Werk

Titel: Les premiers recursivements inaccessible et Mahlo et la theorie des dilatateurs.

Autor: Girard, J.Y., Vauzeilles, J.

Jahr: 1984

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?379931524_0024|log15

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Arch. math. Logik **24** (1981), 167–191

LES PREMIERS RECURSIVEMENT INACCESSIBLE ET MAHLO ET LA THEORIE DES DILATATEURS*

J. Y. Girard et J. Vauzeilles

La particularité la plus évidente des théories de récursion généralisée est que les fonctions «récrusives» ainsi introduites, ne le sont pas aus sens habituel du terme; en effet, les schémas généralisés obtenus, utilisent des calculs infinis. Ceci dit, rien ne s'oppose en théorie à ce que des portions plus ou moins grandes de la récursion généralisée soient en fait du ressort de la récursivité traditionnelle. Cette possibilité est réalisée (au moins partiellement) par l'utilisation de la théorie des dilatateurs récursifs. Evidemment, certaines limites ne sauraient être transgressées dans cette tentative de réduire la récursion généralisée à la récursion ordinaire.

Le premier résultat dans cette direction est le suivant (Girard, 1979) [G2]: toute fonction f ω_1^{CK}-récursive est bornée (pour des arguments infinis) par une fonction $z \mapsto D(z)$, pour un certain dilatateur récursif D[1]. En particulier, si Ξ_1 dénote la somme de tous les dilatateurs récursifs, on a: $\omega_1^{CK} = \Xi_1(\omega)$. Les limites de la «réduction» ainsi obtenue sont les suivantes:

i) le théorème ne dit rien quant aux fonctions *partielles*;
ii) on a seulement un résultat de majoration; ce résultat permet d'obtenir une forme normale: $f(z) = U(\mu y \leqq D(z) T_1(e, z, y))$ pour z infini; ici les fonctions U et T_1 ne sont pas récursives au sens habituel. Mais elles sont du genre «récursion primitive généralisée», qui est beaucoup moins générale que la ω_1^{CK}-récursion;
iii) de manière implicite, on utilise la fonction qui à $D(x)$, (considéré comme ordre linéaire) associe l'ordinal isomorphe $\|D(x)\|$.

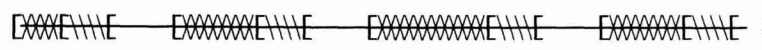
La question est donc la suivante: peut-on démontrer des résultats similaires pour d'autres classes de fonctions récursives généralisées; bien entendu, non, si on prend le strict analogue de ces résultats. Par exemple, la fonction $z \mapsto \omega_z^{CK}$, qui est I_0-récursive (I_0 dénote le premier récursivement inaccessible) ne saurait être majorée par aucune fonction $z \mapsto D(z)$, avec D, dilatateur récursif: en effet, si z^+ est le plus petit admissible $> z$, alors $D(z) < z^+$ et on a en général $z^+ < \omega_z^{CK}$ (mais pas toujours!); on entrevoit ici une des spécificités de la théorie que nous proposons de développer: alors que la théorie de la récursion sur un admissible se développé indépendamment du choix de cet admissible, le travail similaire fait sur les dilatateurs dépend fortement de la nature de l'admissible en question; les résultats

* Eingegangen am 20. 6. 1983.
[1] On trouvera des démonstrations plus simples dans [M] et [R].

de majoration seront donc différents, suivant que l'on a affaire à un admissible successeur, un récursivement inaccessible, un récursivement Mahlo...

Pour ce qui est des admissibles successeurs, [G2] généralise le résultat susmentionné de manière relativement satisfaisante: il existe une ordinal s_0 tel que pour tout $\alpha < s_0$, toute fonction α^+-récursive (i.e. Σ_1 sur L_{α^+}) est majorée, pour des arguments $\geqq \alpha$ par une fonction $z \mapsto D(z)$, D dilatateur récursif. En particulier, $\alpha^+ = \Xi_1(\alpha)$. L'ordinal s_0 est déjà très grand, en particulier les premiers récursivement inaccessible et récursivement Mahlo, sont inférieurs à s_0. Ressayre [R] a étendu ce résultat à un sous-ensemble cofinal du premier stable σ_0, et a donné les conditions optima qui rendent de telles majorations possibles. Le cas des admissibles successeurs est donc bien cerné.

Que faire quard l'admissible n'est pas successeur? Soyons modestes, et restons en deçà de σ_0, le premier stable (i.e. le premier α tel que tout énoncé Σ_1 à paramètres dans L_α et vrai, soit vrai dans L_α). Le résultat suivant de Girard et Ressayre [G, R] nous donne une indication essentielle: $\sigma_0 = \Xi_2(\Xi_1)$ où Ξ_2 est la somme des *ptyx* récursifs de type 2. Autrement dit, $\alpha < \sigma_0$ peut s'écrire sous la forme $\alpha = \Phi(\Xi_1)$, pour Φ *ptyx* de type 2 (c'est à dire, envoyant les dilatateurs dans les ordinaux) récursif. Ce résultat nous donne une certaine description «finitaire» de α: en effet, supposons qu'à une certaine étape n, nous sachions que $F_0, \ldots, F_n$ sont des dilatateurs récursifs, nous approximerons alors α par l'ordinal (même mieux: entier) récursif $\alpha_n = \Phi(F_0 + \ldots + F_n)$; si à une étape ultérieure, nous savons que $F_{n+1}, \ldots, F_m$ sont aussi des dilatateurs récursifs, nous remplacerons notre estimation par: $\alpha_m = \Phi(F_0 + \ldots + F_m)$, α_n se plongeant dans α_m au moyen de la fonction: $f_{nm} = \Phi(E_{F_0} + \ldots + E_{F_n} + E_{\underline{0}F_{n+1}} + \ldots + E_{\underline{0}F_m})$



(////: α_n vu dans α) (\\\\: α_m vu dans α) et on a $\alpha = \varinjlim(\alpha_n, f_{nm})$; bien entendu, là où notre approche récursiviste s'arrête, c'est que la génération de la suite (F_n) n'est en aucune façon effective... Quoiqu'il en soit, on peut penser que cette approche est plus parlante qu'une description de α comme la première étape où une propriété de nature infinie est vérifiée....

En particulier, on s'intéressera aux questions suivantes:

i) étant donné α, défini par une propriété de nature infinie, trouver Φ tel que $\alpha = \Phi(\Xi_1)$; on essaiera de mettre Φ sous forme parlante, par exemple, sous forme de hiérarchie;

ii) essayer d'utiliser i) pour accroître notre contrôle technique sur α. Dans cet article, nous nous proposons de résoudre i) uniquement, dans deux cas particuliers typiques: le premier récursivement inaccessible, et le premier récursivement Mahlo.

Le premier récursivement inaccessible I_0 est le premier α *admissible tel que* $\alpha = \omega_\alpha^{CK}$. Autrement dit, c'est le premier admissible non de la forme α^+. En 1979, un des auteurs (J. Y. Girard) énonçait une conjecture, exprimant I_0 et les fonctions Σ_1 sur L_{I_0} au moyen d'une hiérarchie indexée par les dilatateurs récursifs.

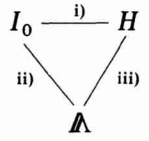
Ce résultat [avec une hiérarchie légèrement différente de celle considérée ici (voir [G, N])] a été établi par Girard et Normann, comme cas paritucler du résultat suivant; si f est une fonction set-récursive en une fonction g, Δ_0, donnée, alors f est majorée par $\mathbb{\Lambda}_g(D)$[2] pour un certain dilatateur récursif[3]. En particulier, tout l'espace compris jusqu'au premier récursivement Mahlo non compris peut s'analyser grâce à ce résultat. En particulier, $I_0 = \mathbb{\Lambda}_G(\Xi_1)$ où G est la dilatateur tel que $G(x) = \omega_x^{CK}$ pour $x < s_0$.

Ici, nous donnons une nouvelle démonstration de la conjecture, qui utilise les définitions inductives; nous nous bornons volontairement au cas de I_0; mais il est clair qu'on pourrait traiter le cas général de [G, N] par la même méthode. Cette méthode consiste à séparer les apparitions positives et négatives de X, dans l'opérateur $\Phi(X)$ qui définit I_0, de manière à se ramener à une définition positive. Un résultat de β-complétude, puis l'analyse de la démonstration nous donne la majoration. On obtient en particulier, $I_0 = \Phi(\Xi_1)$ avec $\Phi(F) = \mathbb{\Lambda}_{It(F)}(F)(0)$, $\Phi(T) = \mathbb{\Lambda}_{it(T)}(T)(0)$, ce qui est bien de la forme générale $\alpha = \Phi(\Xi_1)$.

La définition de $\mathbb{\Lambda}_{It(\Xi_1)}(F)$ $(= \mathbb{\Lambda}^+(F))$ se fait *par induction sur les dilatateurs*. Concrètement, celà signifie que l' on travaille par induction sur $F(I_0)$ et qu'aux étapes «de cofinalité I_0», on a (par séparation des variables) une suite fondamentale qui sert à diagonaliser la construction déjà obtenue. Autrement dit, F fonctionne comme une collection de Bachman [B] de type I_0 et de hauteur $F(I_0)$. Les relations entre les dilatateurs et ces «collections» sont détaillées dans [V].

A quoi bon, diront les esprits chagrins, définir I_0 par une induction plus longue que I_0? En fait, on voit que pour définir $\mathbb{\Lambda}^+(F)(x)$, on n'a pas besoin de travailler sur $F(I_0)$ mais sur un certain $F(x')$, avec $x \leqq x' < I_0$: on a donc vraiment affaire, pour x donné, à une construction «progressive», qui ne présuppose pas la connaissance de I_0. Cette construction se fait par itération le long de $F(I_0)$ [ou $F(x')$, voir plus haut] de l'opération non effective $x \mapsto \omega_x^{CK}$ [ou $x \mapsto \Xi_1(x)$]; en fait, $\mathbb{\Lambda}^+(\underline{1}) = \Xi_1$; ce qui est la seule donnée non récursive dans notre problème. Nous admettons qu'elle est de taille! Mais il était nécessaire d'introduire une telle donnée, car sinon nous ne savions pas dépasser ω_1^{CK}. Nous avons réussi à être récursifs au sens habituel du terme, en la donnée $x \mapsto \omega_x^{CK}$. Bien entendu, les limitations déjà rencontrées dans le cas de ω_1^{CK} se retrouvent ici inchangées.

Mentionnons ici une question dont la solution pourrait être d'importance capitale pour le futur de la recherche dans ce domaine: il y a des relations triangulaires



[2] Nous utilisons ici un abus de notation; en fait Λ_g n'est défini que quand g est une fleur régulière, voir II.3.1.

[3] Ceci généralise un résultat de J. Van de Wiele [voir (V.d.W.)].

i) I_0 est le premier ordinal non récursif en l'opérateur de type 2, $f \mapsto H(f)$, *l'hyperjump*;
ii) $I_0 = \mathbb{A}_{It(\Xi_1)}(\Xi_1)$
iii) le fait que $\mathbb{A}$ envoie DIL dans DIL est formellement équivalent dans un système faible d'analyse à l'existence de $H(f)$ pour tout f, i.e. Π^1_1-CA. Ce triangle n'est certainement pas accidentel; quelle est la structure sousjacente pour des admissibles arbitraires? Peut-on par exemple, prouver un résultat similaire pour le «superjump» et $\mathbb{\Gamma}$ dans le cas de μ_0? Autant de questions pour l'instant sans réponse...
Le premier récursivement Mahlo: μ_0 est le premier α où le résultat de [G, N] ne s'applique pas. En fait, μ_0 est le premier α admissible tel que toute fonction Σ_1 sur L_α et normale ait un point fixe admissible. Nous établissons l'autre conjecture de Girard (1979) en produisant une hiérarchie $\mathbb{\Gamma}(D)$, (en fait un foncteur) qui a des propriétés analogues à celles de $\mathbb{A}^+$ dans le cas du premier récursivement inaccessible.
Les remarques générales faites dans le cas de I_0 s'appliquent; ici, l'élément non effectif est la fonctionnelle qui à f normale et Σ_1 sur L_{μ_0} associe ses points fixes admissibles. Par [G, N], cette fonctionnelle peut s'exprimer, quand f est une fleur régulière, sous la forme: $x \mapsto \mathbb{A}_f(\Xi_1)(x)$. La définition inductive retenue ici, est plus grossière que celle de I_0, et la majoration aussi. Bien entendu, pour le résultat final, cela n'a aucune importance.
Il semble que la méthode esquissée ici, soit parfaitement générale. On aimerait en particulier voir l'expression hiérarchique d'autres admissibles remarquables, par exemple, le premier «non projectible»....

I. Languages-Complétude-Elimination des coupures

I.1.1. Définition. Soit L le langage de l'arithmétique primitive récursive et $L(X)$ [respectivement $L(X, Y)$] le langage obtenu en rajoutant à L la (les) lettre(s) de prédicat binaire X (resp. X et Y). Soit $\Phi(X, u, v)$ un énoncé de $L(X)$ et $\Psi(Y, X, u, v)$ l'énoncé de $L(X, Y)$ obtenu en remplaçant dans $\Phi(X, u, v)$ les apparitions négatives de X par Y.
– On définit l'opération suivante $\bar{\Phi}$ de $P(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ dans $P(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ par:

$$(n, m) \in \bar{\Phi}(A) \quad \text{ssi} \quad \Phi(A, n, m).$$

On pose:

$$I\Phi^0 = \emptyset$$
$$I\Phi^{a+1} = I\Phi^a \cup \bar{\Phi}(I\Phi^a) \quad \text{pour tout ordinal } a$$
$$I\Phi^a = \bigcup_{b<a} I\Phi^b \quad \text{pour tout ordinal limite } a.$$

La famille des $I\Phi^a$ est croissante pour l'inclusion, ce qui assure l'existence d'un ordinal γ (l'ordinal de clôture de Φ) tel que $I\Phi^\gamma = I\Phi^{\gamma+1}$; on pose $D\Phi = I\Phi^\gamma$.

– Pour tout ordinal a, on définit l'opération suivante $\bar{\Psi}_a$ de $P(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ dans $P(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ par:

$$(n,m)\in\bar{\Psi}_a(A) \quad \text{ssi} \quad \Psi(I\Phi^a, A, n, m)$$

On pose:

$$J\Phi_a^0 = I\Phi^a$$
$$J\Phi_a^{b+1} = J\Phi_a^b \cup \bar{\Psi}_a(J\Phi_a^b) \quad \text{pour tout ordinal } b$$
$$J\Phi_a^b = \bigcup_{c<b} J\Phi_a^c \quad \text{pour tout ordinal limite } b.$$

La famille des $J\Phi_a^b$ est croissante pour l'inclusion, ce qui assure l'existence d'un ordinal γ_a tel que $J\Phi_a^{\gamma_a} = J\Phi_a^{\gamma_a+1}$; on pose $J\Phi_a = J\Phi_a^{\gamma_a}$.

I.1.2. Remarques

i) Pour tout ordinal c, $I\Phi^{a+c}\subset J\Phi_a^c$ et $I\Phi^{a+1} = J\Phi_a^1$.
ii) Pour tout ordinal a, $D\Phi\subset J\Phi_a$.
iii) Soit A une formule vraie de $L(D\Phi)$; la formule obtenue en remplaçant dans A les apparitions négatives de $D\Phi$ par $I\Phi^a$ et les apparitions positives de $D\Phi$ par $J\Phi_a$ (ou par un ensemble contenant $J\Phi_a$) est vraie. Soit J_a un ensemble vérifiant $I\Phi^a\subset J_a$ et $\bar{\Psi}_a(J_a)\subset J_a$, alors, $J\Phi_a\subset J_a$ car $J\Phi_a$ est le plus petit point fixe de $\bar{\Psi}_a$ contenant $I\Phi^a$.

I.1.3. Définition. Soit y un ordinal; on définit le calcul des séquents $T(y)$ de la manière suivante:
– le langage est obtenu en rajoutant à L les lettres de prédicats binaires $I\Phi^b$ pour tout $b\leqq y$, et J; on notera $(u,v)\in I\Phi^b$ pour $I\Phi^b(u,v)$ et $(u,v)\in J$ pour $J(u,v)$.
– On prend pour axiomes, les axiomes usuels de l'arithmétique primitive récursive, (autres que le schéma d'axiomes d'induction) et $(u,v)\in J\vdash(u,v)\in J$;
– on prend pour règles:
– les règles structurelles d'affaiblissement, d'échange, de contraction ainsi que la règle de coupure;
– les règles usuelles d'introduction et d'élimination des connecteurs et des quantificateurs autres que $(d\forall)$ et $(g\exists)$;
– les ω-règles pour $\forall$ et $\exists$;
– les règles spécifiques suivantes pour J et les $I\Phi^a$:

$$(dI)\ \frac{\Gamma\vdash\Phi(I\Phi^c,u,v),\Delta}{\Gamma\vdash(u,v)\in I\Phi^d,\Delta} \quad \text{avec} \quad c<d\leqq y$$

$$(gI)\ \frac{\ldots\Gamma,\Phi(I\Phi^c,u,v)\vdash\Delta\ldots}{\Gamma,(u,v)\in I\Phi^d\vdash\Delta} \quad \text{pour tout} \quad c<d, \quad \text{et} \quad d\leqq y$$

$$(dJ)\ \frac{\Gamma\vdash\Psi(I\Phi^y,J,u,v),\Lambda}{\Gamma\vdash(u,v)\in J,\Lambda}$$

$$(IJ)\ \frac{\Gamma\vdash\Phi(I\Phi^c,u,v),\Delta}{\Gamma\vdash(u,v)\in J,\Delta} \quad \text{pour} \quad c<y.$$

I.1.4. Exemples

– On montre par induction sur a ($a \leqq y$) qu'il y a une démonstration dans $T(y)$ du séquent $(u,v) \in I\Phi^a \vdash (u,v) \in I\Phi^a$: on suppose que, pour tout $b<a$, C_b est une démonstration de $(u,v) \in I\Phi^b \vdash (u,v) \in I\Phi^b$; par induction sur la complexité de Φ, on en déduit une démonstration de $\Phi(I\Phi^b,u,v) \vdash \Phi(I\Phi^b,u,v)$

$$\text{(gI)}\quad \frac{\begin{array}{c}D_b\\ \vdots\\ \text{(dI)}\ \dfrac{\Phi(I\Phi^b,u,v)\vdash\Phi(I\Phi^b,u,v)}{\ldots\ldots\ \Phi(I\Phi^b,u,v)\vdash(u,v)\in I\Phi^a\ \ldots\ldots}\end{array}}{(u,v)\in I\Phi^a \vdash (u,v)\in I\Phi^a}\quad \text{pour tout}\quad b<a$$

– le séquent $(u,v) \in I\Phi^y \vdash (u,v) \in J$ est démontrable dans $T(y)$:

$$\text{(gI)}\quad \frac{\begin{array}{c}D_b\\ \vdots\\ \text{(IJ)}\ \dfrac{\Phi(I\Phi^b,u,v)\vdash\Phi(I\Phi^b,u,v)}{\ldots\ldots\ \Phi(I\Phi^b,u,v)\vdash(u,v)\in J\ \ldots\ldots}\end{array}}{(u,v)\in I\Phi^y \vdash (u,v)\in J}\quad \text{pour tout}\quad b<y$$

– le séquent $\Psi(I\Phi^y,J,u,v)\vdash(u,v)\in J$ est démontrable dans $T(y)$: on montre par induction sur la complexité de A, que le séquent $A\vdash A$ est démontrable dans $T(y)$;
en particulier le séquent $\Psi(I\Phi^y,J,u,v)\vdash\Psi(I\Phi^y,J,u,v)$ est démontrable dans $T(y)$; d'où:

$$(dJ)\quad \frac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Psi(I\Phi^y,J,u,v)\vdash\Psi(I\Phi^y,J,u,v)\end{array}}{\Psi(I\Phi^y,J,u,v)\vdash(u,v)\in J}$$

– on remarque que les démonstrations précédentes sont sans coupure.

I.2. Fonctorialisation

I.2.1. Définition

i) Soit P_y une démonstration dans $T(y)$, et $f \in I(y',y)$, on définit éventuellement une démonstration $P_{y'} = f^{-1}(P_y)$ dans $T(y')$ de la manière suivante:
– dans les règles (gI), enlever toutes les prémisses Γ, $\Phi(I\Phi^c,u,v)\vdash\Delta$ telles que $c \notin \mathrm{Im}(f)$.
– Si il reste malgré tout, des $I\Phi^c$ avec $c \notin \mathrm{Im}(f+E_1)$ alors $P_{y'}$ n'est pas défini.
– Sinon remplacer systématiquement $I\Phi^{f(c)}$ par $I\Phi^c$, $I\Phi^y$ par $I\Phi^{y'}$, et la démonstration obtenue est $P_{y'}$.
ii) Une ($\underline{b}+\mathrm{Id}$)-démonstration est une famille $(P_y)_{y\in\mathrm{On}}$, P_y démonstration dans $T(b+y)$, telle que pour tout $f \in I(y',y)$, $P_{y'} = (E_b+f)^{-1}(P_y)$.

I.2.2. Définition. Le langage $L(\underline{b}+\mathrm{Id})$ est obtenu en rajoutant à L les symboles $I\Phi^{\xi}$ pour tout ordinal $c<b$, et les symboles $I\Phi$ et J.
Un $(\underline{b}+\mathrm{Id})$-sequent $\Gamma\vdash\Delta$, est un séquent tel que toutes les formules apparaissant dans Γ ou Δ, soient des formules de $L(\underline{b}+\mathrm{Id})$.
Si $\Gamma\vdash\Delta$ est un $(\underline{b}+\mathrm{Id})$-séquent on notera $\Gamma_y\vdash\Delta_y$, le séquent obtenu en remplaçant respectivement dans $\Gamma\vdash\Delta$, $I\Phi^{\xi}$ par $I\Phi^{c}$, $I\Phi$ par $I\Phi^{b+y}$.

I.2.3. Définition. Etant donnée une $(\underline{b}+\mathrm{Id})$-démonstration P, on fait apparaitre la dernière règle de P, et cette règle s'applique entre séquents fonctoriels:
- P peut être réduite à un axiome;
- Si la dernière règle de P est différente de (gI), (dI), (dJ), (IJ), la règle s'écrit comme d'habitude, mais ici les formules sont des formules de $L(\underline{b}+\mathrm{Id})$, et le (ou les) prédécesseur(s) immédiat(s) de P est une (sont des) $(\underline{b}+\mathrm{Id})$-preuve(s):

$$(d\Lambda)\quad \frac{\Gamma\vdash A,\Delta \quad \Gamma\vdash B,\Delta}{\Gamma\vdash A\wedge B,\Delta}$$

par exemple, et les démonstrations de $\Gamma\vdash A,\Delta$ et de $\Gamma\vdash B,\Delta$ sont des $(\underline{b}+\mathrm{Id})$-démonstrations.

- La dernière règle de P est (dI)

$$(dI)\quad \frac{\overset{Q}{\Gamma\vdash(I\Phi^{\xi},u,v),\Delta}}{\Gamma\vdash(u,v)\in I\Phi^{d},\Delta}\ \text{avec}\ c<d<b \quad \text{ou} \quad \frac{\overset{Q}{\Gamma\vdash\Phi(I\Phi^{\xi},u,v),\Delta}}{\Gamma\vdash(u,v)\in I\Phi,\Delta}\ c<b$$

et Q est une $(\underline{b}+\mathrm{Id})$-démonstration.
- La dernière règle de P est (dJ)

$$(dJ)\quad \frac{\overset{Q}{\Gamma\vdash\Psi(I\Phi,J,u,v),\Delta}}{\Gamma\vdash(u,v)\in J,\Delta}$$

et Q est une $(\underline{b}+\mathrm{Id})$-démonstration.
- La dernière règle de P est (IJ)

$$(IJ)\quad \frac{\overset{Q}{\Gamma\vdash\Phi(I\Phi^{\xi},u,v),\Delta}}{\Gamma\vdash(u,v)\in J,\Delta}\ c<b$$

et Q est une $(\underline{b}+\mathrm{Id})$-démonstration.
- La dernière règle de P est (gI) et la conclusion est $\Gamma,(u,v)\in I\Phi\vdash\Delta$. On écrit provisoirement cette règle sous la forme essentiellement ponctuelle suivante:

$$(gI)_y\quad \frac{\overset{Q_{y,z}}{\ldots\Gamma_y,\Phi(I\Phi^{z},u,v)\vdash\Delta_y\ldots}}{\Gamma_y,(u,v)\in I\Phi^{b+y}\vdash\Delta_y}\ \text{pour tout}\ z<b+y$$

$Q_{y,z}$ est la démonstration de la z-ième prémisse: $\Gamma_y,\Phi(I\Phi^{z},u,v)\vdash\Delta_y$; pour $z<b$, on pose $Q_z(y)=Q_{y,z}$ et il est clair que Q_z est une $(\underline{b}+\mathrm{Id})$-démonstration;

pour tout ordinal z, on pose $Q_{b+z}(y)=Q_{z+1+y,b+z}$, et Q_{b+z} est une $(\underline{b+z+1}+\mathrm{Id})$-démonstration; si $f\in I(b,c)$, et si R est une $(\underline{c}+\mathrm{Id})$-démonstration, on définit éventuellement une $(\underline{b}+\mathrm{Id})$-démonstration $f^{-1}(R)$, en posant:
pour tout ordinal y, $f^{-1}(R)(y)=(f+E_y)^{-1}(R(y))$; ici les démonstrations Q_{b+z} sont liées par la condition: si $f\in I(z,z')$, $(E_b+f+E_1)^{-1}(Q_{b+z'})=Q_{b+z}$; d'où l'écriture fonctorielle de (gI):

$$(gI)\quad \frac{\begin{matrix} Q_z \\ \ldots\Gamma, \Phi(I\Phi^z,u,v)\vdash\Delta\ldots z<b \end{matrix}\Big| \begin{matrix} Q_{b+z} \\ \ldots\Gamma^{z+1}, \Phi(I\Phi^{\underline{b+z}},u,v)\vdash\Delta^{z+1}\ldots z\in\mathrm{On} \end{matrix}}{\Gamma,(u,v)\in I\Phi\vdash\Delta}$$

$$(\Gamma^{z+1})_y=\Gamma_{z+1+y},\qquad (\Delta^{z+1})_y=\Delta_{z+1+y}.$$

Les Q_{b+z} étant reliés par la relation précédente.
– La dernière est (gI) et la conclusion est $\Gamma,(u,v)\in I\Phi^{\underline{d}}\vdash\Delta$ aved $d<b$. On définit comme précédemment Q_z pour tout $z<d$, et la règle s'écrit:

$$(gI)\quad \frac{\begin{matrix} Q_z \\ \ldots\Gamma, \Phi(I\Phi^z,u,v)\vdash\Delta\ldots z<d \end{matrix}}{\Gamma,(u,v)\in I\Phi^{\underline{d}}\vdash\Delta}.$$

I.2.4. Remarques

i) Remarquons que les démonstrations fonctorielles sont bien fondées (voir [G3, 10.2.9]) on peut donc raisonner par induction sur les démonstrations fonctorielles.
ii) A partir d'une $(\underline{b}+\mathrm{Id})$-démonstration écrite avec les règles fonctorielles, on reconstitue une $(b+Id)$-démonstration écrite avec les règles ponctuelles: voir [G3, 10.2.14].

I.3. Complétude

I.3.1. Théorème. *Soit S un sequent de $L(D\Phi)$; on note $S(I\Phi^-,J^+)$, le séquent obtenu en remplaçant les apparitions négatives de $D\Phi$ par $I\Phi$ et les apparitions positives de $D\Phi$ par J. Alors S est vrai si et seulement si il existe une* (Id)*-démonstration de $S(I\Phi^-,J^+)$.*

Démonstration

i) Supposons qu'il existe une (Id)-démonstration P de $S(I\Phi^-,J^+)$ et soit γ l'ordinal de clôture de Φ; on a alors $I\Phi^\gamma=D\Phi$, et on montre par induction sur P_γ que $S(D\Phi^-,D\Phi^+)=S$ est vraie.
ii) Soit T la théorie dans le langage $L(I\Phi,J)$, obtenue en rajoutant à l'arithmétique primitive récursive, les axiomes:

$$-\ \forall u\,\forall v((u,v)\in I\Phi\to(u,v)\in J), \tag{1}$$

$$-\ \forall u\,\forall v(\Psi(I\Phi,J,u,v)\to(u,v)\in J). \tag{2}$$

Pour tout ordinal y, on définit le langage $L_{y\omega}$ obtenu en rajoutant à $L(J)$ les conjonctions et les disjonctions généralisées de longueur y. Une β-démonstration dans $L_{\beta\omega}$, est une collection $(P_y)_{y\in \mathrm{On}}$ (P_y preuve dans L_y) telle que pour tout $f\in I(y,y')$, $f^{-1}(P_{y'})=P_y$. Un β-modèle de hauteur y d'un ensemble de β-formules est tout simplement un modèle de ces formules regardées ponctuellement en y. Toute formule vraie dans tout β-modèle d'un ensemble de β-formules est β-démontrable à partir de ces formules: pour plus de détails voir [G3, 10.A.11].
Dans $L_{y\omega}$, on peut définir les formules $I\Phi^a$ pour $a<y$, par

$$I\Phi^a(u,v)=\bigvee\!\!\!\bigvee_{b<a} \Phi(I\Phi^b,u,v)\,,\qquad I\Phi(u,v)=\bigvee\!\!\!\bigvee_{b<y} \Phi(I\Phi^b,u,v)$$

Si le séquent S est vrai, alors par la remarque I.1.2iii), $S(I\Phi^-,J^+)$ est vrai dans tous les β-modèles de T; donc par le théorème de β-complétude précédent, $S(I\Phi^-,J^+)$ est β-démontrable à partir des β-formules (1) et (2). On remarque que les démonstrations données en I.1.4 sont fonctorielles, donc puisque (1) et (2) sont (Id)-démontrables, on en déduit une (Id)-démonstration de $S(I\Phi^-,J^+)$.

I.3.2. Théorème. *Si le séquent S de $L(D\Phi)$ est vrai, $S(I\Phi^-,J^+)$ est* (Id)*-démontrable sans coupure; de plus cette démonstration peut être choisie récursive.*

Démonstration. Comme il n'y a pas de règle gauche pour J, l'élimination des coupures se démontre de façon tout à fait analogue à l'élimination des coupures pour $L_{\beta\omega}$: voir [G3, 10.A.12].
Si une théorie est récursive, le théorème de β-complétude donne une démonstration récursive; d'autre part, l'élimination des coupures préserve la récursivité des démonstrations; on peut donc choisir une démonstration récursive.

I.3.3. Remarque. Un résultat plus fin que celui de I.3.1 serait le suivant: en introduisant des symboles $J\Phi^z_y$, il est possible, sous les hypothèses de I.3.1, de donner une démonstration de $S(I\Phi^-,J\Phi^{D(y)}_y)$ pour un certain dilatateur récursif D. Ce raffinement peut s'obtenir en analysant la démonstration sans coupure de I.3.2. ou encore par un procédé purement syntaxique à partir d'une démonstration de $S(I\Phi^-,J\Phi_y)$, dans l'esprit de l'élimination des coupures dans le cas de ID_1: voir [G3, Section 11.4].

II. Le cas du premier récursivement inaccessible

II.1.1. Définition. On définit les énoncés Φ_i ($i=1$ à 5) et Φ, du langage $L(X)$:

- $\Phi_1(X,u,v):(v=3)\wedge(u=v)$
- $\Phi_2(X,u,v):\exists e\exists p(\forall q\, p\neq 3q\wedge(3^e\cdot p,3^e\cdot p)\in X$
  $\wedge\, v=3^e\cdot 2p\wedge((u,3^e p)\in X\vee(u=v)))$
- $\Phi_3(X,u,v):\exists e\exists f\exists g[\![(3^e,3^e)\in X\wedge(3^f,3^e)\in X\wedge\forall a[((a,3^f)\in X\wedge a\neq 3^f)$
  $\to((\exists z T_1(g,a,z)\wedge(\{g\}(a),\{g\}(a))\in X)\wedge\exists p_a((\forall r\, p_a\neq 3r)$
  $\wedge\,\{g\}(a)=3^e\cdot p_a))]\wedge v=3^e(2\langle f,g\rangle+3)\wedge[(\exists a_0(a_0,3^f)\in X$
  $\wedge\, a_0\neq 3^f\wedge(u,\{g\}(a_0))\in X)\vee(u=v)]]$

- $\Phi_4(X,u,v)$: $[\![\forall u'\forall v'((\Phi_1(X,u',v') \vee \Phi_2(X,u',v') \vee \Phi_3(X,u',v'))$
  $\rightarrow (u',v') \in X)]\!] \wedge [\![\exists e(3^e,3^e) \in X$
  $\wedge v = 3^{2e} \wedge [(u,3^e) \in X \vee ((\exists p(\forall q\, p \neq 3q)$
  $= 3^e p \wedge (u,u) \in X) \vee (u=v)]]\!]$
- $\Phi_5(X,u,v)$: $\exists e \exists f [\![(3^e,3^e) \in X \wedge \forall a[((a,3^e) \in X \wedge a \neq 3^e))$
  $\rightarrow (\exists z\, T_1(f,a,z) \wedge (\{f\}(a), \{f\}(a)) \in X \wedge \exists p_a \{f\}(a) = 3^p a)]$
  $\wedge v = 3^{2\langle e,f\rangle+1} \wedge [(\exists a_0 (a_0,3^e) \in X \wedge a_0 \neq 3^e$
  $\wedge (u, \{f\}(a_0)) \in X) \vee (u=v)]]\!]$
- $\Phi(X,u,v) = \bigvee_{i=1}^{5} \Phi_i(X,u,v)$.

On définit les énoncés Ψ_i ($i=1$ à 5), Ψ, du langage $L(X,Y)$, en remplaçant respectivement dans chaque Φ_i et Φ, les occurrences négatives de X par Y. ($\langle \cdot,\cdot \rangle$ est une fonction de paire fixée telle que $\langle x,y \rangle$ ne soit pas divisible par 3).

II.1.2. Remarques. On définit les $I\Phi^x$ pour tout ordinal x; l'ordinal de clôture I_0 de Φ, est le premier récursivement inaccessible; pour tout ordinal $x < I_0$, x^+ (le prochain admissible) est le plus petit ordinal y tel que $x<y$ et tel que:

$$\forall u \forall v(\Phi_1(I\Phi^y,u,v) \vee \Phi_2(I\Phi^y,u,v) \vee \Phi_3(I\Phi^y,u,v) \rightarrow (u,v) \in I\Phi^y)$$

On remarque que les admissibles et les limites d'admissibles sont codés par des puissances de 3; si 3^e code ω_α^{CK} et si $\omega_\alpha^{CK} < x < \omega_{\alpha+1}^{CK}$, alors x est codé par un entier $3^e \cdot p$ avec $p \neq 1$ et p non multiple de 3.
On note $\|(u,v)\|$ [hauteur de (u,v)] le plus petit ordinal x tel que $(u,v) \in I\Phi^{x+1}$ et $\|u\|$ l'ordinal $\|(u,u)\|$; on a pour tous ordinaux u, v tels que $\|(u,v)\|$ soit défini, $\|u\| \leqq \|(u,v)\| = \|v\|$ et on notera $u \propto v$ (u est un prédécesseur de v).
i) $\|3\| = 0$ (voir définition de Φ_1).
ii) $\|3^e \cdot 2p\| = \|3^e \cdot p\| + 1$ si p non divisible par 3 (voir définition de Φ_2).
iii) Si pour tout ordinal a tel que $a \propto 3^f \propto 3^e$, $\{g\}(a)$ est défini et de la forme $3^e \cdot p_a$ (p_a non divisible par 3), alors:
$\|3^e \cdot (2\langle f,g \rangle + 3)\| = \sup\{\|\{g\}(a)\| + 1;\ a \propto 3^f\}$ (voir la définition de Φ_3)[4]
iv) $\|3^{2e}\| = \|3^e\|^+$ (voir la définition de Φ_4).
v) Si pour tout ordinal a tel que $a \propto 3^e$, $\{f\}(a)$ est défini et de la forme $3^p a$, alors $\|3^{2\langle e,f\rangle+1}\| = \sup\{\|3^{\{f\}(a)}\| + 1;\ a \propto 3^e\}$ (voir la définition de Φ_5).

II.2. Le théorème de majoration

Dans les sections II.2 et II.3 qui suivent, nous considérerons des séquents S tels que J n'apparaisse que positivement.

II.2.1. Définition. Soit S un séquent ($\underline{b}$ + Id)-démontrable; on note $S_y(I\Phi^{b+y}, I\Phi^y)$ le séquent obtenu en remplaçant dans S, les apparitions négatives de $I\Phi^c$ ($c<b$) par $I\Phi^c$, de $I\Phi$ par $I\Phi^{b+y}$, et les apparitions positives de $I\Phi^c$ par $I\Phi^c$, de $I\Phi$ et de J par $I\Phi^y$.

[4] On remarque que $\sup\{\|a\|;\ a \propto 3^f\} = \|3^f\|$.

II.2.2. Théorème. *Soit D une* $(\underline{b}+\mathrm{Id})$*-démonstration sans coupure du séquent S: pour tout ordinal y, on définit un ordinal* $\theta(D,y)$*, tel que le séquent* $S_y(I\Phi^{b+y}, I\Phi^{\theta(D,y)})$ *soit vrai et que la fonction* $\theta(D,\cdot)$ *de* On *dans* On *soit croissante.*

Démonstration

– D est un axiome: $\theta(D,y)=b+y$ [remarquer que D est différent de $(u,v)\in J\vdash(u,v)\in J$]

– la dernière règle est une règle unaire autre que (dI), (dJ), (IJ):
par exemple, l'affaiblissement à droite,

$$(dA)\quad \frac{\begin{matrix}D_1\\ \Gamma\vdash\Delta\end{matrix}}{\Gamma\vdash A,\Delta}\quad \text{on pose}\quad \theta(D,y)=\theta(D_1,y)$$

– la dernière règle est une règle binaire: par exemple,

$$(g\rightarrow)\quad \frac{\begin{matrix}D_1 & D_2\\ \Gamma\vdash A,\Delta & \Delta,B\vdash\Pi\end{matrix}}{\Gamma,\Lambda,A\rightarrow B\vdash\Delta,\Pi}\quad \text{on pose}\quad \theta(D,y)=\sup(\theta(D_1,y),\theta(D_2,y))$$

soit S_1 le séquent $\Gamma\vdash A,\Delta$, S_2 le séquent $\Lambda,B\vdash\Pi$; par hypothèse d'induction, $(S_1)_y(I\Phi^{b+y}, I\Phi^{\theta(D_1,y)})$ et $(S_2)_y(I\Phi^{b+y}, I\Phi^{\theta(D_1,y)})$ sont vrais;
Donc $(S_1)_y(I\Phi^{b+y}, I\Phi^{\theta(D,y)})$ et $(S_2)_y(I\Phi^{b+y}, I\Phi^{\theta(D,y)})$ sont vrais, et on en déduit que $S_y(I\Phi^{b+y}, I\Phi^{\theta(D,y)})$ est vrai.

– La dernière règle est une ω-règle: par exemple,

$$(\omega\forall)\quad \frac{\begin{matrix}D_1 & & D_n\\ \Gamma\vdash A(\bar{0}),\Delta & \ldots & \Gamma\vdash A(\bar{n}),\Delta\ldots n<\omega\end{matrix}}{\Gamma\vdash\forall x\,A(x),\Delta}$$

Soit S_n le séquent $\Gamma\vdash A(\bar{n}),\Delta$ $(n<\omega)$; par hypothèse d'induction, $(S_n)_y(I\Phi^{b+y}, I\Phi^{\theta(D_n,y)})$ est vrai; soit $\theta(D,y)=\sup\{\theta(D_n,y);\, n<\omega\}$, alors $(S_n)_y(I\Phi^{b+y}, I\Phi^{\theta(D,y)})$ est vrai pour tout $n<\omega$; donc $S_y(I\Phi^{b+y}, I\Phi^{\theta(D,y)})$ est vrai.[5]

– La dernière règle est (dI):

$$(dI)\quad \frac{\begin{matrix}D_1\\ \Gamma\vdash\Phi(I\Phi^c,u,v),\Delta\end{matrix}}{\Gamma\vdash(u,v)\in I\Phi^d,\Delta}\quad c<d<b\quad \text{ou}\quad \frac{\begin{matrix}D_1\\ \Gamma\vdash\Phi(I\Phi^c,u,v),\Delta\end{matrix}}{\Gamma\vdash(u,v)\in I\Phi,\Delta}\quad c<b.$$

Soit S_1 le séquent $\Gamma\vdash\Phi(I\Phi^c,u,v),\Delta$; par hypothèse d'induction, $(S_1)_y(I\Phi^{b+y}, I\Phi^{\theta(D_1,y)})$ est vrai; on pose $\theta(D,y)=\theta(D_1,y)$, alors $S_y(I\Phi^{b+y}, I\Phi^{\theta(D,y)})$ est vrai [dans le deuxième cas car $\theta(D_1,y)\geqq b$].

– La dernière règle est (IJ):
ce cas se traite exactement comme le précédent.

[5] En fait cette étape n'est pas indispensable: voir remarque II.3.10ii).

– La dernière règle est (gI):
il y a deux sous-cas:
i)

$$(gI)\quad \frac{\overset{D_c}{\ldots\Gamma, \Phi(I\Phi^{\underline{c}}, u, v)\vdash\Delta\ldots}}{\Gamma, (u,v)\in I\Phi^{\underline{d}}\vdash\Delta} \quad \text{pour tout} \quad c<d \quad \text{et} \quad d<b$$

on pose $\theta(D, y)=\sup\{\theta(D_c, y);\ c<d\}$
ii)

$$(gI)\quad \frac{\overset{D_z}{\ldots\Gamma, \Phi(I\Phi^{\underline{z}}, u, v)\vdash\Delta\ldots z<b} \Big| \overset{D_{b+z}}{\ldots\Gamma^{z+1}, \Phi(I\Phi^{\underline{b+z}}, u, v)\vdash\Delta^{z+1}\ldots z\in\mathrm{On}}}{\Gamma, (u,v)\in I\Phi\vdash\Delta}.$$

On pose:

$$\theta(D, y)=\sup(\{\theta(D_c, y);\ c<b\}\cup\{\theta(D_{b+z}, y-(z+1));\ z<y\})$$

on note S_d le séquent démontré par D_d; par hypothèse d'induction, pour tout $c<b$, $(S_c)_y(I\Phi^{b+y}, I\Phi^{\theta(D_c, y)})$ est vrai, donc $(S_c)_y(I\Phi^{b+y}, I\Phi^{\theta(D, y)})$ est vrai; pour $z<y$, D_{b+z} est une $(\underline{b+z+1}+\mathrm{Id})$-démonstration de S_{b+z}, donc par hypothèse d'induction,

$$(S_{b+z})_{y-(z+1)}(I\Phi^{b+y}, I\Phi^{\theta(D_{b+z}, y-(z+1))})$$

est vrai; or le séquent $(S_{b+z})_{y-(z+1)}$ est le séquent Γ_y, $\Phi(I\Phi^{b+z}, u, v)\vdash\Delta_y$, donc

$$(S_{b+z})_{y-(z+1)}(I\Phi^{b+y}, I\Phi^{\theta(D_{b+z}, y-(z+1))})$$

est le séquent Γ_y, $\Phi(I\Phi^{b+z}, u, v)\vdash\Delta_y$ où on a remplacé les apparitions positives de $I\Phi^{b+y}$ et de J, par $I\Phi^{\theta(D_{b+z}, y-(z+1))}$;
soit Δ^* (resp. Γ^*) la suite de formules obtenue en remplaçant dans Δ_y (resp. Γ_y) les apparitions positives (resp. négatives) de $I\Phi^{b+y}$ et de J par $I\Phi^{\theta(D, y)}$; alors, pour tout $d<b+y$, Γ^*, $\Phi(I\Phi^d, u, v)\vdash\Delta^*$ est vrai;
donc Γ^*, $(u,v)\in I\Phi^{b+y}\vdash\Delta^*$ est vrai, c'est à dire $S_y(I\Phi^{b+y}, I\Phi^{\theta(D, y)})$ est vrai.
– La dernière règle est (dJ):

$$(dJ)\quad \frac{\overset{D_1}{\Gamma\vdash\Psi(I\Phi, J, u, v), \Delta}}{\Gamma\vdash(u,v)\in J, \Delta}$$

soit S_1 le séquent démontré par D_1; par hypothèse d'induction, $(S_1)_y(I\Phi^{b+y}, I\Phi^{\theta(D_1, y)})$ est vrai pour tout y; soit $\Delta_{y,z}$ (resp. $\Gamma_{y,z}$) la suite de formules obtenue en remplaçant dans Δ_y (Γ_y) les apparitions positives (resp. négatives) de $I\Phi^{b+y}$ et de J par $I\Phi^z$:
a) si $\Gamma_{y,\theta(D_1,y)}\vdash\Delta_{y,\theta(D_1,y)}$ est vrai, alors $\Gamma_{y,z}\vdash(u,v)\in I\Phi^z$, $\Delta_{y,z}$ est vrai pour tout $z\geqq\theta(D_1, y)$

b) si $\Gamma_{y,\theta(D_1,y)} \vdash \Delta_{y,\theta(D_1,y)}$ est faux, alors $\Psi(I\Phi^{b+y}, I\Phi^{\theta(D_1,y)}, u, v)$ est vraie, et donc une et une seule des formules $\Psi_i(I\Phi^{b+y}, I\Phi^{\theta(D_1,y)}, u, v)$ $(1 \leqq i \leqq 5)$ est vraie; d'où les cinq cas suivants:

(1) Si $\Psi_1(I\Phi^{b+y}, I\Phi^{\theta(D_1,y)}, u, v)$ est vrai, alors $v=3$ et $u=v$, donc $\Gamma_{y,z} \vdash (u,v) \in I\Phi^z$, $\Delta_{y,z}$ est vrai pour tout $z \geqq 1$.

(2) Si $\Psi_2(I\Phi^{b+y}, I\Phi^{\theta(D_1,y)}, u, v)$ est vrai, alors $\Phi_2(I\Phi^{\theta(D_1,y)}, u, v)$ est vrai et $(u,v) \in I\Phi^z$, pour tout $z \geqq \theta(D_1, y)+1$; donc $\Gamma_{y,z} \vdash (u,v) \in I\Phi^z$, $\Delta_{y,z}$ est vrai pour tout $z \geqq \theta(D_1, y)+1$.

(3) Si $\Psi_3(I\Phi^{b+y}, I\Phi^{\theta(D_1,y)}, u, v)$ est vrai $(+)$, considérons le séquent vrai, par hypothèse d'induction $(S_1)_{\theta(D_1,y)}(I\Phi^{b+\theta(D_1,y)}, I\Phi^{\theta(D_1,\theta(D_1,y))})$.

– Si $\Gamma_{\theta(D_1,y),\theta(D_1,\theta(D_1,y))} \vdash \Delta_{\theta(D_1,y),\theta(D_1,\theta(D_1,y))}$ est vrai, $\Gamma_{y,z} \vdash (u,v) \in I\Phi^z$, $\Delta_{y,z}$ est vrai pour tout $z \geqq \theta(D_1, \theta(D_1, y))$.

– Si $\Gamma_{\theta(D_1,y),\theta(D_1,\theta(D_1,y))} \vdash \Delta_{\theta(D_1,y),\theta(D_1,\theta(D_1,y))}$ est faux, alors $\Psi(I\Phi^{b+\theta(D_1,y)}, I\Phi^{\theta(D_1,\theta(D_1,y))}, u, v)$ est vrai, donc, $(++)$ $\Psi_3(I\Phi^{b+\theta(D_1,y)}, I\Phi^{\theta(D_1,\theta(D_1,y))}, u, v)$ est vrai, en particulier la sous-formule $v = 3^e(2\langle f, g\rangle + 3)$ [pour un triplet (e, f, g)] est vraie; de plus, la sous-formule de $(++)$:

$$\forall a[((a, 3^f) \in I\Phi^{b+\theta(D_1,y)} \wedge a \neq 3^f) \rightarrow (\exists z T_1(g, a, z) \wedge (\{g\}(a), \{g\}(a)) \in I\Phi^{\theta(D_1,\theta(D_1,y))})]$$

est vraie; de $(+)$ on déduit que $(3^f, 3^e) \in I\Phi^{\theta(D_1,y)}$, donc $\|3^f\| < \theta(D_1, y)$, et $\forall a \|(a, 3^f)\| = \|3^f\| < \theta(D_1, y)$ (voir remarque II.1.2) donc

$$\forall a[(a, 3^f) \in I\Phi^{\theta(D_1,\theta(D_1,y))} \leftrightarrow (a, 3^f) \in I\Phi^{\theta(D_1,y)}];$$

on en déduit que

$$\forall a[((a, 3^f) \in I\Phi^{\theta(D_1,\theta(D_1,y))} \wedge a \neq 3^f) \rightarrow (\exists z T_1(g, a, z) \wedge (\{g\}(a), \{g\}(a)) \in I\Phi^{\theta(D_1,\theta(D_1,y))})]$$

est vrai; d'où, en utilisant $(++)$ on en déduit que $\Phi(I\Phi^z, u, v)$ est vrai pour $z = \theta(D_1, \theta(D_1, y))$; d'où $\Gamma_{y,z} \vdash (u,v) \in I\Phi^z$, $\Delta_{y,z}$ est vrai pour tout $z \geqq \theta(D_1, \theta(D_1, y)) + 1$.

(4) Si $\Psi_4(I\Phi^{b+y}, I\Phi^{\theta(D_1,y)}, u, v)$ est vrai, alors

$$\exists e[[(3^e, 3^e) \in I\Phi^{\theta(D_1,y)} \wedge v = 3^{2e} \wedge [(u, 3^e) \in I\Phi^{\theta(D_1,y)} \vee ((\exists p(\forall q\, p = 3q) \wedge u = 3^e p \wedge (u,u) \in I\Phi^{\theta(D_1,y)}) \vee (u = v)]]]$$

est vrai; d'où la formule obtenue en remplaçant $\theta(D_1, y)$ par $\theta(D_1, y)^+$ dans la formule précédente est vraie; d'autre part, par définition de $\theta(D_1, y)^+$,

$$\forall u \forall v[(\Phi_1(I\Phi^{\theta(D_1,y)^+}, u, v) \vee \Phi_2(I\Phi^{\theta(D_1,y)^+}, u, v) \vee \Phi_3(I\Phi^{\theta(D_1,y)^+}, u, v)) \rightarrow (u,v) \in I\Phi^{\theta(D_1,y)^+}]$$

est vrai; donc $\Phi_4(I\Phi^{\theta(D_1,y)^+}, u, v)$ est vrai; on en déduit que pour tout $z \geqq \theta(D_1, y)^+ + 1$, $\Gamma_{y,z} \vdash (u,v) \in I\Phi^z$, $\Delta_{y,z}$ est vrai.

(5) Si $\Psi_5(I\Phi^{b+y}, I\Phi^{\theta(D_1,y)}, u, v)$ est vrai, alors par un raisonnement tout à fait analogue à celui de (3) on en déduit que pour tout $z \geqq \theta(D_1, \theta(D_1, y))+1$, $\Gamma_{y,z} \vdash (u, v) \in I\Phi^z$, $\Delta_{y,z}$ est vrai.
En conclusion, si la dernière règle est (dJ), on pose:

$$\theta(D, y) = \sup(\theta(D_1, y)^+ + 1, \theta(D_1, \theta(D_1, y)) + 1)$$

et d'après les différents cas précédents, $S_y(I\Phi^{b+y}, I\Phi^{\theta(D,y)})$ est vrai.

II.3. Majoration par le foncteur $\mathbb{A}$

II.3.1. Remarque. Les résultats de [G, chapitre 5] peuvent être interprétés de la manière suivante: on définit le foncteur $\mathbb{A}$: $\mathrm{FL}_r \times \mathrm{DIL} \to \mathrm{FL}_r$ (FL_r étant la catégorie des fleurs régulières) tel que:
à tout couple d'objets (F, G) de $\mathrm{FL}_r \times \mathrm{DIL}$, on associe la fleur régulière $\mathbb{A}_F(G)$, à tout couple de morphismes (T, U) de $\mathrm{FL}_r \times \mathrm{DIL}$, on associe le morphisme régulier $\mathbb{A}_T(U)$, comme suit:

- $\mathbb{A}_F(\underline{0}) = \mathrm{Id}$
- $\mathbb{A}_F(G+\underline{1}) = \mathbb{A}_F(G) \circ F$
- $\mathbb{A}_F\left(\sum_{t<y} G_t\right) = \prod_{t<y} \mathbb{A}_F(G_t)$
- $\mathbb{A}_T(E_{\underline{0}}) = E_{\mathrm{Id}}$
- $\mathbb{A}_T(U + E_{\underline{1}}) = \mathbb{A}_T(U) \circ T$
- $\mathbb{A}_T\left(\sum_{t<f} U_t\right) = \prod_{t<f} (\mathbb{A}_T(U_t))$ avec $f \in I(x, y)$ et $U_t \in I(G_t, G'_{f(t)})$ pour tout $t < x$;

- $\mathbb{A}_F(G)(y) = \left(\prod_{t<y} (\underline{1} + \mathbb{A}_F({}_tG))\right)(0)$,

G étant un dilatateur connexe différent de $\underline{1}$, et en utilisant les notations de [G, Section 5.4];

$$\mathbb{A}_F(G)(g) = \left(\prod_{t<g} (E_{\underline{1}} + \mathbb{A}_F({}_{gt}G))\right)(E_0)$$

$$\mathbb{A}_T(U)(y) = \left(\prod_{t<E_y} (E_{\underline{1}} + \mathbb{A}_F({}_tU))\right)(0).$$

- $\mathbb{A}_F(E_{\underline{0}G})(y)(z) = (\mathbb{A}_F(G))(z)$.

Le foncteur $\mathbb{A}$ défini dans [G, Section 5], s'écrit alors:

- $\mathbb{A}(D)(x, y) = (\mathbb{A}_{\underline{x}+\mathrm{Id}}(D))(y)$
- $\mathbb{A}(D)(E_x, g) = (\mathbb{A}_{\underline{x}+\mathrm{Id}}(D))(g)$
- $\mathbb{A}(T)(x, y) = (\mathbb{A}_{E_{\underline{x}}+E_{\mathrm{Id}}}(T))(y)$.

II.3.2. Définition

(i) On définit le foncteur Ξ_1 de ON dans ON: $\Xi_1(x)=\sum_n D_n$, $\Xi_1(f)=\sum_n D_n(f)$, quand D_n est une suite qui énumère tous les dilatateurs récursifs, et on suppose que $D_0=\underline{1}$.
(ii) On définit le foncteur G de ON dans ON:

$$G(0)=\omega \qquad G(E_0)=E_\omega$$
$$G(x+1)=G(x)+\Xi_1(G(x)) \qquad G(f+E_1)=G(f)+\Xi_1(G(f))$$
$$G(f+E_{01})=G(f)+E_{0\Xi_1(G(y))} \quad (f\in I(x,y))$$
$$G(\sup(x_i))=\sup(G(x_i)) \qquad G(\cup f_i)=\cup G(f_i)$$

II.3.3. Remarques

(i) Ξ_1 est un dilatateur non récursif: G est l'itéré de Ξ_1; G est une fleur (voir [G, 2.4.9 (iii)]) régulière (car $D_0=\underline{1}$).
(ii) Sur un segment initial de On (suffisamment grand pour ce qui nous intéresse) on a $G(x)=\omega_x^{CK}$; ce résultat est prouvé dans [G2]; une démonstration par d'autres méthodes a été donnée par Jean-Pierre Ressayre dans [R].
(iii) Le lecteur, qui voudra plus de précisions sur Ξ_1, pourra se reporter à [G3, 11B7].

II3.4. Définition. On définit le foncteur $\mathbb{\Lambda}^+$ de DIL dans FL_r par: $\mathbb{\Lambda}^+=\mathbb{\Lambda}_G$.

II.3.5. Lemme

(i) *pour tout ordinal* b, $b\leqq(\mathbb{\Lambda}^+(\underline{b}))(0)$
(ii) *pour tout ordinal* b, $b^+\leqq(\mathbb{\Lambda}^+(\underline{1}))(b+1)$
(iii) *si* $(F_u)_{u<b}$ *est une famille de fleure régulières, alors*

$$\left(\prod_{u<b}(\underline{1}+F_u)\right)(0)\geqq b\,.$$

Démonstration. (i) et (iii) se montrent facilement par induction sur b; (2) est immédiat.

II.3.6. Théorème. *Soit* D *une* $(\underline{b}+\mathrm{Id})$*-démonstration sans coupure du séquent* S, *et soit* $\theta(D, y)$ *l'ordinal défini en* II.2.2; *alors il existe un dilatateur* F_D *tel que* $\theta(D,y)\leqq\mathbb{\Lambda}({}^+(F_D))\,(y+1)$.

Démonstration. Par induction sur la démonstration fonctorielle D (on utilise les notations de II.2).
- D est un axiome: on pose $F_D=\underline{b}$, alors $\theta(D,y)\leqq(\mathbb{\Lambda}^+(\underline{b}))\,(y+1)$.
- La dernière règle de D est une règle unaire autre que (dJ): alors $\theta(D,y)=\theta(D_1,y)$ et on pose $F_D=F_{D_1}$.

– La dernière règle de D est une règle binaire: $\theta(D,y)=\sup(\theta(D_1,y),\theta(D_2,y))$ et par hypothèse d'induction, il existe deux dilatateurs F_{D_1} et F_{D_2} tels que $\theta(D_1,y)\leqq(\mathbb{\Lambda}^+(F_{D_1}))\,(y+1)$ et $\theta(D_2,y)\leqq(\mathbb{\Lambda}^+(F_{D_2}))\,(y+1)$; donc $\theta(D_1,y)\leqq(\mathbb{\Lambda}^+(F_{D_1}))\,(\mathbb{\Lambda}^+(F_{D_2}))\,(y+1))$ et $\theta(D_2,y)\leqq(\mathbb{\Lambda}^+(F_{D_1}))\,((\mathbb{\Lambda}^+(F_{D_2}))\,(y+1))$; on pose $F_D=F_{D_1}+F_{D_2}$ et on en déduit l'inégalité cherchée.

– La dernière règle est une ω-règle: $\theta(D,y)=\sup\{\theta(D_n,y);\ n<\omega\}$ et pour tout $n<\omega$, $\theta(D_n,y)\leqq(\mathbb{\Lambda}^+(F_{D_n}))\,(y+1)$; on pose $F_D=\sum_n F_{D_n}$; alor pour tout $n<\omega$, $\theta(D_n,y)\leqq(\mathbb{\Lambda}^+(F_D))\,(y+1)$ et $\theta(D,y)\leqq(\mathbb{\Lambda}^+(F_D))\,(y+1)$.

– La dernière règle est (gI):

(i) La conclusion de D est $\Gamma,(u,v)\in I\Phi^{d}\vdash\Delta$: alors $\theta(D,y)=\sup\{\theta(D_c,y);\ c<d\}$ et $\theta(D_c,y)\leqq(\mathbb{\Lambda}^+(F_{D_c}))\,(y+1)$; on pose $F_D=\sum_{c<d}F_{D_c}$, donc pour tout $c<d$, $\theta(D_c,y)\leqq(\mathbb{\Lambda}^+(F_D))\,(y+1)$; on en déduit l'inégalité cherchée.

(ii) La conclusion de D est $\Gamma,(u,v)\in I\Phi\vdash\Delta$: alors

$$\theta(D,y)=\sup(\{\theta(D_c,y);\ c<b\}\cup\{\theta(D_{b+z},y-(z+1));\ z<y\})$$

pour tout $c<b$, $\theta(D_c,y)\leqq(\mathbb{\Lambda}^+(F_{D_c}))\,(y+1)$ et pour tout $z<y$,

$$\theta(D_{b+z},y-(z+1))\leqq(\mathbb{\Lambda}^+(F_{D_{b+z}}))\,(y+1-(z+1));$$

soit $f\in I(x,x')$, $g\in I(y,y')$ on définit

$$H(x,0)=\sum_{c<b}F_{D_c}(x) \qquad H(f,E_0)=\sum_{c<b}F_{D_c}(f)$$

$$H(x,y+1)=H(x,y)+F_{D_{b+y}}(x) \qquad H(f,g+E_1)=H(f,g)+_{(b+g+E_1)}F(f)$$

(voir remarque ci-dessous)

$$H(f,g+E_{01})=H(f,g)+E_{0F_{D_{b+y'}}}(x')$$

$$H(x,\sup(y_i))=\sup(H(x,y_i)) \qquad H\Big(f,\bigcup_i g_i\Big)=\bigcup_i H(f,g_i)$$

alors on vérifie que H est un bilatateur (voir remarque ci-dessous) et on pose $U=UN(H)=U_0+U_1$ avec $U_0=H(\cdot,0)$, U_1 connexe:

– soit $c<b$, alors

$$\theta(D_c,y)\leqq(\mathbb{\Lambda}^+(F_{D_c}))\,(y+1)\leqq(\mathbb{\Lambda}^+(U_0))\,(y+1)\leqq(\mathbb{\Lambda}^+(U))\,(y+1)$$

– soit $z<y$, alors

$$(\mathbb{\Lambda}^+(U))\,((y+1)\geqq(\mathbb{\Lambda}^+(U_1))\,(y+1)=\Big(\prod_{z<y+1}(\underline{1}+\mathbb{\Lambda}^+(F_{D_{b+z}}))\Big)(0)$$

$$\geqq(\underline{1}+\mathbb{\Lambda}^+(F_{D_{b+z}}))\Big(\Big(\sum_{z<t<y+1}(\underline{1}+\mathbb{\Lambda}^+(F_{D_{b+t}}))\Big)(0)\Big);$$

or, par II.3.5 (iii),

$$\prod_{z<t<y+1}(\underline{1}+\mathbb{\Lambda}^+(F_{D_{b+t}}))\,(0)\geqq(y+1)-(z+1);$$

donc

$$(\mathbb{\Lambda}^+(U))(y+1) \geqq (\mathbb{\Lambda}^+(F_{D_{b+z}}))((y+1)-(z+1)) \geqq \theta(D_{b+z}, y-(z+1));$$

donc

$$\theta(D, y) \leqq (\mathbb{\Lambda}^+(U))(y+1)$$

et on pose $F_D = U$.

– La dernière règle est (dJ):

$$\theta(D, y) = \sup\{\theta(D_1, y)^+ + 1, \theta(D_1, \theta(D_1, \theta(D_1, y)) + 1\}$$

et

$$\theta(D_1, y) \leqq (\mathbb{\Lambda}^+(F_{D_1}))(y+1);$$

en utilisant II.3.5 (ii)

$$\theta(D_1, y)^+ \leqq (\mathbb{\Lambda}^+(\underline{1}))((\mathbb{\Lambda}^+(F_{D_1}))(y+1)+1)$$
$$\cdot(\mathbb{\Lambda}^+(\underline{1}))(\mathbb{\Lambda}^+(F_{D_1}+\underline{1})(y+1)) = (\mathbb{\Lambda}^+(\underline{1}+F_{D_1}+\underline{1}))(y+1)$$

et

$$\theta(D_1, y)^+ + 1 < (\mathbb{\Lambda}^+(\underline{1}+F_{D_1}+\underline{1}))(y+1)$$
$$\cdot \theta(D_1, \theta(D_1, y)) \leqq (\mathbb{\Lambda}^+(F_{D_1}))(\theta(D_1, y)+1)$$
$$\leqq (\mathbb{\Lambda}^+(F_{D_1}))((\mathbb{\Lambda}^+(F_{D_1}))(y+1)+1)$$
$$< (\mathbb{\Lambda}^+(F_{D_1}))((\mathbb{\Lambda}^+(F_{D_1}+\underline{1}))(y+1));$$

donc

$$\theta(D_1, \theta(D_1, y))+1 < (\mathbb{\Lambda}^+(F_{D_1}))(\mathbb{\Lambda}^+(F_{D_1}+\underline{1})(y+1)) = \mathbb{\Lambda}^+(F_{D_1}+F_{D_1}+\underline{1})(y+1);$$

on pose $F_D = F_{D_1}+\underline{1}+F_{D_1}+\underline{1}$ et on a $\theta(D, y) \leqq \mathbb{\Lambda}^+(F_D)(y+1)$.

II.3.7. Remarque. L'application $D \to F_D$ est fonctorielle, et plus précisément: si D est une $(\underline{b}+\mathrm{Id})$-démonstration, si D' est une $(\underline{a}+\mathrm{Id})$-démonstration, si $f \in I(b, a)$ et si $D = f^{-1}(D')$ [voir définition en I.2.3 cas (gI)], alors il existe une transformation naturelle ${}^D_f F$ de F_D dans $F_{D'}$ avec les propriétés suivantes:

– ${}^D_{(E_b)} F = E_{F_D}$

– si D'' est une $(\underline{c}+\mathrm{Id})$-démonstration, si $g \in I(a, c)$ et $D' = g^{-1}(D'')$ alors ${}^D_{g\circ f} F = {}^{D'}_g F \circ {}^D_f F$ [$\circ$ étant ici la composition définite par $(T \circ U)(x) = T(x) \circ U(x)$]

– si $f = \varinjlim(f_i)$, alors ${}^D_f F = \varinjlim({}^{(D_i)}_{(f_i)} F)$ avec pour chaque i, $D_i = f_i^{-1}(D_i')$, ...

– si $D_1 = \overrightarrow{f^{-1}}(D')$, $D_2 = g^{-1}(\overrightarrow{D'})$ et $D = (f \& g)^{-1}(D')$, alors ${}^D_{(f\&g)} F = {}^{(D_1)}_f F \,\&\, {}^{(D_2)}_g F$ (& étant le produit fibrè)

la construction de ${}^D_f F$ se fait par induction sur la démonstration D, et on vérifie aisément les propriétés précédentes: (avec les notations de II.3.4)

– si D est un axiome, on pose ${}^{D}_{f}F = \underline{f}$
– si la dernière règle de D est une règle unaire autre que (dJ), on pose:

${}^{D}_{f}F = {}^{(D_1)}_{f}F$

– si la dernière règle de D est une règle binaire:

${}^{D}_{f}F = {}^{(D_1)}_{f}F + {}^{(D_2)}_{f}F$

– si la dernière règle de D est une ω-règle:

${}^{D}_{f}F = \sum_{n} {}^{(D_n)}_{f}F$

– si la dernière règle de D est (gI):
i) dans le premier cas, ${}^{D}_{f}F = \sum_{c<f_d} {}^{(D_c)}_{f}F$ avec $f_d \in I(d, f(d))$, $f_d(c) = f(c)$;
ii) dans le deuxième cas, on pose:

${}_{f}T(y) = \sum_{c<f} ({}^{D_c}_{f}F + \sum_{z<E_y} {}^{(D_{b+z})}_{(f+E_{z+1})}F$ et ${}^{D}_{f}F = UN({}_{f}T)$

– si la dernière règle de D est (dJ):

${}^{D}_{f}F = {}^{D_1}_{f}F + E_{\underline{1}} + {}^{D_1}_{f}F + E_{\underline{1}}$.

Dans la définition de H, dans II.3.6, on utilise ${}_{(b+g+E_1)}F$ qui est donc une transformation naturelle entre $F_{D_{b+y}}$ et $F_{D_{b+y'}}$; et on utilise les propriétés précédentes pour démontrer que H est un bilatateur.

II.3.8. Corollaire. *Soit I_0 le premier récursivement inaccessible; si $\|u\| < I_0$, alors il existe un dilatateur F tel que $\|u\| < \mathbb{\Lambda}^+(F)(0)$.*

Démonstration. Si $\|u\| < I_0$, alors $(u, u) \in D\Phi$ et par le théorème de complétude I.3.1, le séquent $\vdash (u, u) \in J$ est (Id)-démontrable sans coupure (par le théorème I.3.2); soit D la (Id)-démonstration, alors par le théorème II.2.2, $(u, u) \in I\Phi^{\theta(D,0)}$; et par le théorème II.3.6 $\|u\| < \mathbb{\Lambda}^+(G)(1)$, pour un certain dilatateur G et on pose $F = G + \underline{1}$

II.3.9. Corollaire. *Soit f une fonction Σ_1 sur L_{I_0}; alors il existe un dilatateur F, tel que, pour tout ordinal $y < I_0$, $f(y) < \mathbb{\Lambda}^+(F)(y+1)$.*

Démonstration. Puisque f est Σ_1 sur L_{I_0}, il existe un indice e de fonction récursive partielle, tel que pour tout a, $\|a\| = y$ implique $\|\{e\}(a)\| \geqq f(y)$; donc,

$$\forall a[(a, a) \in D\Phi \rightarrow (\exists b\, T_1(e, a, b) \wedge (\{e\}(a), \{e\}(a)) \in D\Phi)];$$

est vrai; pour les théorèmes de complétude et d'élimination des coupures, il existe une (Id)-démonstration sans coupures D du séquent:

$$\vdash \forall a[(a, a) \in I\Phi \rightarrow (\exists b\, T_1(e, a, b) \wedge (\{e\}(a), \{e\}(a)) \in J)];$$

par le théorème II.2.2

$$\forall a[(a, a) \in I\Phi^{y} \rightarrow (\exists b\, T_1(e, a, b) \wedge (\{e\}(a), \{e\}(a)) \in I\Phi^{\theta(D,y)}I$$

en utilisant II.3.6, il existe un dilatateur G tel que $\theta(D, y) \leqq \mathbb{A}^+(G)\,(y+1)$ donc si $\|a\| = y$, $f(y) < \mathbb{A}^+(G)\,(y+2) < \mathbb{A}^+(G+\underline{1})\,(y+1)$; on pose $F = G+\underline{1}$.

II.3.10. Remarques

i) Dans toute cette Section II, on aurait pu considérer des séquents S, où $I\Phi$ n'apparait pas positivement; les apparaitions positives de $I\Phi$, ne jouent aucun rôle.

ii) Supposons que nous partions d'un séquent vrai S; alors par les théorèmes précédents, on en déduit le séquent vrai $S(I\Phi^y, I\Phi^{g(y)})$, avec, $g(y)$ de la forme $\mathbb{A}^+(F_D)\,(y+1)$; évidemment, la fonction g, ou mieux, le dilatateur g, est loin d'être récursif puisque'il utilise fortement le foncteur G (défini en II.3.2) dans sa définition; par contre, on a envie de dire que F_D est récursif; or F_D n'est pas faiblement fini [i.e. pour tout n entier, $F_D(n)$ fini], cela vient de l'utilisation de la ω-règle. En fait, si on regarde la structure de $\Phi(X)$, on voit que l'opérateur contient trois sortes de quantificateurs:

- des quantificateurs du genre «borné», e.g.: $\exists e \exists p(u = 3^e \cdot 2p \wedge \ldots)$;
- des quantificateurs restreints à X;
- des quantificateurs du genre $\exists z(T_1(f, x, z) \wedge \ldots)$; ces quantificateurs peuvent aisément être remplacés par: $\exists z' \in X \exists z < z'(T_1(f, x, z) \wedge \ldots)$ et nous nous retrouvons dans les deux cas précédents;

en particulier, on voit que l'interprétation des $I\Phi^z$ ne change pas si on se place dans des modèles qui ne sont pas des ω-modèles;

il en résulte qu'on peut toujours obtenir le même résultat de complétude sans la ω-règle. Si on examine les dilatateurs F_D ainsi obtenus (dans le théorème II.3.6, et les dilatateurs F obtenus dans les corollaires II.3.8 et II.3.9), à partir d'une $(\underline{b}+\mathrm{Id})$-démonstration, ils sont faiblement finis (pourvu que $b < \omega$) et récursifs.

iii) Il est clair que la fonction définie par $\mathbb{A}^+(F_D)$ est une fonction Σ_1 sur L_{I_0}.

III. Le cas du premier récursivement Mahlo

III.1.1. Définition. On définit les énoncés $\Phi_i (i = 1$ à $4)$ et Φ, du langage $L(X)$:

- $\Phi_1(X, u, v) : u = v = 1$
- $\Phi_2(X, u, v) : \exists e[v = 3e \wedge (e, e) \in X \wedge [(u = v) \vee ((u, u) \in X \wedge (v, v) \notin X)]]$
- $\Phi_3(X, u, v) : \exists e \exists f[v = 3\langle e, f\rangle + 1 \wedge (e, e) \in X$
  $\wedge \forall x[(x \neq e \wedge (x, e) \in X) \to \exists z\, T_1(f, x, z) \wedge (\{f\}(x), \{f\}(x)) \in X]$
  $\wedge [(u = v) \vee ((u, u) \in X \wedge (v, v) \notin X)]]$
- $\Phi_4(X, u, v) : \exists e[v = 3e + 2 \wedge \forall x \left(\bigvee_{i=1}^{3} \Phi_i(X, x, x) \to (x, x) \in X \right)$
  $\wedge \forall x((x, x) \in X \to \exists z\, T_1(e, x, z) \wedge (\{e\}(x), \{e\}(x)) \in X)$
  $\wedge [(u = v) \vee ((u, u,) \in X \wedge (v, v) \notin X)]]$
- $\Phi(X, u, v) = \bigvee_{i=1}^{4} \Phi_i(X, u, v)$.

On définit les énoncés $\Psi_i (i=1$ à $4)$, Ψ, du langage $L(X, Y)$, en remplaçanat respectivement dans chaque Φ_i et Φ, les occurrences négatives de X par Y. ($\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une fonction de paire fixée).

III.1.2. Remarques. On définit les $I\Phi^x$ pour tout ordinal x; l'ordinal de clôture de Φ est μ_0, le premier récursivement Mahlo; si y est un admissible, on a:

$$\forall x \left(\bigvee_{i=1}^{3} \Phi_i(I\Phi^y, x, x) \rightarrow (x, x) \in I\Phi^y \right).$$

On note $\|(u, v)\|$ le plus petit ordinal x tel que $(u, v) \in I\Phi^{x+1}$ et $\|u\|$, l'ordinal $\|(u, u)\|$; si $\|(u, v)\|$ est défini, alors $\|u\| < \|(u, v)\| = \|v\|$ pour $u \neq v$. Si $\|u\|$ et $\|v\|$ sont définies et si $\|u\| < \|v\|$, alors $\|(u, v)\|$ est définie. i) $\|1\| = 0$, ii) $\|3e\| = \|e\| + 1$ (voir définition de Φ_2), iii) si pour tout x tel que $\|x\| < \|e\|$, $\{f\}(x)$ est défini, alors, $\|3\langle e, f \rangle + 1\| = \sup\{\|\{f\}(x)\| + 1;\ \|x\| < \|e\|\}$ (voir définition de Φ_3), iv) $\|3e+2\|$ est le plus petit admissible a tel que pour tout x tel que $\|x\| < a$, $\{e\}(x)$ soit défini et $\|\{e\}(x)\| < a$ (voir définition de Φ_4).

III.2. Le théorème de majoration

Les notations sont celles de II.2; en particulaier J n'apparait pas négativement dans S.

III.2.1. Théorème. *Soit D une $(\underline{b} + \mathrm{Id})$-démonstration sans coupure du séquent S; on définit une fonction $\theta(D, \cdot)$ de* On *dans* On, *qui envoie μ_0 dans lui-même et telle que, pour tout y, $S_y(I\Phi^{b+y}, I\Phi^{\theta(D,y)})$ soit vrai. De plus, $\theta(D, \cdot)$ est Σ_1 sur L_{μ_0}.*

Démonstration. La démonstration pour tous les cas, sauf celui où la dernière règle est (dJ), est identique à celle de II.2.2; on vérifie aisément à chaque étape que la fonction $\theta(D, \cdot)$ est Σ_1 sur L_{μ_0} (i.e. sa restriction à μ_0 est μ_0-récursive).
– La dernière règle est (dJ):

$$\frac{\begin{matrix} D_1 \\ \Gamma \vdash \Psi(I\Phi, J, u, v), \Delta \end{matrix}}{\Gamma \vdash (u, v) \in J, \Delta}.$$

Soit S_1 le séquent démontré par D_1; par hypothèse d'induction, $(S_1)_y(I\Phi^{b+y}, I\Phi^{\theta(D_1,y)})$ est vrai pour tout y; soit $\Delta_{y,z}$ (resp. $\Gamma_{y,z}$) la suite obtenue en remplaçant dans Δ_y (Γ_y) les apparitions positives (resp. négatives) de $I\Phi^{b+y}$ et de J par $I\Phi^z$:
a) Si $\Gamma_{y,\theta(D_1,y)} \vdash \Delta_{y,\theta(D_1,y)}$ est vrai, alors $\Gamma_{y,z} \vdash (u, v) \in I\Phi^z$, $\Delta_{y,z}$ est vrai pour tout $z \geqq \theta(D_1, y)$.
b) Si $\Gamma_{y,\theta(D_1,y)} \vdash \Delta_{y,\theta(D_1,y)}$ est faux, alors $\Psi(I\Phi^{b+y}, I\Phi^{\theta(D_1,y)}, u, v)$ est vraie et donc, une et seule des formules $\Psi_i(I\Phi^{b+y}, I\Phi^{\theta(D_1,y)}, u, v)$ est vraie; d'où les quatre cas suivants:
(1) Si $\Psi_1(I\Phi^{b+y}, I\Phi^{\theta(D_1,y)}, \mathrm{u}, \mathrm{v})$ est vraie, alors $u = v = 1$, donc $\Gamma_{y,z} \vdash (u, v) \in I\Phi^z$, $\Delta_{y,z}$ pour tout $z \geqq 1$.

(2) Si $\Psi_2(I\Phi^{b+y}, I\Phi^{\theta(D_1,y)}, u, v)$ est vraie, alors

$$\exists e[v=3e \wedge (e,e) \in I\Phi^{\theta(D_1,y)} \wedge [(u=v) \vee [(u,u) \in I\Phi^{\theta(D_1,y)} \wedge (v,v) \notin I\Phi^{b+y}]]]$$

est vrai; considérons le séquent, vrai par hypothèse d'induction, $(S_1)_{\theta(D_1,y)}(I\Phi^{b+\theta(D_1,y)}, I\Phi^{\theta(D_1,\theta(D_1,y))})$:

– Si $\Gamma_{\theta(D_1,y),\theta(D_1,\theta(D_1,y))} \vdash \Delta_{\theta(D_1,y),\theta(D_1,\theta(D_1,y))}$ est vrai, alors $\Gamma_{y,z} \vdash (u,v) \in I\Phi^z$, $\Delta_{y,z}$ est vrai pour tout $z \geqq \theta(D_1, \theta(D_1, y))$.

– Si $\Gamma_{\theta(D_1,y),\theta(D_1,\theta(D_1,y))} \vdash \Delta_{\theta(D_1,y),\theta(D_1,\theta(D_1,y))}$ est faux, $\Psi_2(I\Phi^{b+\theta(D_1,y)}, I\Phi^{\theta(D_1,\theta(D_1,y))}, u, v)$ est vrai; on en déduit que $(u=v) \vee (v,v) \notin I\Phi^{\theta(D_1,y)}$ est vrai; d'où $\Phi_2(I\Phi^{\theta(D_1,y)}, u, v)$ est vrai; on conclut que $\Gamma_{y,z} \vdash (u,v) \in I\Phi^z$, $\Delta_{y,z}$ est vrai pour tout $z \geqq \theta(D_1, y)+1$;

en conclusion, dans ce cas (2), $\Gamma_{y,2} \vdash (u,v) \in I\Phi^z$, $\Delta_{y,z}$ est vrai pour tout $z \geqq \theta(D_1, \theta(D_1, y))+1$.

(3) Si $\Psi_3(I\Phi^{b+y}, I\Phi^{\theta(D_1,y)}, u, v)$ est vrai $(+)$, soit $a=\theta(D_1, y)$; considérons le séquent vrai par hypothèse d'induction $(S_1)_{\theta(D_1,c)}(I\Phi^{b+\theta(D_1,c)}, I\Phi^{\theta(D_1,\theta(D_1,c))})$ avec $c=y$ où $c=a$;

– Si $\Gamma_{\theta(D_1,c),\theta(D_1,\theta(D_1,c))} \vdash \Delta_{\theta(D_1,c),\theta(D_1,\theta(D_1,c))}$ (avec $c=y$ ou $c=a$ est vrai), alors $\Gamma_{y,z} \vdash (u,v) \in I\Phi^z$, $\Delta_{y,z}$ est vrai pour tout $z \geqq \theta(D_1, \theta(D_1, a))$;

– Si $\Gamma_{\theta(D_1,c),\theta(D_1,\theta(D_1,c))} \vdash \Delta_{\theta(D_1,c),\theta(D_1,\theta(D_1,c))}$ est faux pour $c=a$ et $c=y$, alors $\Psi(I\Phi^{b+\theta(D_1,c)}, I\Phi^{\theta(D_1,\theta(D_1,c))}, u, v)$ est vrai, donc,

$\Psi_3(I\Phi^{b+\theta(D_1,y)}, I\Phi^{\theta(D_1,\theta(D_1,y))}, u, v)$ est vrai $(++)$

et

$\Psi_3(I\Phi^{b+\theta(D_1,a)}, I\Phi^{\theta(D_1,\theta(D_1,a))}, u, v)$ est vrai $(+++)$

en utilisant $(+)$, on en déduit que $v=3\langle e, f\rangle+1$ [pour un certain couple (e,f)] et que $(e,e) \in I\Phi^{\theta(D_1,y)}$ sont vrais; par $(++)$ on déduit que

$$\forall x[(x \neq e \wedge (x,e) \in I\Phi^{b+\theta(D_1,y)}) \rightarrow \exists z\, T_1(f,x,z) \wedge (\{f\}(x), \{f\}(x)) \in I\Phi^{\theta(D_1,\theta(D_1,y))}]$$

est vrai; comme $(e,e) \in I\Phi^{\theta(D_1,y)}$, en utilisant la remarque III.1.2, on a $(x,e) \in I\Phi^{\theta(D_1,y)}$ ssi $(x,e) \in I\Phi^{\theta(D_1,a)}$; donc,

$$\forall x[(x \neq e \wedge (x,e) \in I\Phi^{\theta(D_1,a)}) \rightarrow \exists z\, T_1(f,x,z) \wedge (\{f\}(x), \{f\}(x)) \in I\Phi^{\theta(1,a)}]$$

est vrai; par $(++)$ $(u=v) \vee (u,u) \in I\Phi^{\theta(D_1,a)}$ est vrai; par $(+++)$ $(u=v) \vee (v,v) \notin I\Phi^{b+\theta(D_1,a)}$ est vrai, donc, $(u=v) \vee (v,v) \notin I\Phi^{\theta(D_1,a)}$ est vrai; on en déduit que $\Phi_3(I\Phi^{\theta(D_1,a)}, u, v)$ est vrai, donc $\Gamma_{y,z} \vdash (u,v) \in I\Phi^z$, $\Delta_{y,z}$ est vrai pour $z \geqq \theta(D_1, \theta(D_1, y))+1$

en conclusion, dans ce cas (3), $\Gamma_{y,z} \vdash (u,v) \in I\Phi^z$, $\Delta_{y,z}$ est vrai pour tout $z \geqq \theta(D_1, \theta(D_1, y)))+1$.

(4) Si $\Psi_4(I\Phi^{b+y}, I\Phi^{\theta(D_1,y)}, u, v)$ est vrai $(+)$, soit a le premier point inaccessible admissible de $\theta(D_1, \cdot)$ tel que $a > \theta(D_1, y)$ [un tel point existe car $\theta(D_1, \cdot)$ est Σ_1]:

– Si il existe un ordinal z tel que $\Gamma_{z,\theta(D_1,z)} \vdash \Delta_{z,\theta(D_1,z)}$ et $y \leqq z \leqq a$ soit vrai alors $\Gamma_{y,t} \vdash (u,v) \in I\Phi^t$, $\Delta_{y,t}$ est vrai pour tout $t \geqq \theta(D_1, a)$;
– Si pour tout z tel que $y \leqq z \leqq a$, $\Gamma_{z,\theta(D_1,z)} \vdash \Delta_{z,\theta(D_1,z)}$ est faux, alors, pour tout z tel que $y \leqq z \leqq a$, $\Psi_4(I\Phi^{b+z}, I\Phi^{\theta(D_1,z)}, u, v)$ est vrai; par (+), il existe e tel que $v = 3e+2$; comme a est admissible,

$$\forall x \left[\bigvee_{i=1}^{3} \Phi_i(I\Phi^a, x, x) \rightarrow (x,x) \in I\Phi^a \right] \text{ est vrai;}$$

si $(x,x) \in I\Phi^a$, il existe $z \geqq y$ tel que $(x,x) \in I\Phi^z (z < a)$, et comme $\Psi_4(I\Phi^{b+z}, I\Phi^{\theta(D_1,z)}, u, v)$ est vrai,

$$\forall x[(x,x) \in I\Phi^{b+z} \rightarrow \exists t\, T_1(e,x,t) \wedge (\{e\}(x), \{e\}(x)) \in I\Phi^{\theta(D_1,z)}]$$

est vrai; par définition de a, $z < a$ implique $\theta(D_1, z) < a$; on en déduit que

$$\forall x[(x,x) \in I\Phi^a \rightarrow \exists t\, T_1(e,x,t) \wedge (\{e\}(x), \{e\}(x)) \in I\Phi^a]$$

est vrai. Comme $\Psi_4(I\Phi^{b+z}, I\Phi^{\theta(D_1,z)}, u, v)$ est vrai pour tout z tel que $y \leqq z \leqq a$, $(u=v) \vee (v,v) \notin I\Phi^a$ est vrai; donc $(u=v) \vee [(u,u) \in I\Phi^a \wedge (v,v) \notin I\Phi^a]$ est vrai; donc $\Phi_4(I\Phi^a, u, v)$ est vrai et $\Gamma_{y,t} \vdash (u,v) \in I\Phi^t$, $\Delta_{y,t}$ est vrai pour tout $t \geqq a+1$.
En conclusion, dans ce cas (4), $\Gamma_{y,z} \vdash (u,v) \in I\Phi^z$, $\Delta_{y,z}$ est vrai pour tout $z \geqq \theta(D_1, a) + 1$. Donc, si la dernière règle de D est (dJ), on pose $\theta(D, y) = \theta(D_1, a) + 1$, avec a le premier point inaccessible admissible de $\theta(D_1, \cdot)$, tel que $a > \theta(D_1, y)$; la fonction $\theta(D, \cdot)$ ainsi définie est Σ_1 sur L_{μ_0}.

III.3. Majoration par le foncteur $\mathbb{I}\Gamma$

III.3.1. Remarque. Le résultat de II.3.8 montre, que si I_0 est le premier récursivement inaccessible, alors $I_0 \leqq \mathbb{\Lambda}^+(\Xi_1)(0)$, puisque Ξ_1 est la somme de tous les dilatateurs récursifs; d'autre part, on voit aisément, que pour tout dilatateur récursif F, $\mathbb{\Lambda}^+(F)(0) < I_0$, et que $\mathbb{\Lambda}^+(\Xi_1)(0) \leqq I_0$; on en déduit donc que $\mathbb{\Lambda}^+(\Xi_1)(0) = I_0$.
Soit A, la clôture pour la topologie de l'ordre de l'ensemble des récursivement inaccessibles, et g la fonction énumérant A, par ordre croissant; soient $I_x = g(x)$, et $\Phi_{(x)}$ la définition inductive obtenue en rajoutant à la définition de Φ dans la Section II, des clauses définissant I_z, pout tout $z \leqq x$; l'ordinal de clôture de $\Phi_{(x)}$ sera I_{x+1}, et on montre comme dans la Section II que pour tout ordinal $y < I_{x+1}$, il existe un dilatateur récursif F, tel que $\mathbb{\Lambda}^+(F)\ (I_x+1) > y$; on voit aisément que $\mathbb{\Lambda}^+(\Xi_1)\ (x+1) \leqq I_{x+1}$; on en déduit donc que $\mathbb{\Lambda}^+(\Xi_1)\ (x+1) = I_{x+1}$.
Donc, $\mathbb{\Lambda}^+(\Xi_1)$ énumère A.
Plus généralement, si H est une fleur régulière telle que la fonction $x \mapsto H(x)$, soit Σ_1 sur L_{μ_0}, alors $\mathbb{\Lambda}_H(\Xi_1)$ énumère la clôture pour la topologie de l'ordre, de l'ensemble des points fixes admissibles de la fonction $x \mapsto H(x)$. On le démontrerait par des méthodes similaires à celles de la partie II, ou en utilisant le résultat de [G, N].

III.3.2. Définition. On définit un foncteur $\Pi\Gamma$ de DIL dans FL_r de la manière suivante:

(i) $\Pi\Gamma(\underline{0}) = \mathrm{Id}$ $\quad$ $\Pi\Gamma(E_{\underline{0}}) = E_{\mathrm{Id}}$

(ii) $\Pi\Gamma(F+\underline{1}) = \Pi\Gamma(F) \circ \mathbb{A}_{\Pi\Gamma(F)}(\Xi_1)$ $\quad$ $\Pi\Gamma(T+E_{\underline{1}}) = \Pi\Gamma(T) \circ \mathbb{A}_{\Pi\Gamma(T)}(E_{\Xi_1})$

$\Pi\Gamma(T+E_{\underline{01}}) = \Pi\Gamma(T) \circ \mu_{\Pi\Gamma(G+\underline{1})}$

lorsque $T \in I(F, G)$ et μ_H étant le morphisme régulier de FL_r, $\mu_H \in I(\mathrm{Id}, H)$, et pour tous ordinaux x, y tels que $y < x$, $\mu_H(x)(y) = H(y)$.

(iii) Soit $F = \sum_{i<x} F_i$ avec x limite, et F_i connexe pour tout i, $f \in I(x, y)$ y limite, $G = \sum_{i<y} G_i$, $T \in I(F, G)$ avec $T = \sum_{i<f} T_i$ $(T_i \in I(F_i, G_{f(i)}))$; on pose, pour $j < x$, $F'_j = \sum_{i<j} F_i$, $G'_j = \sum_{i<j} G_i$, $T'_j = \sum_{i<j} T_i$ $(T'_j \in I(F'_j, G'_{f(j)}))$; alors:

$$\Pi\Gamma(F) = \varinjlim_{x}{}^{*}(\Pi\Gamma(G'_j), \Pi\Gamma(E_{G'_jG'_k})) \qquad \Pi\Gamma(T) = \varinjlim(\Pi\Gamma(T'_j))$$

Soit U une transformation naturelle d'un dilatateur H dans un dilatateur H',

$$\Pi\Gamma(U + E_{\underline{0}F}) = \varinjlim(\Pi\Gamma(U + E_{\underline{0}F'_j})).$$

(iv) Si F et G sont de sorte Ω, si $T \in I(F, G)$, alors:

$$\Pi\Gamma(F)(x) = (\Pi\Gamma(\mathrm{SEP}(F)(\cdot, 0))) \circ \prod_{t<x} (\underline{1} + \Pi\Gamma(\mathrm{SEP}(F)(\cdot, t+1)))(0)$$

$$\Pi\Gamma(F)(f) = (\Pi\Gamma(\mathrm{SEP}(F)(\cdot, E_0))) \circ \prod_{t<f} (E_{\underline{1}} + \Pi\Gamma(\mathrm{SEP}(F)(\cdot, E_{t+1})))(E_0)$$

$$\Pi\Gamma(T)(x) = (\Pi\Gamma(\mathrm{SEP}(T)(\cdot, 0))) \circ \prod_{t<E_x} (E_{\underline{1}} + \Pi\Gamma(\mathrm{SEP}(T)(\cdot, t+1)))(0).$$

Soit U une transformation naturelle d'un dilatateur H dans un dilatateur H', et soit F un dilatateur connexe,

$$\Pi\Gamma(U + E_{\underline{0}F}) = \Pi\Gamma(U) \circ \nu_{H'+F}, \qquad \nu_{H'+F}$$

étant la transformation naturelle de l'identité, définie par:

$$(\nu_{H'+F}(x))(y) = \left(\prod_{t<y} (\underline{1} + \Pi\Gamma(\mathrm{SEP}(H'+F)(\cdot, t+1)))\right)(0).$$

III.3.3. Remarque. La preuve que la définition précédente est correcte se fait de manière tout à fait analogue à celle de la Section 5 de [G] pour $\mathbb{A}$.

III.3.4. Théorème *Soit D une $(\underline{b} + \mathrm{Id})$-démonstration sans coupure du séquent S, et soit $\theta(D, y)$, l'ordinal défini en* III.2.1*; alors il existe un dilatateur F_D tel que, $\theta(D, y) \leqq \Pi\Gamma(F_D)(y+1)$.*

Démonstration. La démonstration est tout à fait analogue à celle de II.3.6.

– D est un axiome: on pose $F_D = \underline{b}$.

– La dernière règle est une règle unaire autre que (dJ): $F_D = F_{D_1}$.
– La dernière règle est une règle binaire: $F_D = F_{D_1} + F_{D_2}$; on remarque que, puisqu'il existe une transformation naturelle de F_{D_1} dans F_D, $\mathbb{\Gamma}(F_{D_1})(y+1) \leqq \mathbb{\Gamma}(F_D)(y+1)$; de même, $\mathbb{\Gamma}(F_{D_2})(y+1) \leqq \mathbb{\Gamma}(F_D)(y+1)$.
– La dernière règle est une ω-règle: $F_D = \sum_n F_{D_n}$ et, comme pour tout $n < \omega$, il existe une transformation naturelle de F_{D_n} dans F_D, $\mathbb{\Gamma}(F_{D_n})(y+1) \leqq \mathbb{\Gamma}(F_D)(y+1)$.
– La dernière règle est (gI):
(i) La conclusion de D est $\mathbb{\Gamma}$, $(u, v) \in I\Phi^d \vdash \Delta$: $F_D = \sum_{c<d} F_{D_c}$.
(ii) La conclusion de D est $\mathbb{\Gamma}$, $(u, v) \in I\Phi \vdash \Delta$: on définit comme dans II.3.6 le bilatateur H, et on pose $U = UN(H) = U_0 + U_1$ avec $U_0 = H(\cdot, 0)$, U_1 connexe;
– Soit $c < b$, alors

$$\theta(D_c, y) \leqq \mathbb{\Gamma}(F_{D_c})(y+1) \leqq \mathbb{\Gamma}(U_0)(y+1) \leqq \mathbb{\Gamma}(U)(y+1).$$

– Soit $z < y$, alors

$$\mathbb{\Gamma}(U)(y+1) \geqq \mathbb{\Gamma}(U_1)(y+1) = \Big(\prod_{t<y+1} (\underline{1} + \mathbb{\Gamma}(\mathrm{SEP}(U_1)(\cdot, t+1)))\Big)(0)$$

$$\geqq (\underline{1} + \mathbb{\Gamma}(\mathrm{SEP}(U_1)(\cdot, z+1)))\Big(\Big(\prod_{z<t<y+1} (\underline{1} + \mathbb{\Gamma}(\mathrm{SEP}(U_1)(\cdot, t+1)))\Big)(0)\Big);$$

comme, il y a une transformation naturelle de $F_{D_{b+z}}$ dans $\mathrm{SEP}(U_1)(\cdot, z+1)$ et que par II.3.5 (iii)

$$\prod_{z<t<y+1} (\underline{1} + (\mathrm{SEP}(U_1)(\cdot, t+1)))(0) \geqq (y+1) - (z+1),$$

on en déduit que

$$\mathbb{\Gamma}(U)(y+1) \geqq \mathbb{\Gamma}(F_{D_{b+z}})((y+1) - (z+1)) \geqq \theta(D_{b+z})((y+1) - (z+1)).$$

On pose $F_D = \mathrm{U}$.
– La dernière règle est (dJ): $\theta(D, y) = \theta(D_1, a) + 1$, avec a premier point inaccessible admissible de la fonction $\theta(D_1, \cdot)$, suüérieur à $\theta(D_1, y)$; par hypothèse d'induction, $\theta(D_1, y) \leqq \mathbb{\Gamma}(F_{D_1})(y+1)$; soit $z < \mathbb{\Gamma}(F_{D_1} + \underline{1})(y+1)$, alors

$$\theta(D_1, z) \leqq \mathbb{\Gamma}(F_{D_1})(z+1) < \mathbb{\Gamma}(F_{D_1})(\mathbb{\Gamma}(F_{D_1} + \underline{1})(y+1))$$
$$= \mathbb{\Gamma}(F_{D_1} + \underline{1})(y+1);$$

donc $\mathbb{\Gamma}(F_{D_1} + \underline{1})(y+1)$ est un point inaccessible admissible de $\theta(\mathrm{D}_1, \cdot)$, supérieur à $\theta(\mathrm{D}_1, \mathrm{y})$; donc $a \leqq \mathbb{\Gamma}(F_{D_1} + \underline{1})(y+1)$ et $a + 1 < \mathbb{\Gamma}(F_{D_1} + \underline{2})(y+1)$;

$$\theta(D_1, a) \leqq \mathbb{\Gamma}(F_{D_1})(a+1) < \mathbb{\Gamma}(F_{D_1})(\mathbb{\Gamma}(F_{D_1} + \underline{2})(y+1)) = \mathbb{\Gamma}(F_{D_1} + \underline{2})(y+1);$$

on pose $F_D = F_{D_1} + \underline{2}$.

III.3.5. Corollaire. *Soit μ_0, le premier récursivement Mahlo; si $\|u\| < \mu_0$, alors il existe un dilatateur F tel que $\|u\| < \mathbb{\Gamma}(F)(0)$.*

Démonstration. La démonstration est identique à celle de II.3.8.

III.3.6. Corollaire. *Soit f une fonction Σ_1 sur L_{μ_0}; alors il existe un dilatateur F, tel que, pour tout ordinal $y<\mu_0$, $f(y)<\mathbb{\Gamma}(F)(y+1)$.*

Démonstration. La démonstration est identique à celle de II.3.9.

III.3.7. Remarque

i) Comme dans II.3.10 ii) on voit que dans les corollaires III.3.5 et III.3.6, F peut être choisi récursif, et dans le théorème III.3.4, F_D peut être choisi récursif à condition que b soit fini.
ii) Il est clair que la fonction $x\mapsto\mathbb{\Gamma}(F_D)$ est Σ_1 sur L_{μ_0}.

BIBLIOGRAPHIE

[B] Bachmann, H.: Die Normalfunktionen und das Problem der ausgezeichneten Folgen von Ordinalzahlen. Vierteljahresschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich **XCV**, 115–117 (1950).

[G] Girard, J.Y.: Π^1_2-Logic. Part 1: Dilators. Ann. Math. Logic **21**, 75–219 (1981). Amsterdam: North-Holland 1981.

[G2] Girard, J.Y.: A survey of Π^1_2-logic. Dans: Pfeiffer, H., Los, J., Cohen, L.J. (eds.): Logic, methodology, and philosophy of science, Vol. VI. Amsterdam: North-Holland (1982).

[G3] Girard, J.Y.: Proof theory and logical complexity. Bibliopolis. Napoli (a paraître).

[G, N] Girard, J.Y., Norman, D.: Set recursion and Π^1_2-logic. Ann. Math. Logic (a paraître).

[G, R] Girard, J.Y., Ressayre, J.P.: A paraître dans: Proceedings of the A.M.S. Conference in recursion theory (1982).

[M] Masseron, M.: Majoration des fonctions ω_1^{CK}-récursives par des échelles. Thèse de 3$^{\text{ième}}$ cycle. Université Paris-Nord (Fev. 1980).

[R] Ressayre, J.P.: Bounding generalized recursive functions of ordinals by effective functors; a complement to the Girard theorem. Dans: Stern, J. (ed.): Proc. of the Herbrand Symposium. Logic Colloquium '81. Amsterdam: North-Holland 1981.

[V] Vauzeilles, J.: Dilators and gardens. Dans: Stern. J. (ed.): Proc. of the Herbrand Symposium. Logic Colloquium '81. Amsterdam: North-Holland 1981.

[V.d.W] Van de Wiele, J.: Recursive dilators and generalized recursions: Dans: Stern. J. (ed.): Proc of the Herbrand Symposium. Logic Colloquium '81. Amsterdam: North-Holland 1981.

J. Y. Girard
Université Paris VII
F-75221 Paris, Cedex 05
France

J. Vauzeilles
44, rue de la Pépinière
F-92160 Antony
France