Werk

Titel: Aufgaben.

Jahr: 1976

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?378850199_0031|log18

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Eigenvalues of Real Symmetric Matrices

Nearly every linear algebra book contains a proof that the characteristic roots of a real symmetric matrix A are real. The proofs use either a complex eigenvector of A or the compactness of the unit sphere to find a vector which maximizes the quadratic form $<x, Ax>$. The following is a new direct proof not using complex numbers or compactness, indeed not even using matrices.

Proposition. All characteristic roots of a symmetric operator on a real finite dimensional inner product space are real.

Proof. If A is symmetric and $p(x)=(x-a)^2+b$ is a factor of the minimal polynomial of A, there is a vector $v \neq 0$ such that $p(A)v=0$. Then $0 \leq <(A-aI)v, (A-aI)v> = <v, (A-aI)^2 v> = (-b)<v, v>$ so $b \leq 0$ and p has real roots. If w is an eigenvector for one of these roots the orthogonal complement of w is A-invariant and A restricted to it is symmetric. By induction on dimension the proof as well as the diagonalization of A is completed.

Note that the last two sentences of the proof are needed only to guarantee (without using complex eigenvectors) that all the irreducible factors of the characteristic polynomial are also factors of the minimal polynomial.

Ladnor Geissinger, University of North Carolina, USA

Aufgaben

Aufgabe 745. In einem ebenen Quadratgitter bezeichne A eine «Figur», d.h. eine nichtleere endliche Menge von Gitterquadraten, $n(A)$ deren Anzahl. Weiter sei $q^2(A)$ die Anzahl der Gitterquadrate in einem kleinsten, A enthaltenden achsenorientierten Quadrat im Gitter. Schliesslich setze man $d(A) := n(A)/q^2(A)$. Es wird nun eine Folge $A_0, A_1, \ldots, A_m, \ldots$ von Figuren wie folgt definiert: A_0 ist eine beliebige Ausgangsfigur; A_m entsteht aus A_{m-1}, indem man jedes Gitterquadrat hinzufügt, das mit einem solchen von A_{m-1} mindestens eine Gitterstrecke gemeinsam hat. Beweise, dass $d(A_m) \to \frac{1}{2}\ (m \to \infty)$, unabhängig von A_0.

P. Wilker, Bern

1. Lösung. W^k sei ein Quadrat im Gitter mit der Seitenzahl k. Das Glied W_m^k der mit W^k beginnenden Folge besitzt $n(W_m^k)=2m(m-1)+4km+k^2$ Gitterquadrate und sein einhüllendes Quadrat hat deren $q^2(W_m^k)=(k+2m)^2$. Beides ist leicht einzusehen.

Sei nun A_0 eine beliebige Ausgangsfigur, W^1 ein Gitterquadrat innerhalb A_0 und W^k ein kleinstes, A_0 enthaltendes Quadrat im Gitter. Die aus diesen drei Figuren entstehenden Folgen sollen A_m, W_m^1, W_m^k lauten. Aus $W^1 \subseteq A_0 \subseteq W^k$ folgt, wie sofort ersichtlich, $W_m^1 \subseteq A_m \subseteq W_m^k$ und hieraus

$$n(W_m^1)=2m^2+2m+1 \leq n(A_m) \leq 2m^2+(4k-2)m+k^2=n(W_m^k).$$

Weiter ist $(1+2m)^2 \leqq q^2(A_m) = (k+2m)^2$, und man erhält durch Kombination dieser Ungleichungen

$$\frac{2m^2+2m+1}{(2m+k)^2} \leqq d(A_m) \leqq \frac{2m^2+(4k-2)m+k^2}{(2m+1)^2}.$$

Hieraus folgt unmittelbar die Behauptung.

Ch. Meier, Bern

2. Lösung (mit N-dimensionaler Verallgemeinerung). Die N-dimensionale Verallgemeinerung lautet: Eine «Figur» A ist eine nichtleere endliche Menge von Gitterwürfeln der Kantenlänge 1; $q(A)$ sei die Kantenlänge eines kleinsten A enthaltenden Würfels aus Gitterwürfeln. A' entstehe aus A durch Hinzunahme aller Einheitswürfel, welche an wenigstens einer $(N-1)$-dimensionalen Seitenfläche von einem Element von A anliegen. Ein Minimalwürfel zu A muss wenigstens ein Paar von gegenüberliegenden $(N-1)$-dimensionalen Seitenflächen derart haben, dass an jeder von ihnen wenigstens ein Element v bzw. w von A anliegt; denn sonst wäre dieser Würfel nicht minimal. Beim Übergang zu A' sorgen v' und w' dafür, dass $q(A') = q(A)+2$, also, bei $A_m = A'_{m-1}$

$$q(A_m) = q(A_0) + 2m. \tag{1}$$

Ein achsenparalleler Würfel der Kantenlänge k enthält (als konvexe Hülle der Seitenflächen-Mittelpunkte) ein verallgemeinertes «Oktaeder» der Diagonalenlänge k mit dem Volumen $k^N/N!$. Derselbe Würfel ist enthalten in einem dazu ähnlichen und ähnlich gelegenen «Oktaeder» der Diagonalenlänge $2k$, mit dem Volumen $(2k)^N/N!$. Man betrachte nun einen einzelnen Gitterwürfel w_0 aus einer Figur A_0 und die aus ihm entstehenden Figuren $w'_0 = w_1 \subseteq A_1, \ldots, w_m \subseteq A_m$; w_1 enthält ein Oktaeder der Diagonalenlänge 2, und bei jedem Schritt wächst die Diagonalenlänge des in w_m und damit in A_m enthaltenen «Oktaeders» um 2, so dass für die Anzahl der Einheitswürfel in A_m gilt

$$n(A_m) \geqq \frac{(2m)^N}{N!}. \tag{2}$$

Andererseits liegt der A_0 umbeschriebene Minimalwürfel der Kantenlänge $q(A_0)$ in einem «Oktaeder» der Diagonalenlänge $2q(A_0)$, A_1 in einem solchen einer um 2 vermehrten Diagonalenlänge, und A_m schliesslich in einem «Oktaeder» der Diagonalenlänge $2\left(q(A_0)+m\right)$, also

$$n(A_m) \leqq \frac{2^N\left(q(A_0)+m\right)^N}{N!} = \frac{2^N m^N}{N!}\left(1+\frac{q(A_0)}{m}\right)^N. \tag{3}$$

Das Verhältnis der Anzahl der Gitterwürfel von A_m zum Volumen des achsenparallelen umbeschriebenen Minimalwürfels ist nach (1)

$$d(A_m)=\frac{n(A_m)}{(q(A_0)+2m)^N}=\frac{n(A_m)}{2^N m^N\left(1+\frac{q(A_0)}{2m}\right)^N}. \tag{4}$$

Aus (2) und (3) erhält man

$$\frac{1}{N!\left(1+\frac{q(A_0)}{2m}\right)^N}\leqq d(A_m)\leqq\frac{1}{N!}\left[\frac{1+\frac{q(A_0)}{m}}{1+\frac{q(A_0)}{2m}}\right]^N,$$

und daraus schliesslich

$$\lim_{m\to\infty} d(A_m)=\frac{1}{N!}.$$

Bemerkung. Unabhängig von der Ausgangsfigur nähert sich A_m immer mehr einem «Oktaeder».

D. Laugwitz, Darmstadt, BRD

Weitere Lösungen sandten A. Bager (Hjørring, Dänemark), J. Binz (Bolligen BE), Ch. Blatter (Zürich), L. Kuipers (Mollens VS), D. Laugwitz (Darmstadt, BRD; 2. Lösung), O. P. Lossers (Eindhoven, Niederlande), Hj. Stocker (Wädenswil ZH) und M. Vowe (Therwil BL).

Aufgabe 746. Eine Ungleichung am ebenen Dreieck mit Gleichheit genau für das gleichseitige Dreieck habe die Gestalt

$$0<X=Ls^2\leq Mr^2+NrR+PR^2=Y,$$

worin L, M, N, P von s, r, R unabhängige reelle Zahlen sind. Man bestimme bei festem $u>0$ und festem $v<2u$ die grösstmögliche Konstante $k\geq 0$, welche die Verschärfung

$$X+k(R-2r)(uR-vr)\leq Y$$

von $X\leq Y$ gestattet.

I. Paasche, München, BRD

Lösung des Aufgabenstellers. Auf das unnötig einschränkende Wort «genau» der Aufgabenstellung verzichten wir. In Spezialfällen bestimmt sich $k=k_{\max}$ leicht: $4s^2+k(R-2r)R\leqq n^2r^2+m^2rR+27R^2$ (m,n reell) zeigt $k_{\max}=11$ wegen des möglichen ausgearteten Grenzfalles $s{:}R{:}r=2{:}1{:}0$, bei dem übrigens Gleichheit $4s^2=16R^2$ eintritt. In $s^2+k(R-2r)R\leqq 3r^2+4rR+4R^2$ ist aus demselben Grunde $k_{\max}=0$, usw. Im allgemeinen Fall stützen wir uns auf [1], Theorem 1. Die Ungleichung

$$0<Ls^2+k(R-2r)(uR-vr)\leqq Mr^2+NrR+PR^2\ (k\geqq 0), \tag{0}$$

also

$$0<Ls^2\leqq(M-2vk)r^2+(vk+N+2uk)rR+(-uk+P)R^2 \tag{1}$$

bedeutet nach Division durch L genau

$$0<s^2\leqq(3-2T)r^2+(T+4-2U)rR+(U+4)R^2 \tag{2}$$

mit geeigneten T, U, weil Gleichheit für $s:R:r=3\sqrt{3}:2:1$ (gleichseitiges Dreieck) besteht:

$$27=(3-2T)1-(T+4-2U)2+(U+4)4.$$

Nach [1] Theorem 1 zerfällt die Gesamtheit der für alle ebenen Dreiecke gültigen Ungleichungen (2) in die beiden folgenden Klassen:

(c_0)	$T\geqq 0$ und $U\geqq 0$	Klasse c_0
(d_0)	$T<0$ und $U\geqq T^2(4-2T)^{-1}>0$	Klasse d_0.

Andere allgemein gültige Ungleichungen (2) mit sonst unbeschränkten variablen T, U gibt es nicht. Für unsere Zwecke ist nun ein anderer, ebenfalls erschöpfender Klassenzerfall nicht nur vorteilhaft, sondern einschlägig: Jedes t aus $0\leqq t\leqq 2$ gestattet die beiden komplementären Klassen

(c_t)	$T+tU\geqq 0$ und $U\geqq 0$	Klasse c_t
(d_t)	$T+tU<0$ und $U\geqq T^2(4-2T)^{-1}>0$	Klasse d_t.

Wir behaupten: Bei variablem t ist die Klasse c_2 maximal, ihr Komplement d_2 also minimal. Beweis: Für $T=-2U-\varepsilon\leqq -2U$ besagt $U\geqq T^2(4-2T)^{-1}$ offenbar $4U\geqq 2U\varepsilon+\varepsilon^2\geqq 0$. Jetzt erkennt man:

$\varepsilon=0$ bewirkt $U=0$, also Klasse c_2
$\varepsilon>0$ bewirkt $U>0$, also Klasse d_2. Beweisende.

Für die Tatsache, dass (0), (1), (2) für gewisse k in Klasse c_2 oder d_2 liegt, verabreden wir eine naheliegende Sprechweise: die betreffenden Werte der Variablen $k\geqq 0$ liegen in c_2 oder d_2, kurz k in c_2 oder d_2 (mindestens also $k=0$). Wenn nun $k=0$ mit Parametern T', U' in c_2 liegt, so kann es maximal sein. Dann liegt für alle $u>0$ und $2u-v>0$ kein k in d_2. Gibt es jedoch eine Verschärfung $k>0$ mit Parametern T, U, so kann dieses k (nach $k=0$ in c_2) jeder der beiden Extremalklassen c_2 und d_2 angehören: Gemäss (1) (2) (c_2) (d_2) folgt aus $L(T'+2U')=(3L-M)/2+2(P-4L)\geqq 0$ nur $L(T+2U)=(3L-M+2vk)/2+2(P-4L-uk)\lessgtr 0$, woraus Klasse c_2 $(\geqq)$ oder d_2 $(<)$ ablesbar ist. Liegt jedoch $k=0$ in d_2, so auch jede mögliche Verschärfung $k>0$. Dann tritt c_2 überhaupt nicht auf. Wir zeigen: Das optimale $k=k_{\max}$ existiert (ausser im beiseitegelassenen Trivialfall $u=v=0$, wo jedes $k\geqq 0$ erlaubt ist) und lässt sich sogar explizit als

Funktion von u und v bestimmen, indem T, U durch u, v, k und drei der L, M, N, P ausgedrückt werden: Insgesamt zeigt der Koeffizientenvergleich in (1) (2)

$$\begin{array}{lll} M-2vk & = 3L-2LT & \cdot 1 \\ N+2uk+vk & = 4L+LT-2LU & \cdot 2 \\ P-uk & = 4L+LU & \cdot 4 \\ M+2N+4P+0+0=27L+0+0 & & \text{(gewichtete Summenprobe).} \end{array} \quad (3)$$

Liegt nun irgendein $k \geqq 0$ in (der Klasse «kleiner» k) c_2, so findet man das grösste k $(=k_{\max})$ aus c_2 so: Aus dem Ungleichungspaar (c_2) folgt das Paar $0 \leqq 2L(T+2U) = -13L-M+4P-2(2u-v)k$ und $0 \leqq LU = P-uk-4L$, und hieraus vermöge (3) das Paar $k \leqq (-20L+N+4P)/(2u-v)$ und $k \leqq (P-4L)/u$. Das grösste noch in c_2 liegende k ist also

$$k = \min\left(\frac{-20L+N+4P}{2u-v}, \frac{P-4L}{u}\right) \leqq k_{\max}; \text{ letzteres in } c_2\,(=) \text{ oder } d_2\,(<). \quad (4)$$

Die beiden Nenner sind nach Voraussetzung > 0. Die beiden Zähler sind $\geqq 0$, weil auch $k=0$ in c_2 liegt. Probe: $(-20L+N+4P)/L = -20+(T'+4-2U')+4 \cdot (4+U') = T'+2U' = \geqq 0$ und $(P-4L)/L = (4+U')-4 = U' \geqq 0$. - Liegt jedoch (das vorerst nur vermutete) $k_{\max}$ nicht in c_2, was sich schon durch irgendein k aus d_2 ankündigt, so untersucht man d_2 analog mittels (1), (2), (3), (d_2): $(-20L+N+4P)/(2u-v) < k$ und

$$0 < \frac{LT \cdot LT}{4L-2LT} = \frac{(M-3L-2vk)^2}{4(M+L-2vk)} \leqq P-uk-4L = LU.$$

Hieraus ist $k_{\max} \geqq 0$ bestimmbar als die grössere der (für $v \neq 0$) beiden Wurzeln k der höchstens quadratischen Gleichung in k (für sie ist $-20L+N+4P < 2uk-vk$)

$$(M-3L-2vk)^2 = 4(M+L-2vk)(P-uk-4L). \quad (5)$$

Dass die Diskriminante $\geqq 0$ ist, wird durch [1] gesichert, kann aber auch hier durch Rechnung bestätigt werden. - Beispiele: $4s^2+k(R-2r)(R+r) \leqq 27R^2$ hat $k_{\max} = 5+(1/3)\sqrt{249} \approx 10{,}26$; das ist eine in d_2 liegende Wurzel k der Gleichung $3k^2-30k-8=0$. Das grösste k aus c_2 ist $k = 28/3 = 9{,}3\ldots$ Selbstverständlich ist (5) wegen des ausgeschlossenen Trivialfalles $u=v=0$ stets nach k auflösbar. Aber die so gefundene grösste Wurzel k braucht nicht in d_2 zu liegen und braucht dann auch nicht $k_{\max}$ zu sein. Dieser Fall tritt ein bei $k=2$ (in c_2) für $4s^2+k(R-2r)R \leqq 27R^2$. Auch $k_{\max} = 11$ liegt in c_2, so dass d_2 nicht vorkommt. Dagegen ist die grössere der beiden Wurzel $k=0$ und $-4/3$ von (5) im Fall $s^2+k(R-2r)R \leqq 3r^2+4rR+4R^2$ wohl in c_2, stellt aber zugleich $k_{\max}$ dar. Auch hier kommt d_2 nicht vor. In praxi hat man zuerst (5) nach k aufzulösen, es sei denn $k_{\max}$ sei anderweitig unmittelbar evident, wie eingangs durch die Ausartung $s:R:r = 2:1:0$. Liegt die einzige oder die grössere Wurzel k jedoch in c_2, so auch $k_{\max}$, gewinnbar aus (4).

Anmerkung. Beliebig viele bekannte und weitere Dreiecksungleichungen (auch in a, b, c; r_a, r_b, r_c; $s_a, s_b, s_c = s-a, s-b, s-c$; usw.) können mittels (4) (5) k-verschärft werden, falls sie nicht schon k-optimal sind ($k_{\max}=0$). - Die nicht verlangten, aber beachtenswerten Grenzfälle $u=0>v$ und $2u-v=0$ schliessen sich unserer Methode stetig an. Wenn man will, verwendet man dann bei (4) in bekannter Art das praktische Symbol $+\infty$.

[1] FRUCHT/KLAMKIN, *On Best Quadratic Triangle Inequalities*, Geometriae Dedicata *2*, 341-348 (1973).

Eine Teillösung sandte M. Vowe (Therwil BL).

Aufgabe 747. Es sei a eine ganze Zahl. Für welche natürlichen Zahlen $n \geq 3$ wird der Quotient

$$A_n := \frac{(n-3)!\,(n-1)[an^2+(2a+3)n-2]+1}{n(n+2)}$$

ganzzahlig? I. Paasche, München, BRD

Lösung. Es bezeichne B_n den Zähler von A_n. Für jedes $n \geq 3$ ist B_n ungerade. Somit ist jede natürliche Zahl n der verlangten Art ungerade, und n und $n+2$ sind teilerfremd. Also gilt $n(n+2) \mid B_n \Leftrightarrow n \mid B_n$ und $(n+2) \mid B_n$. Man bestätigt leicht das Bestehen der Kongruenzen

$$B_n \equiv (n-3)!\,(n-1)(-2)+1 \equiv (n-1)!+1 \pmod{n}, \tag{1}$$

$$B_n \equiv (n-3)!\,(n-1)(-8)+1 \equiv (n+1)!+1 \pmod{n+2}. \tag{2}$$

Nach dem Satz von Wilson (man beachte, dass auch dessen Umkehrung gilt) folgt aus (1) und (2)

$B_n \equiv 0 \pmod{n} \Leftrightarrow n$ ist eine Primzahl,

$B_n \equiv 0 \pmod{n+2} \Leftrightarrow n+2$ ist eine Primzahl.

Die Antwort lautet also: A_n ist genau dann ganzzahlig, wenn n und $n+2$ Primzahlen sind.

J. Fehér, Pécs, Ungarn

Weitere Lösungen sandten A. Bager (Hjørring, Dänemark), G. Bercea (München, BRD), J. Binz (Bolligen BE), O. Buggisch (Darmstadt, BRD), P. Bundschuh (Köln, BRD), K. Grün (Linz, Österreich), H. Harborth (Braunschweig, BRD), L. Kuipers (Mollens VS), R. Tichy (Wien, Österreich), M. Vowe (Therwil BL) und A. Wieckowski (Poznán, Polen).

Aufgabe 748. Für natürliche Zahlen n, k bezeichne $[(n+1)(n+2)\cdot \ldots \cdot(n+k)]'$ das Produkt der Nichtprimzahlen in der Folge $n+1, n+2, \ldots, n+k$. Man zeige, dass $6!=8\cdot 9\cdot 10$ die einzige Lösung der Gleichung $n!=[(n+1)(n+2)\cdot \ldots \cdot(n+k)]'$ ist.

P. Erdös, Budapest, Ungarn

Lösung. Aus $n!=[(n+1)(n+2)\cdots(n+k)]'$ kann man die 2 möglichen Werte von k bei gegebenem n berechnen, indem man für beide Glieder die höchste Potenz von 2 bestimmt, die das Glied teilt. Für kleine Werte von n, z. B. $n\leq 20$, findet man sofort, dass nur $n=6$ eine Lösung ist.

Es ist klar, dass die Gleichung falsch ist, wenn es eine Primzahl $p>3$ gibt, so dass

$$\frac{n+k}{4}<p\leq\frac{n+k}{3}\,; \tag{*}$$

denn in diesem Falle können die p-Potenzen auf beiden Seiten nicht gleich sein. Aus

$$\pi(x)>\frac{x}{\log x}\left(1+\frac{1}{2\log x}\right) \text{ für } x\geq 59,$$

$$\pi(x)<\frac{x}{\log x}\left(1+\frac{3}{2\log x}\right) \text{ für } x>1,$$

[s. J. Barkley Rosser and L. Schoenfield, Approximate formulas for some functions of prime numbers, Illinois J. of Math. *6*, 64–94 (1962)] folgt, dass

$$\pi\left(\frac{4}{3}x\right)>\pi(x) \text{ für } x>100. \tag{**}$$

Durch Vergleichung mit einer Liste von Primzahlen folgt dann sogar (**) für $x\geq 9$. Also gibt es eine Primzahl p mit der Eigenschaft (*) für $n>20$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

J. H. van Lint, Eindhoven, Niederlande

Weitere Lösungen sandten H. Harborth (Braunschweig, BRD) und H. Warncke (Porto Alegre, Brasilien).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis **10. Februar 1977** an **Dr. H. Kappus.** Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit **Problem ... A, B** bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S. 67), Problem 625B (Band 25, S. 68), Problem 645A (Band 26, S. 46), Problem 672A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724A (Band 30, S. 91), Problem 764A (Band 31, S. 44).

Aufgabe 769. In einer Ebene ε seien 3 Punkte A_1, A_2, A_3 gegeben. Es gibt genau zwei gleichwinklige Kreisbogendreiecke in ε mit den Ecken A_i und Winkeln $\alpha_i = \alpha$, $0 \leq \alpha < \pi$. Man bestimme die Kugel K mit Zentrum in ε so, dass bei der stereographischen Projektion von ε auf K jene beiden Dreiecke in zwei kongruente, gleichseitige Kreisbogendreiecke abgebildet werden.

C. Bindschedler, Küsnacht

Aufgabe 770. Let λ be an integer ≥ 1. A positive integer n is called λ-perfect, if $\sigma(n) = 2\lambda n$, where $\sigma(n)$ denotes the sum of all positive divisors of n. Prove the following results for odd λ-perfect numbers:

(i) If λ is odd, then any odd λ-perfect number is of the Form $p^\alpha k^2$, where p is a prime $\equiv 1 \pmod 4$, $\alpha \equiv 1 \pmod 4$ and $(p, k) = 1$.

(ii) If λ is odd and $\not\equiv 0 \pmod 3$, then any odd λ-perfect number is of the form $12t+1$ or $36t+9$.

(iii) If n is of the form $12t+1$, then $n = p^\alpha k^2$ with p prime and $\equiv 1 \pmod{12}$ and $\alpha \equiv 1$ or $9 \pmod{12}$.

D. Suryanarayana, Waltair, India

Aufgabe 771. Es seien a_i $(i = 1, 2, 3)$ die Seitenlängen eines beliebigen ebenen Dreiecks. Man beweise die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{3} (a_i/a_{i+1}) > \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{3} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{3} 1/a_i^2\right)^{1/2} \quad (a_4 = a_1).$$

J. Brejcha, Brno, ČSSR

Aufgabe 772. Sei $a \geq 1$ ganzzahlig und die Folge $(R_k)_{k=0,1,\ldots}$ rekursiv definiert durch

$$R_0 = 0, \quad R_1 = 1, \quad R_k = a R_{k-1} + R_{k-2} \text{ für } k \geqq 2.$$

Man beweise

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{R_{2^i}} = 1 + \frac{a}{2} + \frac{2}{a} - \frac{1}{2}(a^2+4)^{1/2}$$

und damit die Irrationalität dieser Reihe.

P. Bundschuh, Köln, BRD

Literaturüberschau

Physik, Mittelstufe. Von F. DORN und F. BADER. 430 Seiten. DM 23,80. Hermann Schrödel, Hannover 1974.

Nachdem auch in der Schweiz das Vernehmlassungsverfahren für ein neues «Bundesgesetz über das Messwesen» läuft, beanspruchen die SI-Einheiten vermehrt das Interesse der Physiklehrer. Grosse Beachtung finden dabei Lehr- und Aufgabenbücher, deren Aufbau den neuen - in Deutschland bereits gesetzlich fixierten - Grundlagen angepasst worden ist. Zu diesen Werken gehört auch der bekannte «Dorn», von dem im letzten Jahr die «Physik, Mittelstufe», Dorn/Bader, im Verlag Hermann Schroedel neu herausgegeben worden ist.

Die völlige Neubearbeitung führt den Übergang zum Internationalen Einheitensystem in dem Masse durch, das der Mittelstufenphysik angepasst erscheint. Dabei wird gerade in einem Lehrbuch für diese Stufe deutlich, dass neben den gewaltigen Vorteilen, die der Übergang zu den SI-Einheiten bietet, eine gewisse Problematik bezüglich des methodischen Vorgehens nicht zu verkennen ist. Die Behandlung der Kraft (mit den Einheiten Newton) vor dem Kapital über die Masse oder die Ableitung der Stromstärke-Einheit Ampère aus dem Coulomb mögen als Beispiele auf solche Schwierigkeiten hinweisen.

Abgesehen von der grundsätzlichen Problematik überzeugt der vorliegende Band durch physikalische wie sprachliche Korrektheit, übersichtliche Gliederung und hervorragende, den Mehrfarbendruck geschickt verwendende graphische Gestaltung. Wenn der Verbreitung des Buches trotz dieser anerkannten Qualitäten in der Schweiz Grenzen gesetzt sind, so liegt das vor allem am Umstand, dass die Stufe, an die es sich wendet, zwischen unserer gymnasialen Unterstufe und der Oberstufe liegt, an der unsere Mittelschulphysik normalerweise mit dem Hauptgewicht unterrichtet wird. Schweizerischen Verhältnissen wäre - wie schon bei frühern Ausgaben des «Dorn» - mit einer kombinierten Mittelstufen-Oberstufen-Ausgabe (einzügiger Lehrgang) mehr gedient. F. GIMMI

Graphentheorie. Von FRANK HARARY. Übersetzung aus dem Amerikanischen, besorgt von W. Mader. 303 Seiten mit 130 Abbildungen. DM 60,-. Verlag R. Oldenbourg, München 1974.

Die Graphentheorie gehört zu jenen Zweigen der Combinatorial Mathematics, die gegenwärtig in besonders lebhafter Entwicklung begriffen ist. Da die Hauptanstösse aus dem angelsächsischen Raum stammen, gab es bis jetzt nur eine relativ spärliche deutschsprachige Literatur über Graphen. Es ist daher sehr zu begrüssen, dass nun der Oldenbourg-Verlag eines der Standardwerke zur Graphentheorie in deutscher Übersetzung herausgebracht hat.

Die englische Originalausgabe dieses Buches erschien 1969 unter dem Titel *Graph-Theory.* Harary, Professor an der University of Michigan, gehört zu den führenden amerikanischen Graphentheoretikern. Er ist Autor oder Mitautor von verschiedenen weitern gewichtigen Büchern über Graphen.

Mit Genugtuung kann festgestellt werden, dass der amüsante und kurzweilige Stil des Verfassers in die Übersetzung übernommen wurde. So ist die deutsche Ausgabe ebenfalls bestens geeignet, den Leser mit der Begriffswelt und mit den wichtigsten Sätzen der Graphentheorie bekanntzumachen. Ein ausgedehnter Aufgabenteil dient einerseits zur Einübung und Vertiefung des dargelegten Stoffes. Der Autor benutzt aber den Aufgabenteil zugleich auch dazu, den interessierten Leser bis in die feinsten Verästelungen an der Forschungsfront heranzuführen. Wie er sich im Vorwort ausdrückt, hat er absichtlich auch grausame Aufgaben aufgenommen; diese sind zur Warnung des Lesers mit einem Stern versehen. Mit diesem weitgespannten Konzept in den Aufgaben vermag das Buch auch wertvolle Anregungen für die Gestaltung eines mathematischen Seminars im Rahmen des Hochschulunterrichtes zu vermitteln.

Der Autor hat absichtlich nicht alle Beweise ausführlich dargelegt. Dies erlaubt ihm, ohne beim Leser die Übersicht zu strapazieren, sehr viel Material vorzulegen. Für die fehlenden Beweise (die zum Teil sehr aufwendig oder gelegentlich auch sehr schwierig sind) verweist er auf das ausführliche Literaturverzeichnis am Schlusse des Buches, das rund 350 Originalarbeiten umfasst. Im Hinblick auf die Verwendung des Buches bei der wissenschaftlichen Arbeit ist es schade, dass die Gelegenheit nicht wahrgenommen wurde, für die deutschsprachige Ausgabe das Literaturverzeichnis bis 1974 nachzuführen.

Von den 16 Kapiteln des Buches dürfte nach der Meinung des Rezensenten jenes über abzählende Graphentheorie das Interesse vieler Leser auf sich ziehen. Zu diesem Thema fühlt sich der Autor als

Forscher besonders hingezogen. Bemerkenswert sind die neuen hübschen Beispiele zur Abzähltheorie von Pólya. In einem Anhang sind überdies mehrere Figurenmengen, denen man in den Anwendungen öfters begegnet, für die untersten Werte des Parameters erstmals vollständig aufgezählt. Dazu gehören zum Beispiel die Bäume mit n Knoten.

Hararys Buch über Graphentheorie ist ein schönes Beispiel dafür, dass ein hochmathematisches Lehrbuch auch ohne tierischen Ernst und ohne formales Feuerwerk bestehen kann. Man möchte wünschen, dass sich die deutschsprachigen Autoren mathematischer Monographien solche Publikationen vermehrt zum Muster ihres Schreibstils nähmen. M. JEGER

Algebraic Numbers and Diophantine Approximation. Von K.B. STOLARSKY. 330 Seiten. $21.75. Dekker & Sons, New York 1974.

Zwei Methoden stehen im Zentrum dieses Buches, nämlich einerseits die nichteffektive von K.F. Roth zur rationalen Approximation algebraischer Zahlen und die effektive von A. Baker bei Linearformen in Logarithmen algebraischer Zahlen. Nach den Worten des Verfassers ist seine Aufgabe zum grösseren Teil «one of arrangement and exposition» gewesen. Zuerst werden die Sätze von J. Liouville und A. Thue sowie einige Abschätzungen für die Höhe und Länge von Polynomen und algebraischen Zahlen behandelt. Dann werden Verschärfungen von E. Wirsing bzw. N.I. Feldmann der Resultate von Roth bzw. Baker bewiesen. Nach Aussagen des Autors wird Wirsings Satz im wesentlichen nach einem unpublizierten Manuskript von W. Schmidt bewiesen. Des weiteren werden einige Konzepte der algebraischen Zahlentheorie konstruktiv entwickelt, insbesondere wird der Dirichletsche Einheitensatz in effektiver Form gegeben. Schliesslich wird nach Bakers Art die effektive Lösbarkeit einiger diophantischer Gleichungen diskutiert. Anhand einer grossen Anzahl Übungsaufgaben von wechselnder Schwierigkeit kann sich der Leser weiter in die dargebotene Materie vertiefen. A. GOOD

Mathematical Methods for the Physical Sciences. Von K.F. RILEY. XII + 533 Seiten. £3.95. Cambridge University Press 1974.

Dem Studenten wird ein «Digest» aus vielen Kapiteln der Analysis - sowie auch aus der linearen Algebra - angeboten, und zwar vom Begriff der Ableitung über die Fourier- und Laplace-Transformationen und die numerischen Methoden bis zur Variationsrechnung und zur Funktionentheorie. Dabei kommen die ersten Kapitel (bis zur Vektoranalysis inklusive) sowohl quantitativ wie auch qualitativ zu kurz. Das Buch enthält auch viele nützliche Probleme sowie Lösungen bzw. Anleitungen dazu.

J. HERSCH

Ad Artem Ultimam. Eine Einführung in die Gedankenwelt der Mathematik. Von G. AUMANN. 144 Seiten. 39 Abbildungen. DM 26,-. Oldenbourg, München 1974.

Auf ebenso geistreiche wie originelle Art wird der Leser in die moderne mathematische Symbolik und Begriffswelt eingeführt. In einem «Chronik des Spudaios» betitelten ersten Teil kommen Aussagenlogik, Mengen, Relationen und Abbildungen zur Sprache, und zwar in einer in die Antike zurückprojizierten Dialogform. Der zweite Teil «Einige Grundprobleme der Mathematik» bringt u.a. die natürlichen Zahlen (vollständige Induktion, Wohlordnung), Topologie (Kontaktrelationen), Stetigkeit und Konvergenz mit dem Filterbegriff. In einem recht reichhaltigen abschliessenden Kapitel sind die Anmerkungen, Literaturangaben und historischen Hinweise untergebracht, sowie ein Sach- und Namenverzeichnis.

Die Lektüre erfordert, um den Autor zu zitieren, einiges Schulwissen, ein bisschen mehr an gesundem Menschenverstand sowie ein echtes, über den praktischen Nutzen und den reinen Lehrzweck hinausgehendes Interesse an der Mathematik. Unseres Erachtens eine kleine Untertreibung, das Buch liest sich keineswegs leicht. Anderseits hat es auch dem erfahrenen Mathematiker etwas zu bieten und sollte, da in seiner Art einmalig, in keiner mathematischen Bibliothek fehlen. W. HÖHN

Geometrie. Von L. KUSCH und B. GAIDA. Ausgabe B, Teil 1 und 2. 168 bzw. 331 Seiten. DM 11,80 bzw. DM 12,80. Verlag Girardet, Essen 1974.

Es handelt sich um einen Lehrgang der Planimetrie auf einem Niveau, wie es demjenigen einer Berufs- oder Gewerbeschule entspricht. Der Stoff ist in 14 Kapitel aufgegliedert, von denen die drei letzten auch die Trigonometrie des rechtwinkligen und schiefwinkligen Dreiecks sowie die Körperberechnung einbeziehen. Die graphische Gestaltung ist vorbildlich. Ob sich allerdings die Einbeziehung

mengentheoretischer, abbildungsgeometrischer und struktureller Begriffe auf dieser Stufe gelohnt hat, mag man etwas bezweifeln, wenn man zum Beispiel auf Seite 4 die Definition liest: «Jede Teilmenge der Ebene E heisst Fläche». Weitere Ungenauigkeiten dieser Art findet man mühelos, sie müssten in einer Neuauflage unbedingt verschwinden. – Um das Buch auch für Autodidakten attraktiv zu machen, sollte wenigstens ein Teil der Lösungen zu den zahlreichen Übungsaufgaben beigegeben werden. W. HÖHN

Mathematischer Einführungskurs für die Physik. Von S. GROSSMANN. 263 Seiten. DM 22,80. Teubner, Stuttgart 1974.

Grossmann behandelt mathematische Grundlagen, die in physikalischen Einführungsvorlesungen für Studenten der Physik, Mathematik, Naturwissenschaften und Ingenieurwissenschaften verwendet werden, nämlich: Vektoren, Matrizen, Determinanten, Vektorprodukte; Vektorfunktionen, Felder, grad, div, rot, Nabla-Operator; Riemann-Integral, Uneigentliche Integrale, Parameterintegrale, Delta-Funktion; Kurven- Flächen- und Volumenintegrale, Integralsätze von Gauss, Stokes, Green sowie krummlinige Koordinaten.

Der Autor spricht Studenten im 1. Studienjahr an und verzichtet auf Stoff, der in den mathematischen Kursvorlesungen früh genug geboten wird. Die Darstellung ist den Fähigkeiten des Studienanfängers angepasst: Problemstellungen werden an physikalischen Beispielen motiviert, textliche Argumentation führt zur formalen Darstellung, Übungsbeispiele vertiefen einerseits das Behandelte und weisen andererseits auf Anwendungsmöglichkeiten mathematischer Hilfsmittel hin, und schliesslich gestatten «Übungen zum Selbsttest» zu prüfen, ob der durchgearbeitete Stoff verstanden wurde.

Grossmanns «Mathematischer Einführungskurs» ist didaktisch geschickt aufgebaut, zum Selbststudium gut geeignet und kann dem Besucher einer physikalischen Einführungsvorlesung als mathematisches Hilfsmittel empfohlen werden. W. HOLENWEG

Lectures on Complex Analytic Varieties. Von R.C. CUNNING. 163 Seiten. $4.–. Princeton University Press, 1974.

Es handelt sich um eine Fortsetzung der in der gleichen Reihe 1970 erschienenen Lectures on Complex Analytic Varieties: The Local Parametrization Theorem. Gegenstand dieser Vorlesungen ist die Untersuchung der lokalen Eigenschaften endlicher holomorpher Abbildungen, das aber nicht als Selbstzweck, vielmehr sollen hierdurch einige algebraische Aspekte der lokalen Theorie der analytischen Varietäten abgeklärt werden. Vom Leser werden Grundkenntnisse der komplexen Analysis sowie der Garbentheorie erwartet. H. HOLMANN

Design of Experiments. A realistic Approach. Von V.L. ANDERSON und R.A. MCLEAN. 418 Seiten. $19.75. Dekker, New York 1974.

Das Buch gibt eine sehr ausführlich gehaltene Darstellung der Planung von Experimenten (eine Angelegenheit, die in der Praxis recht oft zu wenig sorgfältig behandelt wird) und der möglichen Tragweite experimentell gewonnener Resultate. Es setzt Grundkenntnisse der Statistik voraus, daneben aber eigentlich nur die übliche Schulmathematik. So kann es den verschiedensten Interessenten dienen, vor allem auch weil Beispiele und Aufgaben einen sehr grossen Kreis von Anwendungsmöglichkeiten – von der Psychologie bis zu den Ingenieurwissenschaften – illustrieren. R. INEICHEN

Advanced Combinatorics. By LOUIS COMTET. Übersetzung aus dem Französischen, besorgt von J.W. Nienhuis. 350 Seiten mit 57 Figuren und zahlreichen Zahlentafeln. $19.50. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland; Boston, USA 1974.

Die französische Originalausgabe erschien 1970 unter dem Titel *Analyse Combinatoire* in einer Taschenbuchreihe. Im Format eines Taschenkalenders waren die beiden Bändchen schlecht untergebracht; die vielen Fussnoten mit den ausführlichen Literaturhinweisen konnte man fast nur mit der Lupe lesen. Wer die Bedeutung des Kombinatorik-Buches von Comtet schon bei der Originalausgabe erfasst hat, wird es sicher begrüssen, dass es nun in einem vernünftigen Format vorliegt.

Es handelt sich tatsächlich um ein recht bemerkenswertes Buch. Comtet gibt darin einen umfassenden Überblick über die bis heute vorliegenden Ergebnisse in der sogenannten abzählenden Kombinato-

rik. Andere Bereiche der Kombinatorik (Existenzfragen, Optimierungsfragen, Graphen) werden kurz gestreift, soweit sie in der Nähe der abzählenden Kombinatorik angesiedelt sind.

In jedem der 7 Kapitel behandelt der Autor die diesbezüglichen Kernprobleme mit den entsprechenden Sätzen und deren Beweisen. Ein Anhang wird jeweils geschickt dazu benutzt, um in weiterführenden Aufgaben und in ergänzenden Bemerkungen bis an die Quellen heranzuführen und auf Detailfragen hinzuweisen. Auf diese Weise vermittelt das Buch quasi eine totale Information über abzählende Kombinatorik. Es wird in dieser Hinsicht getragen von einem ausführlichen Literaturverzeichnis, das weit mehr als 1000 Titel umfasst. Die einzelnen Kapitel haben folgende Überschriften: Vocabulary of Combinatorial Analysis. Partition of Integers. Identities and Expansions. Sieve Formulas. Stirling Numbers. Groups of Permutations. Examples of Inequalities and Estimates.

Die Lektüre setzt nur einige Grundkenntnisse aus der Analysis voraus. Das Buch dürfte daher jedem Studenten im 3. Semester verständlich sein. Der Autor betont im Vorwort, dass er keine didaktischen Absichten realisieren wollte. Der Stil ist ganz darauf ausgerichtet, den Leser möglichst umfassend über ein ins Immense gewachsenes Gebiet der neueren Mathematik zu informieren. Mit dieser Zielsetzung füllt das Buch eine bis jetzt vorhanden gewesene Lücke in der wissenschaftlichen Literatur aus.

Das Buch ist eine wahre Fundgrube von Anregungen, die sowohl im Mittelschulunterricht wie auch im Hochschulunterricht genutzt werden könnten. Wer sich auf der wissenschaftlichen Ebene mit Kombinatorik befasst, dem steht mit diesem Buch ein wertvolles Arbeitsinstrument zur Verfügung, das den Zugang zu den Quellen ganz erheblich erleichtern dürfte. M. JEGER

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Von H. W. KNOBLOCH und F. KAPPEL. 332 Seiten. DM 48,–. Teubner, Stuttgart 1974.

Das vorliegende Buch gliedert sich in 6 Kapitel, deren Inhalt nur ganz flüchtig angedeutet sei: Kapitel 1 behandelt die elementaren Integrationsmethoden, stellt einen bunten Strauss von Anschauungsmaterial bereit und endet mit einem lokalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz. Kapitel 2 bringt die Theorie der linearen Differentialgleichungssysteme und schliesst mit einem Abschnitt über lineare Regelungsprobleme. Kapitel 3 ist den grundlegenden Existenz-, Eindeutigkeits- und Abhängigkeitssätzen sowie der Liapunovschen Stabilitätstheorie gewidmet. Das nächste Kapitel befasst sich mit zweidimensionalen autonomen Systemen, beinhaltet insbesondere die Theorie von Poincaré-Bendixson. Das fünfte Kapitel, Linearisierung genannt, hat den Rezensenten am meisten angesprochen. Hier bieten die Autoren einen neuartigen Zugang zur Theorie der Integralmannigfaltigkeiten. Statt sich, wie üblich, auf einen Kontraktionssatz zu stützen, um die globale Existenz der Integralmannigfaltigkeit zu beweisen, geben sie ein Verfahren zur lokalen Konstruktion, das, wiederholt angewandt, wiederum ein globales Resultat liefert. Dieses neue Vorgehen eliminiert zahlreiche, offenbar nur beweistechnisch bedingte Voraussetzungen. Das Kapitel schliesst mit Anwendungen auf die Stabilitätstheorie (kritische Fälle) und die Störungstheorie. Das letzte Kapitel ist Optimierungsproblemen gewidmet und enthält eine vollständige Herleitung des Pontrjaginschen Maximumprinzips.

Das Buch richtet sich an Mathematiker und Physiker, auch an Ingenieure und Naturwissenschaftler, falls diese bereit sind, die Mühe einer strengen mathematischen Lektüre auf sich zu nehmen.

U. KIRCHGRABER

Elementare Methoden der numerischen Mathematik. Von H. KIESWETTER und G. MAESS. 246 Seiten, 33 Abbildungen. DM 39,–. Springer, Wien 1974.

Das vorliegende Buch gibt einen repräsentativen Querschnitt durch die numerische Mathematik, werden doch folgende Themen behandelt: Lineare Gleichungssysteme, Nichtlineare Gleichungen, Eigenwertprobleme, Interpolation, Approximation, Integration, Differentialgleichungen. Alle diese Abschnitte sind wie folgt aufgebaut: Zunächst werden die einfacheren Verfahren hergeleitet und mit Fehleruntersuchungen gestützt. Dann werden komplizierte Algorithmen beschrieben, diskutiert, durch Beispiele und Aufgaben illustriert und durch Resultate ergänzt, die aus der Spezialliteratur zitiert werden. Hieraus ergibt sich der potentielle Leserkreis. Das Buch richtet sich einerseits an Leser, die sich mit den elementaren Grundlagen der numerischen Mathematik vertraut machen wollen, andererseits an Praktiker, die in diesem Buch eine übersichtliche Zusammenstellung der geläufigsten Verfahren haben.

U. KIRCHGRABER

Vektoranalysis I. Von H.-J. KOWALSKY. 311 Seiten. DM 28,-. Walter de Gruyter, Berlin 1974.

Das Buch gibt eine moderne Beschreibung der Analysis des n-dimensionalen reellen Raumes, welche sich einerseits auf die Differentialrechnung der Funktionen einer Variablen und andererseits auf die lineare Algebra stützt.

Um einen Eindruck über den behandelten Stoff zu vermitteln, seien die Kapitelüberschriften wiedergegeben: Vektorfolgen und Vektorreihen; Topologische Grundlagen; Stetigkeit und Abbildungsfolgen; Differenzierbare Abbildungen; Höhere Ableitungen, Extrema; Differentialgeometrische Anwendungen, Vektorfelder.

Das Buch ist ausgezeichnet durch einen schönen logischen Aufbau, durch seine präzisen Beweise und nicht zuletzt durch etwa 80 Aufgaben, die mit ausführlichen Lösungsbeschreibungen versehen sind.

U. KIRCHGRABER

Das Erlanger-Programm von Felix Klein. Herausgegeben von H. WUSSING. Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Band 253. 84 Seiten. Akademische Verlagsgesellschaft Leipzig 1974.

Trotz der 100 Jahre, die seit der Vorstellung des Erlanger-Programms verstrichen sind, haben die Thesen von Felix Klein nichts an Aktualität eingebüsst. Wenn auch die geometrische Forschung in der Zwischenzeit noch zusätzlich Akzente erhalten hat, so vermochte doch Klein eine echte Grundwelle auszulösen, deren Ausläufer bis in die Gegenwart hineinwirken. Im Bereiche des mathematischen Unterrichtes kommen die Kleinschen Gedanken überhaupt erst heute zum Tragen; das Erlanger-Programm steht ja am Anfang der Entwicklungen zur Abbildungsgeometrie.

Es ist verdienstvoll, dass der Akademie-Verlag mit einem Abdruck das Erlanger-Programm der heutigen Generation wieder leichter zugänglich macht. H. Wussing hat eine biographische Notiz über Felix Klein und einen 17seitigen Begleittext zur Entstehungsgeschichte des Erlanger-Programms hinzugefügt. Leider sind auch einige politische Seitenhiebe in diesen Vorspann eingeflossen, aber mit solchen Pflichtübungen der Autoren muss man sich nun auch in Sachbüchern aus der DDR wohl oder übel abfinden.

M. JEGER

Finite Rings with Identity. Von B. R. MCDONALD. 429 Seiten. Marcel Dekker Inc., New York 1974.

Cet ouvrage décrit de façon détaillée la structure des anneaux associatifs finis. Si certaines méthodes sont propres aux anneaux finis, d'autres proviennent de la théorie générale des anneaux. Mais l'auteur a préféré formuler ces dernières dans le cas fini seulement. Cette restriction est parfois un peu déroutante. Les aspects combinatoires et énumératifs ne sont pas abordés.

Sans être très original, ce livre a le mérite de rassembler un grand nombre de résultats. Il sera certainement très utile aux spécialistes des applications des anneaux ou des corps finis (géométrie finie, théorie du codage, etc.). Il fournira aussi une foule d'exemples concrets à qui s'intéresse à la théorie générale des anneaux.

M. A. KNUS

Berichtigung

The author of the article with title "Congruences for Sums of Powers of Primitive Roots and Ramanujan's Sum", published in El. Math. *30*, 129-133 (1975), hereby wishes to point out that the "Theorem" (p. 130) is valid only when $n=p$ (p being a prime). The actual mistake in the proof of the "Theorem" with counter examples when n is composite and with additional references on the topic will be published elsewhere shortly.

D. Suryanarayana, Andhra University, Waltair, India