Werk

Titel: Kleine Mitteilungen.

Jahr: 1961

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?378850199_0016|log21

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Spektra bei verschiedenen Temperaturen und Druckverhältnissen einen Erklärungsgrund finden zu können.» «Wenn der Kraftpunkt sich mit einer solchen Geschwindigkeit in seiner Bahn bewegt, dass er seine eigene Schwerkraft nur einmal überholt, so ist dies sein einfachster Monadenzustand. Durch Verengerung seiner Bahn bei gleicher Energie kann seine Eigenbewegung so gesteigert werden, dass er seine eigene Schwerkraft zum zweiten, dritten Mal überholt usw. Der Übergang vom ersten zum zweiten, vom zweiten zum dritten Zustand usw. muss ein urplötzlicher sein.»

In dieser Weise stellte sich Balmer die Vorgänge vor, die 20 Jahre später durch das Fallen der Elektronen von einer äussern auf eine innere Bahn erklärt wurden, wobei die Energiedifferenz als ausgesandte Spektrallinie erscheint.

Während Balmer an seinem alten Stehpult sann, veranlasste seine Formel viele Forscher, die Spektren der Elemente genauer zu erkunden und nach weiteren zahlenmässigen Verkettungen der Spektrallinien zu suchen. KAYSER, RUNGE, RYDBERG, RITZ knüpften an ihn an. Balmer selber wurde dadurch angeregt und konnte in einem Vortrag im Juni 1896 eine eigene, allgemeinere Formel vorlegen, die er auf die Linienserie I des Lithiums und auf die verschiedenen Serien I bis VI des Heliums anwandte. («Eine neue Formel für Spektralwellen», Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft in Basel, 1897.)

Beide Spektralabhandlungen von 1885 und 1897 erschienen auch in den entsprechenden Jahrgängen der «Annalen der Physik und Chemie» in Leipzig. Die erste ist dabei um die 4 Seiten des Anfangs gekürzt und um einen zweiseitigen Nachtrag erweitert, die zweite unverändert abgedruckt.

Eine lebensvolle Vergegenwärtigung von Balmers lieber Persönlichkeit finden wir in den «Erinnerungen» seines jüngsten Sohnes WILHELM BALMER (Rotapfel-Verlag, Erlenbach-Zürich 1924). Eine knappe Darstellung seiner wissenschaftlichen Tätigkeit gab ALBERT RIGGENBACH in der «Allgemeinen Schweizer Zeitung» vom 20. März 1898. Danach hat Balmer zu den 5 regulären Polyedern des Altertums, wozu schon POINSOT 4 weitere fand, noch 8 neue hinzugefügt. RIGGENBACH schliesst seine Betrachtungen mit den Worten, dass «Balmers wissenschaftlicher Name einem Berge gleicht, der aus der Nähe gesehen sein Haupt nur bescheiden zwischen andern Spitzen durchblicken lässt, aber um so höher emporwächst, je weiter wir von ihm zurücktreten».

HEINZ BALMER, Basel

Kleine Mitteilungen

Inequalities for a triangle

Let ϱ_i and h_i $(i = 1, 2, 3)$ denote the radii of the escribed circles and the altitudes of a triangle with the sides a_i $(i = 1, 2, 3)$ respectively.

We show that

$$h_1^k + h_2^k + h_3^k \geqq \varrho_1^k + \varrho_2^k + \varrho_3^k \quad \text{for} \quad -1 < k < 0\,, \tag{1}$$

$$h_1^k + h_2^k + h_3^k \leqq \varrho_1^k + \varrho_2^k + \varrho_3^k \quad \text{for} \quad k > 0 \text{ and } k < -1\,, \tag{2}$$

$$h_1 h_2 h_3 \leqq \varrho_1 \varrho_2 \varrho_3\,. \tag{3}$$

The equalities

$$h_i = \frac{2F}{a_i}, \qquad \varrho_i = \frac{2F}{a_{i-1} + a_{i+1} - a_i}$$

are known (we suppose $a_0 = a_3$, $a_4 = a_1$). F denotes here the area of a triangle.

Thus the inequalities (1), (2) and (3) may be written in the form

$$a_1^{-k} + a_2^{-k} + a_3^{-k} \geqq (a_2 + a_3 - a_1)^{-k} + (a_1 + a_3 - a_2)^{-k} + (a_1 + a_2 - a_3)^{-k}$$

for $-1 < k < 0$,

$$a_1^{-k} + a_2^{-k} + a_3^{-k} \leqq (a_2 + a_3 - a_1)^{-k} + (a_1 + a_3 - a_2)^{-k} + (a_1 + a_2 - a_3)^{-k}$$

for $k > 0$ and $k < -1$,

$$-\log a_1 - \log a_2 - \log a_3 \leqq -\log (a_2 + a_3 - a_1) - \log (a_1 + a_3 - a_2) - \log (a_1 + a_2 - a_3).$$

Because the functions x^{-k} for $k > 0$ and $k < -1$, $-x^{-k}$ for $-1 < k < 0$ and $-\log x$ are convex for $x > 0$, the JENSEN's inequality

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \geqq f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

holds ($f(x)$ denotes here any of the functions mentioned above). Hence

$$\frac{f(a_1 + a_3 - a_2) + f(a_1 + a_2 - a_3)}{2} \geqq f(a_1),$$

$$\frac{f(a_2 + a_3 - a_1) + f(a_2 + a_1 - a_3)}{2} \geqq f(a_2),$$

$$\frac{f(a_3 + a_2 - a_1) + f(a_3 + a_1 - a_2)}{2} \geqq f(a_3).$$

Adding these inequalities we get

$$f(a_2 + a_3 - a_1) + f(a_1 + a_3 - a_2) + f(a_1 + a_2 - a_3) \geqq f(a_1) + f(a_2) + f(a_3).$$

Thus the inequalities (1), (2) and (3) are proved[1]).

The inequalities (1), (2) and (3) become equalities when

$$a_1 + a_2 - a_3 = a_2 + a_3 - a_1 = a_1 + a_3 - a_2,$$

i. e. for an equilateral triangle.

A. MĄKOWSKI, Warsaw

Anschaulicher Beweis des Vierscheitelsatzes[2])

Den bekannten Satz: *Jede Eilinie mit stetig veränderlicher Krümmung besitzt wenigstens vier Scheitelpunkte* beweisen wir unter der etwas stärkeren Voraussetzung, dass die Eilinie von der Klasse C_3 ist, das heisst dreimal stetig differenzierbar ist. Ferner setzen wir voraus, dass es auf der Eilinie keine Bögen konstanter Krümmung gibt, dass sie also keine Kreissegmente enthält, sowie, dass die Krümmung nirgends gleich Null wird. (Von diesen letzten Beschränkungen könnten wir uns zwar ohne wesentliche Veränderung des Beweises befreien. Doch würde dadurch der Beweis an Einfachheit einbüssen, so dass wir darauf nicht eingehen wollen.)

Offenbar genügt es, zu zeigen, dass es keine Eilinie der genannten Eigenschaften mit genau zwei Scheitelpunkten geben kann.

Lemma 1. Liegt innerhalb eines Dreiecks, über einer seiner Seiten, ein konvexer Kurvenbogen, so ist seine Länge l kleiner als die Summe der Längen der übrigen zwei Seiten des Dreiecks (Fig. 1).

Beweis: Umschreiben wir dem Kurvenbogen Polygonzüge AP_1P_2B, $AP_3P_4P_5P_6B$, ... mit steigender Seitenanzahl und zu Null abnehmenden Seitenlängen, so wird

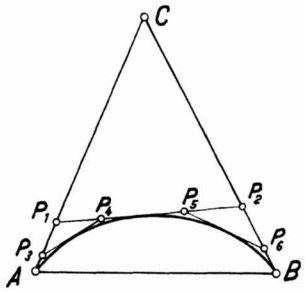
$$\overline{AC} + \overline{CB} > \overline{AP_1} + \overline{P_1P_2} + \overline{P_2B} > \overline{AP_3} + \overline{P_3P_4} + \overline{P_4P_5} + \overline{P_5P_6} + \overline{P_6B} > \cdots,$$

wobei die Summen rechts fallend zur Kurvenbogenlänge l streben.

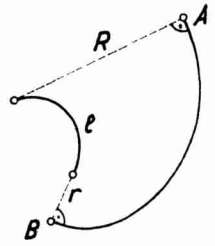
[1]) The idea of application of JENSEN's inequality is due to Z. CIESIELSKI.

[2]) Eine ähnliche anschauliche Deutung des Vierscheitelsatzes hat E. TROST in El. Math. *3*, 100 (1948) gegeben.

Lemma 2. Ist die Krümmung längs des Kurvenbogens $\overset{\frown}{AB}$ (der betrachteten Eilinie) monoton veränderlich (das heisst nimmt sie von A bis B ständig zu oder ständig ab), so krümmt sich die Evolute dieses Bogens ständig in demselben Sinne, so dass die Evolutenabschnitte, denen eine Drehung ihrer Tangente um einen Winkel $\leqq \pi$ entspricht, konvexe Bögen sind. (Eine solche Kurve nennen wir «lokal-konvex».) Die Länge l der Evolute des Bogens $\overset{\frown}{AB}$ ist gleich der Differenz $R - r$ der Krümmungshalbmesser für A und B (Fig. 2).

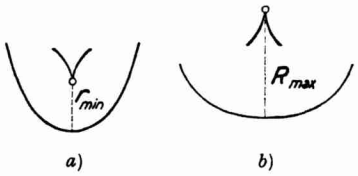


Figur 1

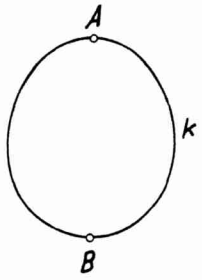


Figur 2

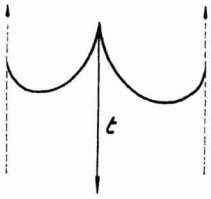
Lemma 3. Jedem Scheitelpunkt der Eilinie entspricht eine Spitze ihrer Evolute, und zwar von solcher Art, dass die beiden Äste der Spitze auf verschiedenen Seiten der Spitzentangente liegen (Fig. 3).



Figur 3

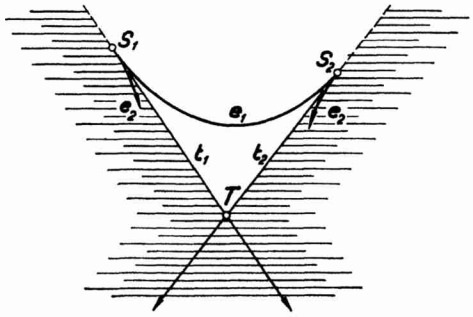


Figur 4



Figur 5

Nehmen wir jetzt an, es sei k (Fig. 4) eine Eilinie der betrachteten Art mit genau zwei Scheitelpunkten A und B. Unter den gemachten Voraussetzungen hat ihre Evolute e zwei Spitzen (Lemma 3), die durch zwei lokal-konvexe Äste verbunden sind (Lemma 2). Es ist nicht möglich, dass sich längs jedes dieser Äste die Tangente genau um π dreht, da sich sonst diese Äste nicht in der zweiten Spitze der Evolute vereinigen könnten (Fig. 5). Es muss sich also die Tangente längs des einen Astes um $\alpha < \pi$, längs des anderen um $\beta > \pi$ drehen, da die Tangente an e zugleich Normale an k ist, so dass $\alpha + \beta = 2\pi$ sein muss.

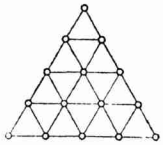


Figur 6

Es sei nun e_1 der Ast, längs dem sich die Tangente um weniger als π dreht (Fig. 6). Die Tangenten in den Spitzen S_1 und S_2 der Evolute seien t_1 und t_2. Längs des zweiten Astes e_2 dreht sich die Tangente um weniger als 2π; daraus folgt: Entfernt sich der Berührungspunkt der Tangente von S_1 und von S_2 aus längs e_2 je so weit, dass sich die Tangente um π dreht, so wird dabei der ganze Bogen e_2 beschrieben (und ein Teil davon sogar zweimal). Daraus folgt aber, dass e_2 ganz in dem Teil der Ebene verlaufen muss, der in der Figur 6 schraffiert ist. Es ist aber $l(e_1) < \overline{S_1T} + \overline{TS_2}$ (Lemma 1), während offenbar $l(e_2) > \overline{S_1T} + \overline{TS_2}$ sein muss. Es wäre also $l(e_1) \neq l(e_2)$, im Widerspruch zum Lemma 3, wonach die beiden Äste von der Länge $R - r$ sein sollten. VLADIMIR DEVIDÉ, Zagreb

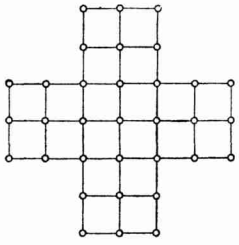
Eine neue Form des Solitär-Spieles

Die Beschäftigung mit elementaren mathematischen Unterhaltungen und Spielen wird gegenwärtig in Europa nicht mehr häufig gepflegt, sie ist gewissermassen aus der Mode gekommen. Noch vor einigen Jahrzehnten bestand jedoch auf diesem Gebiete ziemliche Regsamkeit, so dass eine recht umfangreiche Literatur darüber zu finden ist. Ausser zahlreichen Publikationen in Zeitschriften sind auch Bücher erschienen, wovon wir das zweibändige Werk von W. AHRENS, *Mathematische Unterhaltungen und Spiele* (2. Auflage 1910 bei Teubner, Leipzig), sowie das Buch *Mathematische Mussestunden* von H. SCHUBERT (erste Auflage 1897, zehnte von F. FITTING bearbeitete Auflage 1953, Walter de Gruyter & Co., Berlin) nennen möchten. Haben es doch LEIBNIZ und später KOWALEWSKI nicht unter ihrer Würde gehalten, sich eingehend mit der mathematischen Theorie bestimmter Spiele auseinanderzusetzen.

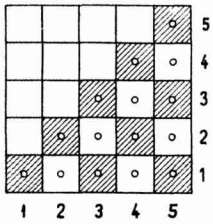


Figur 1

Neuerdings kommen aus Amerika zahlreiche Geduldspiele, die in die Kategorie der mathematischen Unterhaltung einzureihen sind. Wir wollen uns im folgenden mit einem solchen Spiel befassen. In ein Brettchen sind 15 Löcher gebohrt in der Anordnung von Figur 1. Wir haben also ein gleichseitiges Dreiecks-Punktgitter. In die Löcher werden Pflöcke gesteckt, ein Loch jedoch wird leer gelassen. Wir unterscheiden auf dem Spielbrett drei Richtungen, nach den Dreieckseiten. Die Spielregel besteht nun darin, dass wenn von drei in einer Reihe auf einer der drei genannten Richtungen gelegenen Löchern zwei benachbarte mit einem Pflock versehen sind, während das dritte unmittelbar daneben liegende leer ist, der entferntere Pflock in das leere Loch gesteckt, während der Pflock aus dem mittleren, übersprungenen Loch entfernt wird. Ein solcher Zug hat also stets das Verschwinden eines Pflocks und Ortsveränderung eines anderen Pflockes zur Folge. Wenn auf diese Weise der Reihe nach alle Pflöcke bis auf einen fortgeschafft werden können, ist die Spielaufgabe gelöst. Da im ganzen 15 Löcher sind, wovon eines zu Anfang leer ist und eines am Schlusse besetzt bleibt, erfordert die Lösung, sofern es eine gibt, offenbar 13 Züge.

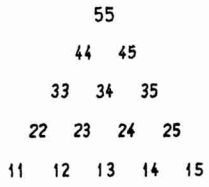


Figur 2

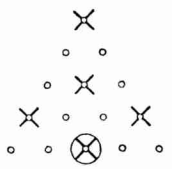


Figur 3

Die Aufgabe ist lösbar, aber es erhebt sich die Frage, ob es, abgesehen von Lösungen, die nur durch Spiegelung an einer Höhe des Gesamtdreiecks oder durch Drehung desselben um 120, resp. 240 Grad entstehen, verschiedene Lösungen gibt, und insbesondere, ob nur bestimmte Ausgangspositionen eine Lösung zulassen. Das Spiel ist offensichtlich eine Abart des altbekannten Solitär-Spiels. Hier sind 33 Löcher in Kreuzform gemäss Figur 2 angeordnet, und die Züge dürfen nur in horizontaler oder vertikaler Richtung erfolgen. Über das Solitär-Spiel besteht eine ausführliche Literatur, seine Theorie wurde insbesondere von REISS (Crelles Journal, Bd. 54. 1857) und von HERMANY (Assoc. franç. pour l'avanc. des sc., VIII, Congrès de Montpellier 1879) entwickelt, welche Hinweise wir dem genannten Buch von AHRENS entnehmen. Wir besetzen nun vom Solitärspielbrett nur einen Teil von 15 Löchern, und denken uns das Brett schachspielartig in schwarze und weisse Quadrate aufgeteilt, gemäss Figur 3, so dass also jedes Loch in der Mitte eines quadratischen Feldes steht. Gleichzeitig führen wir eine koordinatenmässige Numerierung der Felder ein, wie Figur zeigt. Wir haben 9 schwarze und 6 weisse Felder, und wir wollen daher auch nach schwarzen und weissen Pflöcken unterscheiden. Es ist klar, dass ein schwarzer Pflock im Spielverlauf niemals auf ein weisses Feld gelangen kann und umgekehrt. Nun überblickt man leicht, dass eine Lösung bei nur horizontalen und vertikalen Zügen nicht möglich ist, es werden bestenfalls drei der in Überzahl vorhandenen schwarzen Pflöcke stehen bleiben. Um einen Spielverlauf zu beschreiben, bezeichnen wir einen Zug durch einen Bruch, dessen Zähler die Position des Pflockes vor, und dessen Nenner seine Position nach dem Zug angibt. Wir können nun zum Beispiel Pflock 33 entfernen und dann wie folgt spielen 35/32, 55/35, 14/34, 25/45, 33/35, 45/25, 22/24, 12/14, 25/23, 15/13, 13/33. Es bleiben die Pflöcke 11, 33 und 44 stehen, und wir sehen, dass eine Lösung möglich wird, wenn auch Züge in Richtung der Treppe zugelassen werden. Nach den zwei Zügen 44/22, 11/33 bleibt auf Feld 33 der letzte Pflock übrig.



Figur 4



Figur 5

Nach diesem Exkurs kehren wir zu unserem Spielproblem zurück und numerieren die Löcher in Analogie zu Figur 3 wie Figur 4 zeigt. Wieder bezeichnen wir die Züge durch Brüche, so dass also 33/13 bedeutet, dass Pflock 33 in das, natürlich leere, Loch 13 gesteckt wird, wobei Pflock 23 ausscheidet. In Analogie zu dem zu Figur 3 Gesagten folgt unmittelbar, dass es eine Lösung der Spielaufgabe gibt. Wir wollen nun folgendes Spiel mit dem leeren Anfangsloch 13 durchführen: 33/13, 11/33, 45/23, 44/22, 13/33, 22/44, 15/13, 12/14, 25/45, 14/34, 44/24, 55/35, 35/13. Als Schlussposition erhalten wir das Anfangsloch. Spielen wir jedoch nach dem zehnten Zuge wie folgt: 55/35, 35/33 und dann 33/55 oder 44/22, so folgen die Schlusspositionen 55 oder 22. Wir können aber ab zehntem Zug auch wie folgt verfahren: 55/33, 33/35, 45/25, was zur Endposition 25 führt. Eine wesentlich andere Spielfolge, ebenfalls mit Anfangsloch 13, ist gegeben durch: 11/13, 14/12, 33/13, 12/14, 35/13, 15/35, 55/33, 45/25, 22/44, 44/24, 14/12, 25/23, 12/34, womit wir zur Schlussposition 34 gelangen.

Somit haben wir in fünf Spielfolgen, jeweils von dem in Figur 5 mit Kreis umrandeten Anfangsloch 13 ausgehend, die mit Kreuz bezeichneten Endpositionen 13, 55, 22, 25 und 34 erreicht. Man kann aber das Spiel natürlich auch in umgekehrter Reihenfolge spielen, das heisst von einem der fünf mit Kreuz bezeichneten Löcher als leerer Anfangsposition ausgehen und bei Loch 13 als Endposition landen. Durch Drehung von Figur 5 um 120, bzw. 240 Grad ersieht man aber sofort, dass jedes Loch des Spielbrettes Ausgangspunkt für eine Zugfolge mit Lösung der Spielaufgabe sein kann. H. JECKLIN, Zürich

Eine Denksportaufgabe und ihr algebraischer Gehalt

1. Ein erster Behälter enthalte J_0 Liter rote Flüssigkeit und ein zweiter Behälter K_0 Liter grüne Flüssigkeit. Nun wird mit einem Gefäss von G Litern Fassungsvermögen aus dem ersten Behälter G Liter rote Flüssigkeit entnommen und in den zweiten Behälter geschüttet. Nach guter Durchmischung werde dem zweiten Behälter ebenfalls G Liter der Mischung entnommen und in den ersten Behälter zurückgeschüttet.

Im Falle der Gleichheit von J_0 und K_0 bildet die Frage nach dem Mischungsverhältnis grün zu rot, bzw. rot zu grün eine bekannte Denksportaufgabe.

Das eben Gesagte lässt sich formulieren etwa in folgender Weise: Es sei

$$J_0 = x\,G_r, \quad K_0 = y\,G_g \tag{1}$$

wo x und y positive Zahlen grösser als 1 sind. Die Indizes r und g von G kennzeichnen nur die Farbe der Flüssigkeit, die sich in den Mengen J_0 und K_0 befindet. Die Symbole J_0 und K_0 sind also selbst Kennzeichen für rote bzw. grüne Flüssigkeit.

Nach Durchführung der ersten Operation befinden sich im

ersten Behälter	zweiten Behälter	
$J_1 = (x-1)\,G_r$	$K_1 = y\,G_g + G_r$	(2)

Liter Flüssigkeit, wobei im zweiten Behälter $y\,G_g$ Liter grüne und G_r Liter rote enthalten ist.

Nach Durchführung der zweiten Operation befinden sich im

ersten Behälter	zweiten Behälter	
$J_2 = J_1 + \dfrac{K_1}{y+1}$	$K_2 = K_1 - \dfrac{K_1}{y+1}$	(3)

Liter Flüssigkeit. Offenbar ist mengenmässig $J_0 = J_2$ und $K_0 = K_2$. Die Verbindung von (1), (2) und (3) liefert:

$$\left.\begin{aligned} J_2 &= \left(1 - \frac{y}{x\,(y+1)}\right) J_0 + \frac{1}{y+1}\,K_0 \\ K_2 &= \frac{y}{x\,(y+1)}\,J_0 + \left(1 - \frac{1}{y+1}\,K_0\right) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

wobei die Terme mit J_0 rote, diejenigen mit K_0 grüne Flüssigkeitsmengen bedeuten.

2. Setzen wir zur Abkürzung:

$$\left.\begin{aligned} 1 - \frac{y}{x\,(y+1)} &= \varphi_2 = 1 - \overline{\psi_2} \\ \frac{1}{y+1} &= \psi_2 = 1 - \overline{\varphi_2} \\ 1 - \frac{1}{y+1} &= \overline{\varphi_2} = 1 - \psi_2 \\ \frac{y}{x\,(y+1)} &= \overline{\psi_2} = 1 - \varphi_2 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

so können wir die Beziehung (4) verallgemeinert so schreiben:

$$\left.\begin{aligned} J_{2n} &= \varphi_{2m}\,J_{2n-2m} + \psi_{2m}\,K_{2n-2m} \\ K_{2n} &= \overline{\psi}_{2m}\,J_{2n-2m} + \overline{\varphi}_{2m}\,K_{2n-2m} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Es gilt auch hier, analog wie in (5):

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{2m} &= 1 - \overline{\psi}_{2m}; \quad \psi_{2m} = 1 - \overline{\varphi}_{2m} \\ \overline{\varphi}_{2m} &= 1 - \psi_{2m}; \quad \overline{\psi}_{2m} = 1 - \varphi_{2m}\,, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

wobei die φ_{2m} und ψ_{2m} Funktionen von φ_2 und ψ_2 sind. Die Indizes n und m sind ganze positive Zahlen, wobei m kleiner, oder höchstens gleich gross wie n ist. Die Berechnung der Koeffizienten von J_0 und K_0 führt zunächst auf die Beziehungen:

$$\varphi_{2n} - \psi_{2n} = (\varphi_2 - \psi_2)^n \tag{8}$$

$$\varphi_{2n} + \psi_{2n} = 1 + (\varphi_2 - \overline{\varphi_2}) \sum_{\lambda=1}^{n} (\varphi_2 - \psi_2)^{n-\lambda} . \tag{9}$$

Wir setzen abkürzend

$$\sum_{\lambda=1}^{n} (\varphi_2 - \psi_2)^{n-\lambda} = S \tag{10}$$

und beachten, dass wegen (5):

$$\varphi_2 - \overline{\varphi_2} = 1 - (\varphi_2 - \psi_2) - 2\,(1 - \varphi_2) . \tag{11}$$

Unter Benutzung von (10) und (11) wird dann aus (9):

$$\varphi_{2n} + \psi_{2n} = 1 + \{1 - (\varphi_2 - \psi_2)\}\, S - 2\,(1 - \varphi_2)\, S . \tag{12}$$

Wegen der allgemeingültigen Beziehung:

$$a \cdot \sum_{\lambda=1}^{n} (1-a)^{n-\lambda} = 1 - (1-a)^n \tag{13}$$

können wir nunmehr (8) und (9) schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{2n} + \psi_{2n} &= 2 - (\varphi_2 - \psi_2)^n - 2\,(1 - \varphi_2)\, S \\ \varphi_{2n} - \psi_{2n} &= (\varphi_2 - \psi_2)^n = 1 - \{1 - (\varphi_2 - \psi_2)\}\, S . \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Hieraus ergibt sich sofort:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{2n} &= 1 - \overline{\psi_2}\, S \\ \psi_{2n} &= \psi_2\, S \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

und analog, wegen (7):

$$\left.\begin{aligned} \overline{\varphi_{2n}} &= 1 - \psi_2\, S \\ \overline{\psi_{2n}} &= \overline{\psi_2}\, S \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Aus (15) und (16) ist sofort ersichtlich, dass:

$$\varphi_{2n} + \overline{\psi_{2n}} = \psi_{2n} + \overline{\varphi_{2n}} = 1 \tag{17}$$

Die Mischverhältnisse nach $2n$ Operationen sind

$$\left.\begin{aligned} m &= \frac{\varphi_{2n} J_0}{\psi_{2n} K_0} = \frac{\varphi_{2n}\, x}{\psi_{2n}\, y} \\ \overline{m} &= \frac{\overline{\varphi_{2n}} K_0}{\overline{\psi_{2n}} J_0} = \frac{\overline{\varphi_{2n}}\, y}{\overline{\psi_{2n}}\, x} \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

3. Wir wenden uns noch einigen Spezialfällen zu und bemerken, dass wegen

$$0 < \varphi_2 - \psi_2 < 1$$

aus (15) und (16) ohne weiteres folgt:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \varphi_{2n} = \lim_{n\to\infty} \psi_{2n} &= \frac{\psi_2}{\psi_2 + \overline{\psi_2}} = \frac{x}{x+y} \\ \lim_{n\to\infty} \overline{\varphi_{2n}} = \lim_{n\to\infty} \overline{\psi_{2n}} &= \frac{\overline{\psi_2}}{\psi_2 + \overline{\psi_2}} = \frac{y}{x+y} \end{aligned}\right\}$$