Werk

Titel: Eine algebraische Konstruktion abzählbarer Modelle.

Autor: Schmidt, Diana; Schönfeld, W.

Jahr: 1977

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?379931524_0018|log18

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Arch. math. Logik **18** (1977), 135–144

EINE ALGEBRAISCHE KONSTRUKTION ABZÄHLBARER MODELLE*

Von W. Schönfeld, Stuttgart

Modelltheoretische Sätze, in denen die Existenz bestimmter abzählbarer Strukturen behauptet wird, beweist man im „Henkin-Stil", indem man mit abzählbar vielen neuen Konstanten eine maximal widerspruchsfreie Aussagenmenge konstruiert, in der das Diagramm der gewünschten Struktur enthalten ist. Dagegen beruht die algebraische Konstruktion in der vorliegenden Arbeit darauf, daß man in bestimmter Weise Ketten von endlichen Strukturen gewinnt, durch die beliebige, höchstens abzählbare Strukturen approximiert werden.
Hierbei wird die Rolle von Formeln durch die τ-Systeme übernommen, die in [6] zur Charakterisierung der elementaren Äquivalenz eingeführt wurden. Die distributiven Normalformen aus [3] oder die n-Äquivalenz aus [2] würden (in unübersichtlicherer Darstellung) natürlich dasselbe leisten.
In § 1 werden τ-Systeme (in einer gewissen Verallgemeinerung) untersucht, unter denen in § 2 die für die Modellkonstruktion geeigneten ausgesondert werden. Satz 2.5 sagt aus, daß jede Kette solcher Systeme gegen ein Modell konvergiert. Wie sich hieraus u.a. der Endlichkeitssatz und der Satz über das Auslassen elementarer Typen unmittelbar ableiten lassen, wird in § 3 gezeigt. Die in dieser Arbeit vorgestellte Methode ist also eine Präzisierung des in [4] angesprochenen "single vague principle", das hinter beiden Sätzen (und damit auch hinter der Erzwingungsmethode) zu stehen scheint.
Herrn Prof. W. Schwabhäuser danke ich für die zahlreichen Gespräche, die zu dieser Arbeit geführt haben. Sie ist ein Auszug aus meiner Dissertation (Stuttgart, 1974), der um einige Anwendungen erweitert wurde.

Sei L eine Sprache der Prädikatenlogik 1. Stufe mit Identität zu einem abzählbaren Typ $\Delta = ((l_i)_{i \in I_\Delta}, (m_j)_{j \in J_\Delta})$.
Die Symbole κ, λ, μ, ν, k, l, ..., r bezeichnen natürliche Zahlen.

Die Schreibweise $\alpha(\overset{n}{x})$ deutet an, daß die Formal α höchstens die ersten n Variablen aus der Variablenmenge $\{x_0, x_1, \ldots\}$ frei enthält. $\forall \overset{q}{x}\, \alpha(\overset{n+q}{x})$ ist eine Abkürzung von $\forall x_n \forall x_{n+1} \ldots \forall x_{n+q-1} \alpha(\overset{n+q}{x})$.

* Eingegangen am 23. 4. 1976.

Ist A irgendeine Menge und sind $a:n\to A$ und $b:q\to A$, so ist $ab:n+q\to A$ für $v<n+q$ definiert durch

$$ab(v):=\begin{cases}a(v), & \text{falls } v<n,\\ b(v-n), & \text{falls } n\leqq v<n+q.\end{cases}$$

Für $\varphi:q\to n$ ist $a\circ\varphi$ die übliche Hintereinanderausführung von Abbildungen. Ist dazu noch $\psi:p\to n$, so gilt $a\circ\varphi\psi=(a\circ\varphi)(a\circ\psi)$. *Defb a* und *Wertb a* sind Definitions- bzw. Wertebereich von a, *Idn* ist die identische Abbildung auf n.

§ 1. Einbettungssysteme

Bei den oben erwähnten Charakterisierungen der elementaren Äquivalenz schränkt man die Sprache L so ein, daß das entstehende Fragment (bis auf logische Äquivalenz) nur endlich viele Formeln enthält. Unter diesen findet man Formeln mit überschaubarer algebraischer Bedeutung, die die Semantik des Fragments vollständig beschreiben. Enthält L z.B. nur endlich viele Relationszeichen, so genügt es, neben einer Schranke n für die freien Variablen eine Schranke für den Quantorenrang zu wählen. Ist L irgendeine abzählbare Sprache, so wählen wir endliche Indexmengen $I\subset I_\Delta$ und $J\subset J_\Delta$ für die erlaubten Funktions- bzw. Relationszeichen sowie k als Schranke für die Komplexität der Terme, q für die Länge und r für die Anzahl der Quantorenblöcke ($q\geqq 1$).
Für $\tau:=(I,J,k,q,r)$ ist die *Menge der* (n,τ)*-Terme* definiert durch

$$\mathcal{T}m_{n,\tau}=\begin{cases}\{x_0,\dots,x_{n-1}\}, & \text{falls } k=0,\\ \mathcal{T}m_{n,\tau^*}\cup\{f_i t_0\dots t_{l_i-1}\mid t_\lambda\in\mathcal{T}m_{n,\tau^*},\ i\in I\}, & \text{sonst,}\end{cases}$$

wobei $\tau^*:=(I,J,k-1,q,r)$ ist.
Seien $\mathfrak{A}=(A,(f_i^{\mathfrak{A}})_{i\in I_\Delta},(R_j^{\mathfrak{A}})_{j\in J_\Delta})$ eine L-Struktur und $a:n\to A$. Die durch a (über die Indizes von Variablen) bestimmte Abbildung $\bar a:\mathcal{T}m_{n,\tau}\to A$ induziert eine Struktur $(\mathcal{T}m_{n,\tau}/\Theta,(R_j)_{j\in J})$, wobei die Kongruenzrelation Θ durch die Gleichheit in *Wertb* $\bar a$ und die R_j repräsentantenweise durch die Relationen $R_j^{\mathfrak{A}}$ auf *Wertb* $\bar a$ gegeben sind. Diese endliche Struktur kann zu einer partiellen Struktur vom Typ $((l_i)_{i\in I},(m_j)_{j\in J})$ erweitert werden, die zu der von *Wertb a* in $\mathfrak{A}$ bis zur „Stufe" k erzeugten partiellen Unterstruktur isomorph ist. Von ihr hängt die Erfüllung von quantorenfreien Formeln ab, die nur aus atomaren Formeln $R_j t_0\dots t_{m-1}$ oder $t_0=t_1$ mit $t_\mu\in\mathcal{T}m_{n,\tau}$ und $j\in J$ aufgebaut sind. Kommen Quantoren vor, so muß man die möglichen Ineinanderschachtelungen von endlichen partiellen Unterstrukturen beschreiben.

1.1 Def.: Das τ*-Einbettungssystem von a in* $\mathfrak{A}$ ist definiert durch

$$\tau(\mathfrak{A},a)=\begin{cases}\text{die von } \bar a \text{ auf } \mathcal{T}m_{n,\tau} \text{ induzierte Struktur}, & \text{falls } r=0,\\ \{\tau'(\mathfrak{A},aa')\mid a':q\to A\}, & \text{falls } r>0,\end{cases}$$

mit $\tau':=(I,J,k,q,r-1)$.

Für $\Sigma \subset L$ sei $S_{n,\tau}(\Sigma)$ die Menge aller τ-(Einbettungs-)Systeme von Abbildungen in Modelle von Σ, und speziell $S_{n,\tau} := S_{n,\tau}(\emptyset)$.
Für $r=0$ ist $S_{n,\tau}$ endlich, weil es wegen der Endlichkeit von $\mathcal{T}m_{n,\tau}$ nur endlich viele Trägermengen der Form $\mathcal{T}m_{n,\tau}/\Theta$ und auf diesen nur endlich viele Relationenstrukturen endlichen Typs gibt. Da für $r>0$ offenbar die Beziehung $\tau(\mathfrak{A}, a) \subset S_{n+q,\tau'}$ gilt, bleibt $S_{n,\tau}$ endlich für beliebige τ. Ist $Fml_{n,\tau}$ für $r=0$ die Menge der oben beschriebenen quantorenfreien Formeln und für $r>0$ die Menge aller aussagenlogischen Kombinationen von Formeln der Form $\forall \overset{q}{x}\, \alpha$ oder $\exists \overset{q}{x}\, \alpha$ mit α aus $Fml_{n+q,\tau'}$, so bestimmt das τ-System die Erfüllung aller Formeln aus $Fml_{n,\tau}$. Umgekehrt läßt sich jedes τ-System durch eine solche Formel beschreiben.

1.2 Def.: Die *τ-Hintikkaformel von a in $\mathfrak{A}$* ist definiert durch

$$\delta_\tau(\mathfrak{A}, a) = \begin{cases} \bigwedge \{(\neg)\alpha | \alpha \in Fml_{n,\tau} \text{ atomar}, \mathfrak{A} \models (\neg)\alpha[a]\}, & \text{falls } r=0, \\ \bigwedge \{\exists \overset{q}{x}\, \delta_{\tau'}(\mathfrak{A}, aa') | a' : q \to A\} \\ \wedge \forall \overset{q}{x} \bigvee \{\delta_{\tau'}(\mathfrak{A}, aa') | a' : q \to A\}, & \text{falls } r>0. \end{cases}$$

Durch Induktion nach r ergibt sich

1.3 Lemma: Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:
(i) $\tau(\mathfrak{A}, a) = \tau(\mathfrak{B}, b)$.
(ii) $\delta_\tau(\mathfrak{A}, a) = \delta_\tau(\mathfrak{B}, b)$.
(iii) $\mathfrak{B} \models \delta_\tau(\mathfrak{A}, a)[b]$.
(iv) Für jede Formel α aus $Fml_{n,\tau}$ gilt $\mathfrak{A} \models \alpha[a]$ genau dann, wenn $\mathfrak{B} \models \alpha[b]$ gilt.

Da τ-Systeme und τ-Hintikkaformeln sich eineindeutig entsprechen, erlauben wir uns die Schreibweise $\mathfrak{B} \models \tau(\mathfrak{A}, a)[b]$. Zu jeder Formel α $(\overset{q}{x})$ aus L kann (etwa durch Übergang zu einer geeigneten pränexen Normalform) ein τ gefunden werden, so daß α einer Formel aus $Fml_{n,\tau}$ logisch äquivalent ist. Insbesondere ist dann $\bigvee S_{n,\tau}(\{\alpha\})$ die *disjunktive Normalform (bzgl. n, τ)*.

Wird anstatt der Gleichheit zwischen τ-Systemen die unten definierte Quasiordnung betrachtet, so läßt sich die Erfüllung von Formeln vorgegebenen Präfixtyps beschreiben.

1.4 Def.: Seien $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2 \in S_{n,\tau}$. Für $r=0$ gelte $\mathfrak{M}_1 \leqq \mathfrak{M}_2$ g.d.w. $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2$. Für $r>0$ gelte $\mathfrak{M}_1 \leqq \mathfrak{M}_2$ g.d.w. es für jedes $\mathfrak{N}_1 \in \mathfrak{M}_1$ ein $\mathfrak{N}_2 \in \mathfrak{M}_2$ mit $\mathfrak{N}_2 \leqq \mathfrak{N}_1$ gibt.

Wir setzen für $r=0$ $\forall Fml_{n,\tau} := \exists Fml_{n,\tau} := Fml_{n,\tau}$ und für $r>0$

$\forall Fml_{n,\tau} := \{\forall \overset{q}{x} \bigvee \Gamma | \Gamma \subset \exists Fml_{n+q,\tau'}\}$ sowie

$\exists Fml_{n,\tau} := \{\bigwedge \{\exists \overset{q}{x}\, \gamma | \gamma \in \Gamma\} | \Gamma \subset \forall Fml_{n+q,\tau'}\}$.

Gilt nun $\tau(\mathfrak{A}, a) \leqq \tau(\mathfrak{B}, b)$, so überträgt sich die Erfüllung der Formeln aus $\forall Fml_{n,\tau}$ von $\mathfrak{B}$ nach $\mathfrak{A}$ und der Formeln aus $\exists Fml_{n,\tau}$ von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$.
Umgekehrt wird $\leqq$ durch die folgenden Formeln beschrieben.

1.5 Def.: Ist $\mathfrak{A}$ L-Struktur und $a: n \to A$, so sei für $r = 0$
$\alpha_\tau(\mathfrak{A}, a) := \varepsilon_\tau(\mathfrak{A}, a) := \delta_\tau(\mathfrak{A}, a)$. Für $r > 0$ setze

$$\alpha_\tau(\mathfrak{A}, a) := \forall \overset{q}{x} \bigvee \{\varepsilon_{\tau'}(\mathfrak{A}, aa') | a' : q \to A\} \text{ und}$$

$$\varepsilon_\tau(\mathfrak{A}, a) := \bigwedge \{\exists \overset{q}{x}\, \alpha_{\tau'}(\mathfrak{A}, aa') | a' : q \to A\}.$$

Zusammengefaßt ergibt sich dann

1.6 Lemma: Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:
(i) $\tau(\mathfrak{A}, a) \leqq \tau(\mathfrak{B}, b)$.
(ii) $\mathfrak{A} \models \alpha_\tau(\mathfrak{B}, b)[a]$.
(iii) $B \models \varepsilon_\tau(\mathfrak{A}, a)[b]$.
(iv) Für jede Formel $\gamma \in \forall Fml_{n,\tau}$ mit $\mathfrak{B} \models \gamma[b]$ gilt $\mathfrak{A} \models \gamma[a]$.
(v) Für jede Formel $\gamma \in \exists Fml_{n,\tau}$ mit $\mathfrak{A} \models \gamma[a]$ gilt $\mathfrak{B} \models \gamma[b]$.

Ist nun $\gamma(\overset{n}{x})$ eine Formel in pränexer Normalform, deren erster Quantorenblock aus Allquantoren besteht, so läßt sich ein τ finden derart, daß γ ein logisches Äquivalent in $\forall Fml_{n,\tau}$ hat. Die disjunktive Normalform ist $\bigvee \{\alpha_\tau(\mathfrak{A}, a) | \mathfrak{A} \models \gamma[a]\}$. Entsprechendes gilt für Formeln, die mit Existenzquantoren beginnen.
Die bis hierhin gewonnen Resultate lassen sich noch etwas verallgemeinern, wenn man unterschiedliche Längen von Quantorenblöcken betrachtet. Hierzu ersetzt man in τ die Parameter q und r durch positive natürliche Zahlen $q_0, \ldots, q_{r-1}$, die die Blocklängen angeben. Lemma 1.6 ist dann die in [5] angekündigte Verbesserung von Ergebnissen aus [7], da für $I = I_\Delta = \emptyset$ und $J = J_\Delta$ endlich $\mathfrak{B}$ eine $(n, q_0, \ldots, q_{r-1})$-*Überdeckung* (im Sinne von [7]) *von* $\mathfrak{A}$ *bezüglich Wertb a* genau dann ist, wenn es $b: n \to B$ mit $\tau(\mathfrak{B}, b) \leqq \tau(\mathfrak{A}, a)$ gibt.
Es sollen nun Einbettungssysteme zu unterschiedlichen Quintupeln $\tau = (I, J, k, q, r)$ untersucht werden. Die Menge H aller solcher τ bildet mit der komponentenweise definierten Ordnung $\leqq$ einen Verband.

1.7. Lemma: Seien $\tau_1 \leqq \tau_2 \in H$, $\tau_\nu = (I_\nu, J_\nu, k_\nu, q_\nu, r_\nu)$, und $\varphi: n_1 \to n_2$. Gilt für $a: n_2 \to A$ und $b: n_2 \to B$ $\tau_2(\mathfrak{A}, a) = \tau_2(\mathfrak{B}, b)$, so auch $\tau_1(\mathfrak{A}, a \circ \varphi) = \tau_1(\mathfrak{B}, b \circ \varphi)$.

Beweis: Durch Induktion nach $r_2 - r_1$. Für $r_1 = r_2 = 0$ überlegt man sich, daß die von den Abbildungen $\overline{a \circ \varphi}: Tm_{n_1, \tau_1} \to A$ und $\overline{b \circ \varphi}: Tm_{n_1, \tau_1} \to B$ induzierten Strukturen gleich sind, wenn schon die von $\bar{a}$ und $\bar{b}$ auf Tm_{n_2, τ_2} induzierten Strukturen übereinstimmen. Für $r_1 = r_2 > 0$ genügt es, $\tau_1(\mathfrak{A}, a \circ \varphi) \subset \tau_2(\mathfrak{B}, b \circ \varphi)$ zu zeigen. Ist $a_1: q_1 \to A$ beliebig, so wähle $a_2: q_2 \to A$ mit $a_1 = a_2 \circ \mathrm{Id} q_1$. Dann gibt es ein $b_2: q_2 \to B$ mit $\tau_2'(\mathfrak{A}, aa_2) = \tau_2'(\mathfrak{B}, bb_2)$.

Setze $b_1 := b_2 \circ Id q_1$ und definiere $\eta : q_1 \to n_2 + q_2$ durch $\eta(\nu) := n_2 + \nu$ für $\nu < q_1$. Dann ist $(a \circ \varphi) a_1 = a a_2 \circ \varphi\eta$ und $(b \circ \varphi) b_1 = b b_2 \circ \varphi\eta$, und mit der Induktionsvoraussetzung folgt

$$\tau_1'(\mathfrak{A}, (a \circ \varphi) a_1) = \tau_1'(\mathfrak{B}, (b \circ \varphi) b_1) \in \tau_1(\mathfrak{B}, b \circ \varphi).$$

Im Fall $r_1 < r_2$ wähle $a_2 : q_2 \to A$ und $b_2 : q_2 \to B$ mit $\tau_2'(\mathfrak{A}, a a_2) = \tau_2'(\mathfrak{B}, b b_2)$. Wegen $\tau_1 \leqq \tau_2'$ folgt mit der Induktionsvoraussetzung $\tau_1(\mathfrak{A}, a \circ \varphi) = \tau_1(\mathfrak{B}, b \circ \varphi)$.
Die eben bewiesene Eigenschaft von Systemen erlaubt es, Abbildungen $\Pi_{\varphi, \tau_1} : S_{n_2, \tau_2} \to S_{n_1, \tau_1}$ zu definieren, indem man für $\mathfrak{M} \in S_{n_2, \tau_2}$ $\mathfrak{M} = \tau_2(\mathfrak{A}, a)$ wählt und $\Pi_{\varphi, \tau_1}(\mathfrak{M}) := \tau_1(\mathfrak{A}, a \circ \varphi)$ setzt. Ist $r_1 > 0$ und η wie im vorigen Beweis, so gilt

$$\Pi_{\varphi, \tau_1}(\mathfrak{M}) = \{\Pi_{\varphi\eta, \tau_1'}(\mathfrak{N}) | \mathfrak{N} \in \mathfrak{M}\}.$$

Wir schreiben Π_φ, falls $\tau_1 = \tau_2$, und Π_{τ_1}, falls $\varphi = Id n_2$ ist.
Es gelten die Regeln

(i) $\Pi_{\varphi, \tau_1} = \Pi_\varphi \circ \Pi_{\tau_1} = \Pi_{\tau_1} \circ \Pi_\varphi$,
(ii) $\Pi_{\varphi, \tau_0} \circ \Pi_{\varphi, \tau_1} = \Pi_{\varphi \circ \psi, \tau_0}$ für $\tau_0 \leqq \tau_1$ und $\psi : n_0 \to n_1$.

Um alle Formeln $\alpha(\overset{n}{x})$ durch Systeme zu erfassen, wählt man eine im Verband H dichte Kette $(\tau_\nu)_{\nu \in \omega}$. Die Menge $T_n := \{\emptyset\} \cup \bigcup \{S_{n, \tau_\nu} | \nu \in \omega\}$ wird zu einem abzählbar unendlichen, endlich verzweigten, gerichteten Baum mit der Wurzel $\emptyset$, wenn wir die Vereinigung der Abbildungen $\Pi_{\tau_\nu} : S_{n, \tau_{\nu+1}} \to S_{n, \tau_\nu}$ und $\Pi_\emptyset : S_{n, \tau_0} \to \{\emptyset\}$ als Vorgänger-Operation auffassen. $T_n(\Sigma)$, die Menge aller Einbettungssysteme in Modellen von Σ, bildet einen Teilbaum von T_n. Ist Γ ein n-elementarer Typ von Σ, so können wir annehmen, daß Γ für jedes $\nu \in \omega$ genau eine Formel aus Fml_{n, τ_ν} in disjunktiver Normalform enthält. Diese ist wegen der maximalen Konsistenz von Γ eingliedrig. Die zugehörigen Einbettungssysteme bilden einen *Zweig* (d.h. einen mit der Wurzel beginnenden, unendlichen Weg) in $T_n(\Sigma)$. Umgekehrt bestimmt jeder solche Zweig einen n-elementaren Typ von Σ. Haupttypen (d.h. lokal realisierte Typen im Sinne von [1]) entsprechen gerade den *isolierten* Zweigen (d.h. denjenigen Zweigen, von denen ab einer gewissen Höhe kein weiterer Zweig ausgeht).

§ 2. Volle Einbettungssysteme

Da Strukturen durch elementare Typen noch nicht bis auf Isomorphie bestimmt sind, ist allein über die Zweige in T_n keine sinnvolle Modellkonstruktion zu erwarten. Wird jedoch die Variablenmenge in jeder Stufe des Baumes in noch zu bestimmendem Maße vergrößert, so können aus den Zweigen dieses verfeinerten Baumes durch eine einfache Limeskonstruktion abzählbare Modelle gewonnen werden.
Wird für $\tau = (I, J, k, q, r)$ aus H $\tau^0 := (I, J, k, q, 0)$ gesetzt, so ist für $\mathfrak{M} \in S_{n, \tau}$ das System $\Pi_{\tau^0}(\mathfrak{M})$ eine endliche Struktur. Bei gewissen „vollen" τ-Systemen $\mathfrak{M}$ kommen die durch sie beschriebenen Ineinanderschachtelungen von Einbettungen schon in $\Pi_{\tau^0}(\mathfrak{M})$ vor.

2.1 Def.: Sei $\varphi: n_1 \to n_2$. Für $r=0$ sind alle Systeme aus $S_{n_2,\tau}$ *voll über* φ. Für $r>0$ ist ein System $\mathfrak{M} \in S_{n_2,\tau}$ *voll über* φ, falls es für alle $\mathfrak{N} \in \mathfrak{M}$ ein $\psi: q \to n_2$ mit den Eigenschaften
(i) $\Pi_{\varphi\eta}(\mathfrak{N}) = \Pi_{\varphi\psi}(\mathfrak{N})$,
(ii) $\Pi_{Id n_2}(\mathfrak{N})$ ist voll über $\varphi\psi$,
gibt, wobei $\eta: q \to n_2 + q$ durch $\eta(\nu) := n_2 + \nu$ für $\nu < q$ definiert ist.

$\tau(\mathfrak{A}, a)$ ist also voll über φ genau dann, wenn sich zu jeder Abbildung $a': q \to A$ eine Substitution $\psi: q \to n_2$ finden läßt, für die

$$\tau'(\mathfrak{A}, (a \circ \varphi) a') = \tau'(\mathfrak{A}, (a \circ \varphi)(a \circ \psi))$$

gilt und $\tau'(\mathfrak{A}, a)$ über $\varphi\psi$ voll ist. Das impliziert u.a., daß alle Elemente der von *Wertb* $a \circ \varphi$ in $\mathfrak{A}$ bis zur Stufe k erzeugten partiellen Unterstruktur schon in *Wertb* a vorkommen müssen.
Dazu überlegen wir uns, daß jedes solche Element die Form $\overline{a \circ \varphi}(t)$ für ein $t \in Tm_{n_1,\tau}$ hat. Wir wählen $a': q \to A$ mit $\overline{(a \circ \varphi) a'}(x_{n_1}) = \overline{a \circ \varphi}(t)$. Wenn $\tau(\mathfrak{A}, a)$ voll über φ ist, gibt es $\psi: q \to n_2$, so daß obige Gleichung gilt. Da sie wegen 1.7 auch für τ^0 gilt, stimmen die von $(a \circ \varphi) a'$ und die von $(a \circ \varphi)(a \circ \psi)$ induzierten Äquivalenzrelationen überein. Hieraus folgt $\overline{a \circ \varphi}(t) = \bar{a}(\psi(0))$ mit $\psi(0) \in n_2$.
Durch Induktion beweist man

2.2 Lemma: Sei $\mathfrak{M} \in S_{n_2,\tau}$ voll über $\varphi: n_1 \to n_2$. Dann gelten:
(i) Sind $\eta: n_2 \to n_3$ und $\mathfrak{M}_3 \in S_{n_3,\tau}$ mit $\Pi_\eta(\mathfrak{M}_3) = \mathfrak{M}$, so ist $\mathfrak{M}_3$ voll über $\eta \circ \varphi$.
(ii) Für alle $\eta: n_0 \to n_1$ ist $\mathfrak{M}$ voll über $\varphi \circ \eta$.
(iii) Ist $\tau_1 \leqq \tau$, so ist $\Pi_{\tau_1}(\mathfrak{M})$ voll über φ.

(i) bedeutet insbesondere, daß volle Systeme voll bleiben, falls nur die Anzahl n_2 der freien Variablen erhöht wird. Andererseits zeigt das folgende Lemma, daß jedes eventuell noch nicht volle System zu einem vollen System erweitert werden kann.

2.3 Lemma: Es gibt eine Funktion $h: \omega \times H \to \omega$ mit der Eigenschaft: Für alle $n \in \omega$, $\tau \in H$, L-Strukturen $\mathfrak{A}$ und $a: n \to A$ gibt es ein $b: h(n, \tau) \to A$, so daß $\tau(\mathfrak{A}, ab)$ über $Id\, n$ voll ist.

Beweis: Ist $r=0$, so setze $h(n, \tau) := 0$ (da in diesem Fall jedes System voll ist); setze außerdem $g(n, \tau) := |S_{n,\tau}|$.
Ist $r>0$, so setze $p := g(n+q, \tau')$, $q_1 := h(n+q, \tau')$, $g(n, \tau) := 2^p$ und $h(n, \tau) := p \cdot (q + q_1)$. Da $|S_{n+q,\tau'}| \leqq p$ ist, gibt es gewisse $\alpha_\lambda: q \to A$ mit

$$\tau(\mathfrak{A}, a) = \{\tau'(\mathfrak{A}, a a_\lambda) | \lambda < p\}.$$

Die Induktionsvoraussetzung liefert für jedes $\lambda < p$ ein $b_\lambda: q_1 \to A$, so daß $\tau'(\mathfrak{A}, a a_\lambda b_\lambda)$ über $Id\, n + q$ voll ist. Dann ist für $b := a_0 b_0 \ldots a_{p-1} b_{p-1}$ $\tau(\mathfrak{A}, ab)$ voll über $Id\, n$. Denn für jedes $a': q \to A$ gibt es ein $\lambda < p$ mit $\tau'(\mathfrak{A}, a a') = \tau'(\mathfrak{A}, a a_\lambda)$, und die Abbildung $\psi: q \to h(n, \tau)$, die durch $\psi(\nu) := n + \lambda \cdot (q + q_1) + \nu$ für $\nu < q$ definiert ist, erfüllt die Bedingungen in 2.1.

Seien nun neben der Kette $(\tau_\nu)_{\nu \in \omega}$ noch Folgen $(n_\nu)_{\nu \in \omega}$ von natürlichen Zahlen und $(\varphi_\nu)_{\nu \in \omega}$ von Abbildungen $\varphi_\nu: n_\nu \to n_{\nu+1}$ gegeben.

2.4 Def.: Eine Folge $(\mathfrak{M}_\nu)_{\nu\in\omega}$ heißt *konvergent bezüglich* $(\varphi_\nu)_{\nu\in\omega}$, falls für alle $\nu\in\omega$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:
(i) $\mathfrak{M}_\nu\in S_{n_\nu,\tau_\nu}$,
(ii) $\mathfrak{M}_\nu=\Pi_{\varphi_\nu,\tau_\nu}(\mathfrak{M}_{\nu+1})$,
(iii) $\mathfrak{M}_{\nu+1}$ ist voll über φ_ν.
Sind alle $\varphi_\nu=Id\,n_\nu$, so heißt $(\mathfrak{M}_\nu)_{\nu\in\omega}$ *konvergent.*

Zur Vereinfachung der folgenden Konstruktion nehmen wir an, daß es ein μ mit $\varphi_\nu=Id\,n_\nu$ für alle $\nu\leqq\mu$ gibt. Zu jedem $\mathfrak{M}_\nu$ gehört die endliche Struktur $\mathfrak{N}_\nu=\Pi_{\tau\varrho}(\mathfrak{M}_\nu)$ der Form $(Tm_\nu/\Theta_\nu,(R_j^\nu)_{j\in J_\nu})$, wobei $Tm_\nu:=Tm_{n_\nu,\tau_\nu}$ ist. Wegen (ii) gewinnt man aus φ_ν eine isomorphe Einbettung $\tilde{\varphi}_\nu$ von $\mathfrak{N}_\nu$ in $\mathfrak{N}_{\nu+1}$, indem man für $t\in Tm_\nu$

$$\tilde{\varphi}_\nu([t]\Theta_\nu):=[\bar{\varphi}_\nu(t)]\Theta_{\nu+1}$$

setzt, wobei $\bar{\varphi}_\nu$ die durch φ_ν bestimmte Abbildung von Tm_ν in $Tm_{\nu+1}$ ist. Für $\nu\geqq\mu$ gilt dann $\Theta_\nu\subset\Theta_{\nu+1}$, so daß sich der direkte Limes der Folge $(\mathfrak{N}_\nu)_{\nu\in\omega}$ bez. der Abbildungen $\tilde{\varphi}_\nu$ wie folgt beschreiben läßt:
Auf $\bigcup\{Tm_\nu|\nu\in\omega\}$, der Menge aller L-Terme, ist $\Theta:=\bigcup\{\Theta_\nu|\mu\leqq\nu\in\omega\}$ Kongruenzrelation. Wegen (iii) enthält jede Kongruenzklasse wenigstens eine Variable. Erklärt man auf $D:=\bigcup\{Tm_\nu|\nu\in\omega\}/\Theta$ wie üblich Operationen $f_i(i\in I_\Delta)$ und Relationen $R_j(j\in J_\Delta)$, so ist $(D,(f_i)_{i\in I_\Delta},(R_j)_{j\in J_\Delta})$ eine L-Struktur, die wir den *direkten Limes der bez.* $(\varphi_\nu)_{\nu\in\omega}$ *konvergenten Folge* $(\mathfrak{M}_\nu)_{\nu\in\omega}$ nennen und mit $Lim(\mathfrak{M}_\nu,\varphi_\nu)$ bezeichnen. Wir schreiben kurz $Lim\,\mathfrak{M}_\nu$, falls $\varphi_\nu=Id\,n_\nu$ für alle ν ist. Setzt man für $\nu<\mu$ $\varphi_{\nu\mu}:=\varphi_{\mu-1}\circ\ldots\circ\varphi_{\nu+1}\circ\varphi_\nu$, so ist für jedes $\nu\in\omega$ eine *natürliche Belegung* $d_\nu:n_\nu\to D$ durch

$$d_\nu(\kappa):=\begin{cases}[x_\kappa]\,\Theta, & \text{falls } \nu\geqq\mu,\\ d_\mu(\varphi_{\nu\mu}(\kappa)), & \text{falls } \nu<\mu,\end{cases}$$

für $\kappa<n_\nu$ definiert.

2.5 Satz: *Ist* $\mathfrak{D}$ *der direkte Limes der bez.* $(\varphi_\nu)_{\nu\in\omega}$ *konvergenten Folge* $(\mathfrak{M}_\nu)_{\nu\in\omega}$, *so gilt für alle* $\nu\in\omega$ *und die natürlichen Belegungen* d_ν

$$\tau_\nu(\mathfrak{D},d_\nu)=\mathfrak{M}_\nu.$$

Beweis: Da der direkte Limes durch Weglassen (oder Abändern) eines endlichen Anfangsstückes der Folge nicht verändert wird, genügt es, den Beweis für $\nu=0$ zu führen, und zwar durch Induktion nach r_0. Für $r_0=0$ ergibt sich die Behauptung unmittelbar aus der Konstruktion. Sei $r_0>0$.
„$\supset$" Für beliebiges $\mathfrak{N}_0\in\mathfrak{M}_0$ gibt es wegen 2.4(ii) ein $\mathfrak{N}_1\in\mathfrak{M}_1$ mit

$$\mathfrak{N}_0=\Pi_{\varphi_0\eta_0,\tau_0}(\mathfrak{N}_1),$$

wobei $\eta_0:=\eta_1\circ Idq_0$ gesetzt und $\eta_1:q_1\to n_1+q_1$ durch $\eta_1(\kappa):=n_1+\kappa$ für alle $\kappa<q_1$ definiert ist. Da $\mathfrak{M}_1$ über φ_0 voll ist, gibt es $\psi:q_1\to n_1$ mit

(i) $\Pi_{\varphi_0\eta_1}(\mathfrak{N}_1)=\Pi_{\varphi_0\psi}(\mathfrak{N}_1)$,

(ii) $\Pi_{Idn_1}(\mathfrak{N}_1)$ ist voll über $\varphi_0\psi$.

Wir ändern die Folgen $(\mathfrak{M}_\nu)$ und (φ_ν) in den ersten beiden Gliedern ab, indem wir $\mathfrak{M}_0^* := \mathfrak{N}_0$, $\mathfrak{M}_1^* := \Pi_{Idn_1}(\mathfrak{N}_1)$, $\varphi_0^* := \varphi_0(\psi \circ Idq_0)$ und $\varphi_1^* := \varphi_1$ setzen, und erhalten eine bez. $(\varphi_\nu^*)_{\nu\in\omega}$ konvergente Folge $(\mathfrak{M}_\nu^*)_{\nu\in\omega}$, die die Induktionsvoraussetzung erfüllt. Ist $\mathfrak{D}^*$ ihr direkter Limes und d_0^* die natürliche Belegung, so gilt also

$$\mathfrak{N}_0 = \tau_0'(\mathfrak{D}^*, d_0^*).$$

Es ist $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}^*$ und für alle $\nu \leqq 1$ $d_\nu = d_\nu^*$. Setzt man $d := d_1 \circ \psi \circ Idq_0$, so ist $d_0^* = d_1 \circ \varphi_0(\psi \circ Idq_0) = d_0 d$ und

$$\mathfrak{N}_0 = \tau_0'(\mathfrak{D}, d_0 d) \in \tau_0(\mathfrak{D}, d_0).$$

„$\subset$“ Ist umgekehrt $d : q_0 \to D$, so gibt es nach Konstruktion ein μ mit $Wertbd \subset Wertbd_\mu$. Wir können annehmen, daß für alle $\nu \geqq \mu$ $\varphi_\nu = Idn_\nu$ gilt. Wegen $d_0 = d_\mu \circ \varphi_{0\mu}$ können wir $\psi : q_0 \to n_\mu$ mit

$$d_\mu \circ \varphi_{0\mu}\psi = d_0 d$$

wählen. Setze $r := r_\mu - (r_0 - 1)$ und für alle $\nu \in \omega$

$$\begin{aligned} \tau_\nu^* &:= (I_{\mu+\nu}, J_{\mu+\nu}, k_{\mu+\nu}, q_{\mu+\nu}, r_{\mu+\nu} - r), \\ \mathfrak{M}_\nu^* &:= \Pi_{\tau_\nu^*}(\mathfrak{M}_{\mu+\nu}) \text{ und} \\ \varphi_\nu^* &:= \varphi_{\mu+\nu}. \end{aligned}$$

Dann ist $(\mathfrak{M}_\nu^*)_{\nu\in\omega}$ bez. $(\varphi_\nu^*)_{\nu\in\omega}$ konvergent und $Lim(\mathfrak{M}_\nu^*, \varphi_\nu) = \mathfrak{D}$. Wegen $r_0^* = r_0 - 1$ gilt nach Induktionsvoraussetzung

$$\tau_0^*(\mathfrak{D}, d_0^*) = \mathfrak{M}_0^* (= \Pi_{\tau_0^*}(\mathfrak{M}_\mu)),$$

und wegen $\tau_0' \leqq \tau_0^*$

$$\tau_0'(\mathfrak{D}, d_0 d) = \Pi_{\varphi_{0\mu}\psi, \tau_0'}(\mathfrak{M}_\mu) \in \mathfrak{M}_0.$$

§ 3. Anwendungen

Wir ordnen alle vollen Einbettungssysteme so in einem Baum an, daß möglichst alle konvergente Folgen, die Modellkonstruktionen in Beweisen von modelltheoretischen Sätzen liefern können, als Zweige vorkommen.
Dazu setzen wir für irgendein $n \in \omega$ $n_0 := n$ und $n_{\nu+1} := n_\nu + h(n_\nu, \tau_{\nu+1})$. Ist $\Sigma = \{\alpha_\nu | \nu \in \omega\}$ eine Aussagenmenge mit $\alpha_\nu \in Fml_{0,\tau_\nu}$, so setzen wir

$$\begin{aligned} V_0(\Sigma) &:= S_{n_0,\tau_0}(\Sigma) \\ V_{\nu+1}(\Sigma) &:= \{\mathfrak{M} \in S_{n_{\nu+1},\tau_{\nu+1}}(\Sigma) | \\ &\qquad \mathfrak{M} \text{ voll über } Idn_\nu \text{ und } \Pi_\nu(\mathfrak{M}) \in V_\nu(\Sigma)\}, \end{aligned}$$

wobei $\Pi_\nu := \Pi_{\mathrm{Id}n_\nu,\tau_\nu}$ ist. Durch diese Abbildung wird

$$V(\Sigma) := \{\emptyset\} \cup \bigcup \{V_\nu(\Sigma) | \nu \in \omega\}$$

ein endlich verzweigter Baum. Seine (unendlichen) Zweige sind, falls es überhaupt solche gibt, genau die konvergenten Folgen $(\mathfrak{M}_\nu)_{\nu\in\omega}$ mit $Lim\mathfrak{M}_\nu \models \Sigma$.
Ist jede endliche Teilmenge von Σ erfüllbar, so auch für jedes κ die Formel $\bigwedge\{\alpha_\nu|\nu\leqq\kappa\}$. Die κ-fache Anwendung von 2.3 liefert einen Weg $(\mathfrak{M}_\nu)_{\nu\leqq\kappa}$ in $V(\Sigma)$. Nach dem Lemma von König aus der Graphentheorie gibt es in $V(\Sigma)$ einen unendlichen Weg. Damit ergibt sich die folgende Formulierung des Endlichkeitssatzes ([1], 1.3.22).

3.1 Satz: *Seien Folgen $(n_\nu)_{\nu\in\omega}$ und $(\tau_\nu)_{\nu\in\omega}$ wie oben gegeben. Ist jede endliche Teilmenge einer Aussagenmenge Σ erfüllbar, so gibt es eine konvergente Folge $(\mathfrak{M}_\nu)_{\nu\in\omega}$ mit $Lim\mathfrak{M}_\nu \models \Sigma$.*

Die ω-fache Anwendung von 2.3 ergibt

3.2 Satz: *Seien Folgen $(n_\nu)_{\nu\in\omega}$ und $(\tau_\nu)_{\nu\in\omega}$ wie oben gegeben. Ist $\mathfrak{A}$ eine L-Struktur, so läßt sich jede Abbildung $a: n\to A$ zu einer Abbildung $b:\omega\to A$ fortsetzen, so daß die Folge*

$$(\tau_\nu(\mathfrak{A}, b\circ Id n_\nu))_{\nu\in\omega}$$

konvergent ist.

Aus b gewinnt man in naheliegender Weise eine elementare Einbettung des direkten Limes dieser Folge in $\mathfrak{A}$. Da er höchstens abzählbar ist, erhalten wir aus 3.2 für abzählbare Sprachen den Satz von Löwenheim-Skolem-Tarski für elementare Unterstrukturen ([1], 3.1.6).
Um den Satz über das Auslassen elementarer Typen ([1], 2.2.9) zu beweisen, überlegen wir uns, daß Nichthaupttypen von Σ gerade den nichtisolierten Zweigen in $T_n(\Sigma)$ entsprechen, d.h. den Zweigen $(\mathfrak{N}_\nu)_{\nu\in\omega}$ mit der folgenden Eigenschaft:
Zu jedem $\nu\in\omega$ gibt es $\mu>\nu$, $\mathfrak{A}\models\Sigma$ und $a: n\to A$ mit
(i) $\mathfrak{N}_\mu \neq \tau_\mu(\mathfrak{A}, a)$,
(ii) $\mathfrak{N}_\nu = \tau_\nu(\mathfrak{A}, a)$.

3.3 Satz: *Seien Folgen $(n_\nu)_{\nu\in\omega}$ und $(\tau_\nu)_{\nu\in\omega}$ wie oben sowie eine Aufzählung $\{\varphi_\nu|\nu\in\omega\}$ von ω^n gegeben. Ist $(\mathfrak{N}_\nu)_{\nu\in\omega}$ ein nichtisolierter Zweig in $T_n(\Sigma)$, so gibt es eine konvergente Folge $(\mathfrak{M}_\nu)_{\nu\in\omega}$ mit $Lim\mathfrak{M}_\nu\models\Sigma$ und eine streng monotone Folge $(\mu_\nu)_{\nu\in\omega}$ natürlicher Zahlen, so daß $\Pi_{\varphi_\nu}(\mathfrak{M}_{\mu_\nu}) \neq \mathfrak{N}_{\mu_\nu}$ für alle $\nu\in\omega$ ist.*

Beweis: Wir können o.B.d.A. annehmen, daß für die n_ν, τ_ν und φ_ν die Beziehungen $r_{\nu+1}>r_\nu$, $q_{\nu+1}=n_\nu$, $\varphi_0=Idn$ und $Wertb\varphi_\nu\subset n_\nu$ gelten. Wähle $\mu_0>0$, $\mathfrak{A}\models\Sigma$ und $a: n\to A$ so, daß $\tau_0(\mathfrak{A}, a)=\mathfrak{N}_0$ und $\tau_{\mu_0}(\mathfrak{A}, a)\neq\mathfrak{N}_{\mu_0}$. Setze $\mathfrak{M}_0 := \tau_0(\mathfrak{A}, a)$ und wähle gemäß 2.3 Abbildungen $a\subset a_1\subset a_2\subset\ldots\subset a_{\mu_0}$, so daß für alle $\nu<\mu_0$ $\mathfrak{M}_{\nu+1} := \tau_{\nu+1}(\mathfrak{A}, a_{\nu+1})$ über Idn_ν voll ist. Wegen $\varphi_0=Idn_0$ ist dann $\Pi_{\varphi_0}(\mathfrak{M}_{\mu_0})=\tau_{\mu_0}(\mathfrak{A}, a)\neq\mathfrak{N}_{\mu_0}$.
Sind für ein κ Folgen $(\mu_\nu)_{\nu\leqq\kappa}$ und $(\mathfrak{M}_\nu)_{\nu\leqq\mu_\kappa}$ mit den gewünschten Eigenschaften schon konstruiert, so wähle (mit $\lambda := \mu_\kappa$) eine Struktur $\mathfrak{A}_\lambda\models\Sigma$ und $a_\lambda: n_\lambda\to A_\lambda$ mit $\mathfrak{M}_\lambda=\tau_\lambda(\mathfrak{A}_\lambda, a_\lambda)$. Ist dann $\tau_{\lambda+1}(\mathfrak{A}_\lambda, a_\lambda\circ\varphi_{\kappa+1})\neq\mathfrak{N}_{\lambda+1}$, so wählen wir $a_{\lambda+1}: n_{\lambda+1}\to A_\lambda$, so daß $\mathfrak{M}_{\lambda+1} := \tau_{\lambda+1}(\mathfrak{A}_\lambda, a_{\lambda+1})$ voll über Idn_λ ist, und setzen $\mu_{\kappa+1} := \lambda+1$. Ist dagegen $\tau_{\lambda+1}(\mathfrak{A}_\lambda, a_\lambda\circ\varphi_{\kappa+1})=\mathfrak{N}_{\lambda+1}$, so gibt es, da der Zweig

$(\mathfrak{N}_\nu)_{\nu\in\omega}$ nichtisoliert ist, $\mu > \lambda+1$, $\mathfrak{A}_\mu \models \Sigma$ und $b : n \to A_\mu$ mit $\tau_{\lambda+1}(\mathfrak{A}_\mu, b) = \mathfrak{N}_{\lambda+1}$, aber $\tau_\mu(\mathfrak{A}_\mu, b) \neq \mathfrak{N}_\mu$. Wegen $q_{\lambda+1} = n_\lambda$ ist

$$\tau'_{\lambda+1}(\mathfrak{A}_\lambda, (a_\lambda \circ \varphi_{\kappa+1})\, a_\lambda) = \tau'_{\lambda+1}(\mathfrak{A}_\mu, b b_\lambda)$$

für ein $b_\lambda : n_\lambda \to A_\mu$. Insbesondere gilt diese Gleichung für $\tau^0_{\lambda+1}$, woraus $b = b_\lambda \circ \varphi_{\kappa+1}$ folgt. Da $r_{\lambda+1} > r_\lambda$ vorausgesetzt war, ist $\tau_\lambda \leqq \tau'_{\lambda+1}$. Daher ist $\tau_\lambda(\mathfrak{A}_\mu, b_\lambda) = \tau_\lambda(\mathfrak{A}_\lambda, a_\lambda) = \mathfrak{M}_\lambda$. Mit 2.3 erhalten wir Abbildungen $b_\lambda \subset b_{\lambda+1} \subset \ldots \subset b_\mu$, so daß für alle ν mit $\lambda \leqq \nu < \mu$ $\mathfrak{M}_{\nu+1} := \tau_{\nu+1}(\mathfrak{A}_\mu, b_{\nu+1})$ voll über Idn_ν ist.
Wegen $Wertb\varphi_{\kappa+1} \subset n_{\kappa+1} \subset n_\lambda$ gilt

$$\Pi_{\varphi_{\kappa+1}}(\mathfrak{M}_\mu) = \tau_\mu(\mathfrak{A}_\mu, b_\lambda \circ \varphi_{\kappa+1}) \neq \mathfrak{N}_\mu .$$

Wir setzen daher $\mu_{\kappa+1} := \mu$.

Die mit 3.3 gewonnene Struktur läßt den elementaren Typ aus, der dem Zweig $(\mathfrak{N}_\nu)_{\nu\in\omega}$ entspricht. Denn ist $d : n \to \mathrm{Lim}\,\mathfrak{M}_\nu$ eine Belegung, so ist nach Konstruktion des direkten Limes $d = d_\nu \circ \varphi$ für ein $\varphi : n \to \omega$ und eine natürliche Belegung d_ν. Dann ist $\varphi = \varphi_\kappa$ für ein $\kappa \in \omega$, und wegen $Wertb\varphi_\kappa \subset n_\kappa \subset n_{\mu_\kappa}$ ist $d = d_{\mu_\kappa} \circ \varphi_\kappa$. Wegen 2.5 gilt

$$\begin{aligned} \tau_{\mu_\kappa}(Lim\mathfrak{M}_\nu, d) &= \Pi_{\varphi_\kappa}(\tau_{\mu_\kappa}(Lim\mathfrak{M}_\nu, d_{\mu_\kappa})) \\ &= \Pi_{\varphi_\kappa}(\mathfrak{M}_{\mu_\kappa}) \\ &\neq \mathfrak{N}_{\mu_\kappa} . \end{aligned}$$

Ein mit Hilfe der hier dargestellten Methode geführter Beweis des Satzes über das Auslassen elementarer Typen wurde erstmals in [8] angegeben. Dort findet sich auch ein entsprechender Beweis des Craigschen Interpolationssatzes ([1], 2.2.20).

LITERATUR

[1] Chang, C.C., Keisler, H.J.: Model theory. North-Holland Publ. Co., Amsterdam (1973).
[2] Fraissé, R.J.: Sur quelques classifications des systèmes de relations. Publ. Sci. Univ. Alger Sér. A **1**, 35—182 (1954).
[3] Hintikka, J.: Distributive normal forms in first-order logic. Formal systems and recursive functions, pp. 48—91. Proc. of the eigth logic colloquium, Oxford, July 1963. North-Holland Publ. Co., Amsterdam (1965).
[4] Richter, W.: Referat von Grilliot, T.J.: Omitting types: application to recursion theory. J. Symbolic Logic **40**, 87—88 (1975).
[5] Schönfeld, W.: Normal forms with quantifier blocks of given lengths. A.M.S. Notices **19**, A-716 (1972).
[6] Scott, D.: Logic with denumerably long formulas und finite strings of quantifiers. The theory of models, pp. 329—341. North-Holland Publ. Co., Amsterdam (1965).
[7] Taimanow, A.D.: Charakterisierung axiomatisierbarer Klassen von Strukturen (russisch). Isw. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat. **25**, 601—621 (1961).
[8] Wolf, T.: Eine algebraische Methode; Endlichkeitssatz, Interpolationssatz, Typenübergehungssatz. Diplomarbeit, Freiburg (1975) (unveröffentlicht).