

Werk

Titel: Ueber eine conforme Abbildung der Erde nach der epicycloidischen Projection

Autor: August, E.

Ort: Berlin

Jahr: 1874

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?391365657_1874_0009|log8

Kontakt/Contact

[Digizeitschriften e.V.](#)
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

I.

Ueber eine conforme Abbildung der Erde nach der epicycloidischen Projection.

Von Dr. F. August.

(Hierzu eine Karte Tafel I.)

Die zu dieser Arbeit gehörige Karte stellt in ihrer Hauptansicht eine conforme Abbildung der ganzen Erdoberfläche dar, welche begrenzt ist von einer krummen Linie, wie sie irgend ein Punkt der Peripherie eines Kreises beschreibt, während dieser Kreis selbst auf einem andern festen Kreise mit doppelt so grossem Halbmesser ohne Gleitung rollt; diese Linie ist eine sogenannte äussere Epicycloide mit zwei Spitzen. Die leitende Idee, durch welche ich auf die Auffindung dieser Projectionsart geführt wurde, verdanke ich meinem Freunde, dem Herrn Dr. G. Bellermann in Berlin, welcher sich seit längerer Zeit mit dem Gedanken beschäftigte, eine conforme Abbildung der Kugel in das Innere einer Epicycloide zu construiren, weil er aus Gründen, welche im Wesentlichen mit den unten auseinandergesetzten übereinstimmen, diese Kurve ihrer Gestalt wegen für eine besonders zweckmässige Begrenzung hielt. Durch mehrere Gespräche mit ihm wurde auch ich angeregt, die Sache zu verfolgen, und es gelang mir die Lösung des Problems auf eine in mathematischer Hinsicht überraschend einfache Weise. Inzwischen hat auch Herr Bellermann seine Untersuchungen fortgesetzt und ist zu derselben Projection auf einem andern Wege gelangt. Ich hielt es um so mehr für meine Pflicht, hier den Antheil des Herrn Bellermann an der Sache anzudeuten, als er selbst eine Veröffentlichung seiner Untersuchungen vorläufig nicht beabsichtigt.

Uebrigens hat Herr Eisenlohr in der höchst interessanten Abhandlung „über Flächenabbildung“ (Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd. 71, pag. 143—152; Berlin 1870 bei Georg Reimer) unter andern die Formeln für eine conforme Abbildung der ganzen Kugeloberfläche geliefert, deren Begrenzung der allgemeinen Gestalt nach mit jener Epicycloide grosse Aehnlichkeit hat, aber in mathematischer Hinsicht complicirter Natur ist. Diese Eisenlohr'sche Abbildung würde vor der hier besprochenen namentlich auch den Vortheil haben, dass für den ganzen Rand der Karte der Maasstab derselbe ist, und dass die Vergrößerung höchstens den Werth 6 (genauer 5,8284) erreicht, wenn man den Maasstab im Centrum, wo er am kleinsten ist, gleich 1 setzt; während die epicycloidische Projection in einem allerdings kleinen Theile der Karte eine stärkere Vergrößerung zeigt, und zwar an verschiedenen Theilen des Randes eine verschiedene. Dafür ist aber die Vergrößerung an den Grenzen des Aequators in der epicycloidischen Projection geringer, und vor allem ist das Netz in dieser Abbildung verhältnissmässig einfach zu construiren, was bei der Eisenlohr'schen durchaus nicht der Fall ist. Dieser letztere Umstand ist auch wohl der Grund, warum ein Netz nach der Eisenlohr'schen Abbildungsart noch nicht construirt ist.

Ich erwähne noch, dass auch die Begrenzung der sogenannten amerikanischen polykonischen Projection einige Aehnlichkeit mit der Epicycloide hat, während die Projection selbst, da sie nicht conform ist, zu brauchbaren Uebersichtskarten wohl kaum anwendbar sein dürfte.

Ich werde im Folgenden zunächst versuchen, die Gründe, welche für unsere Abbildungsart sprechen, ohne Eingehen in mathematische Details, darzulegen, und darauf in einem zweiten Abschnitte die mathematischen Entwicklungen geben.

I.

Bekanntlich ist es unmöglich, eine biegsame, aber nicht dehnbare Kugelfläche, oder einen Theil derselben in eine Ebene auszubreiten. In Folge dessen giebt keine Abbildung der Kugel in der Ebene die Gestalt der abgebildeten Figuren richtig oder die Längen der abgebildeten Linien in unverändertem Maasstabe wieder. Dieser Uebelstand ist um so merklicher, je grösser der abzubildende Theil der Kugel ist, am merklichsten bei einer Abbildung der ganzen Kugel. Die Versuche, die Abbildungen möglichst brauchbar zu machen, haben sich (abgesehen von Specialzwecken, wie möglichste Einfachheit der loxodromischen Linien für Seekarten oder der geodätischen Linien für solche Sternkarten, die einen

kleinern Theil des Himmels, als die Halbkugel umfassen) vorzugsweise auf die Erfüllung einer der beiden folgenden Bedingungen gerichtet. Man hat nämlich einerseits solche Abbildungen construirt, welche den Flächeninhalt in richtigem Verhältnisse wiedergeben, sogenannte *aequivalente* Abbildungen, andererseits solche, die wenigstens in den kleinsten Theilen dem Original ähnlich sind, d. h. bei denen jeder Theil der Abbildung in der Gestalt um so genauer mit dem Original übereinstimmt, je kleiner seine Dimensionen sind, und in welchem, wie hiermit zusammenhängt, die Winkel des Originals erhalten bleiben. Abbildungen dieser Art nennt man *conforme*.

Die Bedingung der Aequivalenz, so berechtigt sie für gewisse Zwecke sein mag, hat sich doch nicht eine allgemeine Anerkennung verschaffen können, weil sie eben nur das leistet, was der Name ausdrücken soll, während sie ein in jeder Hinsicht verzerrtes Bild giebt. Denn es wird nicht nur für jeden Punkt der Karte ein anderer Maasstab nöthig, sondern auch für die verschiedenen Richtungen, die von einem und demselben Punkte ausgehen, ist der Maasstab verschieden. Den letzteren Uebelstand hat jede Abbildungsart ausser der *conformen*. Bei einer *conformen* Abbildung dagegen ist zwar auch, wie dies nicht anders möglich ist, der Maasstab veränderlich, aber er bleibt für alle von einem Punkte ausgehenden Richtungen derselbe, wenn man auf ihnen nur um eine sehr kleine (unendlich kleine) Strecke fortschreitet, so dass beispielsweise alle Punkte, die auf der Erdkugel 15 Meilen weit von einem beliebigen Punkte entfernt sind, auch in der Abbildung fast genau in einem Kreise liegen. Nun giebt aber das Netz durch die Breitengrade schon für jeden Punkt den Maasstab richtig an, so dass man durch sie ohne weiteres einen Anhalt für die richtige Schätzung der Dimensionen erhält, was bei keiner andern Abbildungsart möglich ist. Dies ist der grosse Vorzug der *conformen* Abbildungen, auf den vor Allem Gauss hingewiesen hat. Nimmt man dazu, dass, wie schon oben gesagt ist, und wie ja auch aus dem eben Besprochenen folgt, die Gestalt der kleineren Theile kaum verzerrt wird, dass also Halbinseln, Inseln und dergl. sich in fast genau richtiger Gestalt wiedergeben, so wird man im Allgemeinen die *conformen* Abbildungen als die zweckmässigsten anerkennen.

Und in der That sind die beiden Abbildungen, deren man sich zur Darstellung der ganzen Erde am häufigsten bedient, die *stereographische* und die *Merkatorprojection* *conform*. Die Praxis hat auf sie geführt, ehe die Bedeutung der Conformität theoretisch erkannt war. Indessen sind doch mit allen Vorzügen, welche die beiden Abbildungen besitzen, wesentliche Nachtheile verbunden.

Die stereographische Projection, welche, namentlich wenn man von der Abplattung der Erde absieht, eine sehr einfache Construction des Netzes gestattet, hat den Uebelstand, dass, während die eine Erdhälfte ohne grosse Dimensionsänderung abgebildet wird, die andere Halbkugel sich in hohem Grade vergrössert, und die Punkte, die den Projectionspol umgeben, bei der Abbildung in unendliche Entfernung rücken, so dass eine unendlich kleine, diesen Punkt einschliessende Linie sich in eine unendlich grosse Linie abbildet. Man verwendet deshalb in der Regel nur die Abbildung einer Halbkugel und setzt zwei derartige Abbildungen, deren Projectionspole diametral gegenüberstehen, nebeneinander. Hierdurch ist aber der Zusammenhang der beiden Hemisphären in unnöthiger und für die Anschauung wenig förderlicher Weise zerstört.

Die Merkator'sche Projection, ebenfalls leicht zu construiren, welche die Kugel in den Raum zwischen zwei parallelen Geraden abbildet, hat nun zwar jenen Uebelstand nicht. Allein, da hier zwei Punkte (in der Regel Nordpol und Südpol) in's Unendliche rücken, so können die Gegenden in der Nähe der Pole nicht mit abgebildet werden, und die Karten hören meistens mit dem achtzigsten oder gar mit dem siebzigsten Breitengrade auf. Es hört ferner die Conformität in den Polen auf; die Linien, welche durch die Pole gehen, also z. B. die Meridiane, schneiden sich demnach nicht mehr unter demselben Winkel wie im Original, sondern sie laufen parallel. In Folge dessen verschwindet in der Merkator'schen Projection jede geometrische Beziehung zur Kugelgestalt, und dies ist für alle solche Karten, deren Hauptzweck die Darstellung einer Gesamtübersicht ist, als ein Uebelstand zu bezeichnen, während die Merkator'schen Karten für einzelne Zwecke, namentlich wegen der loxodromischen Eigenschaften für Schiffskarten, den Vorzug vor allen andern behalten werden.

Es fragt sich nun, wie denn eine Uebersichtskarte über die ganze Erde, respective die ganze Himmelskugel, beschaffen sein müsse, um solche Nachtheile fern zu halten; wie es also möglich sei, ein einfach zusammenhängendes, vollkommen begrenztes Bild der Kugeloberfläche zu erhalten, welches in jedem Punkte, sowohl im Innern als auch am Rande conform ist. Die Beantwortung dieser Frage kann etwa folgender Gedankengang vermitteln.

Wir denken uns, die Oberfläche eines Globus bestehe aus einer biegsamen und zugleich dehnbaren Haut, etwa von elastischem Gummi. Soll diese nun, zunächst ohne Rücksicht auf Conformität, in eine Ebene ausgebreitet werden, so muss ihr Zusammenhang mindestens in einem Punkte, durch einen Stich, oder in einer Linie, durch einen Schnitt gestört werden. Der Schnitt aber darf keine in sich geschlossene Linie darstellen, wenn nicht

die Abbildung in zwei getrennte Theile zerfallen soll, er muss vielmehr durch eine einfach begrenzte Linie, mit einem Anfangs- und einem Endpunkte gebildet sein. Es fragt sich nun weiter, ob die Conformität am Rande in beiden Fällen erhalten bleiben kann. Sollte aber erstens nach einem einfachen Stich die Fläche in eine Ebene ausgebreitet werden, so müsste eine diesen Stichpunkt umgebende unendlich kleine einfach geschlossene Linie, etwa ein Kreis, so ausgedehnt werden, dass sie die Umgrenzung des ganzen Bildes lieferte, und hierbei würde die Conformität am Rande des Bildes aufhören müssen. Es würden z. B. zwei Linien, welche sich auf der Kugel im Stichpunkte schnitten, nach zwei ganz verschiedenen Theilen des Randes laufen. Wir müssen also diesen Fall ausschliessen. (Die stereographische Projection ist ein Beispiel für denselben, und zwar ist der Projectionspol der Stichpunkt, und die Grenze des Bildes wird unendlich entfernt.)

Es bleibt demnach nur der Fall übrig, dass die Kugel durch einen einfachen begrenzten Schnitt geöffnet wird. Dieser Schnitt muss mit Ausnahme seiner beiden Endpunkte nach der Ausbreitung in die Ebene zweimal abgebildet werden, und diese beiden Abbildungen der Schnittlinie müssen in den Bildern ihrer beiden Endpunkte zusammenstossen und zusammen eine einfach geschlossene Linie bilden, welche die ganze Abbildung begrenzt. Damit nun auf dem ganzen Rande des Bildes Conformität vorhanden sei, müssen:

- 1) die beiden Bilder der Schnittlinie, wo sie sich in ihren Endpunkten treffen, unter dem Winkel Null zusammenlaufen, d. h. eine Spitze (einen Rückkehrpunkt) bilden, die in die Bildfläche einspringt. Es müssen
- 2) ausser diesen beiden Punkten in der Begrenzung nur dann Spitzen oder Winkel vorhanden sein, wenn in den Punkten der Schnittlinien selbst solche vorhanden sind.

Vermeidet man also in der Schnittlinie selbst Winkel und Spitzen, so wird die Kugel abgebildet werden müssen in das Innere einer krummen Linie mit zwei nach innen einspringenden Spitzen. Diese allgemeinen Bedingungen werden nun dem Zweck entsprechend noch in folgender Weise vereinfacht:

Sollen zwei Punkte der Kugelfläche ausgezeichnet werden, so wählt man am passendsten dazu Nordpol und Südpol; zur Schnittlinie wählt man am passendsten einen Meridian (Grenzmeridian). Um ein symmetrisches Bild zu erhalten, wird der den Grenzmeridian ergänzende Meridian als Hauptmeridian durch eine Gerade abgebildet werden müssen, welche die Pole verbindet; diese giebt zugleich die Richtung der Tangenten der Grenzkurve in den Spitzen an. Der Aequator wird durch eine hierauf senkrechte Linie ab-

gebildet werden müssen, welche eine zweite Symmetrie-Axe bildet. Alle Bedingungen, auf welche wir hier geführt sind, können nun erfüllt werden, wenn man als Begrenzung die oben näher bezeichnete Epicycloide wählt, und es zeigt sich noch dazu, dass die Gesamtlänge des Aequators in dieser Abbildung gerade doppelt so gross ist, wie die des Hauptmeridians, was eine immerhin bemerkenswerthe Uebereinstimmung mit den wirklichen Verhältnissen ergibt. — Wie nun in das Innere einer Epicycloide hinein die Kugel vollständig conform abgebildet werden kann, ist im zweiten Abschnitte mathematisch entwickelt. Hier mögen nur noch einige allgemeinere Bemerkungen folgen. Um zunächst ohne Eingehen in eine mathematische Entwicklung die richtige Auffassung des Netzes der Anschauung näher zu bringen, wird es sich empfehlen, sich die Oberfläche des Globus, wie vorher bemerkt, aus einer elastischen Gummihaut bestehend zu denken. Diese elastische Haut wird nun längs eines Meridians aufgeschnitten, und alsdann so in einen epicycloidischen Rahmen gespannt, dass die Pole in die Spitzen fallen, und die Punkte des Grenzmeridians nach einem gewissen, aus der Berechnung folgenden Gesetze auf die beiden Hälften der Epicycloide vertheilt werden. Alsdann würden sich, unter der Voraussetzung, dass die elastischen Kräfte zwischen den einzelnen unendlich nahen Theilen der Haut proportional der Entfernung wirkten (was thatsächlich nicht der Fall ist), die Theile im Innern von selbst so anordnen, dass unsere Abbildung entstände.

Die Vortheile, welche diese Abbildung gewährt, werden durch einen Blick auf die beigegebene Karte augenscheinlich. Sie ermöglicht ein conformes Bild der ganzen Kugeloberfläche, ohne dass irgend ein Theil fehlt, in vollständigem Zusammenhange und mit einer anschaulichen Beziehung zur Kugelgestalt. Die Pole, auf welche in physikalischer wie in mathematischer Hinsicht so viel ankommt, fehlen nicht auf dem Bilde, und die Meridiane schneiden sich unter den richtigen Winkeln, so dass man durch das Netz selbst die Fortsetzung eines Meridians durch den Pol verfolgen kann, während dieselbe auf der Merkator'schen Karte nur durch Abzählen, also ohne jede geometrische Beziehung ermittelt werden kann. Man wird deshalb namentlich auch in der Nähe der Pole ein anschaulicheres Bild erhalten, als durch andere Karten, welche die ganze Kugel darstellen sollen. Allerdings ist die Vergrösserung der Randtheile im Vergleich zur Mitte der Karte nicht unerheblich; es ist im mathematischen Theile gezeigt, dass der Maasstab grösser wird, je mehr man sich, sei es auf einem Meridian, sei es auf einem Parallelkreise, dem Rande nähert, und zwar ist, wenn der Maasstab in der Mitte gleich Eins gesetzt wird, derjenige in einem

der beiden Grenzpunkte des Aequators gleich vier, und der in den Polen gleich acht, so dass also dieselbe Entfernung dort viermal, hier achtmal so gross erscheint als im Centrum. Indessen zeigt schon die Betrachtung der Karte selbst, sowie die beigefügte Tabelle der Linearvergrösserungen (Vgl. II, 10), dass die starken Vergrösserungen nur auf einen kleineren Theil der abzubildenden Fläche beschränkt sind, während der mittlere Theil der Karte selbst bis in die Nähe der Pole hin eine nicht allzustarke Vergrösserung zeigt. Sie ist auf dem Centralmeridian bedeutend geringer, als bei Merkators Projection, namentlich in den höheren Breiten, wie sich aus folgenden Zahlen ersehen lässt:

Die Vergrösserung beträgt

in einer Breite von	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
bei Merkator's Projection	1	1,015	1,064	1,155	1,305	1,556	2,000	2,924	5,759	∞
im Centralmeridiane derepicycl. Project.	1	1,011	1,048	1,113	1,214	1,371	1,617	2,034	2,861	8

In der Nähe des Grenzmeridians ist die Vergrösserung freilich bedeutender, aber die Veränderung des Maasstabes geht dort langsam vor sich, so dass auch dort die Contouren für sich betrachtet nicht sehr verzerrt sind, wenn sie auch gegen das Centrum beträchtlich vergrössert erscheinen. — Um übrigens die fehlerhaften Vorstellungen in Bezug auf die Grössenverhältnisse, welche die Karte bei unmittelbarer Betrachtung erwecken könnte, zu mildern, empfiehlt es sich, der Hauptansicht, welche die ganze Erde umfasst, noch zwei andere Ansichten beizufügen, bei welchen andere Theile der Erdoberfläche in die Mitte der Karte gelangen. Dies ist in der beigegebenen Karte geschehen, und die Nebenansichten zeigen recht gute Bilder einerseits von der alten Welt und Neu-Holland, andererseits von Amerika. Inwieweit diese Projection für geographische Zwecke anwendbar sein wird, dies wird hauptsächlich von dem Urtheile der Fachmänner, insbesondere der Lehrer der Geographie abhängen. Dass mit den Vortheilen in einer Hinsicht andererseits Nachtheile verbunden sind, ist nicht zu bestreiten; es handelt sich eben darum, zu entscheiden, ob die Vortheile überwiegend sind oder nicht. Bei einer unbefangenen Prüfung bitte ich aber das eine nicht ausser Acht zu lassen, dass

wir uns an die Fehler der gebräuchlichen Darstellungen schon gewöhnt haben, dass wir sie deshalb wenig beachten, während die Fehler einer neuen Darstellung, gerade ihrer Neuheit wegen, mehr in die Augen fallen. Dem Verfasser gereicht es zur Freude, dass das Urtheil hochgeschätzter Autoritäten der Wissenschaft, namentlich des Herrn Professor Kiepert, und des leider inzwischen verstorbenen Herrn Obersten v. Sydow, dem ich für seinen Rath und Beistand zu innigem Danke verpflichtet bin, für die Projection günstig ausgefallen ist. Besonders dürfte sie zur Darstellung von Uebersichtskarten über die ganze Erde, sei es zur allgemeinen Orientirung, wie im Unterricht, sei es zu physikalischen Zwecken, wie zur Einzeichnung von Isothermen und sonstigen physicalisch oder meteorologisch wichtigen Linien, eben weil sie wirklich die ganze Erdoberfläche in einem naturgemäss erhaltenen conformen Bilde liefert, den Vorzug verdienen. Endlich kann sie auch zur übersichtlichen Darstellung des ganzen Sternenhimmels mit Vortheil benutzt werden.

II.

Die folgenden Entwicklungen setzen die Bekanntschaft mit der Theorie der Functionen complexer Variabler und mit der geometrischen Darstellung complexer Werthe voraus. Die mit Hülfe derselben gewonnene Construction des Netzes ist indessen in Nr. 8 so beschrieben, dass zu ihrem Verständnisse nur die Kenntniss elementarer Geometrie nöthig ist. Ausserdem bemerke ich, dass, wie dies bei Uebersichtskarten über die ganze Erde meist geschieht, von der Abplattung an den Polen abgesehen, die Erde also als eine Kugel angenommen ist. Die Formeln können nichts destoweniger auch auf die Abbildung des Sphäroids angewendet werden, wenn man nur statt der geographischen Breite β die reducirte Breite β_0 einsetzt, welche sich durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta_0}{2} \right) = \left(\frac{1 - \varepsilon \sin \beta}{1 + \varepsilon \sin \beta} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2} \right)$$

aus β berechnen lässt, wobei $\varepsilon = \frac{e}{a}$ die numerische Excentricität bedeutet. Nur die die Vergrößerung betreffenden Betrachtungen würden noch einer weiteren Modification bedürfen. (Vgl. Nr. 9. Anmerkung).

1) Es ist zunächst über die stereographische Projection Einiges vorauszuschicken. Die stereographische Projection einer Kugeloberfläche ist bekanntlich das perspectivische Bild derselben, wenn man als Projectionspol irgend einen Punkt der Kugeloberfläche wählt, und als Bildebene eine Ebene, welche senkrecht auf dem Radius nach dem Projectionspole steht. Aendert man den Ab-

stand der Bildebene vom Pol, so ändert sich nur der Maasstab der ganzen Karte. Wir nehmen an, die Bildebene sei diejenige Ebene, welche in dem dem Projectionspole diametral gegenüberliegenden Punkte O die Kugel berührt. Sie ist conform und ihre charakteristische Eigenschaft ist, dass alle Kreise der Kugel sich in Kreise abbilden. Wählt man als Projectionspol den Punkt des Aequators mit der Länge $R = \pm 180^\circ$ und als Längeneinheit den Abstand der Bildebene vom Projectionspol, so wird der stereographische Aequator eine gerade Linie; der stereographische Meridian von 0° eine darauf senkrechte Gerade, NS , welche die erstere in O schneidet und deren Endpunkte N und S , der stereographische Nordpol und Südpol, vom stereographischen Aequator den Abstand 1 haben. Die beiden stereographischen Meridiane mit der Länge $\pm 90^\circ$ bilden die beiden Halbkreise über NS als Durchmesser; ein beliebiger Meridian mit der Länge λ bildet sich ab als ein Kreisbogen zwischen N und S , der die Sehne NS unter den Winkel λ schneidet, der ihn ergänzende Meridian mit der Länge $(\lambda - \pi)$ als der jenen Bogen zu einem Kreise ergänzende Bogen. Ein Parallelkreis mit der Breite β bildet sich ab als ein Kreis der zur Schaar der Meridiane conjugirten Kreisschaar, welcher den stereographischen Meridian von der Länge 90° in einem Punkte schneidet, der vom Schnittpunkte des Aequators β Bogengrade entfernt ist. Hiernach ist es leicht, das stereographische Bild eines Punktes zu construiren, dessen Länge und Breite gegeben sind.

2) Zur metrischen Bestimmung wählen wir den Punkt O als Anfangspunkt der Coordinaten, die Richtung ON als positive Abscissenaxe, den stereographischen Aequator als Ordinatenaxe, und zwar so, dass die Punkte mit westlicher Länge ($< 180^\circ$) positive Ordinaten erhalten.

Sei nun T irgend ein Punkt der Kugel mit der Länge λ und der Breite β (wofür wir künftig auch kurz sagen werden der Punkt λ, β) und Z das stereographische Bild desselben, mit den Coordinaten x und y ; dann nennen wir $OZ = r$ den Modul des Punktes Z und Winkel $NOZ = \varrho$ den Richtungswinkel, so dass also r und ϱ die sogenannten Polarcoordinaten von Z sind. Dann folgen aus den geometrischen Bedingungen der stereographischen Projection durch einfache elementare Betrachtungen die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} SN^2 &= SZ^2 + ZN^2 + 2 SZ \cdot ZN \cos \lambda. \\ \frac{ZN}{SZ} &= \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\lambda}{2} \right), \end{aligned} \right\} \text{I}$$

und da OZ Transversale nach dem Halbierungspunkte von SN ist, so ist

$$4 OZ^2 + NS^2 = 2 (NZ^2 + SZ^2) = \frac{2 SN^2}{1 + \cos \lambda \cos \beta}$$

oder da $ON=1$, $SN=2$, $OZ=r$

$$1+r^2 = \frac{2}{1+\cos\lambda\cos\beta} \dots \text{II}^a; \text{ und } r^2 = \frac{1-\cos\lambda\cos\beta}{1+\cos\lambda\cos\beta} \dots \text{II}^b.$$

Hieraus folgt:

$$OZ \cos NOZ = \frac{OZ^2 + ON^2 - ZN^2}{2 ON}$$

$$\text{d. h. } r \cos \varrho = \frac{1 - 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2} \right)}{1 + \cos \lambda \cos \beta} \text{ oder}$$

$$\left. \begin{aligned} r \cos \varrho = x &= \frac{\sin \beta}{1 + \cos \lambda \cos \beta} \\ r \sin \varrho = y &= \frac{\sin \lambda \cos \beta}{1 + \cos \lambda \cos \beta} \end{aligned} \right\} \dots \text{III}$$

Hiernach können die Coordinaten irgend eines Punktes der stereographischen Projection gefunden werden.

3) Man nennt nun den complexen Ausdruck $z = x + iy = re^{i\varrho}$ den complexen Werth des Punktes Z oder der Strecke OZ , und umgekehrt den Punkt Z oder die Strecke OZ , die Darstellung des complexen Werthes z . Alsdann zeigt sich eine einfache geometrische Relation zwischen den Darstellungen von z und von $\frac{1}{z}$

Es ist nämlich:

$$\left. \begin{aligned} z = x + yi &= \frac{\sin \beta + i \sin \lambda \cos \beta}{1 + \cos \lambda \cos \beta} = \frac{1 - \cos \lambda \cos \beta}{\sin \beta - i \sin \lambda \cos \beta} \\ \text{also } \frac{1}{z} &= \frac{1 + \cos \lambda \cos \beta}{\sin \beta + i \sin \lambda \cos \beta} = \frac{\sin \beta - i \sin \lambda \cos \beta}{1 - \cos \lambda \cos \beta} = \frac{\sin \beta + i \sin(\lambda - \pi) \cos \beta}{1 + \cos(\lambda - \pi) \cos \beta} \end{aligned} \right\} \text{IV}$$

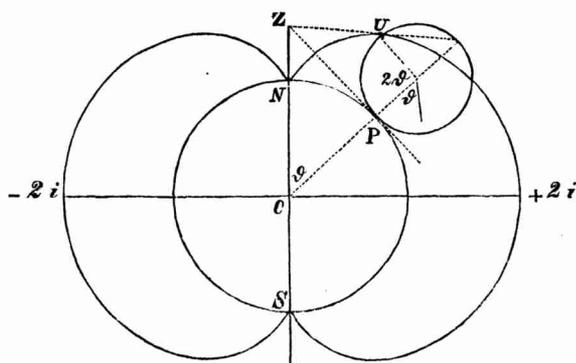
Man erhält demnach den zweiten dieser Werthe, wenn man im ersten β ungeändert lässt und statt λ den Werth $(\lambda - \pi)$ setzt. Da nun für Z irgend ein Punkt der Ebene genommen werden kann, so erhält man folgendes unter Voraussetzung unserer Coordinatenwahl allgemeine Resultat:

Irgend ein Paar Punkte der Kugel T und T' desselben Parallelkreises, die auf demselben Meridiankreise liegen, oder deren Länge um 180° verschieden ist, werden stereographisch abgebildet durch zwei Punkte Z und Z' , deren complexe Werthe reciprok sind, und umgekehrt. (Dasselbe Resultat kann übrigens auch durch eine einfache geometrische Betrachtung gewonnen werden.)

4) Es sollen jetzt die Punkte der stereographischen Projection Z , welche die ganze Ebene erfüllen, in das Innere derjenigen Epicycloide abgebildet werden, welche ein Punkt eines Kreises mit dem Radius $\frac{1}{2}$ beschreibt, während dieser Kreis auf dem Einheitskreise ohne Gleitung rollt, und deren Rückkehrpunkte in N und S liegen.

Sei $u = x_u + i y_u$ der complexe Werth des Punktes U dieser Curve (Fig. 1.),

Figur 1.



den man erhält, wenn der rollende Kreis die Bahn im Endpunkte P des von N aus gezählten Bogens $\mathcal{P} = NP$ berührt; dann ist

$$x_u = \frac{3}{2} \cos \mathcal{P} - \frac{1}{2} \cos 3 \mathcal{P},$$

$$y_u = \frac{3}{2} \sin \mathcal{P} - \frac{1}{2} \sin 3 \mathcal{P}, \text{ also}$$

$$u = \frac{3}{2} e^{i\mathcal{P}} - \frac{1}{2} e^{3i\mathcal{P}}, \text{ oder wenn man setzt:}$$

$$e^{i\mathcal{P}} = p$$

$$u = \frac{3}{2} p - \frac{1}{2} p^3$$

Man ziehe nun in P die gemeinschaftliche Tangente an den rollenden Kreis und die Bahn, welche die reelle Axe in Z schneiden möge, dann ist der Werth des Punktes Z , den wir z nennen, gleich $\sec \varphi$ oder

$$z = \frac{2}{\frac{e^{i\varphi}}{e} + e^{-i\varphi}} = \frac{2}{p + \frac{1}{p}}$$

Auf diese Weise entsprechen einem Punkte Z auf einer der beiden Verlängerungen von SN , zwei Punkte P des Kreises und zwei Punkte U der Epicycloide, die symmetrisch zur Axe NS liegen.

(Anmerkung. Man kann übrigens zeigen, dass der Punkt Z auch auf der Tangente der Epicycloide mit dem Berührungspunkt U liegt).

Hebt man nun die Beschränkung $p = e^{i\varphi}$ auf und versteht unter p eine complexe unbeschränkte Variable, also die Darstellung eines beliebigen Punktes der Ebene P , so sind nach der Theorie der Functionen complexer Variablen Z und U conforme Abbildungen von P , also auch von einander, bei welchen dem Grenzmeridian in Z die beiden Theile der Epicycloide entsprechen. Ihr Zusammenhang ist dargestellt durch die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} z &= \frac{2}{p + \frac{1}{p}} \dots \dots V^a \\ u &= \frac{3}{2} p - \frac{1}{2} p^3 \dots \dots V^b \end{aligned} \right\}$$

Ist nun Z das stereographische Bild des Kugelpunktes T , wie vorher, so ist ein vermöge der Gleichung V^a dazugehöriges P ein Punkt einer zweideutigen conformen Abbildung von Z , und ein vermöge der Gleichung V^b hierzu gehöriges U der entsprechende Punkt einer zweiten ebenfalls conformen Abbildung.

Durch Elimination von p erhält man den Zusammenhang zwischen z und u direct dargestellt durch die Gleichung

$$VI^a \dots \dots 4u \frac{1}{z^2} - 3 \frac{1}{z^2} - 6u \frac{1}{z} + u^2 + 4 = 0.$$

Setzen wir hierin $\frac{1}{z} = z'$, dann liegen die entsprechenden Kugelpunkte T und T' auf demselben Parallelkreis diametral gegenüber (siehe oben Nr. 3), und die Gleichung VI^a geht über in

$$VI^b \dots \dots 4u z'^3 - 3 z'^2 - 6u z' + u^2 + 4 = 0.$$

Man bemerkt zunächst, dass für $z = \infty$ $z' = 0$ also $u = \pm 2i$ wird, dass also die unendlich entfernte Gerade der z Ebene, welche als stereographisches Bild des stereographischen Projectionspoles (mit der Breite 0° und der Länge $\pm 180^\circ$) auftritt, in u abgebildet ist in die Punkte mit den Werthen $\pm 2i$ (Grenzpunkte des Aequators). Ferner erkennt man, dass irgend einem Punkte des stereographischen Meridians mit der Länge $\pm 180^\circ$ in Z ; d. h. irgend einem Punkte der Verlängerungen von NS , die beiden zur reellen Axe symmetrischen Punkte U_1 und U_2 entsprechen, in welchen die Tangenten von jenem Z an die Epicycloide dieselbe berühren. (Vgl. die Anmerkung in dieser Nr.) Für $z = 0$ wird einer der beiden Werthe p , also auch einer der beiden Werthe u , gleich Null. Geht man von diesem Werthe aus, und vermeidet die Verzweigungspunkte oder einen Umlauf um dieselben, so ist die Abbildung in der bekannten Weise als eindeutig zu betrachten. Dies ist nun im Innern der Epicycloide der Fall. Die Discriminante der Gleichung VI^b für u ist nämlich $(z'^2 - 1)^2 = 0$ und diejenige

derselben Gleichung für z' ist $(u^2 - 1)^3 = 0$; es sind demnach die Werthe $z' = +1$ und $z' = -1$ die einzigen Verzweigungspunkte von u als Function von z , und die Werthe $u = +1$, $u = -1$ $u = \varphi$ sind die einzigen Verzweigungspunkte von z oder z' als Functionen von u . — Zum Schluss sei bemerkt, dass der Centralmeridian sich in die reelle, der Aequator in die imaginäre Axe abbildet, und dass die ganze Abbildung in Bezug auf die Axen symmetrisch ist.

5) Zum genaueren Verständniss ist es bequemer, zunächst die Hilfsabbildung p zu betrachten. Aus Gleichung IV^a folgt

$$p = \frac{1}{z} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{z}\right)^2 - 1} = z' \pm \sqrt{z'^2 - 1}.$$

Es ist leicht, hieraus die beiden Werthe für p zu construiren. Die Strecke OZ' hat nach Grösse und Richtung den Werth $z' = \frac{1}{z}$, also sind die Streckenwerthe von SZ' und NZ' bezüglich gleich $(z' + 1)$ und $(z' - 1)$, der Werth $\sqrt{z'^2 - 1}$ ist also nach Grösse und Richtung dargestellt durch eine Strecke parallel der Halbirungslinie des Winkels $SZ'N$ (resp. des Scheitelwinkels) und deren absoluter Werth die mittlere Proportionale von SZ' und NZ' ist, und da der Werth $\pm \sqrt{z'^2 - 1}$ zu Z' addirt werden soll, so muss die Strecke von Z' ausgehen. Man erhält demnach die Punkte P , indem man auf der Halbirungslinie des Winkels $SZ'N$ von Z' aus nach beiden Seiten die mittlere Proportionale von SZ' und NZ' abträgt. Dies kann dadurch geschehen, dass man SZ' über Z' um $Z'N$ verlängert bis Q . Die Durchschnittspunkte des durch SQN gelegten Kreises mit der Halbirungslinie des Winkels $SZ'N$ sind die gesuchten Punkte P ; wir wollen den auf der Halbirungslinie des concaven Winkels liegenden P_1 , den andern P_2 nennen, so dass stets

$$\text{mod } p_1 < 1; \text{ mod } p_2 > 1.$$

Der Unterschied zwischen p_1 und p_2 fällt fort, wenn Z' auf der Strecke SN liegt. In den Verzweigungspunkten N und S wird zwar die Richtung der Strecke $Z'P$ unbestimmt, aber die Strecke selbst wird Null.

Aus dieser Construction geht hervor, dass, wenn Z auf dem stereographischen Meridian λ , also Z' auf dem supplementären Meridian $(\lambda - \pi)$ liegt, P_1 auf dem stereographischen Meridian $\frac{\lambda}{2}$ und P_2 auf dem supplementären stereographischen Meridian $(\frac{\lambda}{2} - \pi)$ liegt. Beschreibt also Z einen vollen Meridiankreis mit den Längen $(\lambda \pm k\pi)$, so beschreibt P_1 die beiden stereographischen

Meridiane $\frac{\lambda}{2}$ und $\frac{\lambda-\pi}{2}$, die in den Verzweigungspunkten rechtwinklig zusammenstossen, während P_2 die beiden ergänzenden Bogen durchläuft.

Da somit die Meridiane der Hilfsabbildung p auch Bogen der durch N und S gelegten Kreisschaar sind, so müssen die dazu orthogonalen Parallelkreise der conjugirten Kreisschaar angehören. Und in der That liegen P_1 und P_2 auf einem stereographischen Parallelkreise mit der Breite β' , wo $\sin \beta' = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$. (Der Mittelpunkt dieses Kreises ist nämlich der Punkt, in welchem die Halbierungslinie des Nebenwinkels von $SZ'N$ die reelle Axe schneidet.) Es sei noch bemerkt, dass, während Z den, einen Verzweigungspunkt N oder S einschliessenden, Parallelkreis β zweimal beschreibt, P den Parallelkreis β' einmal durchläuft, wobei die Werthe P_1 und P_2 in einander übergehen. Das Hauptresultat dieser Betrachtungen ist das folgende:

Durch den Werth p_1 ist die Ebene Z , also auch die Kugel T eindeutig in das Innere des Einheitskreises abgebildet. Die Abbildung ist conform bis auf die Pole N und S , in welchen endliche Winkel des Originals sich in Winkel von halber Grösse abbilden. Durch den Werth p_2 ist dasselbe Original in die Ebene mit Ausschluss des Einheitskreises abgebildet. Nur wenn Z auf einer der beiden Verlängerungen von NS oder in einem unendlich entfernten Punkte der Ebene liegt, also Z' auf der Strecke NS , wird jede der beiden Abbildungen zweideutig, wie das des Ueberganges wegen auch nothwendig ist. Man kann dies auch dahin deuten, dass der Meridian $\pm \pi$ zweimal abgebildet wird, und dass die eine Abbildung dem Werthe $+\pi$, die andere dem Werthe $-\pi$ entspricht.

Die Hilfsabbildung ist, wie man sieht, ein specieller Fall der Lagrange'schen Projection, durch welche die Kugel in das Innere einer von zwei Kreisbogen begrenzten Figur so abgebildet wird, dass die Meridiane Kreisbogen derselben Schaar und die Parallelkreise Bogen der conjugirten Kreisschaar werden. (Vgl. u. a. Gretschel, Lehrbuch der Kartenprojectionen pag. 219 ff. (Weimar 1873 bei Voigt.)

6) Wenden wir uns nun genauer zur Abbildung $u = \frac{3}{2}p - \frac{1}{2}p^3$.

Die Ableitung $\frac{du}{dp} = \frac{3}{2}(1 - p^2)$ verschwindet für $p = \pm 1$. Setzen wir nun $p = 1 + \Delta r$; d. h. betrachten wir einen Nachbarpunkt von $p = 1$; so wird

$$u = 1 - \frac{3}{2} Ar^2 e^{2iq} - \frac{1}{2} Ar^3 e^{3iq}$$

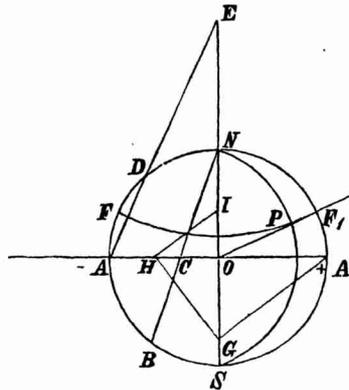
Wenn also p von $+1$ aus in der Richtung q eine unendlich kleine Strecke erster Ordnung Ar beschreibt, so beschreibt u von 1 aus eine unendlich kleine Strecke zweiter Ordnung in der Richtung $2q$. Die endlichen Winkel der Abbildung u sind demnach im Punkte $u = +1$ doppelt so gross, als die entsprechenden des Originals p , also wieder ebenso gross wie in der stereographischen Projection Z ; d. h. die Abbildung u von z ist auch in N und S conform. Einer Curve im Original p , welche durch N mit endlicher Krümmung hindurch geht, entspricht also in der Abbildung u eine Curve, welche in N einen Rückkehrpunkt hat. Dasselbe lässt sich für den Punkt S zeigen. Es bildet sich somit u. a. ein Kreis in p , der durch N und S hindurchgeht, in eine Curve ab, welche in S und N Rückkehrpunkte hat, deren Haupttangente die Axe in N und S unter doppelt so grossem Winkel schneidet, als der Kreis. Da nun ein voller Meridiankreis $\lambda \pm k\pi$ der Kugel oder der stereographischen Projection z in p_1 abgebildet war in zwei rechtwinkelig zusammenstossende stereographische Meridiane mit den Längen $\frac{\lambda}{2}$ und $\left(\frac{\lambda}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$, so setzt sich ihre Abbildung in u , sie heissen u_1 , aus zwei Curventheilen zusammen, die sich in den Rückkehrpunkten N und S unter 180° , d. h. so treffen, dass die Rückkehrtangente in eine Richtung fallen, aber entgegengesetzt liegen und in N , resp. S den entsprechenden Meridian der stereographischen Projection Z berühren. Die beiden übrig bleibenden Curvenäste setzen sich in derselben Weise zur Abbildung u_2 desselben Meridiankreises in p_2 zusammen. Es ist ferner leicht zu erkennen, dass, während z den Parallelkreis β zweimal, also p den Parallelkreis β' einmal durchläuft (vgl. oben Nr. 5), u den von jenen Kreisen eingeschlossenen Pol N oder S zweimal umläuft; da p sowohl als Function von u wie als Function von z in N und S Verzweigungspunkte hat. Aus diesen Betrachtungen geht hervor, dass die Conformität der Abbildung u_1 in den Polen wieder hergestellt, dass also die Abbildung u_1 im Innern der Epicycloide überall conform ist.

7) Die eben besprochenen Betrachtungen werden durch eine genauere Untersuchung der Meridiane und Parallelkreise verificirt. Man findet nämlich, dass sowohl Meridiane als auch Parallelkreise Evolventen von Epicycloiden derselben Art, wie die Begrenzungskurve, sind, und zwar die Meridiane solche mit zwei reellen Rückkehrpunkten, die Parallelkreise ohne reelle Rückkehrpunkte. Diese Untersuchung, die vorwiegend mathematisches Interesse hat, gedenke ich in dem „Journal für reine Mathematik“

genauer zu besprechen. Für die Construction des Netzes ist diese Beschaffenheit der Parallelkreise und Meridiane nicht von grosser Bedeutung, weil die Bestimmungsstücke sämtlicher vorkommender Evolventen verschieden sind; dagegen lässt sich auf eine sehr einfache Weise jeder Punkt des Netzes aus Länge und Breite geometrisch construiren, so dass das ganze Netz von einem einigermaßen gewandten Zeichner ohne Schwierigkeit und ohne besondere Hilfsmittel hergestellt werden kann. Da die Hilfsabbildung p_1 nichts anderes ist als die Lagrange'sche Projection, deren Netz man in den kartographischen Werken construirt findet, so würde es nur nöthig sein, an diese die Construction anzuschliessen, was bedeutend einfacher ist. Ich habe es indessen vorgezogen, die Construction ohne jede Voraussetzung anzugeben; man wird hieraus leicht ersehen, wie sich die Sache einfacher gestaltet bei Benutzung des Lagrange'schen Netzes. Vorausbemerkt sei noch, dass in dem Folgenden der Bequemlichkeit wegen statt des Werthes u der Werth $2u = 3p - p^3$ construirt ist, was darauf hinauskommt, dass die ganze Zeichnung in doppelter Lineardimension auftritt, verglichen mit derjenigen, welche sich in der theoretischen Betrachtung ergab. Die Construction selbst ist eine einfache Anwendung der geometrischen Interpretation der Rechenoperationen mit complexen Strecken.

Construction des Netzes.

Figur 2.



8) Man construire zunächst (Fig. 2) einen Kreis mit dem Radius 1 um O und darin zwei aufeinander senkrechte Durchmesser NS und $(-A + A)$. Um nun das Bild $2U$ des Punktes T mit der Breite β und der Länge λ zu construiren, construire man einen Hilfspunkt P mit der stereographischen Länge $\frac{\lambda}{2}$ und der stereographischen Breite β' (vgl. Nr. 5). Zu diesem

Zwecke mache man Bogen $NB = \lambda$, die Sehne NB schneidet $(-A + A)$ im Punkte C , schlage mit CN um C einen Kreis (es ist nur nöthig den kleineren Kreisbogen zwischen N und S

zu zeichnen). Dieser Bogen ist der Meridian λ in der Lagrange'schen Abbildung p_1 . Man mache andererseits den Bogen $AD = \beta$. Die Sehne AD schneidet SN in E . Man schlage um E einen Kreis, der den Einheitskreis senkrecht schneidet, und zwar ist es nur nöthig den Bogen FF_1 im Innern des Einheitskreises zu zeichnen. Dieser Bogen ist der Parallelkreis β in der Lagrange'schen Abbildung p_1 . Er schneidet den vorher construirten Meridian im Punkte P_1 . So lassen sich alle Parallelkreise und Meridiane, also das ganze Netz der Lagrange'schen Projection, construiren. Alsdann ziehe man OP^* und verlängere OP bis $(3P)$, so dass $O(3P) = 3(OP)$; trage an $O(3P)$ in $3P$ den Winkel $O(3P)(2U) = 2NOP$ an und mache den Schenkel $(3P)(2U) = OP^3$; dann ist $2U$ das Bild des Kugelpunktes T . — Um OP^3 zu construiren, kann man folgendermassen verfahren: man macht $OG = OP$, zieht AG , dann darauf rechtwinkelig GH und darauf wieder senkrecht HJ ; dann ist $OJ = OP^3$.

Auf diese Weise können soviel Punkte des Netzes construirt werden, als nöthig erscheint, um das Netz selbst zu zeichnen. Man thut gut, zuerst die Punkte des Grenzmeridians, des Hauptmeridians und des Aequators zu construiren, bei welchen sich die Construction, wie man leicht sieht, noch etwas vereinfacht.

Veränderung des Maasstabes.

9) Zum Schluss ist es nöthig die Vergrösserung oder Veränderung des Maasstabes für die verschiedenen Theile der Karte zu untersuchen.

Ist $u = f(z)$ eine Function der complexen Variablen z , also $du = f'(z) dz$; so ist auch

$$\frac{\text{mod}(du)}{\text{mod}(dz)} = \text{mod} f'(z).$$

Nun sind aber $\text{mod}(du)$ und $\text{mod}(dz)$ zwei entsprechende unendlich kleine Strecken ohne Rücksicht auf die Richtungswinkel, also giebt ihr Quotient, oder die Grösse $\text{mod} f'(z)$ das Längenverhältniss entsprechender Bogenelemente in u und z an.

In unserem Falle ist nun $du = \frac{3}{2}(1 - p^2) dp$

$$dz' = -\frac{1}{2p^2}(1 - p^2) dp$$

$$\text{also } \frac{du}{dz'} = -3p^2 \text{ und } \frac{\text{mod}(du)}{\text{mod}(dz')} = 3 \text{ mod}(p)^2 = 3 \text{ OP}^2.$$

*) OP durchschneidet den Kreisbogen FPF_1 in P , ist also nicht Tangente, wie der Zeichnung nach scheinen könnte.

Nun ist aber der Punkt Z' selbst die stereographische Abbildung eines Punktes T' der Kugel, und wenn man unter dt' ein Bogenelement der Kugel versteht oder auch unter $\text{mod}(dt')$, um wie in der Ebene nur die absolute Länge desselben, nicht seine Richtung zu bezeichnen, so ist bekanntlich nach der Theorie der stereographischen Projection (vgl. u. a. Gretschel, l. c. pag. 71—72)

$$\frac{\text{mod}(dz')}{\text{mod}(dt')} = \alpha (1 + OZ'^2) = \alpha (1 + \text{mod}[z]^2),$$

wo α einen konstanten Factor bedeutet, der gleich Eins ist, wenn die Bildebene die Kugel berührt und dessen reciproker Werth $\frac{1}{\alpha}$ allgemein den Durchmesser der in den Einheitskreis stereographisch abgebildeten Halbkugel bedeutet. Die Aenderung von α würde demgemäss nur den Gesamtmaasstab der Abbildung ändern.

$$\text{Also ist } \frac{\text{mod}(du)}{\text{mod}(dt')} = 3\alpha (1 + OZ'^2) OP^2$$

Ist nun Z die stereographische Abbildung von T , so liegen, wie wir oben gesehen haben (Nr. 3), T und T' auf demselben Parallelkreise diametral gegenüber, also ist $\text{mod}(dt') = \text{mod}(dt)$; d. h. es ist auch

$$\frac{\text{mod}(du)}{\text{mod}(dt)} = 3\alpha (1 + OZ'^2) OP^2$$

Hat nun der abgebildete Punkt T die Länge λ und die Breite β , also T' die Länge $(\lambda - \pi)$ und die Breite β , so ist (Nr. 2, Formel II*):

$$1 + OZ'^2 = \frac{2}{1 - \cos \lambda \cos \beta}.$$

Der Punkt P hat die stereographische Länge λ' und die Breite β' , wo $\lambda' = \frac{\lambda}{2}$ und $\sin \beta' = \text{tg} \frac{\beta}{2}$ (siehe Nr. 5), also $\cos \beta' = \frac{\sqrt{\cos \beta}}{\cos \frac{\beta}{2}}$; und zwar gilt für unsere Abbildung nur das positive Vor-

zeichen der Quadratwurzel. Demnach ist (II^b)

$$OP^2 = \frac{1 - \cos \lambda' \cos \beta'}{1 + \cos \lambda' \cos \beta'} = \frac{\cos \frac{\beta}{2} - \cos \frac{\lambda}{2} \sqrt{\cos \beta}}{\cos \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\lambda}{2} \sqrt{\cos \beta}}$$

also wird

$$\text{VII} \dots \frac{\text{mod}(du)}{\text{mod}(dt)} = \frac{6\alpha}{1 - \cos \lambda \cos \beta} \frac{\cos \frac{\beta}{2} - \cos \frac{\lambda}{2} \sqrt{\cos \beta}}{\cos \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\lambda}{2} \sqrt{\cos \beta}}$$

Es ist aber

$$1 - \cos \lambda \cos \beta = 2 \left(\cos^2 \frac{\beta}{2} - \cos^2 \frac{\lambda}{2} \cos \beta \right); \text{ also}$$

$$v = \frac{\text{mod}(du)}{\text{mod}(dt)} = \frac{3\alpha}{\left(\cos \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\lambda}{2} \sqrt{\cos \beta} \right)^2}.$$

Für das Centrum der Karte sei $v = v_0$, also $v_0 = \frac{3\alpha}{4}$; wir haben demnach allgemein:

$$\text{VIII.} \dots \frac{v}{v_0} = \left(\frac{2}{\cos \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\lambda}{2} \sqrt{\cos \beta}} \right)^2.$$

Der Ausdruck $\frac{v}{v_0}$ giebt an, wie vielmal das Bild eines Bogenelementes im Punkte λ, β grösser ist, als das eines gleichgrossen Elementes im Centrum der Karte, es ist also die Zahl, mit der man den für das Centrum der Karte geltenden Maasstab multipliciren muss, um den Maasstab im Punkte λ, β zu erhalten. Man nennt ihn die lineare Vergrösserung.

Der Werth $\frac{v}{v_0}$ ist gleich 1 im Centrum, er nimmt zu, sowohl wenn λ seinem absoluten Werthe nach von 0 bis π wächst, als auch wenn β absolut genommen von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ wächst, d. h. die Vergrösserung nimmt zu, wenn man sich auf einem Parallelkreise oder auf einem Meridiane dem Rande der Karte nähert. Er erlangt sein Maximum für die Abbildung in's Innere der Epicycloide in den Polen für $\beta = \pm 90^\circ$, und zwar ist dies gleich 8. Der Maasstab bleibt also immer endlich.

Für den Centralmeridian $\lambda = 0$ wird $\frac{v}{v_0} = \left(\frac{2}{\cos \frac{\beta}{2} + \sqrt{\cos \beta}} \right)^2$

Für den Grenzmeridian $\lambda = \pm \pi$ wird $\frac{v}{v_0} = 4 \sec^2 \frac{\beta}{2}$

Für den Aequator $\beta = 0$ wird $\frac{v}{v_0} = \sec^4 \frac{\lambda}{4}$

In den Grenzpunkten des Aequators ist $\frac{v}{v_0} = 4$.

Anmerkung. Wenn man auf die Abplattung an den Polen Rücksicht nimmt, so ergibt sich die Vergrösserung für einen Punkt mit der Länge λ und der geographischen Breite β gleich:

$$\left(\frac{2}{\cos \frac{\beta_1}{2} + \cos \frac{\lambda}{2} \sqrt{\cos \beta_1}} \right)^2 \frac{\cos \beta_1}{\cos \beta} \sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 \beta}$$

wo $\epsilon = \frac{e}{a}$ die numerische Excentrität des Sphäroids bedeutet und β_1 berechnet werden kann aus der Formel

$$\text{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta_1}{2} \right) = \left(\frac{1 - \epsilon \sin \beta}{1 + \epsilon \sin \beta} \right)^{\frac{\epsilon}{2}} \text{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2} \right).$$

10) Tabelle der Linearvergrößerung $\frac{v}{v_0}$, von 10 zu 10 Grad für die Abbildung der Kugel, wenn der Maasstab im Centrum der Karte gleich 1 gesetzt wird.

		Länge.																		
		0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°	110°	120°	130°	140°	150°	160°	170°	180°
90°		8																		
80°		2,859	2,866	2,890	2,937	2,985	3,057	3,149 ₃	3,268	3,395	3,556	3,741	3,961	4,212	4,506	4,845	5,238	5,691	6,213	6,816 ₃
70°		2,029	2,035	2,055	2,089	2,136	2,197	2,275	2,374	2,491	2,632	2,801	3,000	3,238	3,518	3,850	4,246	4,720	5,284	5,961
60°		1,616	1,622	1,639	1,668	1,708	1,762	1,829	1,914	2,019	2,143	2,294	2,474	2,689	2,948	3,259	3,635 ₃	4,091	4,649	5,333
50°		1,371	1,377	1,390	1,416	1,453	1,501	1,564	1,638	1,730	1,844	1,979	2,143	2,340	2,579	2,870	3,225	3,660	4,169	4,870
40°		1,214	1,218	1,232	1,256	1,288	1,331	1,387	1,458	1,543	1,638	1,772	1,924	2,108	2,333	2,606	2,941	3,355	3,875	4,530
30°		1,112	1,116	1,129	1,151	1,186	1,221	1,274	1,339	1,419	1,517	1,635	1,778	1,952	2,166	2,426	2,746	3,146	3,648	4,287
20°		1,047	1,052	1,064	1,083	1,113	1,152	1,202	1,263	1,341	1,434	1,547	1,687	1,822	2,057	2,302	2,619	3,008	3,498	4,124
10°		1,011	1,016	1,030	1,042	1,075	1,116	1,162	1,222	1,298	1,388	1,498	1,633	1,796	1,995	2,243	2,548	2,929	3,412	4,030
0°	1	1,004	1,015	1,035	1,063	1,101	1,149	1,203	1,282 ₃	1,373	1,482	1,615	1,778	1,976	2,221	2,524	2,904	3,386	4,000	

B r e i t e

11) Die vorliegende Tabelle zeigt, dass die stärkeren Vergrößerungen in der That auf einen verhältnissmässig kleinen Theil der abzubildenden Kugelfläche beschränkt sind. Um hierüber noch ein genaueres Urtheil zu gewinnen, kann man folgende Erwägung anstellen. Bekanntlich ist der Flächeninhalt unserer Begrenzungskurve gleich 3π , da der Radius des Bahnkreises gleich 1 ist. Soll nun v_0 , die Vergrößerung im Centrum der Karte gleich 1 sein, so muss $\alpha = \frac{4}{3}$, also der Durchmesser der abzubildenden Kugel gleich $\frac{3}{4}$ und ihre Oberfläche gleich $\frac{9}{16}\pi$ sein. Es verhält sich demnach die Oberfläche der Abbildung zu der der Kugel wie 3π zu $\frac{9}{16}\pi$, d. h. wie 16:3. Unsere Abbildung nimmt also einen $5\frac{1}{3}$ mal so grossen Flächenraum ein, als sie einnehmen würde, wenn der Maasstab des Centrums auf der ganzen Karte herrschte. Man kann somit den Werth $\frac{16}{3}$ als durchschnittliche Flächenvergrößerung und den Werth $\sqrt{\frac{16}{3}} = 2,3094$ als durchschnittliche Längenvergrößerung bezeichnen. Wenn also auch die Linearvergrößerung zwischen 1 und 8 schwankt, so zeigt die geringe Grösse dieses Durchschnittswerthes doch an, dass die geringen Vergrößerungen überwiegend sind. Herr Eisenlohr hat in seiner anfangs citirten Arbeit (vgl. oben pag. 10) als Maass für den Fehler in einem Punkte einer konformen Abbildung die stärkste Krümmung bezeichnet, welche die Abbildung einer durch den Punkt gehenden geodätischen Linie des Originals in diesem Punkte haben kann, und daraus auch ein Maass für den Gesamtfehler einer konformen Abbildung aufgestellt. Er kommt dann zu dem Resultat, dass diejenige Abbildung eines Stückes der Erdoberfläche (resp. der ganzen Erde) die günstigste ist, bei welcher der Maasstab auf dem ganzen Rande constant ist, und weist zugleich nach, dass es für jedes gegebene Stück des Originals nur eine solche Abbildung giebt. Für die ganze Kugel trifft dies nun bei unserer Abbildung nicht zu, vielmehr in einer von Herrn Eisenlohr selbst angegebenen. Construirt man sich indessen in unserer Abbildung den geometrischen Ort der Punkte mit der Linearvergrößerung $\frac{v}{v_0} = 4$, was nach der obigen Tabelle leicht angenähert geschehen kann, so erhält man eine Kurve, welche den Rand in den Grenzpunkten des Aequators berührt, und welche fast das ganze Netz umspannt. Nur ein kleiner Theil zumal in der Nähe der Pole ist ausgeschlossen. Nach der Eisenlohr'schen Theorie ist nun der in dieser Kurve be-