 54923	41195 61005	48824 67580	58745 74550
50^0	16522 0	16586 2587	16782 5189	17115 7820	17593 10493	18233 13228	19051 16039	20071 18941	21328 21952	22861 25089	24728 28367	26993 31803	29750 35606	33108 39176	37221 43100	42282 47139	48533 51217	56290 55171	65943 58713
60^0	20844 0	20919 2340	21146 4687	21529 7052	22078 9440	22807 11860	23734 14316	24882 16819	26282 19364	27970 21956	29997 24591	32420 27256	35308 29928	38748 32565	42849 35108	47732 37460	53537 39474	60411 40920	68485 41508
70^0	26008 0	26088 1961	26330 3926	26736 5893	27315 7860	28079 9822	29040 11775	30217 13714	31630 15632	33306 17512	35274 19328	37571 21055	40233 22647	43248 24049	46810 25173	50805 25915	55304 26148	60304 25690	65766 24345
80^0	32632 0	32703 1345	32918 2682	33277 4005	33783 5303	34442 6564	35258 7776	36235 8924	37379 9993	38693 10961	40185 11802	41857 12487	43704 12981	45719 13240	47887 13215	50185 12853	52569 12098	54980 10896	57335 9188
90^0	42920 0																		

Allerdings wäre die Aufgabe, die Karte eines Landes so zu zeichnen, dass dessen Grenze, wie auch immer gestaltet, eine isometrische Linie sei, nicht wohl zu lösen. Da es aber, wenn nicht gerade, wie oben, Meridiane die Begrenzung bilden, einigermassen willkürlich ist, was man als Begrenzung anzusehen hat, in dem Sinne dass innerhalb derselben die Verzerrung möglichst klein sei, und dass sie mit einer isometrischen Linie zusammenfallen soll, so kann man sich die Zeichnung wesentlich erleichtern, wenn man noch die Beschränkung hinzufügt, dass alle Meridiane und Parallelkreise als Kreise abgebildet werden sollen, und wenn man sodann unter den noch möglichen Abbildungsarten diejenige auswählt, bei welcher eine isometrische Linie nur nahezu mit der Begrenzung des abzubildenden Stückes übereinstimmt. Lagrange hat im Allgemeinen angegeben, bei welchen Abbildungsarten Meridiane und Parallelkreise wieder Kreise werden. Dieselben bestehen darin, dass alle Längen mit einer bestimmten Zahl λ vervielfacht, und entsprechend die Breiten verändert werden, so dass die Aehnlichkeit der kleinsten Theile erhalten bleibt (Aequator und Pol bleiben dabei an ihrer Stelle), und dass darauf die Erdkugel auf einer Ebene, auf welcher sie in einem Punkte ruht, von dem Antipodenpunkte aus perspektivisch abgebildet wird (das Letztere allein giebt bekanntlich die stereographische Projection).

Bei Auswahl der passenden Abbildungsart muss man indess auf gewisse Eigenthümlichkeiten des Verlaufs der isometrischen Linien Rücksicht nehmen. Zunächst darf kein Pol der Erde in die Karte fallen, wenn nicht, wie bei der stereographischen Projection, $\lambda = 1$ ist, weil an demselben der Massstab $= 0$ oder unendlich gross wäre, was beides nicht zulässig ist; ferner muss der kleinste Massstab in einen Punkt im Innern fallen, den wir die Mitte der Karte nennen wollen, und von der Mitte aus muss der Massstab nach dem Rande zu überall wachsen, damit die begrenzende isometrische Linie geschlossen ist. Ist nun aber λ grösser als 1, so erreicht man von der Mitte auf dem Meridian fortschreitend einen Punkt, in welchem der Massstab den grössten Werth hat, um darüber hinaus wieder abzunehmen, während er in der Richtung des Parallelkreises nach beiden Seiten zunimmt. Ein solcher Punkt wird beim Fortgehen vom Aequator weg schon bei kleinerem Massstabe erreicht, als wenn man von der Mitte die Richtung über den Aequator nach der entgegengesetzten Halbkugel einschlägt. Es ist dafür zu sorgen, dass derselbe nicht in den Bereich des abzubildenden Stückes falle, weil sich die isometrischen Linien ihm zwar nähern, aber statt ihn zu umschliessen, sich von Neuen erweitern, um den Pol zu umfassen. Ist dagegen λ kleiner als 1, so erreicht man beim Fortschreiten nach Osten und Westen in einer Länge von $\frac{180^0}{\lambda}$ einen Punkt, wo der Massstab am grössten wird und wieder abnimmt, während er nach Norden und Süden hin zunimmt, so dass über diesen Punkt, der übrigens nicht in Betracht kommt, hinaus die isometrischen Linien sich in gleichen Intervallen verengern- und erweitern, aber nie schliessen. Uebrigens sind die isometrischen Linien im Allgemeinen für grössere Werthe von λ als 1 mehr von Nord nach Süd gestreckt, für kleinere mehr von Ost nach West.

Um Anhaltspunkte für die Aussuchung der passenden Werthe von λ und die Wahl der Mitte der Karte zu geben, habe ich die folgende Tabelle berechnet, welche, wenn λ immer um zwei Hunderttheile und die Breite der Mitte immer um 10^0 wächst, (soweit der Werth von λ überhaupt eine Stelle des kleinsten Massstabes zulässt) die Grenzen, d. h. die Polardistanz des nördlichsten (N) und südlichsten (S) (die Länge ist 0) und Polardistanz (*P*) und Länge (Φ) des östlichsten und westlichsten Punktes der isometrischen Linie angiebt, auf welcher der gemeine Logarithme des Verhältnisses des Massstabes zu dem der Mitte 0,1 ist (es entspricht dies einem Verhältnisse von 1,259); dagegen wenn diese Linie nicht mehr geschlossen ist, die Grenzen der äussersten geschlossenen isometrischen Linie und den Logarithmen des Massstabes (M). Für die Auswahl kleiner Begrenzungslinien mag die Angabe des Achsenverhältnisses (A) der sehr kleinen Ellipse dienen, in welche die den Mittelpunkt der Karte zunächst umschliessende isometrische Linie übergeht*).

*) Ist φ die Länge, u der Polarabstand eines Punktes und $tg\,\frac{v}{2} = tg\,\frac{v_0}{2}\left(\frac{tg\,\frac{u}{2}}{tg\,\frac{u_0}{2}}\right)^{\frac{\lambda}{2}}$, wo v_0 und u_0 noch näher zu bestimmen sind, so ist der Massstab $m = \frac{\sin{}^2 v}{\sin u\left(1 - \sin{}^2 v \sin^2\frac{\lambda\varphi}{2}\right)}$ Die Mitte des Bildes mit dem kleinsten Massstabe habe die Länge $\varphi = o$ und den Polarabstand $u = u_0$ (v_0 ist sodann durch die Gleichung $\lambda\cos v_0 = \cos u_0$ bestimmt); von ihr aus rechne man die Coordinaten der Karte x vom Aequator weg gerichtet (nördlich oder südlich), y östlich; so ist $x = \frac{\cos v}{1 - \sin{}^2 v \sin{}^2\frac{\lambda\varphi}{2}} - \frac{\cos u_0}{\lambda}$;

$y = \frac{\sin{}^2 v \sin\lambda\varphi}{2\left(1 - \sin^2 v \sin^2\frac{\lambda\varphi}{2}\right)}$. Das Abbild des Polarkreises vom Polar-

Polardistanz der Mitte oder des Orts der kleinsten Vergrösserung 90°.

λ	N	S	P	Φ	M	A
1,40	70° 16′	109° 44′	90°	2° 0′	0,00026	7,0000
1,38	59 36	120 24	90	4 56	0,00152	4,4631
1,36	52 4	127 56	90	7 52	0,00381	3,5066
1,34	46 0	134 0	90	10 57	0,00715	2,9638
1,32	40 50	139 10	90	14 7	0,01152	2,6008
1,30	36 18	143 42	90	17 23	0,01700	2,3349
1,28	32 16	147 44	90	20 45	0,02356	2,1286
1,26	28 36	151 24	90	24 15	0,03124	1,9620
1,24	25 16	154 44	90	27 52	0,04012	1,8235
1,22	22 12	157 48	90	31 38	0,05020	1,7057
1,20	19 21	160 39	90	35 33	0,06161	1,6035
1,18	16 42	163 18	90	39 38	0,07442	1,5138
1,16	14 14	165 46	90	43 53	0,08871	1,4339
1,14	17 35	162 21	90	47 19	0,1	1,3622
1,12	23 17	156 43	90	48 10	0,1	1,2971
1,10	26 42	153 18	90	49 2	0,1	1,2376
1,08	29 17	150 43	90	49 57	0.1	1,1829
1,06	31 22	148 38	90	50 53	0,1	1,1323
1,04	33 9	146 57	90	51 52	0,1	1,0853
1,02	34 42	145 18	90	52 53	0,1	1,0413
1,00	36 4	143 56	90	53 56	0,1	1,0000
0,98	37 17	142 43	90	55 2	0,1	0,9611
0,96	38 23	141 37	90	56 11	0,1	0,9244
0,94	39 23	140 37	90	57 23	0,1	0,8897
0,92	40 18	139 42	90	58 38	0,1	0,8566
0,90	41 8	138 52	90	59 56	0,1	0,8250
0,88	41 54	138 6	90	61 18	0,1	0,7949
0,86	42 37	137 23	90	62 43	0,1	0,7660
0,84	43 18	136 42	90	64 13	0,1	0,7383

abstand u hat den Radius $\frac{\sin{}^2 v}{2 \cos v}$ und die Coordinaten des Mittelpunktes $x = -\frac{\cos u_0}{\lambda} + \frac{1 + \cos{}^2 v}{2 \cos v}$; $y = o$; das des Meridiankreises von der Länge φ den Radius $\frac{1}{\sin \lambda\varphi}$ und die Coordinaten des Mittelpunkts $x = -\frac{\cos u_0}{\lambda}$, $y = -\cot \lambda\varphi$. Die Stelle des grössten Massstabes durch welche die äusserste zulässige isometrische Linie gehen darf, ist für $\lambda > 1$ durch dieselben Gleichungen als die Mitte $\varphi = o$ und $\lambda \cos v = \cos u$; für $\lambda < 1$ durch $\lambda\varphi = 180^0$ und $\lambda = \cos v \cos u$ bestimmt. Die äussersten zulässigen Werthe von λ sind $\sqrt{1 + \sin{}^2 u_0}$ und $\cos u_0$. Gehen wir von der Mitte um die kleinen Strecken ξ und η auf der Erde nach Norden und Osten, so ist der natürliche Logarithmus des Massstabes:

$$\xi^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{1 - \lambda^2}{4 \sin{}^2 u_0}\right) + \eta^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{1 - \lambda^2}{4 \sin{}^2 u_0}\right),$$

also das Verhältniss der nördlichen zur östlichen Achse einer sehr kleinen isometrischen Ellipse $\sqrt{\lambda^2 - \cos{}^2 u}$ zu $\sqrt{1 + \sin{}^2 u_0 - \lambda^2}$.

λ	N	S	P	Φ	M	A
0,82	43° 55′	136° 5′	90°	65° 47′	0,1	0,7117
0,80	44 30	135 30	90	67 25	0,1	0,6860
0,78	45 2	134 58	90	69 9	0,1	0,6612
0,76	45 33	134 27	90	70 58	0,1	0,6312
0,74	46 2	133 58	90	72 54	0,1	0,6140
0,72	46 29	133 31	90	74 55	0,1	0,5915
0,70	46 54	133 6	90	77 3	0,1	0,5697
0,68	47 18	132 42	90	79 19	0,1	0,5484
0,66	47 40	132 20	90	81 44	0,1	0,5272
0,64	48 1	131 59	90	84 17	0,1	0,5075
0,62	48 22	131 38	90	87 0	0,1	0,4878
0,60	48 41	131 19	90	89 54	0,1	0,4685
0,58	48 58	131 2	90	93 0	0,1	0,4497
0,56	49 15	130 45	90	96 19	0,1	0,4312
0,54	49 31	130 29	90	99 53	0,1	0,4131
0,52	49 46	130 14	90	103 44	0,1	0,3954
0,50	50 1	129 59	90	107 53	0,1	0,3780
0,48	50 14	129 46	90	112 22	0,1	0,3608
0,46	50 26	129 34	90	117 16	0,1	0,3440
0,44	50 38	129 22	90	122 35	0,1	0,3274
0,42	50 50	129 10	90	128 26	0,1	0,3110
0,40	51 0	129 0	90	134 51	0,1	0,2949
0,38	51 10	128 50	90	141 57	0,1	0,2790
0,36	51 19	128 41	90	149 50	0,1	0,2632
0,34	51 28	128 32	99	158 39	0,1	0,2477
0,32	51 36	128 24	90	168 34	0,1	0,2323
0,30	51 43	128 17	90	179 48	0,1	0,2171
0,28	51 50	128 10	90	192 39	0,1	0,2020
0,26	51 57	128 3	90	207 28	0,1	0,1870
0,24	52 3	127 57	9o	224 45	0,1	0,1722
0,22	52 8	127 52	90	245 11	0,1	0,1575
0,2o	52 13	127 47	90	269 42	0,1	0,1429
0,18	52 17	127 43	90	299 40	0,1	0,1283
0,16	52 21	127 39	90	337 7	0,1	0,1139
0,14	52 24	127 36	90	385 17	0,1	0,0995
0,12	52 27	127 33	90	449 30	0,1	0,0852
0,10	52 30	127 30	90	539 24	0,1	0,0709
0,08	52 32	127 28	90	674 15	0,1	0,0567
0,06	52 34	127 26	90	899 0	0,1	0,0425
0,04	52 35	127 25	90	1348 0	0,1	0,0283
0,02	52 36	127 24	90	2697 3	0,1	0,0142
0,00	52 36	127 24	90	∞	0,1	0

Polardistanz der Mitte 80°.

λ	N	S	P	Φ	M	A
1,40	77° 0′	81° 35′	80° 0′	0° 8′	0,0000012	13,9996
1,38	65 16	88 35	79 56	1 44	0,00019	5,3527
1,36	57 7	94 4	79 40	3 51	0,00092	3,8898
1,34	50 36	98 52	79 22	6 18	0,00232	3,1831
1,32	45 3	103 15	79 0	8 54	0,00447	2,7438
1,30	40 10	107 24	78 38	11 40	0,00749	2,4355
1,28	35 48	111 10	78 8	14 35	0,01133	2,2028
1,26	31 50	114 50	77 36	17 42	0,01614	2,0186
1,24	28 11	118 20	77 4	20 55	0,02190	1,8675

λ	N		S		P		Φ		M	A
1,22	24°	52'	121°	46'	76°	22'	24°	29'	0,02879	1,7404
1,20	21	45	125	2	75	35	27	58	0,03673	1,6312
1,18	18	52	128	16	74	41	31	47	0,04591	1,5359
1,16	16	8	131	28	73	39	35	50	0,05646	1,4516
1,14	13	36	134	37	72	21	40	7	0,06842	1,3762
1,12	11	13	137	47	70	44	44	41	0,08209	1,3081
1,10	8	59	140	57	68	47	49	35	0,09759	1,2461
1,08	16	20	139	44	69	38	51	6	0,1	1,1893
					Karte von Amerika.					
1,06	19	51	138	2	70	44	52	3	0,1	1,1367
1,04	22	22	136	29	71	36	53	3	0,1	1,0880
1,02	24	23	135	10	72	17	54	5	0,1	1,0426
1,00	26	4	133	56	72	51	55	10	0,1	1,0000
0,98	27	31	132	50	73	19	56	18	0,1	0,9600
0,96	28	47	131	48	73	44	57	30	0,1	0,9222
0,94	29	55	130	52	74	6	58	46	0,1	0,8864
0,92	30	56	130	1	74	24	60	5	o,1	0,8524
0,90	31	51	129	11	74	40	61	27	0,1	0,8200
0,88	32	42	128	28	74	55	62	53	0,1	0,7890
0,86	33	28	127	47	75	8	64	24	0,1	0,7594
0,84	34	10	127	9	75	19	66	1	0,1	0,7309
0,82	34	50	126	32	75	30	67	43	0,1	0,7036
0,80	35	27	125	58	75	40	69	28	0,1	0,6772
0,78	36	1	125	26	75	48	71	21	0,1	0,6517
0,76	36	33	124	56	75	56	73	18	0,1	0,6271
0,74	37	3	124	28	76	3	75	23	0,1	0,6032
0,72	37	31	124	1	76	10	77	40	0,1	0,5800
0,70	37	57	123	36	76	16	80	0	0,1	0,5574
0,68	38	22	123	12	76	22	82	33	0,1	0,5355
0,66	38	45	122	50	76	27	85	15	0,1	0,5141
0,64	39	7	122	28	76	32	88	9	0,1	0,4931
0,62	39	27	122	8	76	36	91	14	0,1	0,4727
0,60	39	46	121	49	76	40	94	32	0,1	0,4526
0,58	40	4	121	32	76	44	98	6	0,1	0,4330
0,56	40	21	121	15	76	48	102	0	0,1	0,4137
0,54	40	37	120	59	76	51	106	14	0,1	0,3947
0,52	40	52	120	44	76	54	110	54	0,1	0,3760
0,50	41	6	120	30	76	57	116	1	0,1	0,3575
0,48	41	19	120	17	77	0	121	38	0,1	0,3393
0,46	41	32	120	4	77	3	127	54	0,1	0,3212
0,44	41	44	119	52	77	5	134	53	0,1	0,3033
0,42	41	55	119	41	77	7	142	42	0,1	0,2855
0,40	42	6	119	29	77	9	151	31	0,1	0,2679
0,38	42	16	119	19	77	11	161	32	0,1	0,2502
0,36	42	25	119	10	77	13	173	12	0,1	0,2325
0,34	42	34	119	1	77	15	186	58	0,1	0,2147
0,32	42	42	118	53	77	16	204	4	0,1	0,1967
0,30	42	50	118	45	77	17	225	48	0,1	0,1785
0,28	42	57	118	38	77	18	255		0,1	0,1597
0,26	43	3	118	32	77	19	299		0,1	0,1403
0,24	43	9	118	26	77	20	367		0,1	0,1198
0,22	43	14	118	21	77	21	477		0,1	0,0975
0,20	43	19	118	16	77	22	663	30	0,1	0,0714
0,18	58	49	101	41	79	15	1000		0,3113	0,0339

Polardistanz der Mitte 70°

λ	N		S		P		Φ		M	A
1,36	64°	28′	73°	0′	70°	0′	0°	23′	0,00001	7,1670
1,34	57	4	77	20	69	48	1	57	0,00022	4,3819
1,32	50	51	81	8	69	31	3	48	0,00076	3,3998
1,30	45	23	84	50	69	8	6	0	0,00186	2,8547
1,28	40	34	88	24	68	40	8	26	0,00357	2,4939
1,26	36	7	91	50	68	5	11	8	0,00596	2,2312
1,24	32	0	95	12	67	24	13	58	0,00913	2,0280
1,22	28	17	98	30	66	39	17	5	0,01318	1,8642
1,20	24	49	101	46	65	44	20	27	0,01819	1,7281
1,18	21	34	105	2	64	40	24	4	0,02420	1,6123
1,16	18	32	108	18	63	25	27	58	0,03141	1,5120
1,14	15	47	111	34	61	55	32	10	0,03988	1,4237
1,12	12	58	114	51	60	6	36	43	0,04982	1,3451
1,10	10	26	118	14	57	52	41	46	0,06149	1,2744
1,08	8	3	121	44	54	58	47	14	0,07521	1,2101
1,06	5	42	125	25	51	16	53	28	0,09148	1,1513
1,04	10	0	126	26	50	37	57	8	0,1	1,0971
1,02	13	33	124	8	52	54	58	12	0,1	1,0468
1,00	16	4	123	56	54	29	59	21	0,1	1,0000
0,98	17	57	122	49	55	44	60	36	0,1	0,9561
0,96	19	32	121	49	56	48	61	57	0,1	0,9148
0,94	20	54	120	54	57	42	63	23	0,1	0,8758
0,92	22	5	120	3	58	27	64	55	0,1	0,8388
0,90	23	8	119	15	59	6	66	31	0,1	0,8037
0,88	24	5	118	31	59	40	68	14	0,1	0,7701
0,86	24	57	117	50	60	10	70	5	0,1	0,7379
0,84	25	43	117	11	60	36	72	3	0,1	0,7070
0,82	26	25	116	34	61	0	74	9	0,1	0,6773
0,80	27	4	115	59	61	22	76	25	0,1	0,6487
0,78	27	40	115	27	61	42	78	49	0,1	0,6210
0,76	28	13	114	56	61	59	81	26	0,1	0,5940
0,74	28	44	114	27	62	13	84	15	0‘1	0,5679
0,72	29	13	114	0	62	26	87	20	0,1	0,5424
0,70	29	41	113	35	62	38	90	43	0,1	0,5175
0,68	30	7	113	11	62	49	94	23	0,1	0,4931
0,66	30	31	112	48	63	0	98	23	0,1	0,4692
0,64	30	53	112	26	63	10	102	47	0,1	0,4457
0,62	31	14	112	5	63	19	107	38	0,1	0,4224
0,60	31	33	111	46	63	28	113	2	0,1	0,3995
0,58	31	51	111	28	63	36	119	1	0,1	0,3767
0,56	32	8	111	11	63	44	125	48	0,1	0,3539
0,54	32	24	110	55	63	51	133	40	0,1	0,3312
0,52	32	39	110	39	63	57	143	10	0,1	0,3085
0,50	32	54	110	24	64	3	155	32	0,1	0,2854
0,48	33	8	110	10	64	8	170		0,1	0,2620
0,46	33	20	109	53	64	12	190		0,1	0,2379
0,44	33	30	109	41	64	16	220		0,1	0,2130
0,42	33	40	109	30	64	20	260		0,1	0,1866
0,40	33	52	109	20	64	23	313	12	0,1	0,1580
0,38	35	42	107	15	65	7	236	51	0,08991	0,1256
0,36	45	15	96	10	67	45	500		0,04426	0,0849

Polardistanz der Mitte 60°.

λ	N		S		P		Φ		M	A
1,32	58°	59'	60°	30'	60°	0'	0°	3'	0,0000002	14,0132
1,30	52	38	63	55	59	55	0	58	0,00005	4,8990
1,28	46	58	67	14	59	39	2	38	0,00032	3,5271
1,26	41	51	70	28	59	17	4	39	0,00095	2,8699
1,24	37	11	73	39	58	48	6	59	0,00210	2,4621
1,22	32	53	76	48	58	11	9	40	0,00380	2,1758
1,20	28	53	79	56	57	25	12	40	0,00623	1,9593
1,18	25	9	83	6	56	28	15	59	0,00950	1,7874
1,16	21	39	86	19	55	20	19	40	0,01374	1,6460
1,14	18	21	89	35	53	59	23	46	0,01905	1,5265
1,12	15	14	92	56	52	20	28	18	0,02566	1,4236
1,10	12	18	96	25	50	15	33	24	0,03385	1,3333
1,08	9	32	100	2	47	37	39	12	0,04394	1,2531
1,06	6	55	103	56	44	10	45	52	0,05620	1,1809
1,04	4	26	108	14	39	16	54	10	0,07172	1,1156
1,02	2	7	113	2	31	16	64	22	0,09207	1,0555
1,00	6	4	113	56	31	52	68	58	0,1	1,0000
0,98	8	40	112	47	35	16	70	17	0,1	0,9485
0,96	10	48	111	44	37	57	71	45	0,1	0,9004
0,94	12	34	110	46	40	4	73	25	0,1	0,8552
0,92	14	3	109	52	41	46	75	17	0,1	0,8124
0,90	15	19	109	1	43	9	77	23	0,1	0,7718
0,88	16	25	108	13	44	16	79	45	0,1	0,7331
0,86	17	21	107	29	45	11	82	24	0,1	0,6961
0,84	18	10	106	48	45	56	85	22	0,1	0,6605
0,82	18	54	106	10	46	34	88	42	0,1	0,6261
0,80	19	34	105	34	47	8	92	26	0,1	0,5927
0,78	20	11	105	0	47	39	96	39	0,1	0,5603
0,76	20	46	104	28	48	7	101	25	0,1	0,5286
0,74	21	19	103	58	48	33	106	45	0,1	0,4975
0,72	21	49	103	29	48	56	112	45	0,1	0,4668
0,70	22	17	103	2	49	17	119	30	0,1	0,4364
0,68	22	43	102	37	49	35	127		0,1	0,4061
0,66	23	7	102	13	49	52	136		0,1	0,3758
0,64	23	29	101	50	50	8	148		0,1	0,3451
0,62	23	50	101	28	50	23	164		0,1	0,3137
0,60	24	10	101	8	50	37	188	57	0,1	0,2813
0,58	24	28	100	50	50	50	229	10	0,1	0,2472
0,56	25	42	99	14	51	39	321	26	0,09367	0,2104
0,54	29	36	94	0	54	31	333		0,06417	0,1689
0,52	39	44	82	58	57	18	346	9	0,03295	0,1174
0,50	60		60		60		360	0	0,0	0

Polardistanz der Mitte 50°

λ	N		S		P		Φ		M	A
1,24	44°	29'	52°	50'	49°	58'	0°	55'	0,00003	4,7794
1,22	39	21	55	51	49	40	2	33	0,00030	3,3052
1,20	34	34	58	53	49	16	4	49	0,00080	2,6437
1,18	30	7	61	54	48	41	7	35	0,00171	2,2442
1,16	25	58	64	58	47	53	10	50	0,00335	1,9660

λ	N		S		P		Φ		M	A
1,14	22°	4'	68°	11'	46°	51'	14°	37'	0,00593	1,7567
1,12	18	21	71	32	45	33	18	56	0,00965	1,5907
1,10	14	50	74	58	43	53	23	59	0,01465	1,4542
1,08	11	32	78	34	41	40	29	58	0,02099	1,3385
1,06	8	27	82	25	38	39	37	11	0,02955	1,2384
1,04	5	25	87	0	34	28	45	58	0,04104	1,1502
1,02	2	36	92	47	27	26	57	50	0,05730	1,0714
1,00	0		100	0	0		90 180		0,08545	1,0000
0,993	0	14	103	9	0	50	181	16	0,09875	0,9768
0,98	2		102	39	9	27	99	5	0,1	0,9347
0,96	4	23	101	27	16	34	97	39	0,1	0,8743
0,94	6	14	100	21	21	23	97	35	0,1	0,8179
0,92	7	43	99	20	24	48	98	54	0,1	0,7649
0,90	8	58	98	24	27	17	101	36	0,1	0,7147

Karte von Asien.

0,88	10	3	97	32	29	4	105	47	0,1	0,6668
0,86	11	[illegible]0	96	43	30	31	111	24	0,1	0,6207
0,84	11	51	95	57	31	44	118	9	0,1	0,5760
0,82	12	37	95	15	32	45	123		0,1	0,5324
0,80	13	18	94	35	33	37	136	37	0,1	0,4895
0,78	13	56	93	58	34	22	151		0,1	0,4467
0,76	14	30	93	23	35	3	172		0,1	0,4036
0,74	15	2	92	49	35	40	205	46	0,1	0,3597
0,72	17	5	89	47	37	57	250		0,08840	0,3138
0,70	20	12	84	5	41	8	257		0,06872	0,2647
0,68	25	20	78	12	44	17	264	42	0,04672	0,2092
0,66	32	29	69	7	47	24	272	44	0,02245	0,1393

Polardistanz der Mitte 40°

λ	N		S		P		Φ		M	A
1,18	37°	37'	41°	14'	40°	0'	0°	21'	0,0000031	6,2270
1,16	32	26	44	9	39	44	2	19	0,00018	3,3509
1,14	27	33	47	7	39	19	4	55	0,00056	2,5051
1,12	22	57	50	11	38	39	8	24	0,00142	2,0505
1,10	18	36	53	27	37	34	13	3	0,00340	1,7513
1,08	14	29	57	6	35	59	18	51	0,00655	1,5325
1,06	10	34	61	18	33	37	26	24	0,01150	1,3615
1,04	6	50	66	3	30	0	35	52	0,01911	1,2215
1,02	3	19	71	21	24	26	49	57	0,03054	1,1031
1,00	0		80	0	0		90 180		0,05403	1,0000
0,98	0	52	86	17	3	2	183	40	0,07763	0,9083
0,96	1	44	88	8	6	2	187	30	0,08916	0,8252
0,94	2	44	88	10	9	8	191	30	0,09480	0,7486
0,92	3	56	87	17	12	22	195	39	0,09548	0,6768
0,90	5	18	85	41	15	43	200	0	0,09348	0,6085
0,88	6	51	83	19	19	12	204	33	0,08750	0,5419
0,86	8	46	80	10	22	46	209	18	0,07866	0,4762
0,84	11	14	76	14	26	27	214	17	0,06696	0,4097
0,82	14	26	71	20	30	8	219	31	0,05242	0,3399
0,80	18	43	65	25	33	50	225	0	0,03518	0,2623
0,78	25	36	56	4	37	29	230	46	0,01532	0,1637