Beweis:

In dem bei D rechtwinkligen Dreieck SDA ist $|SD| = r\cos(\alpha+\varphi)$; in dem bei D rechtwinkligen Dreieck SDC ist $|SC| = |SD|: \cos\alpha$. Somit ist $|SC| = r\cos(\alpha+\varphi): \cos\alpha$.
In dem bei A rechtwinkligen Dreieck SPA ist $|SP| = |SA|: \cos\alpha$. Die Projektion von $|SP|$ auf c ist $|SP|\cos(\alpha+\varphi)$; also ist diese Projektion $r\cos(\alpha+\varphi): \cos\alpha = |SC|$. Deshalb ist der Schnittpunkt C von AE mit c der Fußpunkt des von P auf c gefällten Lotes, somit steht PC senkrecht auf c.

Anmerkung: Weil $\sphericalangle(SCP) = 90°$ ist, kann man C auch als Schnittpunkt des Thales-Kreises über $|SP|$ mit c konstruieren. Das Viereck $SCPA$ ist ein Sehnenviereck mit zwei gegenüberliegenden rechten Winkeln bei A und bei C.

Helmut Sieber, Böblingen

LITERATURVERZEICHNIS

1 Bachmann F.: Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1974.

 0013-6018/88/030086-03$1.50+0.20/0

Aufgaben

Aufgabe 961. Für positive Zahlen x_1, x_2, x_3 sei

$$p_1 := (x_1 + x_2 + x_3)/3, \quad p_2 := (x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1)/3, \quad p_3 := x_1 x_2 x_3.$$

Dann gilt

$$p_3^2 + 5p_2^3 \geq 6p_1 p_2 p_3$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $x_1 = x_2 = x_3$. Dies ist zu zeigen.

V. D. Mascioni, Origlio

Lösung: Setzt man

$$f(x_1, x_2, x_3) = p_3^2 + 5p_2^3 - 6p_1 p_2 p_3,$$

dann ist

$$f(tx_1, tx_2, tx_3) = t^6 f(x_1, x_2, x_3).$$

f ist also homogen in x_1, x_2, x_3 vom Grade 6 und man kann oBdA normieren:

$$x_1 x_2 = 1, \quad x_1 x_3 = 1 + a, \quad x_2 x_3 = 1 + b, \quad 0 \leq a \leq b.$$

Wegen

$$p_3^2 = (1+a)(1+b), \quad p_2 = (3+a+b)/3, \quad p_1 p_3 = ((1+a)+(1+b)+(1+a)(1=b))/3$$

erhält man nach Umformen

$$f(x_1, x_2, x_3) = \tfrac{1}{3}((a-b)^2 + ab) + \frac{a+b}{27}(5(a-b)^2 + 2ab) \geq 0$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $a = b = 0$, d.h. $x_1 = x_2 = x_3$ gilt.

M. Vowe, Therwil

Bemerkung der Redaktion. O. P. Lossers zeigt allgemeiner:

$$p_3^2 + \beta p_2^3 \geq (\beta + 1) p_1 p_2 p_3 \quad \text{für} \quad \beta \geq 3$$

mit Gleichheit genau für $x_1 = x_2 = x_3$.

Weitere Lösungen sandten S. Arslanagic (Trebinje, YU), P. Bundschuh (Köln, BRD), F. Götze (Jena, DDR), M. Hübner (Leipzig, DDR), A. A. Jagers (Enschede, NL), W. Janous (Innsbruck, A), L. Kuipers (Sierre), Kee-wai Lau (Hong Kong), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), Tsen-Pao Shen (München, BRD), I. Paasche (Stockdorf, BRD; 2 Lösungen), A. Voigt (Karlsruhe, BRD), H. Wellstein (Flensburg, BRD).

Aufgabe 962. Let f, g be nonzero orthogonal elements of $L_2(0,1)$. Show that

$$\frac{\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2}{\int_0^1 (f(x))^2\,dx} + \frac{\left(\int_0^1 g(x)\,dx\right)^2}{\int_0^1 (g(x))^2\,dx} \leq 1.$$

I. Mereny, Cluj, Rumänien

Solution: This is a special case of Bessel's inequality: Since $\tilde{f} := f/\|f\|$ and $\tilde{g} := g/\|g\|$ form an orthonormal system and $\int_0^1 e(x)^2\,dx = 1$ for the unit function $e(x) := 1$ we have

$$1 = \|e\|^2 \geq |(e, \tilde{f})|^2 + |(e, \tilde{g})|^2.$$

O. P. Lossers, Eindhoven, NL

Bemerkung der Redaktion. R. Wyss beweist allgemeiner:

$$\frac{\left(\int_a^{a+T} f(x)\,dx\right)^2}{\int_a^{a+T} (f(x))^2\,dx} + \frac{\left(\int_a^{a+T} g(x)\,dx\right)^2}{\int_a^{a+T} (g(x))^2\,dx} \leq \frac{1}{2-T}, \quad 0 < T < 2.$$

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), M. Hübner (Leipzig, DDR), A. A. Jagers (Enschede, NL), Kee-wai Lau (Hong Kong), S. Nanba (Okayama, Japan), H.-J. Seiffert (Berlin), L. Siccha (Berlin), R. Wyss (Flumenthal).

Aufgabe 963.

a) Von n linear angeordneten weissen Kugeln sollen k rot bemalt werden, und zwar derart, dass die roten Kugeln m Blöcke mit je mindestens s Kugeln bilden und dass die roten Blöcke durch Blöcke mit je mindestens t weissen Kugeln getrennt sind. Bestimme die Anzahl solcher Färbungen.

b) Wie a), aber für den Fall, dass die n weissen Kugeln im Kreis angeordnet sind.

J. Binz, Bollingen

Lösung des Aufgabenstellers. Wir benötigen eine einzige Hilfsaussage aus der Schulkombinatorik, nämlich

$$\text{Die Gleichung } x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n \ (x_i \in \mathbb{N}) \text{ hat } \binom{n-1}{k-1} \text{ Lösungen.} \tag{1}$$

a) y_i sei die Anzahl der Kugeln im i-ten roten Block ($i = 1, 2, \ldots, m$); x_0 weisse Kugeln liegen vor dem ersten roten Block, x_i weisse Kugeln zwischen dem i-ten und ($i + 1$)-ten roten Block ($i = 1, 2, \ldots, m - 1$), und x_m weisse Kugeln folgen auf den letzten roten Block. Bei einer korrekten Färbung müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

$$x_0 + x_1 + \ldots + x_m = n - k, \quad x_0 \geq 0, \quad x_1 \geq t, \ldots, x_{m-1} \geq t, \quad x_m \geq 0, \tag{2}$$

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_m = k, \quad y_i \geq s. \tag{3}$$

Umgekehrt lässt sich aus jeder Lösung $(x_0, y_1, x_1, y_2, \ldots, x_{m-1}, y_m, x_m)$ des Systems (2), (3) eindeutig eine korrekte Färbung konstruieren. Die Gesuchte Anzahl ist somit gleich der Anzahl Lösungen dieses Systems. Mit den Substitutionen $x'_0 = x_0 + 1$, $x'_m = x_m + 1$, $x'_i = x_i - t + 1$ ($i = 1, 2, \ldots, m - 1$), $y'_i = y_i - s + 1$ ($i = 1, 2, \ldots, m$) führt man (2) und (3) je auf (1) zurück und erhält so die gesuchte Anzahl

$$x = \binom{n - k - (m-1)(t-1) + 1}{m}\binom{k - m(s-1) - 1}{m-1}.$$

Bemerkungen:

- Für $t = s = 1$ kommt ein bekannter Fall heraus: $\binom{n-k+1}{m}\binom{k-1}{m-1}$ ist die Anzahl derjenigen k-Auswahlen aus n Objekten, die aus genau m Blöcken von Objekten mit aufeinanderfolgenden Nummern bestehen (Einerblöcke zugelassen).
- Ist zusätzlich $m = k$, so entsteht $\binom{n-k+1}{k}$, die Anzahl der k-Auswahlen aus n numerierten Objekten, die keine benachbarten Objekte enthalten.

b) Die erste und die letzte Kugel dürfen jetzt im gleichen Block liegen. Die verschiedenen Unterfälle lassen sich auf den linearen Fall zurückführen.

b1) Die Kugeln 1 und n sind verschiedenfarbig, z. B. n weiss und 1 rot. Solchen Färbungen entsprechen lineare Färbungen mit $x_0 = 0$, $x_m \geq t$. Ihre Anzahl beträgt demnach

$$z_1 = 2\binom{n-k-m(t-1)-1}{m-1}\binom{k-m(s-1)-1}{m-1}.$$

b2) Die Kugeln 1 und n sind beide rot. Die entsprechenden linearen Färbungen bestehen jetzt aus $m+1$ roten Blöcken mit m weissen Zwischenblöcken, ohne weisse Kugel am Anfang und am Ende, aber so, dass die Anzahl der roten Anfangs- und Endkugeln $\geq s$ ist. Aus (3) wird jetzt

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_{m+1} = k \quad \text{mit} \quad y_1 \geq 1, \quad y_{m+1} \geq 1, \quad y_1 + y_{m+1} \geq s$$
$$\text{und} \quad y_i \geq s, \quad (i = 2, 3, \ldots, m). \qquad (3')$$

Die Fälle $y_1 = 1, 2, \ldots, s-2$ und $y_1 \geq s-1$ sind getrennt zu behandeln. Wir erhalten

$$z_2 = \binom{n-k-m(t-1)-1}{m-1}\left[(s-2)\binom{k-s-(m-1)(s-1)}{m-1} + \binom{k-s-(m-1)(s-1)+1}{m}\right].$$

Diese Formel liefert auch für $s = 1$ das korrekte Ergebnis.

b3) Die Kugeln 1 und n sind beide weiss. Die entsprechende lineare Färbung hat m rote Blöcke mit je mindestens einer weissen Kugel am Anfang und am Ende, aber so, dass die Anzahl dieser Anfangs- und Endkugeln $\geq t$ ist. Aus (2) wird jetzt

$$x_0 + x_1 + \ldots + x_m = n - k \quad \text{mit} \quad x_0 \geq 1, \quad x_m \geq 1, \quad x_0 + x_m \geq t$$
$$\text{und} \quad x_i \geq t, \quad (i = 1, 2, \ldots, m-1). \qquad (2')$$

Diesmal sind $x_0 = 1, 2, \ldots, t-2$ und $x_0 \geq t-1$ getrennt zu behandeln:

$$z_3 = \binom{k-m(s-1)-1}{m-1}\left[(t-2)\binom{n-k-t-(m-1)(t-1)}{m-1} + \binom{n-k-t-(m-1)(t-1)+1}{m}\right].$$

Schliesslich ist die gesuchte Anzahl $z = z_1 + z_2 + z_3$.

Bemerkungen:

– Für $t = s = 1$ kommt $z = \dfrac{n}{n-k}\dbinom{k-1}{m-1}\dbinom{n-k}{m}$ heraus, die bekannte Anzahl derjenigen k-Auswahlen aus n numerierten im Kreis angeordneten Objekten, die aus genau