Naturwissenschaftliche Rundschau.

Wöchentliche Berichte

über die

Fortschritte auf dem Gesamtgebiete der Naturwissenschaften.

XXI. Jahrg. 29. November 1906. Nr. 48.

Th. Lohnstein. Zur Theorie des Abtropfens mit besonderer Rücksicht auf die Bestimmungen der Kapillaritätskonstanten durch Tropfversuche. (Ann. der Phys. 1906, F. 4, Bd. 20, S. 237—268 und 606—618.)

Das Phänomen der Tropfenbildung einer Flüssigkeit bei ihrem Austritt aus einer engen Röhre ist schon so lange als eine Erscheinung der Kapillarität erkannt und seither vielfach zur direkten Ermittelung der Kapillaritätskonstanten von Flüssigkeiten benutzt worden, daß man die den Vorgang des Abtropfens beschreibenden Vorstellungen längst als gesichert und abgeschlossen betrachten möchte. Und doch ist dies, wie die sehr interessante vorliegende Untersuchung zeigt, merkwürdigerweise nicht der Fall. Eine früher nicht beachtete Andeutung hierfür lag schon in der Tatsache, daß die aus Tropfversuchen gewonnenen Kapillaritätswerte gewisse systematische Abweichungen von den nach den anderen bekannten Methoden erhaltenen zeigten, die sich nicht einwandfrei erklären ließen.

Die Berechnung jener Kapillaritätswerte stützte sich auf die Vorstellung, daß das Gewicht eines an einer kreisförmigen Öffnung vom Radius r sich bildenden Tropfens durch $2r\pi.\alpha$ gegeben sei, wenn α die Kapillaritätskonstante der benutzten Flüssigkeit ist. Wie nämlich das bekannte Gesetz der Kapillarröhren, das sich sowohl experimentell als auch aus der Laplace-Gaussschen Kapillaritätslehre ergibt, zeigt, wird von der Längeneinheit der Berührungslinie einer völlig benetzten, vertikal gerichteten Körperoberfläche mit einer Flüssigkeit ein Flüssigkeitsquantum getragen, das für eine gegebene Flüssigkeit konstant ist und als Kapillaritätskonstante α bezeichnet wird. Dieses für beliebige vertikale benetzte Flächen durch die Beobachtung streng bestätigte Theorem hat man auf das Phänomen des Abtropfens übertragen mit der ohne Rücksicht auf die Tropfenform gemachten Annahme, daß ein Tropfen mit einer Kreisfläche vom Radius r als Basis notwendig das Volumen $2r\pi\frac{\alpha}{\sigma}$ und damit das Gewicht $2r\pi\alpha$ haben müsse. Es blieb außerdem unberücksichtigt, daß selbst, wenn das Gewicht des hängenden Tropfens, auf den diese Überlegung sich doch nur beziehen kann, durch den genannten Ausdruck richtig dargestellt wäre, das Gewicht des abfallenden Tropfens, der allein für die Messung maßgebend ist, kleiner sein müßte, da stets ein Teil der Flüssigkeit, den wir nach Traube Tropfenmeniskus nennen wollen, an der Röhrenmündung haften bleibt. Darauf ist zuerst von Traube im Jahre 1886 deutlich hingewiesen worden, der den Zusammenhang der Tropfengröße mit der Kapillaritätskonstante zum Gegenstand besonders eingehender Untersuchung gemacht hat, ohne aber einen analytischen Ausdruck für diesen Zusammenhang aufzustellen.

Die Möglichkeit der Gewinnung eines solchen Ausdrucks knüpft sich an die Beantwortung der folgenden Hauptfragen:

1. Welches ist die Abhängigkeit des Gewichts eines hängenden Tropfens vom Radius der Ausflußöffnung?
2. Wodurch ist die Bedingung des Tropfenfalles gegeben?
3. Welches ist das Verhältnis der sich abtrennenden Flüssigkeitsmasse, d. h. der Masse des fallenden Tropfens, zu der unmittelbar vor dem Tropfenfall an der Mündung befindlichen Gesamtmasse des hängenden Tropfens?

Als Resultat der auf die Differentialgleichung der Tropfenoberfläche gestützten theoretischen Behandlung dieser Fragen findet der Verf. für das Gewicht des hängenden Tropfens den Ausdruck

$$2r\pi\alpha\left(\sin\vartheta + \frac{r\left(y_0 - \dfrac{a^2}{\varrho_0}\right)}{a^2}\right),$$

worin ϑ den Winkel zwischen der Tropfenoberfläche am Röhrenrand und der Horizontalen, r den Radius der Ausflußöffnung, ϱ_0 den Krümmungsradius der Oberfläche im Tropfenscheitel, y_0 die Höhe des Tropfens darstellt und wo die Größe a^2 nach der bekannten Relation $\alpha = {}^1/_2\, a^2\sigma$ durch die Kapillaritätskonstante bestimmt ist. Das Tropfengewicht zeigt sich danach abhängig nicht nur von der Kapillaritätskonstanten und der Weite der Ausflußöffnung, wie früher durchweg angenommen wurde, sondern auch von Größen, welche die Tropfenform bestimmen. Da dieselben aber durch die Beobachtung im allgemeinen nicht direkt ermittelbar sind und der Wert des Klammerausdruckes sich von vornherein nicht leicht übersehen läßt, hat der Verf. eine Umformung vorgenommen und gezeigt, daß sich die Klammer durch $f_m\left(\frac{r}{a}\right)$ be-

zeichnen läßt, wo f_m einen von $\frac{r}{a}$ abhängigen Ausdruck bedeutet, der sich analytisch nicht darstellen läßt, der aber durch Einsetzen beliebiger Werte für $\frac{r}{a}$ zahlenmäßig berechnet werden kann.

Was zunächst die Änderung des Tropfengewichts mit zunehmender Ausbildung des Tropfens an einer kreisförmigen Öffnung von bestimmtem Radius r betrifft, so findet sich, daß der Wert von $f_m\left(\frac{r}{a}\right)$ mit wachsender Tropfengröße zunimmt und für einen bestimmten Krümmungsradius ein Maximum erreicht. Da in diesem Falle auch gleichzeitig das durch $2r\pi\alpha \cdot f_m\left(\frac{r}{a}\right)$ bezeichnete Tropfengewicht einen Grenzwert annimmt, weil die Änderung des Gewichts bei konstantem r nur die Folge einer Änderung von $f_m\left(\frac{r}{a}\right)$ ist, so stellt das Erreichen dieses Wertes die oben unter 2. gesuchte Bedingung für das Abfallen des Tropfens her; der Tropfen fällt ab, wenn bei stetig sich ändernder Krümmung seiner Oberfläche das Gewicht desselben ein Maximum erreicht hat. Die Größe dieses Maximums ist nun wiederum abhängig von der Weite der Ausflußöffnung, wie seine Berechnung für sehr verschiedene Werte von $\frac{r}{a}$ zeigt. Der Verf. hat dieselbe ausgeführt und in der zweiten Kolonne der folgenden Tabelle die für die nebenstehenden Werte von $\frac{r}{a}$ der ersten Kolonne erhaltenen Maximalwerte von $f_m\left(\frac{r}{a}\right)$ zusammengestellt. Sie ergeben, mit der Größe $2r\pi\alpha$ multipliziert, das Gewicht des hängenden Tropfens unmittelbar vor dem Abfallen und enthalten damit die Lösung der ersten oben gestellten Frage.

So bleibt noch die Beantwortung der letzten Frage, welche den Übergang vom hängenden zum fallenden Tropfen ermöglichen soll. Der Verf. nimmt an, daß sich der das Maximalvolumen darbietende Tropfen in fallenden Tropfen und hängenbleibenden Tropfenmeniskus in der Weise teilt, daß der am Rohrrande befindliche Endteil der Meridiankurve des Tropfenmeniskus annähernd die gleiche Neigung gegen die Horizontale behält wie der Endteil der Meridiankurve des hängenden Tropfens unmittelbar vor dem Abreißen. Wird dann das Gewicht des hängenbleibenden Teiles durch $2r\pi\alpha . V$ ausgedrückt, so läßt sich auf Grund dieser Annahme V für verschiedene Werte des $\frac{r}{a}$ in ähnlicher Weise berechnen wie f_m; die erhaltenen Resultate enthält die dritte Kolonne der Tabelle. In der vierten Kolonne schließlich findet sich die Differenz $f = f_m - V$, welche sich jetzt auf den abfallenden Tropfen bezieht und, mit $2r\pi\alpha$ multipliziert, direkt das Gewicht des fallenden Tropfens angibt. Wir lassen die vom Verf. gegebene Tabelle mit einiger Kürzung folgen:

$\frac{r}{a}$	$f_m\left(\frac{r}{a}\right)$	V	$f = f_m - V$
0,0	1,000	0,000	1,000
0,1	0,812	0,007	0,805
0,2	0,769	0,028	0,741
0,4	0,769	0,090	0,679
0,6	0,807	0,164	0,643
0,8	0,864	0,235	0,629
1,0	0,924	0,304	0,620
1,2	0,982	0,364	0,618
1,5	1,021	0,383	0,638
1,8	1,040	0,368	0,635
2,0	1,013	0,313	0,700
2,2	0,960	0,102	0,858
2,273	0,933	0,000	0,933

Diese Zahlenwerte, welche das Phänomen der Tropfenbildung endgültig beschreiben, lehren zunächst, daß das Gewicht eines fallenden Tropfens nicht durch die ältere Formel $2r\pi\alpha$ dargestellt werden darf, sondern daß es in allen Fällen kleiner ist, daß aber der Faktor $f\left(\frac{r}{a}\right)$, mit dem der ältere Wert zu multiplizieren ist, deutlichen Schwankungen unterworfen ist, die von der Weite der Ausflußöffnung abhängen. Der größte Wert dieser Weite, bei der noch Tropfen sich bilden können, ist 2,273, ausgedrückt mit a als Einheit, und das hieraus resultierende Maximalgewicht eines Tropfens von der Kapillaritätskonstante α und der Dichte σ ergibt sich zu $18,83 \frac{\alpha^{3/2}}{\sigma^{1/2}}$. Danach wäre z. B. der größte durch Abtropfen herstellbare Wassertropfen 0,395 g schwer. Die Tabelle lehrt weiter, daß die älteren Beobachtungen, in denen die Kapillaritätskonstanten verschiedener Flüssigkeiten einfach den Gewichten der von Röhren gleichen Durchmessers abfallenden Tropfen dieser Flüssigkeiten proportional gesetzt wurden, zu unrichtigen Resultaten führen mußten, da für das Gewicht nicht nur r, sondern gleichzeitig a maßgebend ist.

In all diesen Darlegungen ist nun der Tropfen als ruhend angenommen und eine Störung seiner Form durch äußere Kräfte ausgeschlossen worden. In der Praxis ist dies streng genommen nie der Fall, da ein Tropfen sich im allgemeinen durch Zufluß bildet, wodurch ein Einfluß der lebendigen Kraft der Flüssigkeitsteilchen auf die Gestaltung der Tropfenoberfläche zu vermuten ist. Mehrere Untersuchungen älterer Beobachter zeigen in der Tat, daß eine Beschleunigung der Tropfenfolge eine merkliche Vergrößerung des Tropfengewichts verursacht. Die vom Verf. niedergelegten Zahlenwerte sind deshalb nur anwendbar auf solche Fälle, wo die Tropfenbildung hinreichend langsam (Intervall etwa 2 Sekunden) erfolgt.

Es bleibt zum Schluß zu erwähnen, daß die vorstehenden Resultate in erster Linie auf theoretische Erwägungen gegründet sind und daß deshalb eine Bestätigung durch das Experiment notwendig erwünscht sein muß. Der Verf. zeigt denn auch an einer Reihe von Beobachtungswerten verschiedener Autoren, so von Hagen, Quincke, Traube u. a. m., daß die von ihm entwickelte Theorie die Ergebnisse