Arch. math. Logik **22** (1982), 159–166

EIN VOLLSTÄNDIGKEITSBEWEIS FÜR SCHNITTFREIE KALKÜLE MIT DER MAXIMALISIERUNGSMETHODE VON HENKIN *

Jürgen-Michael Glubrecht

0. Einleitung

Für den üblichen Vollständigkeitsbeweis der Prädikatenlogik mit der Maximalisierungsmethode von Henkin [1] wird die *Transitivität* der Ableitbarkeitsbeziehung $\vdash$ benutzt, und zwar in der Form des Modus Ponens (zusammen mit dem Deduktionstheorem) oder der Schnittregel. Ausgehend von einer widerspruchsfreien Aussagenmenge Γ wird eine *maximal* widerspruchsfreie Aussagenmenge Γ^* konstruiert, d. h. für jede Aussage φ gilt:

(A) $\Gamma^* \cup \{\varphi\}$ *ist widerspruchsfrei* gdw $\varphi \in \Gamma^*$;

darüber hinaus enthält Γ^* mit jeder Existenzaussage ein Beispiel. Mit Hilfe der Transitivität von $\vdash$ ergibt sich aus (A) sofort die *deduktive Abgeschlossenheit* von Γ^*:

(B) $\Gamma^* \vdash \varphi$ gdw $\varphi \in \Gamma^*$;

denn wäre $\Gamma^* \vdash \varphi$ und $\varphi \notin \Gamma^*$, so ergäbe sich mit (A) daß $\Gamma^* \cup \{\varphi\}$ und – wegen der Transitivität! – auch Γ^* widerspruchsvoll wäre; die andere Richtung ($\Leftarrow$) von (B) gilt trivial. Man zeigt nun leicht, daß es eine Bewertung J^* gibt, die gerade die Aussagen aus Γ^* mit W *(wahr)* bewertet:

(C) $\varphi \in \Gamma^*$ gdw $J^*(\varphi) = W$.

Der *Beweis* von (C) erfolgt durch Induktion über den Aufbau von φ. Aus (C) folgt unmittelbar:

(D) Γ *hat ein Modell.*

Ohne die Transitivität von $\vdash$ geht (B) verloren, und damit kann auch (C) nicht mehr gezeigt werden. Nun ist (C) recht stark: für (D) wird nur die eine Richtung ($\Rightarrow$) benötigt. Schwächt man jedoch (C) zu

(C′) *wenn* $\varphi \in \Gamma^*$, *so* $J^*(\varphi) = W$

* Eingegangen am 7. 3. 1980.

ab, so ist die Induktionsvoraussetzung für den Beweis von (C′) zu schwach – und zwar für Negationen. Während man z. B. für Konjunktionen und Existenzaussagen auf Teilaussagen zurückgreifen kann, die in Γ^* liegen, muß man für $\neg\varphi$ auf φ mit $\varphi\notin\Gamma^*$. zurückgehen; man muß daher $J^*(\varphi)=F$ *(falsch)* bereits wissen. Das legt es nahe, bei der Maximalisierung neben Γ^* auch noch eine Menge Δ^* zu konstruieren, in der die Aussagen gesammelt werden, die später mit F bewertet werden. Eine solche *doppelte* Maximalisierung wurde von Henkin in [2] benutzt, um den Interpolationssatz zu zeigen. Dort allerdings wird auf Negationsnormalformen zurückgegriffen; dabei entfallen die Schwierigkeiten, die sich beim Induktionsschritt für die Negation ergeben. Im folgenden wird gezeigt, daß sich mit Hilfe der doppelten Maximalisierung die Vollständigkeit eines schnittfreien Kalküls unmittelbar beweisen läßt. Mit diesem Vollständigkeitsbeweis ergibt sich auch eine rein semantische Begründung der *Eliminierbarkeit* der Schnittregel: weil die Schnittregel korrekt ist, kann sie zum schnittfreien Kalkül hinzugefügt werden, ohne die Menge der ableitbaren Sequenzen zu vergrößern.

1. Terminologie

$L(C)$ sei die Sprache der Prädikatenlogik (erster Stufe) *ohne* Identität und Funktionskonstanten mit den (nichtlogischen) *Konstanten* aus C; die Elemente der Menge C sind demnach *Individuenkonstanten* (syntaktisch: c, d) oder *Relationskonstanten* (R) beliebiger Stellenzahl. *Terme* (r, s, t) sind die Individuenkonstanten und die *(Individuen-)Variablen* (x); *Formeln* (φ, ψ) sind $Rt_1 \ldots t_n$ *(R n-stellig)*, $\top$ *(Verum)*, $\neg\varphi$, $\varphi\wedge\psi$, $\exists x\varphi$. Die Beschränkung auf die Junktoren $\top$, $\neg$, $\wedge$ und den Quantor $\exists$ ist für das folgende unerheblich. π sei stets eine *atomare* Formel. φ^x_t sei die Formel, die aus φ durch Substitution von t für x entsteht; ist t eine Individuenkonstante, so ist diese Substitution immer erlaubt. Ist J eine *Bewertung* über der Menge A und $a\in A$, so sei J^x_a die Bewertung, die x mit a belegt und ansonsten auf den Variablen und Konstanten mit J übereinstimmt. Γ, Δ seien beliebige, Σ, Π *endliche* Formelmengen. Die *Folgerungsbeziehung* ist zwischen Mengen erklärt: $\Gamma\models\Delta$ *(aus Γ folgt Δ)* :gdw für jede Bewertung J gilt: wenn $J(\varphi)=W$ für alle $\varphi\in\Gamma$, so gibt es ein $\psi\in\Delta$ mit $J(\psi)=W$. Wir schreiben $\Gamma\not\models\Delta$, wenn Δ aus Γ nicht folgt. Eine *Sequenz* $\Sigma\rhd\Pi$ ist ein geordnetes Paar zweier endlicher Formelmengen Σ, Π. Wir schreiben $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n, \varphi_1, \ldots, \varphi_m \rhd \psi_1, \ldots, \psi_i, \Pi_1, \ldots, \Pi_k$ für

$$\Sigma_1\cup\ldots\cup\Sigma_n\cup\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}\rhd\{\psi_1, \ldots, \psi_i\}\cup\Pi_1\cup\ldots\cup\Pi_k$$

und $\Sigma\rhd$ bzw. $\rhd\Pi$ für $\Sigma\rhd\phi$ bzw. $\phi\rhd\Pi$.

2. Kalkül

Der Einfachheit halber betrachten wir im folgenden nur noch *Aussagen*! Es muß dann gefordert werden, daß C wenigstens *abzählbar unendlich* viele Individuenkonstanten enthält.

Der *Kalkül* besteht aus den folgenden Axiomen und Regeln:

AT: $\Sigma, \pi \rhd \pi, \Pi$.

VER: $\Sigma \rhd \top, \Pi$.

NEG$_1$: $\dfrac{\Sigma \rhd \varphi, \Pi}{\Sigma, \neg\varphi \rhd \Pi}$.

NEG$_2$: $\dfrac{\Sigma, \varphi \rhd \Pi}{\Sigma \rhd \neg\varphi, \Pi}$.

KON$_1$: $\dfrac{\Sigma, \varphi \rhd \Pi}{\Sigma, \varphi \wedge \psi \rhd \Pi}$.

KON$_2$: $\dfrac{\Sigma, \psi \rhd \Pi}{\Sigma, \varphi \wedge \psi \rhd \Pi}$.

KON$_3$: $\dfrac{\Sigma_1 \rhd \varphi, \Pi_1 \qquad \Sigma_2 \rhd \psi, \Pi_2}{\Sigma_1, \Sigma_2 \rhd \varphi \wedge \psi, \Pi_1, \Pi_2}$.

EX$_1$: $\dfrac{\Sigma, \varphi^x_c \rhd \Pi}{\Sigma, \exists x\varphi \rhd \Pi}$, *wenn c in* Σ, Π, $\exists x\varphi$ *nicht vorkommt.*

EX$_2$: $\dfrac{\Sigma \rhd \varphi^x_c, \Pi}{\Sigma \rhd \exists x\varphi, \Pi}$.

Die *Schnittregel*

S: $\dfrac{\Sigma_1 \rhd \varphi, \Pi_1 \qquad \Sigma_2, \varphi \rhd \Pi_2}{\Sigma_1, \Sigma_2 \rhd \Pi_1, \Pi_2}$

gehört nicht zum Kalkül. Mit der Vollständigkeit des Kalküls ergibt sich gerade die Eliminierbarkeit von S. Für *beliebige* Aussagenmengen Γ, Δ sei $\Gamma \vdash \Delta$ *(aus Γ ist Δ ableitbar)* wie üblich erklärt, d. h. es gibt endliche Aussagenmengen Σ, Π mit $\Sigma \subseteq \Gamma$, $\Pi \subseteq \Delta$, und einen *Beweis* für $\Sigma \rhd \Pi$ mit den Axiomen und Regeln des Kalküls. Für Mengen vor und hinter $\vdash$ benutzen wir Schreibweisen wie bei $\rhd$; wir schreiben $\Gamma \nvdash \Delta$, wenn Δ aus Γ nicht ableitbar ist. Durch Induktion über den Aufbau von φ zeigt man, daß sich AT auf beliebige Aussagen ausdehnen läßt:

A: $\Sigma, \varphi \rhd \varphi, \Pi$.

3. Vollständigkeit

Γ, Δ seien Aussagenmengen der Sprache L, $L := L(C)$, κ sei die Mächtigkeit von L, und es gelte:

(1) $\Gamma \nvdash \Delta$.

L wird durch κ-viele neue Individuenkonstanten

(2) $\langle d_\zeta \rangle_{\zeta < \kappa}$

zu L^* erweitert.

(3) $\langle \varphi_\zeta \rangle_{\zeta < \kappa}$

sei eine Aufzählung der Aussagen von L^*.

(4) *Für alle* ξ, $\xi \leqq \kappa$, *werden rekursiv Aussagenmengen* Γ_ξ *und* Δ_ξ *definiert:*

(*a*) $\Gamma_0 := \Gamma$ *und* $\Delta_0 := \Delta$.

(b) *Für Limeszahlen* λ *sei:*

$$\Gamma_\lambda := \bigcup \{\Gamma_\zeta | \zeta < \lambda\} \quad \textit{und} \quad \Delta_\lambda := \bigcup \{\Delta_\zeta | \zeta < \lambda\}.$$

(c) *Für Nachfolgerzahlen* $\zeta + 1$ *werden drei Fälle unterschieden:*

(c_1) $\Gamma_\zeta, \varphi_\zeta \nvdash \Delta_\zeta$; *dann sei:*

$$\Gamma_{\zeta+1} := \begin{cases} \Gamma_\zeta \cup \{\varphi_\zeta\}, \textit{ wenn } \varphi_\zeta \textit{ keine Existenzaussage ist;} \\ \Gamma_\zeta \cup \{\varphi_\zeta, \psi^x_d\}, \textit{ wenn } \varphi_\zeta = \exists x\psi; \textit{ dabei sei } d \textit{ die erste Individuen-} \\ \textit{konstante, aus (2), die in } \Gamma_\zeta, \Delta_\zeta, \varphi_\zeta \textit{ nicht vorkommt.} \end{cases}$$

$$\Delta_{\zeta+1} := \Delta_\zeta.$$

(c_2) $\Gamma_\zeta, \varphi_\zeta \vdash \Delta_\zeta$ *und* $\Gamma_\zeta \nvdash \varphi_\zeta, \Delta_\zeta$; *dann sei:*

$$\Gamma_{\zeta+1} := \Gamma_\zeta \quad \textit{und} \quad \Delta_{\zeta+1} := \Delta_\zeta \cup \{\varphi_\zeta\}.$$

(c_3) $\Gamma_\zeta, \varphi_\zeta \vdash \Delta_\zeta$ *und* $\Gamma_\zeta \vdash \varphi_\zeta, \Delta_\zeta$; *dann sei:*

$$\Gamma_{\zeta+1} := \Gamma_\zeta \quad \textit{und} \quad \Delta_{\zeta+1} := \Delta_\zeta.$$

Der Fall (c_3) tritt bei der Maximalisierung nicht auf – doch das folgt erst mit der Vollständigkeit, wenn die Schnittregel zur Verfügung steht. Schließlich sei:

(5) $\Gamma^* := \Gamma_\kappa$ *und* $\Delta^* := \Delta_\kappa$.

Es gilt:

(6) *Nichtableitbarkeit von* Δ^* *aus* Γ^*:

$\Gamma^* \nvdash \Delta^*$.

Beweis. Durch Induktion über ξ zeigt man $\Gamma_\xi \nvdash \Delta_\xi$. Für den Nachfolgerschritt im Fall (c_1) schließt man mit EX_1: wäre $\Gamma_\zeta, \exists x\psi, \psi^x_d \vdash \Delta_\zeta$, so auch $\Gamma_\zeta, \exists x\psi \vdash \Delta_\zeta$ – im Widerspruch zur Voraussetzung des Falles.

(7) *Maximalität von* Γ^*, Δ^*: *Für alle Aussagen* φ *aus* L^* *gilt:*

(a) $\Gamma^*, \varphi \vdash \Delta^*$ gdw $\varphi \notin \Gamma^*$,

(b) $\Gamma^* \vdash \varphi, \Delta^*$ gdw $\varphi \notin \Delta^*$.

Beweis. Die eine Richtung ($\Rightarrow$) folgt jeweils aus (6).
Sei $\varphi \notin \Gamma^*$ und ζ der Index von φ gemäß (3); dann ist $\Gamma_\zeta, \varphi \vdash \Delta_\zeta$ (sonst wäre $\varphi \in \Gamma_{\zeta+1} \subseteqq \Gamma^*$!), also $\Gamma^*, \varphi \vdash \Delta^*$. Sei $\varphi \notin \Delta^*$. Ist $\varphi \in \Gamma^*$, so folgt $\Gamma^* \vdash \varphi, \Delta^*$ mit A. Sei $\varphi \notin \Gamma^*$ und ζ der Index von φ; dann ist $\Gamma_\zeta, \varphi \vdash \Delta_\zeta$ und $\Gamma_\zeta \vdash \varphi, \Delta_\zeta$ (sonst wäre $\varphi \in \Delta_{\zeta+1} \subseteqq \Delta^*$!), also $\Gamma^* \vdash \varphi, \Delta^*$.

Mit (6) und (7) und den Axiomen und Regeln des Kalküls zeigt man nun leicht, daß Γ^*, Δ^* nach unten abgeschlossen sind:

(8) *Abgeschlossenheit von Γ^*, Δ^* nach unten:*
Für eine beliebige Variable x, atomare Aussage π und für beliebige Aussagen $\neg\varphi$, $\varphi \wedge \psi$, $\exists x\varphi$ von L^* gilt:

(a) $\pi \notin \Gamma^* \cap \Delta^*$;

(b) $\top \notin \Delta^*$;

(c) *wenn* $\neg\varphi \in \Gamma^*$, *so* $\varphi \in \Delta^*$,
wenn $\neg\varphi \in \Delta^*$, *so* $\varphi \in \Gamma^*$;

(d) *wenn* $\varphi \wedge \psi \in \Gamma^*$, *so* $\varphi \in \Gamma^*$ *und* $\psi \in \Gamma^*$,
wenn $\varphi \wedge \psi \in \Delta^*$, *so* $\varphi \in \Delta^*$ *oder* $\psi \in \Delta^*$;

(e) *wenn* $\exists x\varphi \in \Gamma^*$, *so gibt es ein c mit* $\varphi^x_c \in \Gamma^*$,
wenn $\exists x\varphi \in \Delta^*$, *so gilt für alle c:* $\varphi^x_c \in \Delta^*$.

Beweis.

(a) Mit A und (6) folgt sogar $\Gamma^* \cap \Delta^* = \phi$.
(b) Ergibt sich mit VER und (6).
(c) Sei $\varphi \notin \Delta^*$. Mit (7b) folgt $\Gamma^* \vdash \varphi, \Delta^*$ und daraus mit NEG_1: $\Gamma^*, \neg\varphi \vdash \Delta^*$. Also ergibt sich mit (7a): $\neg\varphi \notin \Gamma^*$. Ist $\varphi \notin \Gamma^*$, so folgt analog mit NEG_2: $\neg\varphi \notin \Delta^*$.
(d) Sei $\varphi \notin \Gamma^*$ oder $\psi \notin \Gamma^*$. Mit (7a) folgt $\Gamma^*, \varphi \vdash \Delta^*$ oder $\Gamma^*, \psi \vdash \Delta^*$ und daraus mit KON_1 bzw. KON_2: $\Gamma^*, \varphi \wedge \psi \vdash \Delta^*$. Also ergibt sich mit (7a): $\varphi \wedge \psi \notin \Gamma^*$. Sei $\varphi \notin \Delta^*$ und $\psi \notin \Delta^*$. Mit (7b) folgt $\Gamma^* \vdash \varphi, \Delta^*$ und $\Gamma^* \vdash \psi, \Delta^*$ und daraus mit KON_3: $\Gamma^* \vdash \varphi \wedge \psi, \Delta^*$. Also ergibt sich mit (7b): $\varphi \wedge \psi \notin \Delta^*$.
(e) Die erste Behauptung gilt nach Konstruktion von Γ^*. Sei $\varphi^x_c \notin \Delta^*$ für ein c. Mit (7b) folgt $\Gamma^* \vdash \varphi^x_c, \Delta^*$ und daraus mit EX_2: $\Gamma^* \vdash \exists x\varphi, \Delta^*$. Also ergibt sich mit (7b): $\exists x\varphi \notin \Delta^*$.

Die Eigenschaften aus (8) reichen aus, um ein Gegenbeispiel zu konstruieren, das $\Gamma^* \not\models \Delta^*$ beweist:

(9) *Definition der Bewertung J^*:*
Der Individuenbereich von J^* sei die Menge aller Individuenkonstanten von L^*, und es sei $J^*(c) := c$ für alle c und $J^*(\pi) = W$:gdw $\pi \in \Gamma^*$ für alle π.

Durch Induktion über den Aufbau von φ zeigt man:

(10) *Für alle Aussagen φ von L^* gilt:*

(a) *wenn* $\varphi \in \Gamma^*$, *so* $J^*(\varphi) = W$,
wenn $\varphi \in \Delta^*$, *so* $J^*(\varphi) = F$.

Beim *Beweis* werden gerade die Eigenschaften aus (8) benötigt. Für Existenzaussagen argumentiert man so: Ist $\exists x\varphi \in \Gamma^*$, so gibt es ein c mit $\varphi^x_c \in \Gamma^*$. Also gilt nach

Induktionsvoraussetzung $J^*(\varphi_c^x)=W$, daher ist auch $J^{*x}_c(\varphi)=W$ und somit $J^*(\exists x\varphi)=W$. Ist $\exists x\varphi\in\Delta^*$, so folgt $J^{*x}_c(\varphi)=F$ für alle c; also ist $J^*(\exists x\varphi)=F$.

Durch Einschränkung von J^* auf die Sprache L erhält man wegen (10) eine Bewertung J, die die Aussagen aus Γ mit W und die Aussagen aus Δ mit F interpretiert. Also gilt:

(11) $\Gamma \not\models \Delta$.

Damit ist die Vollständigkeit des Kalküls gezeigt.

4. Identität

Dieser Beweis läßt sich auf die Prädikatenlogik *mit* Identität (aber ohne Funktionskonstanten) ausdehnen. $L^=(C)$ sei wie $L(C)$ definiert, enthalte jedoch zusätzlich atomare Formeln der Art $r=s$ *(Gleichungen)*. Für eine Bewertung J von $L^=(C)$ gelte zusätzlich: $J(r=s)=W$:gdw $J(r)=J(s)$. Der *Kalkül* wird um ein Axiom und zwei Regeln erweitert:

$$\text{ID:} \quad \Sigma \rhd t=t, \Pi.$$

$$\text{ERS}_1: \frac{\Sigma, \pi_r^x \rhd \Sigma}{\Sigma, r=s, \pi_s^x \rhd \Sigma}. \qquad \text{ERS}_2: \frac{\Sigma, \pi_s^x \rhd \Pi}{\Sigma, r=s, \pi_r^x \rhd \Pi}.$$

Wir betrachten wieder nur *Aussagen*, so daß im folgenden für r, s, t nur Individuen*konstanten* erlaubt sind!

Der Vollständigkeitsbeweis mit Identität verläuft zunächst wie in 3. Zu der *Abgeschlossenheit* von Γ^*, Δ^* *nach unten* kommen die folgenden Bedingungen hinzu:

(8) *Für beliebige Individuenkonstanten r, s, t und beliebige atomare Aussagen π_r^x, π_s^x von L^* gilt zusätzlich:*
  (f) $t=t\notin\Delta^*$;
  (g) *wenn* $r=s\in\Gamma^*$, *so* $\pi_r^x\in\Gamma^*$ gdw $\pi_s^x\in\Gamma^*$.

Beweis. (f) Ergibt sich aus ID und (6).
(g) Sei $r=s\in\Gamma^*$. Ist $\pi_r^x\notin\Gamma^*$, so folgt mit (7a):
$\Gamma^*, \pi_r^x \vdash \Delta^*$, und daraus mit ERS_1: $\Gamma^*, r=s, \pi_s^x \vdash \Delta^*$, also mit der Voraussetzung: $\Gamma^*, \pi_s^x \vdash \Delta^*$ und daher mit (7a): $\pi_s^x\notin\Gamma^*$. Ist umgekehrt $\pi_s^x\notin\Gamma^*$, so ergibt sich analog mit ERS_2: $\pi_r^x\notin\Gamma^*$.

Damit die Gleichungen korrekt bewertet werden, definieren wir:

(12) *Für Individuenkonstanten r, s von L^* sei:*

$r \sim s$: gdw $r = s$ *oder* $r=s \in \Gamma^*$.

Mit (8g) ergibt sich:

(13) *Kongruenzeigenschaften von* $\sim$:
  (a) $\sim$ *ist eine Äquivalenzrelation;*
  (b) *für jede n-stellige Relationskonstante R gilt: wenn* $r_i \sim s_i$ *für* $1 \leqq i \leqq n$, *so* $Rr_1 \ldots r_n \in \Gamma^*$ gdw $Rs_1 \ldots s_n \in \Gamma^*$.

Beweis. (a) Nach Definition (12) ist $\sim$ reflexiv.
Sei $r \sim s$. Ist $r = s$, so gilt $s \sim r$. Sei also $r = s \in \Gamma^*$. Es ist $r = s$ dasselbe wie $(x = s)_r^x$ und $(x = s)_s^x$ dasselbe wie $(s = x)_s^x$; daher ergibt sich mit (8g): $(s = x)_s^x \in \Gamma^*$. Weil $(s = x)_r^x$ gerade $s = r$ ist, erhält man daraus wieder mit (8g): $s = r \in \Gamma^*$; daher gilt $s \sim r$. Somit ist $\sim$ symmetrisch.
Sei $r \sim s$ und $s \sim t$. Ist $r = s$ oder $s = t$, so gilt $r \sim t$. Sei also $r = s \in \Gamma^*$ und $s = t \in \Gamma^*$. Es ist $s = t$ dasselbe wie $(x = t)_s^x$ und $(x = t)_r^x$ dasselbe wie $r = t$; daher folgt mit (8g): $r = t \in \Gamma^*$, und es gilt $r \sim t$. Somit ist $\sim$ transitiv.
(b) Sei $r_i \sim s_i$ für $1 \leqq i \leqq n$; dann ist $r_i = s_i$ oder $r_i = s_i \in \Gamma^*$. Also ergibt sich die Behauptung durch mehrfaches Anwenden von (8g).

(14) *Für jede Individuenkonstante t von* L^* *sei* $\tilde{t}$ *die Restklasse von t bezüglich* $\sim$.

(15) *Definition der Bewertung* J^*:
Der Individuenbereich von J^* *sei die Menge aller Restklassen von Individuenkonstanten von* L^*, *und es gelte:* $J^*(t) := \tilde{t}$ *für alle t und* $J^*(R)$ *trifft zu auf* $\tilde{t}_1, \ldots, \tilde{t}_n$: gdw $Rt_1 \ldots t_n \in \Gamma^*$ *für alle n-stelligen R.*

Wegen (13b) erfolgt die Bewertung der Relationskonstanten repräsentantenunabhängig.

Wie in 3. zeigt man nun (10); beim *Beweis* argumentiert man für Gleichungen so: Ist $r = s \in \Gamma^*$, so gilt nach den Definitionen (12) und (15): $r \sim s$ und $J^*(r) = J^*(s)$, also $J^*(r = s) = W$. Ist $r = s \in \Delta^*$, so ist nach (8f) (erst hier geht ID in den Vollständigkeitsbeweis ein!): $r \neq s$ und nach (8a): $r = s \notin \Gamma^*$; daher gilt *nicht* $r \sim s$. Somit ist $J^*(r) \neq J^*(s)$, also $J^*(r = s) = F$.
Nunmehr ergibt sich wie in (11) $\Gamma \not\models \Delta$ und damit die Vollständigkeit.
Die Ersetzungsregeln ERS_1 und ERS_2 werden übrigens nicht voll benötigt: es genügen schon ERS_1 für *prädikative* Aussagen π,

$$\frac{\Sigma, r = t \rhd \Pi}{\Sigma, r = s, s = t \rhd \Pi} \quad \text{und} \quad \frac{\Sigma, r = s \rhd \Pi}{\Sigma, s = r \rhd \Pi}.$$

5. Anmerkungen

Dieser Beweis läßt sich auf andere Sprachen übertragen, z. B. auf infinitäre. Für die Prädikatenlogik *mit* Identität *und* Funktionskonstanten treten jedoch (vermeidbare?) Unschönheiten auf:

Schwierigkeiten macht die Definition der Äquivalenzrelation. So führt die (auch schon in 4.!) naheliegende Definition:

$$r \sim s \ :\text{gdw}\ r = s \notin \Delta^*$$

wegen der erforderlichen Transitivität von $\sim$ zu der für einen schnittfreien Kalkül wenig akzeptablen Regel:

$$\frac{\begin{array}{c}\Sigma_1 \rhd r = t, \Pi_1 \\ \Sigma_2 \rhd t = s, \Pi_2\end{array}}{\Sigma_1, \Sigma_2 \rhd r = s, \Pi_1, \Pi_2}.$$

Bei einer Definition analog (12) ist unklar, wie die *Kongruenzeigenschaft* für Funktionskonstanten F *(wenn* $r_i \sim s_i$ *für* $1 \leqq i \leqq n$, *so* $Fr_1 \ldots r_n \sim Fs_1 \ldots s_n$*)* gezeigt werden soll.

Eine erste Version dieses Beweises habe ich im Januar 1978 in Kiel vorgetragen.

LITERATUR

[1] Henkin, L.: The completeness of the first-order functional calculus. J. Symb. Logic **14**, 159–166 (1949).

[2] Henkin, L.: An extension of the Craig-Lyndon interpolation theorem. J. Symb. Logic **28**, 201–216 (1963).

J.-M. Glubrecht
Technische Universität Berlin
Fachbereich Mathematik
Sekr. MA 8-1
Straße des 17. Juni 135
D-1000 Berlin 12