

## Werk

**Titel:** Über die Unentscheidbarkeit gewisser Axiomenmengen.

**Autor:** Oberschelp, Arnold

**PURL:** [https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?379931524\\_0005|log10](https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?379931524_0005|log10)

## Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.  
SUB Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen

✉ [info@digizeitschriften.de](mailto:info@digizeitschriften.de)

## ÜBER DIE UNENTSCHEIDBARKEIT GEWISSE AXIOMENMENGEN<sup>1)</sup>

von ARNOLD OBERSCHHELP in Hannover

In [1] und [2] wurden verschiedene Mengen von Aussagen des Prädikatenkalküls betrachtet, deren arithmetische Klassen gewisse algebraische Abgeschlossenheitsbedingungen erfüllten. Es waren das die Mengen  $\mathbf{Pr}$  (Produkt-Axiome),  $\mathbf{S}$  (bei Teilbildung abgeschlossen),  $\mathbf{U}$  (bei Vereinigung von Ketten abgeschlossen) und  $\mathbf{H}_0, \mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2$  (bei verschiedenen Arten von Homomorphismen abgeschlossen). Bezüglich der genauen Definitionen vergleiche die zitierten Arbeiten.

Auf jeweils ähnliche Weise konnte man zeigen, daß jede dieser Mengen rekursiv aufzählbar ist. Zur Beantwortung der Frage, ob diese Mengen auch unentscheidbar sind, hat man keine einheitliche Methode. In [2] wurden auch nur die Unentscheidbarkeit von  $\mathbf{S}$  und  $\mathbf{U}$  gezeigt. Lyndon hat (briefliche Mitteilung) die Unentscheidbarkeit von  $\mathbf{Pr}$  bewiesen. In dieser Note soll nachgewiesen werden, daß auch die Mengen  $\mathbf{H}_0, \mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2$  unentscheidbar sind<sup>2)</sup>.

*Satz: Die Mengen  $\mathbf{H}_0, \mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2$  sind unentscheidbar.*

Beweis: Es sei  $\mathbf{F}$  die Menge der Aussagen, die höchstens  $\mathbf{F}$ -Variablen frei enthalten. Dann sind die zugehörigen Modelle *Algebren* und die Unterschiede der verschiedenen Arten von Homomorphismen fallen fort. Es ist  $\mathbf{H}_0 \cap \mathbf{F} = \mathbf{H}_1 \cap \mathbf{F} = \mathbf{H}_2 \cap \mathbf{F} = \mathbf{H}$ . Wäre eine der Mengen  $\mathbf{H}_i$  entscheidbar, so auch  $\mathbf{H}$ . Wir wollen zeigen, daß man dann auch für Aussagen aus  $\mathbf{F}$  die Erfüllbarkeit entscheiden könnte.

Wenn  $\Theta \notin \mathbf{H}$ , so ist  $\Theta$  erfüllbar, da jede Kontradiktion zu  $\mathbf{H}$  gehört. Sei  $\Theta \in \mathbf{H}$ . Wenn  $\Theta$  erfüllbar ist, so ist  $\Theta$  zufolge der Tatsache, daß jedes Modell ein einelementiges Modell als homomorphes Bild hat, einzahlig erfüllbar und das ist entscheidbar.

### LITERATUR

- [1] A. Oberschelp: Über die Axiome produkt-abgeschlossener arithmetischer Klassen. Dieses Archiv 4, 1959, S. 95–123.
- [2] A. Oberschelp: Über die Axiome arithmetischer Klassen mit Abgeschlossenheitsbedingungen. Dieses Archiv 5, 1960, S. 26–36.

<sup>1)</sup> Eingegangen am 9. Juli 1959.

<sup>2)</sup> Nach Abfassung dieser Note lernte ich eine Arbeit von Herrn Lyndon kennen, in der (Pacific Journal 9, 1959, p. 153) ein entsprechender Satz betreffend die Menge  $\mathbf{H}^4$  bewiesen wird.