Archiv math. Logik **19** (1978), 165—173

ÜBER DIE MIT DEM BAR-REKURSOR VOM TYP 0 DEFINIERBAREN ORDINALZAHLEN*

H. Vogel

Zur beweistheoretischen Analyse von Teilsystemen der formalen Analysis verwendet man gewisse Klassen von geschlossenen Termen, die abzählbare Funktionale höherer Typen bezeichnen. Da sich die abzählbaren Funktionale vom Typ 2 induktiv erzeugen lassen, kann man jedem geschlossenen Term vom Typ 2 eine Ordinalzahl zuordnen, welche auch ein Maß für die Stärke der verwendeten Definitionsschemata ist. Um zu zeigen, daß die Ordinalzahlen unterhalb der Bachmann-Howard-Zahl $\phi\varepsilon_{\Omega+1}0$ mit primitiver Rekursion und Bar-Rekursion vom Typ 0 in diesem Sinn definierbar sind, wird die Bachmannsche Hierarchie $\{\phi\alpha|\alpha<\varepsilon_{\Omega+1}\}$ von Normalfunktionen in Zuckers T_1 und $T_0+\mathrm{BR}_0$ formal nachvollzogen. Nach dem Vorbild von Schwichtenberg [8] geschieht das, indem transfinite Rekursionen über ausgezeichneten Folgen in Iterationen höherer Typen aufgelöst werden, wobei jeder Sprung von $\phi\alpha$ zu $\phi\Omega^{\alpha}$ die Typenstufe des benötigten transfiniten Iterators um 1 erhöht. Sicherlich sind die Ergebnisse aus der Literatur zum Teil herauslesbar (siehe etwa die Diskussion auf S. 443 von [10] und den Schluß von [4]). Welche Funktionen mit dem Bar-Rekursor vom Typ 0 nicht mehr definiert werden können, hat Howard in [3] untersucht; doch ist der Zusammenhang mit den hier verwendeten Begriffen noch nicht hinreichend klar†.

§ 1. Transfinite Iteratoren endlicher Typen

Es wird die folgende Menge t_1 von Typen verwendet: 0,1 sind in t_1; mit ϱ und σ ist auch $(\varrho\rightarrow\sigma)$ in t_1. 0 ist der Typ der natürlichen Zahlen, 1 der Typ der Objekte eines Bereichs Ω. Induktiv ist $\mathbf{1}:=1$, $\mathbf{n+1}:=\mathbf{n}\rightarrow\mathbf{n}$. In der mengentheoretischen Struktur über t_1 seien die Funktionale $J_n x\vdash \mathbf{n+2}$ (vom Typ $\mathbf{n+2}$) für $x\in\omega$ wie folgt definiert: $J_n 0HG=G$, $J_n(x+1)HG=H(J_n xHG)$ für $H\vdash\mathbf{n+1}$, $G\vdash\mathbf{n}$. Wie man leicht nachprüft, gilt dann $J_n(a+b)HG=J_n bH(J_n aHG)$, $J_n(a\cdot b)H=J_n b(J_n aH)$, $J_n a^b=J_{n+1}b(J_n a)$. Unser Ziel ist es, diese Iteratoren auch für gewisse unendliche Ordinalzahlbezeichnungen zu erklären. Für den Fall $\Omega=\omega$ und die Grenzzahl ε_0

† (18. 3. 1978). Inzwischen hat Herr Howard mir durch einen Brief, in dem er auch auf eine unrichtige Schrankenangabe in der früheren Fassung dieser Arbeit hinweist, mitgeteilt, daß er die hier gegebenen unteren Ordinalzahlschranken als bestmöglich erkannt hat.

* Eingegangen am 5. 9. 1977.

hat dies Schwichtenberg in [8] durchgeführt (mit einem etwas veränderten Nachfolgerfall und einer geeigneten Definition von $J_n\omega$). Er erhält eine Folge von ε_0-rekursiven Funktionen, welche schließlich jede ε_0-rekursive Funktion majorisieren. Es liegt nahe, dies auf eine Version der abzählbaren Ordinalzahlen und die Grenzzahl $\phi\varepsilon_{\Omega_1+1}0$ auszudehnen.

Definition von $\mathcal{T}_\varrho$ für $\varrho \in t_1$.
1. $\mathcal{T}_0 = \omega$,
2. $0^1 \in \mathcal{T}_1, \forall x f(x) \in \mathcal{T}_1 \to \sup f \in \mathcal{T}_1$,
3. $f \in \mathcal{T}_{\varrho \to \sigma} \leftrightarrow f : \mathcal{T}_\varrho \to \mathcal{T}_\sigma$.

Definition von $|\cdot| : \mathcal{T}_1 \to 0n$.

$$|0^1| = 0, |\sup f| = \sup\{|f(x)| + 1 | x \in \omega\}.$$

Die folgende – an Kleenes $\mathcal{O}$ erinnernde – Definition soll erkennbar Nachfolger- und Limeselemente in $\mathcal{T}_1$ auszeichnen.

Definition von $\Omega \subseteq \mathcal{T}_1$:
1. $0^1 \in \Omega$,
2. $\alpha \in \Omega \to \sup f \in \Omega$, wobei $f(0) = 0^1$, $f(x+1) = \alpha$,
3. $\forall x f(x) \in \Omega, |f(x)| < |f(x+1)| \to \sup \tilde{f} \in \Omega$, wobei $\tilde{f}(0) = 1 := \sup(\lambda x \cdot 0^1)$, $\tilde{f}(x+1) = f(x)$.

Definition von Δ:

1. $\omega, \Omega \subseteq \Delta$,
2. $\omega, \Omega \in \Delta$,

3 und 4. $\beta, \gamma \in \Delta \to \beta + \gamma \in \Delta, \beta \cdot \gamma \in \Delta$,

5. $\beta = \omega$ oder $\Omega, \gamma \in \Delta \to \beta^\gamma \in \Delta$.

In dieser Definition sind $\beta + \gamma$, $\beta \cdot \gamma$, β^γ formale Ausdrücke. Die Bezeichnung macht klar, wie jedem $\alpha \in \Delta$ ein $|\alpha| < \varepsilon_{\Omega_1+1}$ zugeordnet werden soll.

Definition von $d(\alpha)$ und $(\alpha)\nu$ für $\alpha \in \Delta$ und $\nu \in d(\alpha)$.
Für $d(\alpha) = 0$ ist $(\alpha)\nu$ nicht definiert.

1. $d(0) = 0, d(n+1) = 1, (n+1)0 = n, d(0^1) = 0,$
   $a = \sup f \wedge f(0) = 0 \to d(\alpha) = 1 \wedge (\alpha)0 = f(1),$
   $\alpha = \sup f \wedge f(0) = 1 \to d(\alpha) = \omega \wedge (\alpha)\nu = f(\nu+1),$
2. $\alpha = \omega \to d(\alpha) = \omega \wedge (\alpha)n = n,$
   $\alpha = \Omega \to d(\alpha) = \Omega \wedge (\alpha)\nu = \nu,$
3. $\alpha = \beta + \gamma \cdot d(\gamma) = 0 \to d(\alpha) = d(\beta) \wedge (\alpha)\nu = (\beta)\nu$
   $d(\gamma) > 0 \to d(\alpha) = d(\gamma) \wedge (\alpha)\nu = \beta + (\gamma)\nu,$
4. $\alpha = \beta \cdot \gamma \cdot d(\gamma) = 0 \to d(\alpha) = 0, d(\gamma) = 1$
   $\to d(\alpha) = d(\beta) \wedge (\alpha)\nu = \beta \cdot (\gamma)0 + (\beta)\nu,$
   $d(\gamma) > 1 \to d(\alpha) = d(\gamma) \wedge (\alpha)\nu = \beta \cdot (\gamma)\nu,$

5. $\alpha=\beta^{\gamma}\cdot d(\gamma)=0 \to d(\alpha)=1 \wedge (\alpha)0=0$,
$d(\gamma)=1 \to d(\alpha)=d(\beta) \wedge (\alpha)\nu=\beta^{(\gamma)0}\cdot(\beta)\nu$,
$d(\gamma)>1 \to d(\alpha)=d(\gamma) \wedge (\alpha)\nu=\beta^{(\gamma)\nu}$.

Im Fall $d(\alpha)=1$ schreiben wir $\alpha \dot{-} 1$ für $(\alpha)0$. Nach Konstruktion ist das erste Lemma klar.

Lemma 1.1. *Für* $\alpha\in\Delta$ *gilt:*
(i) $d(\alpha)=1 \to |\alpha \dot{-} 1|+1=|\alpha|$,
(ii) $d(\alpha)>1 \to \sup\{|(\alpha)\nu| \mid \nu\in d(\alpha)\}=|\alpha|$.

Φ_1, bzw. Ψ_1, seien Funktionale aus $\mathcal{T}_\varrho$ mit $\varrho=(0\to 1)\to 1$, bzw. $\varrho=(1\to 1)\to 1$. $\Phi_{n+1} \vdash (0\to n+1)\to n+1$ ist definiert durch $\Phi_{n+1}fg=\Phi_n(\lambda x\cdot f(x)g)$ für $f\vdash 0\to n+1$, $g\vdash n$.
Analog $\Psi_{n+1}\vdash(1\to n+1)\to n+1$.
Relativ zu diesen Funktionalen sind die Iteratoren $J_n\alpha\vdash n+2$ für $\alpha\in\Delta$ wie folgt definiert. Es sei $H\vdash n+1$, $G\vdash n$, $J_n\alpha HG=:F$:

1. $d(\alpha)=0\to F=G$,
2. $d(\alpha)=1\to F=H(J_n(\alpha\dot{-}1)HG)$,
3. $d(\alpha)=\omega\to F=\Phi_n(\lambda x\cdot J_n(\alpha)xHG)$,
4. $d(\alpha)=\Omega\to F=\Psi_n(\lambda \nu\cdot J_n(\alpha)\nu HG)$.

Lemma 1.2. *Für* $\beta,\gamma\in\Delta$ *gilt:*
(i) $J_n(\beta+\gamma)HG=J_n\gamma H(J_n\beta HG)$,
(ii) $J_n(\beta\cdot\gamma)H \quad =J_n\gamma(J_n\beta H)$, *falls* $d(\beta)>0$,
(iii) $J_n\beta^{\gamma} \quad\quad =J_{n+1}\gamma(J_n\beta)$.

Beweis durch Induktion nach $|\gamma|$. Wir führen nur (iii) aus.

$$d(\gamma)=0\to J_n1H=H=J_{n+1}0(J_n\beta)H.$$
$$d(\gamma)=1\to J_n\beta^{\gamma}H=J_n(\beta^{\gamma'}\cdot\beta)H=J_n\beta(J_n\beta^{\gamma'}H)$$
$$=J_n\beta(J_{n+1}\gamma'(J_n\beta)H)=J_{n+1}\gamma(J_n\beta)H \quad \text{mit} \quad \gamma'=(\gamma)0,\ \text{(ii)},\ IV,$$
$$d(\gamma)=\omega\to J_n\beta^{\gamma}HG=\Phi_n(\lambda x J_{n+1}(\gamma)x(J_n\beta)HG)$$
$$=J_{n+1}\gamma(J_n\beta)HG \text{ mit } IV.\ d(\gamma)=\Omega \text{ analog.}$$

Die Bachmann-Hierarchie ist mit transfiniter Rekursion bis ε_{Ω_1+1}, der ersten überzählbaren ε-Zahl nach Ω_1, definierbar, und zwar mit den oben angegebenen transfiniten Iteratoren $J_2\alpha$ (niederer Typ!). Lemma 1.2 sagt uns, daß in Gegenwart höherer Typen arithmetisch zusammengesetzte Ordinalzahlbezeichnungen als Iterationsparameter in ihre Bestandteile auseinandergenommen werden können, so daß es genügt, $J_n\alpha$ mit $|\alpha|\leqq\Omega_1$ (aber für alle n) formal definieren zu können. Diesem Programm ist §2 gewidmet, wo eine Art Umkehrung von Lemma 1.2 ohne Beweis benützt wird: Wenn $J_n\alpha$ für $|\alpha|>\Omega_1$ nach (i)–(iii) von Lemma 1.2 definiert wird, gelten die Gleichungen 1.–4. von F. Dreh- und Angelpunkt der ganzen Konstruktion ist der durch (iii) von Lemma 1.2 mit dem „Sprung von n nach $n+1$“ besonders durchsichtig gemachte, über den Rahmen dieser Arbeit hinaus allgemein geltende Zusammenhang zwischen ε-Zahlen als Limiten arithmetischer Ordinalzahloperationen und Iterationen über Strukturen endlicher Typen.

§ 2. Die formale Wiedergabe der Bachmann-Hierarchie

Bachmann definiert in [1] zu jedem $\alpha < \varepsilon_{\Omega_1+1}$ eine ausgezeichnete Folge, die wir ebenfalls mit $\{(\alpha)\nu | \nu < d(\alpha)\}$ bezeichnen, und definiert dazu die folgenden Ordinalzahlfunktionen:

Definition von $\phi\alpha : \Omega_1 \to \Omega_1$ für $\alpha < \varepsilon_{\Omega_1+1}$:
1. $d(\alpha) = 0 \to \phi\alpha\beta = \omega^\beta$,
2. $d(\alpha) = 1 \to \phi\alpha = A(\phi(\alpha \dot{-} 1))$ (A ist die Ableitung),
3. $d(\alpha) = \omega \to \phi\alpha =$ Ordnungsfunktion von $\cap$ {Bild $\phi(\alpha)x | x \in \omega\}$,
4. $d(\alpha) = \Omega \to \phi\alpha = A(\lambda\nu \cdot \phi(\alpha)\nu 0)$.

Unsere Aufgabe ist es nun, diese Hierarchie mit den formalen primitiv-rekursiven Funktionalen über $\mathscr{T}$ – den Funktionalen aus Zuckers' T_1 [10] – darzustellen.

Definition der Funktionale von T_1 mit ihren Typen.
1. $K_{\sigma\tau}$, $S_{\varrho\sigma\tau}$ (die Kombinatoren mit kanonischen Typen),
2. $0 \vdash 0$, $0^1 \vdash 1$, $\mathrm{suc} \vdash 0 \to 0$, $\mathrm{sup} \vdash (0 \to 1) \to 1$,
3. $R^0_\sigma \vdash 0 \to (0 \to \sigma \to \sigma) \to (\sigma \to \sigma)$ (prim. Rekursor),
4. $R^1_\sigma \vdash 1 \to ((0 \to 1) \to (0 \to \sigma) \to \sigma) \to (\sigma \to \sigma)$ (transf. Rekursor),
5. $a \vdash \varrho \to \sigma$, $b \vdash \varrho \to a(b) \vdash \sigma$.

Der λ-Operator sei wie üblich definiert.

Für diese Funktionale gelten die Gleichungen:

$$Kab = a, \qquad Sabc = ac(bc),$$
$$R^0 0HG = G, \qquad R^0(\mathrm{suc}\, s)HG = Hs(R^0 sHG),$$
$$R^1 0HG = G, \qquad R^1(\mathrm{sup}\, s)HG = Hs(\lambda x \cdot R^1(sx)HG).$$

Definition von $g(\sigma)$ für $\sigma \in t_1$

$$g(0) = 0, \qquad g(1) = 2, \qquad g(\varrho \to \sigma) = \max(g(\varrho) + 1, g(\sigma)).$$

R^0_σ, R^1_σ heißen vom Gleichungsgrad n, wenn $g(\sigma) = n$. Ein Funktional aus T_1 heißt vom Grad (n, m), wenn die in ihm auftretenden transfiniten Rekursoren von einem Gleichungsgrad $\leqq n$, die primitiven Rekursoren von einem Gleichungsgrad $\leqq m$ sind.

Wir definieren nun eine Reihe von Funktionalen mit bestimmten Eigenschaften.

Hilfsfunktionale

$1 := \sup(\lambda x \cdot 0^1)$

$h_0, h_1 \vdash (0 \to 1) \to (0 \to 1)$ durch

$h_0 f 0 = 0^1, \quad h_1 f 0 = 1, \quad h_i f(x+1) = f(x) \quad (i = 0, 1),$
$\mathrm{suc}^1 \alpha = R^1 \alpha H 1$ mit $Hfz = \sup(h_0(\lambda x \cdot \sup f)),$

$\alpha + 1 := \mathrm{suc}^1 \alpha,$

$p\alpha = R^1 \alpha H 0$ mit $Hfz = \mathrm{suc}\, 0.$

Finiter Iterator $J_n \vdash 0 \to n+2$

$$J_n 0 H G = G, \qquad J_n(\mathrm{suc}\, s) H G = H(J_n s H G).$$

Transfiniter Iterator $J_n \vdash 1 \to n+2$

$$\begin{aligned} J_n 0 H G &= G, \\ J_n(\sup f) H G &= H(J_n f(1) H G) \quad \text{falls} \quad p(f0) = 0 \\ &= \Phi_n(\lambda x \cdot J_n f(x+1) H G) \text{ sonst.} \end{aligned}$$

Φ_n wird gleich definiert. Der Kontext macht klar, welcher Iterator mit J_n gemeint ist.

Definition von Φ_n, Ψ_n, A.

$$\begin{aligned} \Phi_1 z &= \sup(h_1 z) \\ \Phi_2 z\alpha &= J_1 \alpha (H_2 z)(G_2 z) \\ \Phi_{n+1} z u &= \Phi_n(\lambda x \cdot z x u) \\ \Psi_2 z &= A(\lambda v \cdot z v 0) \\ \Psi_{n+1} z u &= \Psi_n(\lambda v \cdot z v u) \\ A w \alpha &= J_1 \alpha (H_1 w)(G_1 w) \\ G_1 w &= \sup(h_1(\lambda x \cdot J_1 x w 0^1)) \\ H_1 w \alpha &= \sup(h_1(\lambda x \cdot J_1 x w(\alpha+1))) \\ G_2 z &= \sup(h_1(\lambda x \cdot z x 0^1)) \\ H_2 z \alpha &= \sup(h_1(\lambda x \cdot z x(\alpha+1))). \end{aligned}$$

Arithmetische Operationen add, mult, pot.

$$\begin{aligned} \mathrm{add}\, \alpha\beta &= J_1 \beta\, \mathrm{suc}^1 \alpha, \\ \mathrm{mult}\, \alpha\beta &= J_1 \beta (\mathrm{add}\, \alpha) 0^1, \\ \mathrm{pot}\, \alpha\beta &= J_1 \beta (\mathrm{mult}\, \alpha) 1. \end{aligned}$$

Wir schreiben $\alpha+\beta$ für add $\alpha\beta$, $\alpha\cdot\beta$ für mult $\alpha\beta$, α^β für pot $\alpha\beta$

$$\omega := \sup(h_1(\lambda x\cdot J_1 x \operatorname{suc}^1 0^1)),$$
$$B := \operatorname{pot}\omega.$$

Wir zeigen nun einige Eigenschaften dieser Funktionale, die wir — wo nötig — mit ihrer kanonischen Interpretation in $\mathscr{T}$ identifizieren.

Lemma 2.1. *Seien* $\alpha, \beta\in\Omega$
(i) $1, \omega\in\Omega, |\omega|=\omega$,
(ii) $\alpha+\beta\in\Omega, |\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$,
(iii) $\alpha\cdot\beta\in\Omega, |\alpha\cdot\beta|=|\alpha|\cdot|\beta|$,
(iv) $\alpha^\beta\in\Omega, |\alpha^\beta|=|\alpha|^{|\beta|}$.
Die Beweise durch transfinite Induktion nach β sind elementar.

Wenn für ein $w\vdash 1\to 1$ für alle $\alpha\in\Omega\cdot w(\alpha)\in\Omega$ ist und aus $|\alpha|=|\beta|$ für α, $\beta\in\Omega$ $|w(\alpha)| = |w(\beta)|$ folgt, ist $|w|:\Omega_1\to\Omega_1$ definiert durch $|w|(|\alpha|)=|w(\alpha)|$.

Lemma 2.2. *Es sei* $w\vdash 1\to 1$, $|w|$ *definiert, Normalfunktion und* $0<|w(0^1)|$. *Dann gilt:*
(i) $\alpha\in\Omega\to Aw\alpha\in\Omega$,
(ii) $|Aw|$ *definiert und* $|Aw|=A|w|$.

Bevor wir nun im letzten Schritt die transfiniten Iteratoren definieren, gehen wir auf § 1 zurück und spezifizieren in der Definition von $F := J_2\alpha GH$ die Funktionale G, H, Φ_n, Ψ_n durch die Bilder der soeben definierten formalen Funktionale A, B, Φ_n, Ψ_n in $\mathscr{T}$. Da in $\{\phi\alpha\}$ die Indizes α in Cantorscher Normalform dargestellt sind, müssen wir auch Δ auf $\Delta^*\subsetneqq\Delta$ einschränken, deren Elemente „in Normalform" sind. Der Leser ergänzt leicht eine saubere Definition. Für $\alpha\in\Delta^*$, $v\in\Omega$ ist $|v|\mapsto|(\alpha)v|$ eine ausgezeichnete Folge für $|\alpha|$, die von der in [1] gegebenen nur unwesentlich abweicht, in dem Sinne, daß zwar die Koeffizienten von α von der Darstellung abhängige ausgezeichnete Folgen besitzen, $\phi|\alpha|$ davon aber unberührt bleibt.

Lemma 2.3. *Für* $\alpha\in\Delta^*, \beta\in\Omega$ *ist in* $\mathscr{T}$
$$|J_2\alpha AB\beta|=\phi|\alpha|\,|\beta|.$$

Beweis durch Hauptinduktion nach $|\alpha|$, Nebeninduktion nach $|\beta|$

$d(\alpha)=0.\quad |B\beta|=\phi 0|\beta|.$

$d(\alpha)=1.\quad |J_2\alpha AB\beta|=|A(J_2(\alpha\dot{-}1)AB)\beta)|=A\phi|\alpha\dot{-}1|\beta$ $=\phi|\alpha||\beta|$ mit HIV und Lemma 2.2.

$d(\alpha)=\omega,\quad d(\beta)=1.$ Mit $\gamma := J_2\alpha AB(\beta\dot{-}1)$, $z := \lambda x.\ J_2(\alpha)xAB$ gilt: $|J_2\alpha AB\beta|=|\Phi z\beta|$ $=|J_1\beta(H_2 z)(G_2 z)|=|H_2 z\gamma|=\sup\{|J_2(\alpha)xAB(\gamma+1)||x\in\omega\}$ $=\sup\{\phi|(\alpha)x|(\phi|\alpha|\,|\beta\dot{-}1|+1)|x\in\omega\}=\phi|\alpha|\,|\beta|.$

$d(\alpha)=\Omega,\quad d(\beta)=0.$ Wir setzen $w := \lambda v\cdot J_2(\alpha)vAB0$, $\chi := \lambda x\cdot J_1 xw0^1.$

Mit Induktion nach n und HIV erkennt man $|\chi(n+1)| = \phi(|\alpha|)|\chi n|0$. Daher

$$|J_2\alpha AB0| = |Aw0| = |G_1 w| = |\sup(h_1\chi)| = \sup|\chi| = \phi|\alpha|0 .$$

Die verbleibenden Fälle sind ähnlich nachzurechnen.

Ω' bestehe aus den geschlossenen Termen von Typ 1. Δ' entstehe aus Δ, indem Ω durch Ω' ersetzt werde.

Transfinite Iteratoren $J_n\alpha$ für $\alpha \in \Delta'$ und $n \geqq 2$:
1. $J_n x$, $J_n\alpha$ für $x \in \omega$, $\alpha \in \Omega'$ schon definiert,
2. $J_n\omega HG = \Phi_n(\lambda x \cdot J_n xHG)$,
   $J_n\Omega HG = \Psi_n(\lambda v \cdot J_n vHG)$,
3. $\alpha = \beta + \gamma$. $J_n(\beta+\gamma)HG = J_n\gamma H(J_n\beta HG)$,
4. $\alpha = \beta \cdot \gamma$. $J_n(\beta \cdot \gamma)H = J_n\gamma(J_n\beta H)$,
5. $\alpha = \beta^\gamma$. $J_n\alpha = J_{n+1}\gamma(J_n\beta)$.

Definition. $\omega_0 := 1$, $\omega_{n+1} := \omega^{\omega_n}$, $\Omega_0(\alpha) := \alpha$, $\Omega_{n+1}(\alpha) := \Omega_1^{\Omega_n(\alpha)}$.

Satz a. *Zu* $\alpha < \phi\Omega_n(\omega_m)0$ $(n+m>0)$ *gibt es primitiv-rekursiv ein Funktional* Y_α *aus* T_1 *vom Typ* 1 *und Grad* $(n+2, n+m+1)$ *mit* $\alpha = |Y_\alpha|$.
(Das meint, daß die Länge des Terms Y_α mit einer primitiv-rekursiven Funktion durch die Länge der Darstellung von α abgeschätzt werden kann.)

Beweis. Wegen Lemma 2.1 sei α additive Hauptzahl, also $\alpha = \phi\beta\gamma$. Nach Gerber [2] folgt aus $\alpha < \phi\Omega_n(\omega_m)0$ $K(\beta) \cup \{\gamma\} < \alpha$, wo unter $K(\beta)$ die Koeffizientenmenge von β verstanden wird. Nach IV sind γ und die Elemente k von $K(\beta)$ durch γ^* und k^* darstellbar. Wir wählen ein $\beta^* \in \Delta'$, dessen Koeffizienten die k^* sind, so daß $\beta = |\beta^*|$. Dann ist $\alpha = |Y_\alpha|$ mit $Y_\alpha := J_2\beta^* AB\gamma^*$. Wegen $\beta < \Omega_n(\omega_m)$ ist der Grad von Y_α $(n+2, n+m+1)$.

§ 3. Einbettung in die barrekursiven Funktionale

Wir gehen aus von den primitiv-rekursiven Funktionalen endlicher Typen und definieren dort die Funktionale $\sup \vdash (0\to(0\to0)\to0)\to(0\to0)\to0$, $F_1 \vdash 0\to(0\to0)\to(0\to0)$, $F_2 \vdash ((0\to0)\to0)\to0\to(0\to0)\to0$ durch

$$\sup zc = z(c0)(\lambda x \cdot c(x+1)) + 1 ,$$
$$F_1 uc0 = u, \qquad F_1 uc(x+1) = c(x) ,$$
$$F_2 Yuc = Y(F_1 uc) \dot{-} 1 .$$

Dabei sind $u \vdash 0$, $c \vdash 0\to0$, $Y \vdash (0\to0)\to0$, $z \vdash 0\to(0\to0)\to0$. Wir schreiben $u * c$ für $F_1 uc$, $Y * u$ für $F_2 Yu$. Dann gilt mit Extensionalität:

$$z = \lambda u \cdot \sup z * u .$$

Zu den prim.-rek. Funktionalen nehmen wir nun die Bar-Rekursion vom Typ $OB_\sigma^* \vdash ((0\to 0)\to 0)\to((0\to(0\to 0)\to 0)\to(0\to\sigma)\to\sigma)\to\sigma\to\sigma$ mit den folgenden Gleichungen hinzu:

$$Y0=0\to B^*YHG=G$$

$$Y0>0\to B^*YHG=H(\lambda u\cdot Y*u)(\lambda u\cdot B^*(Y*u)HG).$$

Aus [9] folgt, daß $\{B_\sigma^*|\sigma\in t_0\}$ mit Extensionalität äquivalent zur üblichen Bar-Rekursion vom Typ 0 ist. Ist für alle in einem Funktional F aus T_0+B^* vorkommenden Barrekursoren B_σ^* $g(\sigma)\leqq n$ und primitiven Rekursoren R_σ^0 $g(\sigma)\leqq m$, so heißt F vom Grad (n,m).
Als Modell von T_0+B^* haben wir die Struktur $\mathscr{C}$ der stetigen Funktionale endlicher Typen vor Augen (siehe Scarpellini [6]). Im folgenden bezeichnen wir die Interpretation eines Funktionals F aus T_0+B^* in $\mathscr{C}$ wieder — wo nötig — mit F. Jedem stetigen Funktional Y vom Typ $2:=(0\to 0)\to 0$ wird durch die folgende Definition die Ordinalzahl $|Y|$ zugeordnet:

$$Y0=0\to|Y|=0,$$

$$Y0>0\to|Y|=\sup\{|Y*u|+1|u\in\omega\}.$$

[$|Y|$ ist eine Ordinalzahl, denn sonst gäbe es eine Zahlenfolge c mit $Y(c|n)\dot{-}n>0$ für alle n, wo $c|n$ mit c bis zur Stelle n übereinstimmt und dann verschwindet, im Widerspruch zur Stetigkeit von Y.]
Um die Ergebnisse des vorigen § 2 auf T_0+B^* zu übertragen, betten wir T_1 in dieses System ein:

Definition einer Übersetzung $\tilde{}: T_1\to T_0+B^*$. Zuerst für die Typen:
$0^\sim=0$, $1^\sim=(0\to 0)\to 0$, $(\varrho\to\sigma)^\sim=\varrho^\sim\to\sigma^\sim$
1. $(x^\sigma)^\sim=x^{\sigma^\sim}$,
2. $K_{\sigma\tau}^\sim=K_{\sigma^\sim\tau^\sim}$, $S_{\varrho\sigma\tau}^\sim=S_{\varrho^\sim\sigma^\sim\tau^\sim}$,
3. $0^\sim=0$, $\mathrm{suc}^\sim=\mathrm{suc}$, $R_\sigma^{0\sim}=R_{\sigma^\sim}^0$,
4. $0^{1\sim}=0^2$, $\sup^\sim=\sup$, $R_\sigma^{1\sim}=B_{\sigma^\sim}^*$,
5. $(ab)^\sim=a^\sim b^\sim$.

Die Übersetzung ist so gemacht, daß die Verifikation ihrer Korrektheit dem Leser überlassen bleiben mag:

Lemma 3.1. *Seien a, b Terme aus T_1, F ein Funktional vom Typ 1 aus T_1. Dann gelten:*
(i) $a=b\to a^\sim=b^\sim$,
(ii) $|F|=|F^\sim|$.
Daraus und mit Satz a erhalten wir

Satz b. *Zu $\alpha<\phi\Omega_n(\omega_m)0$ $(n+m>0)$ gibt es primitiv-rekursiv Y_α vom Typ 2 und vom Grad $(n+2, n+m+1)$ mit $\alpha=|Y_\alpha|$.*

Der Fall $n=m=0$ muß für sich betrachtet werden.

Satz c. *Zu $\alpha < \omega_n$ gibt es (primitiv-rekursiv) Y_α aus T_0 vom Typ 2 und (prim.-rek.) Grad n mit $\alpha = |Y_\alpha|$.*

Beweis. Wir definieren $\mathrm{suc} := \lambda Y \cdot \sup(\lambda u \cdot Y)$, $\tilde{\Phi}_1 := \sup$, $\tilde{\Phi}_{n+1} := \lambda z \cdot \lambda u \cdot \tilde{\Phi}_n(\lambda x \cdot zxu)$ und $\tilde{J}_n\alpha$ vom Typ $n+2$ mit Hilfe von $\tilde{\Phi}_n$ wie in § 2 $J_n\alpha$ mit Hilfe von Φ_n nach dem Aufbau der Cantorschen Normalform von α. Wie in § 1 zeigt man leicht: $|\tilde{J}_1 \alpha \,\mathrm{suc}\, 0| = \alpha$.

Bemerkung. Barrekursion vom Gleichungsgrad 2 entspricht der primitiven Rekursion über Ordinalzahlen, wie sie in Schütte [6] dargestellt ist. Dort wird auch umgekehrt gezeigt, daß aus den Konstanten 0 und ω mit prim.-rek. Ordinalzahlfunktionen $\phi\omega 0$ nicht erreicht werden kann.

LITERATUR

[1] Bachmann, H.: Die Normalfunktionen und das Problem der ausgezeichneten Folgen von Ordnungszahlen. Vierteljahresschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, Bd. 95, 115—147 (1950).

[2] Gerber, H.: An extension of Schütte's Klammersymbols. Math. Ann. **174**, 203—216 (1967).

[3] Howard, A.W.: Ordinal analysis of bar recursion of type zero. Chicago 1969 (vervielfältigt).

[4] Howard, A.W.: A system of abstract constructive ordinals. Journal of Symbolic Logic **37**, 355—374 (1972).

[5] Pfeiffer, H.: Ausgezeichnete Folgen für gewisse Abschnitte der zweiten und weiterer Zahlklassen.

[6] Scarpellini, B.: A model for bar-recursion of higher types. Compositio Mathematica **23**, 123—153 (1971).

[7] Schütte, K.: Primitiv-rekursive Ordinalzahlfunktionen. Sitzungsberichte der Bayer. Akademie der Wissenschaften, München 1975.

[8] Schwichtenberg, H.: Einige Anwendungen von unendlichen Termen und Wertfunktionalen. Habilitationsschrift, Münster 1973.

[9] Vogel, H.: Über ein mit der Barinduktion verwandtes Schema. Mai 1977 (vervielfältigt).

[10] Zucker, J.: Iterated inductive definitions, trees, and ordinals. LNM 344 A.S. Troelstra 392—454 (1973).

Dr. H. Vogel
Math. Institut der Universität Münster
Roxeler Str. 64
4400 Münster