Werk

Titel: Näherungskonstruktionen für den Kreisumfang.

Autor: Finsler, P.

Jahr: 1959

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?378850199_0014|log44

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math. Band XIV Nr. 6 Seiten 121–144 Basel, 10. November 1959

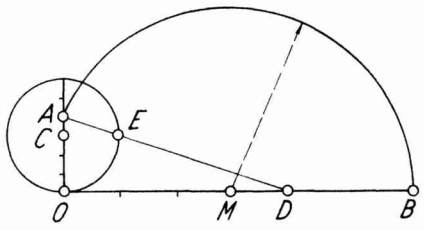
Näherungskonstruktionen für den Kreisumfang

Die bekannteste praktisch brauchbare Näherungskonstruktion für den *halben* Kreisumfang ist wohl die von KOCHANSKI, welche mit dem Lineal und nur *einer* Zirkelöffnung auskommt [1][1]). Dieser letztere Vorteil wird jedoch hinfällig, wenn man den ganzen Kreisumfang sucht oder ihn als Abwicklung auf einer Tangente vom Berührungspunkt aus abtragen will. Der relative Fehler der Konstruktion ist ungefähr 1/53000, also praktisch hinreichend klein.

Für den *ganzen* Kreisumfang gibt es eine Konstruktion, welche zwar theoretisch etwa den doppelten relativen Fehler liefert, praktisch aber (wegen besserer Schnitte) eher genauer sein dürfte als jene [2]. Zwischen andern Konstruktionen versteckt, ist sie wohl nicht viel beachtet worden; etwas modifiziert, ist sie aber sehr bequem, und zudem lässt sie sich, wie hier gezeigt werden soll, mit einer kleinen Zusatzkonstruktion theoretisch noch so verschärfen, dass der relative Fehler weniger als ein Milliardstel beträgt.

Die Konstruktion besteht zunächst in folgendem:

Auf der Tangente des Kreises vom Radius r trage man vom Berührungspunkt O aus die Strecke $OM = 3r$ und auf dem dazu senkrechten Kreisdurchmesser die Strecke $OA = {}^4/_3 r$ ab. Verlängert man OM um $MB = MA$, so ist OB genähert gleich der Abwicklung des Kreises.



Den Punkt A kann man konstruieren, indem man, wenn C den Mittelpunkt des Kreises bedeutet, auf der Tangente $OD = 4r$, also $MD = r$ macht und $DA \parallel MC$ zieht. Diese Parallele trifft übrigens den Kreis in einem Punkt E, der von der Tangente den Abstand r besitzt.

Einfacher ist es jedoch, wenn man den Radius r des Kreises gleich 3 Einheiten wählt und zu OC noch eine Einheit CA hinzufügt. Wenn man insbesondere auf einem karierten Blatt oder einer karierten Tafel, also kurz in einer Gitterebene zeichnet und den Radius r gleich 3 Gittereinheiten wählt, so sind M und A leicht zu

[1]) Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 123.

findende Gitterpunkte, und die ganze Konstruktion beschränkt sich auf das Ziehen *eines einzigen Kreisbogens* um M durch A nach B.

Der relative Fehler der Konstruktion ist sehr nahe 1/27000. Bei einem Kreisumfang von 30 cm ist also der Fehler $^1/_{90}$ mm, bei 3 m Umfang $^1/_9$ mm, er ist also weder auf dem Blatt noch auf der Tafel bemerkbar. Da man zudem nur genau einen senkrechten Schnitt erhält, lässt bei hinreichend genauer Gitterebene auch die praktische Genauigkeit nichts zu wünschen übrig.

Die Konstruktion lässt sich zum Beispiel mit Vorteil verwenden, um für eine auf ihrem Zylinder gegebene Schraubenlinie die Abwickelung und damit auch die Länge und den Neigungswinkel zu erhalten. Auch beim Zeichnen von Zykloiden leistet sie gute Dienste.

Der aus der Konstruktion sich ergebende Näherungswert

$$x = \frac{3}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{97} = 3{,}141476\ldots$$

für $\pi = 3{,}141593\ldots$ genügt der Gleichung

$$9x^2 - 27x - 4 = 0.$$

Bei CAVALLARO findet sich diese Näherung nach SCHOR, jedoch *ohne* die hier doch sehr wesentliche *Konstruktion* [3, 4][2]).

Wenn man die Strecke OB noch um 1/27000 vergrössert, so ist der verbleibende relative Fehler *kleiner als ein Milliardstel*. Zeichnerisch geht dies sehr einfach, da man OB nur dreimal durch 30 zu teilen und das Resultat hinzuzufügen hat.

In einer Gitterebene wird man etwa so vorgehen: Man wähle jetzt den Radius r des Kreises gleich 6 Gittereinheiten. $OM = 3r$ liege auf der x-Achse, $OC = r$ auf der y-Achse. Wie vorher sei $OA = {}^4/_3 r$ und $OB = OM + MA$. Nun seien E_x und E_y die Einheitspunkte des Gitters auf der x- und y-Achse, und auf der y-Achse sei $OF = 5r$. Zieht man jetzt $E_yX \parallel FB$, $XY \perp FE_x$, $YZ \perp XY$, wobei X auf der positiven x-Achse, Y auf der negativen y-Achse, Z auf der negativen x-Achse liegen sollen, so ist ZB sehr nahe gleich dem gesuchten Kreisumfang. Ausser dem Abzählen von Gitterpunkten braucht man also nur einen Kreisbogen, eine Parallele und zwei Lote.

Aus dem früheren Wert $x = 3{,}14147630030\ldots$ ergibt sich jetzt

$$x\,(1 + 30^{-3}) = 3{,}14159265127\ldots$$

anstelle von $\pi = 3{,}14159265359\ldots$, also eine Differenz von $0{,}0000000023\ldots$. Für den Erdumfang gerechnet, beträgt der Fehler knapp 3 cm.

Noch genauer, aber erheblich umständlicher ist eine Konstruktion von RAMANUJAN [5]; sie liefert ungefähr den halben relativen Fehler, nämlich eine Differenz von $0{,}0000000010\ldots$ gegenüber π. Man kann sich fragen, wie RAMANUJAN, der einige Näherungen für π systematisch hergeleitet hat, zu diesem Resultat gekommen ist. Er selbst bemerkt dazu: 'This value was obtained empirically, and it has no

[2]) Nach dem Referat im Jb. Fortschr. Math. *53* scheint auch die mir nicht zugängliche Note von SCHOR keine Konstruktion zu enthalten.