Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Die flächentreue transversale Kegel-Projektion für die Karte von Afrika.

Von Dr. Alois Bludau.

(Hierzu Tafel 3.)

Die flächentreue, unechtcylindrische Projektion mit längentreuen Parallelkreisen, welche, obschon von Merkator herrührend, doch gewöhnlich nach Sanson oder Flamsteed benannt wird, ist gegenwärtig noch immer für Karten von Afrika und Südamerika am meisten im Gebrauch, obgleich nunmehr andere Projektionen zum Ersatze vorgeschlagen sind, welche sie hinsichtlich der Verzerrungsverhältnisse in hohem Grade übertreffen.

Schon der flächentreue, transversale Azimut-Entwurf (von Lambert) ist derselben überlegen, in noch höherem Grade aber übertreffen sie schiefachsige und transversale Kegelprojektionen. Aus der Klasse der letzteren sind bisher zwei ausführlicher besprochen und empfohlen worden. Den älteren Entwurf, einen flächentreuen, transversalen mit kleinster Winkelverzerrung, hat Zoeppritz in Vorschlag gebracht[1]), während unlängst Hammer eine schiefachsige Kegel-Rumpf-Projektion berechnet hat[2]), da er die Sichtbarkeit des Schlitzes bei der transversalen Projektion und die damit verbundene Auseinanderzerrung zu beiden Seiten desselben als Eigenschaften ansieht, welche die Anwendung derselben nicht ratsam erscheinen lassen.

Mit der Erläuterung der schiefachsigen Projektion hat Hammer auch einen Vergleich derselben mit der Sanson'schen[3]) verbunden, der mir Veranlassung zu einigen Bemerkungen giebt. Der Vergleich ist angestellt worden auf Grund der durchschnittlichen Maximalverzerrungen der beiden Entwürfe, die nach einem ausführlich beschriebenen Verfahren ermittelt worden sind[4]). Das Endergebnis dieses Verfahrens ist, dafs die schiefachsige Projektion der Sanson'schen fast

---

1) Zeitschr. Ges. f. Erdk. 1884, Bd. XIX S. 22.

2) Ebenda 1889, Bd. XXIV S. 222ff.

3) Wiewohl ich dem Vorschlage Hammer's (Karten-Projektionen S. 148), die Projektionen mit einer sachlichen Benennung zu bezeichnen, voll und ganz beistimme, sei zunächst, der Kürze halber, es mir gestattet, in diesen Zeilen obige Projektion einfach die „Sanson'sche“ zu nennen, da bei der unvermeidlichen häufigen Anwendung der Benennung die am Anfange gebrauchte sachliche Bezeichnung zu umständlich und schwerfällig ist.

4) Zeitschr. G. f. Erdkunde Bd. XXIV S. 235.

doppelt überlegen ist. Die durchschnittliche Maximal-Winkelverzerrung beträgt bei jener $3^\circ\ 22'$, bei dieser $5^\circ\ 28'$. Vergleicht man den Durchschnittswert von $5^\circ\ 28'$ mit den einzelnen Werten der 2ω für die Sanson'sche Projektion, so wird man dieses Endergebnis als ein überraschend niedriges bezeichnen müssen. Man könnte demnach Hammer darin beistimmen, dafs Tissot „die Bedeutung der absolut gröfsten Beträge der auf einer Karte vorkommenden Verzerrungen weit übertrieben habe"[1]). Meiner Ansicht nach hat aber Tissot recht, wenn er die Einzelwerte der 2ω der Beurteilung der verschiedenen Entwürfe zu Grunde legt. Die durchschnittlichen Maximal-Verzerrungen sind sehr geeignet, ein falsches Bild von einer Projektion und ihrem Werte anderen gegenüber zu erzeugen. Wenn ein Erdteil wie Afrika mit einer durchschnittlichen Maximal-Winkelverzerrung von nur $5^\circ\ 28'$ in Sanson'scher Projektion abgebildet werden kann, kann diese doch unmöglich so wertlos sein, als wie sie bisher bezeichnet worden ist. Und doch ist sie es; dies ergiebt sich sofort, wenn man nicht etwaige Durchschnitts-Werte, sondern die absoluten einzelnen Werte der Verzerrungen betrachtet, bezw. dieselben bildlich darstellt. Jede Projektion, auch die schlechteste, liefert für einen Teil des auf ihr dargestellten Gebietes — für die Mitte — Verzerrungen, die wenig von denen besserer Projektionen abweichen. Das gilt sowohl für die Sanson'sche als auch für die Bonne'sche Projektion, welche ebenfalls aus guten Gründen von der ferneren Anwendung ausgeschlossen werden sollte.

Ihre Inferiorität tritt aber erst dann deutlich zu Tage, wenn sie zur Darstellung grofser Gebiete angewandt werden. Daraus ergiebt sich wieder rückwärts die Forderung, sie auch für die Abbildung kleinerer Flächen nicht anzuwenden, auch wenn in solchem Falle die Verzerrungsverhältnisse unbedeutend sind. Um die Verzerrungsverhältnisse der Sanson'schen Projektion recht deutlich erkennbar zu machen. soll Figur 1 dienen. Sie stellt die Projektion für den vierten Teil der Halbkugel dar und ist nach Hammer's Tabelle mit den Linien gleicher 2ω in 5°-Intervallen überzogen, enthält aufserdem noch die Linie $2\omega = 1^\circ$. Berücksichtigt man noch, dafs eine Halbkugel auf einer flächentreuen Kegel-Projektion[2]) dargestellt werden kann, deren gröfster Wert für $2\omega = 19^\circ\ 45'$ ist, so dürfte die Unbrauchbarkeit der Sanson'schen, deren 2ω sogar Werte von über 70° erreichen, zur Genüge dargethan sein. Für die Flächen in der Nähe des Mittelpunktes liefert die Projektion freilich nicht ungünstige Verzerrungsverhältnisse und bei einer Abbildung von Afrika kommt es ihr, was teilweise schon Hammer be-

---

[1]) Ebenda S. 235 und Tabelle S. 231.

[2]) Tissot-Hammer, Netzentwürfe S. 140.

tont hat[1]), zu statten, dafs dieser Erdteil Teile von allen Quadranten ausfüllt, die sich nicht allzuweit vom Mittelpunkt hinaus erstrecken. Daher die verhältnismäfsig noch immer geringen Verzerrungen. Allein das sind Zufälligkeiten, die keineswegs den absoluten Wert der Projektion verbessern können. Um diesen absoluten Wert allein handelt es sich aber bei dem Vergleiche zweier oder mehrerer Projektionen. Alle Umstände, welche die absoluten Verhältnisse zu Gunsten oder Ungunsten verschieben können, in erster Linie also, wie hier, die Lage und Gestalt des darzustellenden Gebietes, ferner, wie Hammer andeutet, die Abschätzung einzelner Teile dieses Gebietes in Bezug auf ihre gröfsere oder geringere Bedeutung[2]), müssen aufser acht gelassen werden, wenn es sich lediglich um den Vergleich der Projektionen als solcher handelt. Andernfalls sind die Endergebnisse nur relativer Natur.

Auch Hammer's Durchschnittswert für die Sanson'sche Projektion ist ein relativer. Die Gröfse desselben ist nämlich keine konstante, hängt vielmehr von der Wahl des Mittelmeridians ab. Letztere ist aber eine ganz willkürliche nicht allein in der Theorie, sondern auch in der Praxis. Von den mir augenblicklich zur Einsicht vorliegenden Karten von Afrika greife ich nur zwei heraus, die Sechs-Blatt-Karte aus Stieler's Handatlas mit dem $17^\circ 30'$ ö. L. als Mittelmeridian und die Karte von Afrika aus Sydow-Wagner's Schulatlas mit dem Mittelmeridian 25° ö. L. Die Differenz von $7^\circ 30'$ in der Verschiebung des Hauptpunktes ist schon grofs genug, um einen Einflufs auf das Durchschnittsresultat auszuüben. Die Skizzen Figur 2 und 3 sollen diese Behauptung unterstützen. Man vergleiche dieselben mit der in demselben Mafsstabe gezeichneten Skizze Hammer's[3]). Letztere hat zum Mittelmeridian den 20° ö. L., während jene den 10° bezw. 30° ö. L. als solchen aufweisen. Die Differenz für jede dieser Skizzen gegen die von Hammer beträgt demnach 10°. Eine „Verschiebung" des Erdteils um 10° nach O. bezw. W. ändert, was schon auf diesen kleinen Skizzen erkennbar ist, die Lage der Landflächen gegen die Linien gleicher 2ω ganz erheblich; die beiden oben erwähnten Karten, die eine „Verschiebung" von $7^\circ 30'$ aufweisen, werden in der Lage der Verzerrungslinien gegenüber den Landflächen demnach auch derartige Verschiedenheiten aufweisen, dafs ihre durchschnittlichen Maximalverzerrungen unter einander und gegen das Resultat für den 20° ö. L. als Mittelmeridian abweichen. Noch deutlicher wird dies, wenn man Fig. 2 und 3 unmittelbar mit einander vergleicht. Ein Unterschied von 20°

[1]) Zeitschr. Bd. XXIV S. 234. [2]) S. 237.

[3]) Zeitschr. Ges. f. Erdk. Bd. XXIV S. 232.

kommt meines Wissens in der Praxis nicht vor, doch lassen sich die Mittelmeridiane dieser Skizzen wohl als die äufsersten Grenzen annehmen, zwischen denen sich die angewandten Mittelmeridiane für Karten von Afrika in Sanson'scher Projektion in der Praxis bewegen können.

Dem Verfahren Hammer's, die durchschnittlichen Verzerrungen zu ermitteln und zu vergleichen und nach ihnen den Wert der Projektionen festzustellen, so interessant es auch an und für sich ist, möchte ich nur in besonderen Fällen eine absolute Bedeutung beilegen. Es sind dies diejenigen Fälle, wo Projektionen zum Vergleiche stehen, bei denen Haupt- (Mittel-) Punkte und Mittelmeridiane dieselben sind, die sich demgemäfs so übereinanderlegen lassen, dafs Hauptpunkte und Mittelmeridiane zusammenfallen. Solche Projektionen sind beispielsweise die Sanson'sche und die transversale, flächentreue Azimut-Projektion, oder eine Bonne'sche und eine schiefachsige Azimut-Projektion, die beide denselben Hauptpunkt haben. Bei solchen Projektionen ist in dem Hauptpunkte derjenige Punkt gegeben, an dem der Vergleich einsetzen kann. Derselbe ist ein Nullpunkt der Verzerrungen, von ihm nach den Rändern der Karte nehmen die Verzerrungen bei den verschiedenen Projektionen schneller oder langsamer zu, sie lassen sich, ich möchte sagen, punktweise verfolgen und vergleichen. Ein solcher fester Ausgangspunkt für den Vergleich fehlt aber den beiden Projektionen, die Hammer mit einander verglichen hat, und dieser Mangel, sowie die schon angeführten Gründe verleihen dem gewonnenen Endergebnis nur einen relativen Wert. Die bedeutende Überlegenheit seiner schiefachsigen Kegel-Projektion über die Sanson'sche wird aber dadurch keineswegs in Frage gestellt.

Nach diesen Bermerkungen, zu denen mir der schon erwähnte Aufsatz Hammer's Anlafs gegeben, komme ich zu der eigentlichen Aufgabe, die ebenfalls schon genannte transversale Kegel-Projektion für Afrika eingehender, als es bisher geschehen, zu besprechen.

Von Zoeppritz ist, wie bereits erwähnt worden ist, für Afrika eine transversale Kegel-Projektion vorgeschlagen, welche Flächentreue und die für diesen Fall kleinste Winkel- und Längen-Verzerrung besitzt. Wie das stets bei geographischen Projektionen der Fall ist, wird auch hier ein grofser Vorteil auf der einen Seite durch einen Nachteil auf der anderen erkauft. Der Flächentreue und kleinsten Verzerrung steht in diesem Falle ein auffälliges, absonderliches Aussehen gegenüber, auffällig und absonderlich im Vergleich mit den bisher gebräuchlichen Karten. Damit nämlich die Verzerrungen auf das geringste Mafs hinuntergedrückt werden, ist die Spitze des transversalen Kegels unmittelbar an die Westküste des Kontinentes gelegt; der Schlitz, der beim Ausbreiten des Kegelmantels in die Ebene entsteht, wird somit auf dem Kartenbilde innerhalb der Randlinie sichtbar, ein Umstand, der bei den normalen Kegel-Projektionen stets vermieden werden kann. Darauf hat Zoeppritz selbst schon hingewiesen. Ob nun diese Sichtbarkeit des Schlitzes und die damit verbundene Auseinanderzerrung des Guineagolfes in der That so schwerwiegender Natur sind, um diese Projektion von einer Anwendung auszuschliefsen, scheint zweifelhaft. Man steht heutzutage noch zu sehr unter dem Eindrucke, den die bisherigen Karten mit ihrer Symmetrie der Netzlinien, ihrem gleichmäfsigen, ich möchte sagen, schematischen Aussehen so lange ausgeübt haben und noch ausüben. Vielleicht erregt sogar die kreisförmige Begrenzung des flächentreuen, azimutalen Entwurfes Anstofs, da man bisher bei Abbildungen von Erdteilen und Ländern die Karte rechteckig zu begrenzen pflegte und runde Begrenzungen nur bei Darstellungen ganzer Halbkugeln zu sehen gewohnt ist. Den azimutalen Entwurf anders als kreisförmig zu begrenzen, heifst aber das Grundgesetz dieser Projektion völlig verkennen. Man wird sich bei Anwendung rationeller Projektionen daran gewöhnen müssen, auf die bisherige Symmetrie, auf das „Aussehen", kein allzu grofses Gewicht zu legen, wenn durch Vernachlässigung derselben wesentliche Vorteile bezüglich der Verzerrungsverhältnisse erzielt werden können.

Die Sichtbarkeit des Schlitzes und die Auseinanderzerrung des Guineagolfes haben Hammer bestimmt, die besprochene Kegel-Rumpf-Projektion vorzuschlagen, bei der durch Verlegung der Kegelspitze nach SW in den atlantischen Ozean der Schlitz auf der Karte nicht mehr sichtbar wird und die Auseinanderzerrung verschwindet. Wer aber am „Aussehen" Anstofs nimmt, wird ohne Zweifel den eigentümlichen Verlauf der Netzlinien an dieser Projektion beanstanden. Das „Aussehen" ist also bei beiden Projektionen ein von dem bisherigen abweichendes; die transversale hat aber noch immer im Verlaufe der Netzlinien eine Symmetrie, die an die der alten Projektionen stark erinnert. Ich meine daher, dafs nur der Wert der Projektionen bei der Auswahl entscheiden darf. Unter Festhaltung dieses Standpunktes ist die transversale Projektion der schiefachsigen vorzuziehen. Erstere liefert noch kleinere Verzerrungen als letztere, eine Folge der Wahl des Hauptpunktes bezw. der Kegelspitze. Während bei der schiefachsigen Projektion der gröfste Wert von $2\omega = 4^\circ\, 58'$ beträgt, erreicht er bei der transversalen in $2\omega = 4^\circ\, 8'$ das Maximum. Die durchschnittliche Maximalverzerrung ist für jene $2\omega_d = 3^\circ\, 22'$, für diese $2\omega_d = 2^\circ\, 4'$[1]).

[1]) Wiewohl ich soeben Bedenken gegen das Verfahren, die durchschnittlichen Maximal-Verzerrungen festzustellen und zu vergleichen, geäufsert habe, habe ich

Für diese transversale Kegel-Projektion hat Zoeppritz das 10°-Netz geliefert, indem er für dasselbe die Kartenazimute und die Mittabstände — letztere im Mafsstab 1 : 40 Mill. — berechnete. Für Karten gröfseren Mafsstabes, wie wir sie gegenwärtig von Afrika in ziemlich grofser Anzahl besitzen, genügt das 10°-Netz nicht; ein Kartograph, der die Projektion hätte anwenden wollen, hätte sich zunächst der ziemlich langwierigen Arbeit unterziehen müssen, die Erweiterung zum 5°-Netze zu machen. Dieser Umstand, sowie auch der, dafs Zoeppritz die Theorie der Projektion sehr kurz behandelt hat, — er setzt sie anscheinend als völlig bekannt voraus — sind wohl neben dem „Aussehen" die Ver-

---

trotzdem dasselbe in diesem Falle angewendet. Einerseits bestimmte mich dazu der Wunsch, das Verfahren durch praktische Anwendung kennen zu lernen, andererseits wollte ich dem nun einmal vorliegenden Resultate Hammer's ein auf demselben Wege gewonnenes gegenüberstellen können. Die Durchschnittswerte für diese beiden Projektionen können schon eher als absolute betrachtet werden, da „Verschiebungen" wie bei der Sanson'schen fast ganz ausgeschlossen sind. Die Untersuchung, die sich auch auf die schiefachsige Projektion erstreckte, ist an Entwürfen im Mafsstab 1 : 30 M. ausgeführt worden. Während ich für diese die Linien gleicher 2ω nach Hammer zog, sind auf dem transversalen Entwurfe dieselben in Abständen von je 5° ausgezogen worden; aufserdem noch die Linie δ_0. Da bei echten konischen Projektionen die Linien gleicher 2ω (Horizontal)-Kreise sind, so läfst sich die Fläche auch ohne Planimeter berechnen. Die Streifen zwischen je zwei Linien gleicher Verzerrung können, da sie die Differenzen zweier Sektoren sind, mit Hilfe der zugehörigen Centriwinkel einfach berechnet werden. Die seitlichen Begrenzungslinien müssen in diesem Falle durch Hauptkreisbilder (Radien) ersetzt werden. Die von ihnen eingeschlossenen Winkel werden mit dem Transporteur genügend genau gemessen. Die Genauigkeit dieses Verfahrens läfst sich daran erkennen, dafs mein derartig gewonnenes Endresultat für die schiefachsige Projektion $2\omega_d = 3° 20'$ ergab gegen Hammer's $2\omega_d = 3° 22'$. Ein Resultat, dem ich noch gröfsere Bedeutung beilege, erhält man, wenn man sich nicht auf die Messung der darzustellenden Land- und angrenzenden Meeresflächen beschränkt, sondern auf dieselbe Weise die gesamte Fläche, welche sich durch jede dieser Projektionen abbilden läfst, untersucht, d. h. einerseits die ganze Kalotte von 43° Halbmesser, die sich als Sektor mit einem Centriwinkel von 335° darstellt, andererseits die Zone von 47° Breite, die als Stück eines Kreisringes mit einem Zentriwinkel von 234° abgebildet wird. Für diesen Fall, wo sich die Projektionen als solche gegenüber stehen, ist bei der transversalen $2\omega_d = 2{,}09° = 2° 6'$, bei der schiefachsigen $2\omega_d = 3{,}02° = 3° 1'$. Erstere ist also noch immer überlegen und das Verhältnis würde sich nur unwesentlich ändern, wenn die Kalotte von 43° auf 47° Halbmesser, bezw. die Zone von 47° auf 43° Breite gebracht würde. Ein Blick auf Fig. 1 zeigt, dafs die Sanson'sche Projektion, auf diese Weise für die Fläche vom Äquator bis etwa zum 45° n. Br. im Bereiche eines Quadranten untersucht, ein Durchschnittsresultat liefern mufs, das ihrem wirklichen Werte mehr entsprechen würde.

anlassung gewesen, dafs sie noch nicht in der Praxis verwertet worden ist. Dieses Versäumnis will ich nun nachzuholen suchen und damit gleich den Versuch verbinden, die verdienstvolle Arbeit meines früh verstorbenen Lehrers vor einer unverdienten Nichtbeachtung zu bewahren.

Da seit dem Jahre 1884, in welchem die erwähnte Arbeit veröffentlicht worden ist, inzwischen die Werke von Herz, Tissot-Hammer und Hammer erschienen sind, so glaube ich der Arbeit überhoben zu sein, die Theorie *ab ovo* zu entwickeln, und will mich mehr mit dem, was für die Praxis von Wichtigkeit ist, beschäftigen, am Schlusse dieser Zeilen aber die Tabelle für das 5°-Netz beifügen, um so eine Verwertung der Projektion auch für Karten gröfseren Mafsstabes zu ermöglichen. Da Zoeppritz bereits eine Karte von Afrika in dieser Projektion in dem genügend grofsen Mafsstabe von 1 : 40 Mill. veröffentlicht hat, wird für die nachfolgenden Ausführungen eine Skizze (1 : 90 Mill.) genügen.

Die Kegelspitze bezw. der Hauptpunkt der Projektion liegt auf dem Äquator auf dem 9° ö. L. in der Nähe der Mündung des Gabun. Ein um diesen Punkt mit 43° sphärischem Halbmesser beschriebener Kleinkreis schliefst ganz Afrika, Teile des südlichen Europa, Syriens, Arabiens ein. Die kleinste Zenitdistanz $\delta' $ ist $= 0°$, die gröfste $\delta'' = 43°$. Für die flächentreue Kegel-Projektion mit kleinster Winkelverzerrung ergiebt sich somit für die Konstante n, mit der die Winkel, welche die Hauptkreise (normal die Meridiane) im Hauptpunkte (normal im Pole) einschliefsen, multipliziert werden müssen, der Wert $n = \cos\frac{\delta'}{2}\cos\frac{\delta''}{2}$; da $\delta' = 0°$, $\frac{\delta'}{2}$ ebenfalls $= 0°$ und $\cos 0° = 1$ ist, so wird $n = \cos\frac{\delta''}{2} = \cos 21° 30'$; $\lg\cos 21° 30' = 1{,}968\,678$[1]).

Die Winkel, unter denen sich die Hauptkreise in Wirklichkeit in dem genannten Hauptpunkte schneiden, erhält man, wenn der Hauptpunkt auf dem Äquator liegt, φ_0 also $= 0°$ ist, aus der Gleichung

$$\operatorname{tg} z = \sin\frac{1}{4}\lambda \operatorname{ctg}\varphi,$$

in der λ die Länge, vom Hauptpunkte gezählt, ist. Die ebenfalls erforderlichen sphärischen Entfernungen der einzelnen Netzpunkte, δ, liefert die Gleichung

$$\cos\delta = \cos\lambda\cos\varphi.$$

Die Berechnung dieser Werte ist aber nicht nötig, da dieselben in

[1]) Wohl aus Versehen hat Zoeppritz statt $\log n$ den Werth für $\log\sqrt{n} = 1{,}984\,34$ angegeben.

Hammer's Tabelle für $\varphi_0 = 0°$ vorhanden sind und sich durch große Genauigkeit und Richtigkeit auszeichnen[1]).

Zunächst werden die Längen vom Hauptpunkt, der zugleich Kartenmittelpunkt ist, aus nach rechts und links gezählt. Die der genannten Tafel entnommenen Werte für z, — daselbst mit α bezeichnet —, werden mit $n = \cos\frac{\delta''}{2}$ multipliziert: $nz = z'$.

Für die flächentreue Azimut-Projektion (Lambert) ist $n = 1$, d. h. die Hauptkreise (normal: Meridiane) schneiden sich unter ihren wahren Winkeln. Soll nun die Kegel-Projektion flächentreu bleiben, bei der die Winkel der Hauptkreise am Hauptpunkt (bezw. der Meridiane am Pol) nicht mehr $= z$, sondern $= nz = z'$ sind, so müssen die Quadrate der Horizontal- (norm. Parallel-) Kreishalbmesser der Azimut-Projektion im Verhältnis $1 : n$ vergröfsert werden. Das Halbmessergesetz der letzteren in Funktion von δ ist

$$\varrho = 2 \sin\frac{\delta}{2}.$$

Für die flächentreue Kegel-Projektion erhält es somit die Form

$$\varrho' = \frac{2}{\sqrt{n}} \sin\frac{\delta}{2}.$$

Wenn $\frac{1}{M}$ der gewählte Mafsstab der Karte und R der Erdhalbmesser ist, so ist obige Formel noch mit $\frac{R}{M}$ zu multiplizieren; also

$$\varrho' = \frac{2R}{M\sqrt{n}} \sin\frac{\delta}{2} = \frac{2R}{M\sqrt{\cos\frac{\delta''}{2}}} \sin\frac{\delta}{2}.$$

Wird der Kegelmantel, auf den nach obigen Gesetzen die 5°-Punkte des Kugelnetzes übertragen sind, aufgeschnitten und in die Ebene ausgebreitet, so erhält der Mantel eine Schlitzöffnung von $360° - n\,360° = 360°\,(1-n) = 25°\,2'\,48''$. Der Schnitt wird auf dem Westzweige des Äquators geführt, so dafs die weniger wichtige Fläche des atlantischen Ozeans geteilt wird. Der Kartennullmeridian erscheint nicht mehr geradlinig, sondern der Nord- und Südzweig desselben bilden im Hauptpunkte einen Winkel von $167°\,28'\,36''$, während der in zwei Linien ge-

[1]) Innerhalb der Grenzen $\varphi = 45°$ und $\lambda = 45°$ habe ich sie selbst nochmals durchgerechnet und nur Differenzen im Betrage von $1''$ gefunden, die nicht ins Gewicht fallen. S Hammer, Karten-Pr. (1) $\varphi_0 = 0°$.

spaltene Westzweig des Äquators den schon genannten Winkel von $25^\circ\ 2'\ 48''$ einschliefst. Für die Auftragung der Netzpunkte, die in den Worten z' und ϱ' gegeben sind, empfiehlt sich, der Genauigkeit wegen, die Umwandlung dieser Werte in rechtwinklige Koordinaten. Zum Anfangspunkt derselben wählt man zweckmässig den Hauptpunkt, zur Ordinatenachse $= y$ den Kartennullmeridian. Die Werte der rechtwinkligen Koordinaten werden erhalten aus den Gleichungen

$$x = \varrho' \sin z', y = \varrho' \cos z'.$$

Die Karte werde auf dem Zeichenpapier so gestellt, dafs der Ostzweig des Äquators mit dem oberen und unteren Rande des Papiers bezw. Reifsbrettes parallel laufe. Um den Mittelpunkt des Zeichenbogens wird mit dem $\delta = 43^\circ$ entsprechenden Radius ϱ' ein Kreis beschrieben, derselbe durch zwei zu einander lotrechte Durchmesser so geteilt, dafs der eine derselben die Lage des Ostzweiges des Äquators erhält. Der andere wird nun für einen Augenblick x-Achse und an ihm die Werte für x aus Spalte (Breite = o), sowie die entsprechenden Werte + y als Abscissen angetragen. Es geschieht dies auf beiden Seiten des Hauptpunktes. Durch Verbindung der gewonnenen Punkte, die in einer Geraden liegen, mit dem Hauptpunkte erhält man den Nord- und Südzweig des Kartennullmeridians. Es genügt jedoch, nur einen Punkt, z. B. den äufsersten, aufzutragen, da dadurch bereits die Lage des Nullmeridians festgelegt ist. Nunmehr treten die beiden Zweige desselben in die Stelle der y-Achse. Um die Abscissen x rechtwinklig zur Ordinatenachse antragen zu können, benötigt man einer Reifsschiene, die aufser dem festen Backen noch einen verstellbaren besitzt. Dieselbe wird zuerst an den einen Zweig des Nullmeridians, etwa den nördlichen, genau angelegt, der bewegliche Backen an der unteren Kante des Reifsbrettes, das natürlich genau rechtwinklig sein mufs, eingestellt und festgeschraubt. Wird die Reifsschiene nunmehr an der linken Seite des Brettes angelegt, so steht sie und alle längs ihr gezogenen Linien senkrecht zu dem genannten Zweige des Nullmeridians. Die Werte x haben doppelte Vorzeichen; daher können Ost- und Westhälfte nördlich bezw. südlich vom Äquator gleichzeitig aufgetragen werden. Ist so z. B. die Nordhälfte aufgetragen, dann wird die Reifsschiene in derselben Weise am Südzweig eingestellt. Denn auch die Werte y haben doppelte Vorzeichen.

Als Hauptpunkt ist der Schnittpunkt des Äquators mit dem 9° ö. L. angenommen worden. Wäre der Schnittpunkt des 10° ö. L. gewählt worden, so würde dadurch eine Zerschneidung einer, wenn auch nur kleinen Landfläche eintreten. Die Azimute z und sphärischen Entfernungen δ werden aber nur in 5°-Intervallen gegeben. Das Netz in seiner bisherigen Form enthält also die Meridiane 9° 14° u. s. w. nach Osten und 4° 1° w. v. G. u. s. w. nach W. In der Praxis werden aber nur die durch 5 bezw. 10 teilbaren Meridiane ausgezogen. Um diese zu erhalten, mufs man die zwischen je zwei Meridianlinien liegenden Stücke der Parallelkreise in 5 bezw. 10 gleiche Teile — das richtet sich nach dem Mafsstabe der Karte — teilen und die unmittelbar rechts von einem Meridian gelegenen Punkte wiederum verbinden, um so das übliche Gradnetz zu erhalten. Am besten verbindet man diese Arbeit mit der des Überziehens der Karte mit Grad- oder Halbgradmaschen behufs Einzeichnung der Situation.

Die Verzerrungsverhältnisse dieser Projektion lassen sich einfach und leicht ermitteln. Die Linien gleicher Verzerrung, die bei einer normalen, echten Kegel-Projektion mit den Parallelkreisbildern zusammenfallen, sind hier die konzentrischen Horizontalkreisbilder, deren Mittelpunkt der Hauptpunkt ist. Die Hauptkreise sind gerade Linien, die durch den Hauptpunkt gehen; der Äquator und der Kartennullmeridian sind hier solche Hauptkreise. Die Indikatrixachsen a und b liegen für jeden Punkt eines Horizontalkreises in der Richtung des zugehörigen Hauptkreises (Radius) und der Tangente des Punktes. Unter den Horizontalkreisen giebt es einen Kreis δ_0, für den die Gleichung gilt:

$$\cos \frac{\delta_0}{2} = \sqrt{n} = \sqrt{\cos 21^\circ 30'}$$

$$\frac{\delta_0}{2} = 15^\circ 17' 42'', \ \delta_0 = 30^\circ 35' 24''.$$

Auf demselben finden keine Winkel- und Längenverzerrungen statt; von diesem Kreise aus nehmen dieselben aber mit wachsender Entfernung zu und erreichen das Maximum auf den Kreisen δ' und δ'', d. h. im Hauptpunkte und auf dem Horizontalgrenzkreis. In diesem ist $2\omega = 4^\circ 8'$, $a = 1{,}036$, $b = 0{,}964$.

Die Richtung der beiden Achsen a und b hängt davon ab, ob $\delta \gtrless \delta_0$ ist und läfst sich ebenfalls leicht feststellen. Ist für einen beliebigen Punkt der Karte das Längenverhältnis im Meridian- bezw. hier im Hauptkreise $= h$, das im Parallel- bezw. hier Horizontalkreise $= k$, so ergiebt sich

$$h = \frac{1}{\sqrt{n}} \cos \frac{\delta}{2}, \ k = \sqrt{n} \sec \frac{\delta}{2},$$

für unseren besonderen Fall sonach, da $\sqrt{n} = \cos \frac{\delta_0}{2}$ ist,

$$h = \frac{\cos\frac{\delta}{2}}{\cos\frac{\delta_0}{2}}, \quad k = \frac{\cos\frac{\delta_0}{2}}{\cos\frac{\delta}{2}}.$$

Dann wird a der gröfsere, b der kleinere dieser Werte[1]).

Ist nun $\delta < \delta_0$, so ist $\cos\frac{\delta}{2} > \cos\frac{\delta_0}{2}$, somit auch $h > k$, d. h. $h = a$; die grofse Achse liegt in diesem Falle in der Richtung des Hauptkreises (Radius), die kleine in der Richtung der Tangente. Ist $\delta > \delta_0$, so ist $\cos\frac{\delta}{2} < \cos\frac{\delta_0}{2}$; demnach ist $h < k$, d. h. $k = a$: die grofse Achse liegt also in der Richtung der Tangente, die kleine in der Richtung des Radius. Die Werte für 2ω lassen sich aus der Gleichung $\sin\omega = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}$ ermitteln; doch giebt es für diese Projektion auch Formeln, die es gestatten, die Werte 2ω ohne vorherige Berechnung der Indikatrixachsen zu berechnen.[2])

Auf der beigefügten Skizze Fig. 4, die ebenso wie Fig. 1—3, lediglich als Skizze anzusehen ist, sind die Horizontalkreise in Abständen von je 10° ausgezogen, die Werte für 2ω in abgerundeten Zahlen beigeschrieben, die Richtung und Lage der Achsen a und b angedeutet; auch der Kreis δ_0 ist eingetragen. Die am Schlusse beigefügte Tafel der Verzerrungen enthält die bezüglichen Werte von 5° zu 5°. Für ein eingehendes Studium der Projektion steht die von Zoeppritz gezeichnete Karte zur Verfügung.

So hoffe ich denn durch die vorstehende Abhandlung, wie ich bereits anzudeuten Gelegenheit hatte, die Arbeit meines früh verstorbenen Lehrers wieder in Erinnerung zu bringen, und durch die beigegebenen Tabellen eine Verwertung der von ihm zuerst besprochenen Projektion für die Praxis zu ermöglichen und zu erleichtern. Den praktischen Kartographen bleibt es nunmehr, wenn sie die Sanson'sche Projektion für Afrika aufgeben wollen, überlassen, zwischen der transversalen und schiefachsigen konischen Projektion zu wählen.

---

[1]) Ich benutze die Gelegenheit, um hier auf eine kleine Verwechselung bei Tissot-Hammer aufmerksam zu machen. S. 139 § 85: die Werte von a werden hier: $\sqrt{n}\sec\frac{\delta'}{2}$, $\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\frac{\delta''}{2}$, statt dessen mufs es heifsen $\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\frac{\delta'}{2}$, $\sqrt{n}\sec\frac{\delta''}{2}$.

[2]) Tissot-Hammer S. 138, § 84.

I. Tafel der Kartenazimute z' und der Mittabstände ϱ' für den Kugelhalbmesser = 100.

$\lambda =$ $\beta =$		0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°
0°	z'	0° 0′ 0″	83° 44′ 18″	83° 44′ 18″	83° 44′ 18″	83° 44′ 18″	83° 44′ 18″	83° 44′ 18″	83° 44′ 18″	83° 44′ 18″	83° 44′ 18″
	ϱ'	0,00	9,04	18,07	27,06	36,00	44,88	53,66	62,35	70,92	79,35
5°	z'	0° 0′ 0″	41° 46′ 4″	58° 51′ 29″	66° 21′ 37″	70° 23′ 15″	72° 51′ 20″	74° 30′ 11″	75° 40′ 4″	76° 31′ 33″	77° 10′ 33″
	ϱ'	9,04	12,77	20,18	28,49	37,06	45,69	54,32	62,88	71,36	79,71
10°	z'	0° 0′ 0″	24° 28′ 22″	41° 27′ 38″	51° 51′ 22″	58° 21′ 44″	62° 40′ 0″	65° 39′ 48″	67° 50′ 18″	69° 27′ 54″	70° 42′ 36″
	ϱ'	18,07	20,18	25,46	32,37	40,04	48,06	56,24	64,46	72,66	80,79
15°	z'	0° 0′ 0″	16° 45′ 51″	30° 39′ 11″	40° 56′ 44″	48° 18′ 38″	53° 36′ 54″	57° 30′ 44″	60° 26′ 36″	62° 41′ 0″	64° 25′ 44″
	ϱ'	27,06	28,49	32,37	37,95	44,55	51,75	59,28	66,99	74,77	82,55
20°	z'	0° 0′ 0″	12° 31′ 46″	23° 43′ 54″	32° 57′ 8″	40° 12′ 44″	45° 50′ 11″	50° 11′ 37″	53° 35′ 40″	56° 16′ 17″	58° 23′ 47″
	ϱ'	36,00	37,06	40,04	44,55	50,15	56,47	63,27	70,35	77,60	84,93
25°	z'	0° 0′ 0″	9° 51′ 0″	19° 0′ 12″	27° 0′ 40″	33° 44′ 11″	39° 15′ 3″	43° 43′ 40″	47° 20′ 54″	50° 16′ 51″	52° 39′ 30″
	ϱ'	44,88	45,69	48,06	51,75	56,47	61,96	68,00	74,41	81,07	87,86
30°	z'	0° 0′ 0″	7° 59′ 14″	15° 34′ 25″	22° 28′ 0″	28° 30′ 36″	33° 41′ 5″	38° 2′ 52″	41° 41′ 40″	44° 43′ 32″	47° 14′ 9″
	ϱ'	53,66	54,32	56,24	59,28	63,27	68,00	71,64	79,04	85,06	91,27
35°	z'	0° 0′ 0″	6° 36′ 5″	12° 57′ 32″	18° 52′ 24″	24° 13′ 15″	28° 56′ 55″	33° 3′ 26″	36° 35′ 12″	39° 35′ 27″	42° 8′ 0″
	ϱ'	62,35	62,88	64,46	66,99	70,35	74,41	79,04	84,09	89,48	95,10
40°	z'	0° 0′ 0″	5° 31′ 2″	10° 52′ 42″	15° 56′ 58″	20° 38′ 0″	24° 52′ 24″	28° 38′ 51″	31° 57′ 52″	34° 50′ 51″	37° 19′ 47″
	ϱ'	70,92	71,36	72,66	74,77	77,60	81,07	85,06	89,48	94,24	99,26
45°	z'	0° 0′ 0″	4° 38′ 4″	9° 9′ 56″	13° 30′ 4″	17° 34′ 7″	21° 18′ 56″	24° 43′ 0″	27° 45′ 41″	30° 27′ 18″	32° 48′ 38″
	ϱ'	79,35	79,71	80,79	82,55	84,93	87,86	91,27	95,10	99,26	103,67

II. Tafel der rechtwinkligen Koordinaten im Mafsstabe 1 : 10 000 000.

Längen in mm. Nord- und Südzweig des gebrochenen Kartennullmeridians sind y-Achsen. Alle Werte x und y haben die Vorzeichen ±.

$\lambda =$ / $\beta =$		0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°
0°	x	0,00	57,27	114,43	171,37	227,98	284,17	339,80	394,80	449,04	502,43
	y	0,00	6,28	12,55	18,80	25,01	31,18	37,28	43,32	49,27	55,13
5°	x	0,00	54,22	110,01	166,23	222,35	278,15	333,44	388,10	442,10	495,10
	y	57,61	60,71	66,47	72,76	79,23	85,80	92,45	99,16	105,91	112,70
10°	x	0,00	53,25	107,38	162,17	217,15	271,97	326,40	380,27	433,43	485,73
	y	115,11	116,98	121,54	127,36	133,79	140,57	147,63	154,89	162,35	170,00
15°	x	0,00	52,34	105,13	158,41	211,92	265,37	318,52	371,18	423,15	474,31
	y	172,40	173,74	177,39	182,58	188,74	195,54	202,82	210,49	218,56	226,96
20°	x	0,00	51,21	102,65	154,36	206,22	258,04	309,59	360,68	411,12	460,76
	y	229,35	230,43	233,49	238,12	243,93	250,62	258,00	265,97	274,48	283,50
25°	x	0,00	49,79	99,69	149,70	199,78	249,73	299,42	348,62	397,20	444,97
	y	285,87	286,79	289,47	293,67	299,14	305,65	313,02	321,16	329,99	339,49
30°	x	0,00	48,08	96,18	144,30	192,36	240,27	287,80	334,87	381,29	426,89
	y	341,84	342,66	345,08	348,95	354,13	360,44	367,73	375,93	384,96	394,80
35°	x	0,00	46,05	92,08	138,03	183,85	229,43	274,62	319,28	363,26	406,41
	y	397,16	397,92	400,15	403,77	408,69	414,78	421,95	430,13	439,25	449,26
40°	x	0,00	43,70	87,34	130,87	174,19	217,20	259,76	301,76	343,02	383,41
	y	451,73	452,43	454,51	457,93	462,62	468,50	475,50	483,54	492,66	502 75
45°	x	0,00	41,02	81,97	122,76	163,29	203,45	243,13	282,18	320,47	357,84
	y	505,44	506,10	508,06	511,29	515,73	521,40	528,20	536,07	545,03	555,04

III. Tafel der Verzerrungen.

δ	2ω	a	b	S = ab
$\delta' = 0°$	4° 8'	1,037	0,965	1,00
5°	4° 2'	1,036	0,966	1,00
10°	3° 42'	1,033	0,968	1,00
15°	3° 9'	1,028	0,973	1,00
20°	2° 23'	1,021	0,979	1,00
25°	1° 23'	1,012	0,988	1,00
30°	0° 10'	1,001	0,999	1,00
$\delta_0 = 30° 36'$	0° 0'	1,000	1,000	1,00
35°	1° 18'	1,04	0,989	1,00
40°	3° 0'	1,026	0,974	1,00
$\delta'' = 43°$	4° 8'	1,037	0,965	1,00

Bemerkungen zu den vorstehenden Tafeln:

Tafel I enthält die Werte $z' = nz$ und $\varrho' = \frac{2}{\sqrt{n}} \sin \frac{\delta}{2}$; für die Werte ϱ' ist der Kugelhalbmesser = 100 angenommen; die Tafel kann somit zur Berechnung von Netzen jedes beliebigen Mafsstabes benutzt werden.

Tafel II enthält die Werte der rechtwinkligen Koordinaten für den Mafsstab 1:10 Mill. Auch diese Tafel eignet sich dazu, dafs die Werte für Netze anderer, besonders kleinerer, Mafsstäbe aus ihr berechnet werden. Ursprung des Koordinatensystems ist der Hauptpunkt; der Nord- und Südzweig des gebrochenen Kartennullmeridians, der sowohl auf Zoeppritz' Karte als auch auf vorstehender Skizze punktiert eingetragen ist, bildet die y-Achse. Sämtliche Werte für x und y, die in Millimetern angegeben sind, haben doppelte Vorzeichen, die deshalb nicht besonders beigeschrieben sind.

Tafel III enthält die Verzerrungsverhältnisse der Projektion, und zwar für Horizontalkreise in Abständen von 5° zu 5°, aufserdem auch noch die Werte für den Horizontalkreis δ_0. Die Werte 2ω sind au Minuten abgerundet, die für a und b auf der dritten Dezimale.

Sämmtliche Rechnungen sind mit sechsstelligen Logarithmen ausgeführt worden.