

Werk

Titel: Aufgaben und Lösungen.

Jahr: 1938

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?37721857X_0048|log26

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

Aufgaben und Lösungen.

Aufgaben.

269. Es seien gegeben r verschiedene Primzahlen $p_1, p_2, \dots, p_r$. Dann ist die Anzahl der ganzen Zahlen x ($\neq 0$ und $\neq 1$), für welche die Zahl $Ax^3 - 1$, A ganze positive Zahl, durch keine anderen Primzahlen als $p_1, p_2, \dots, p_r$ teilbar ist, höchstens gleich 3^r .

Wenn $A = 1$ ist, so ist diese Anzahl sogar $\leq \frac{1}{2}(3^r - 1)$.

Uppsala.

T. NAGELL.

(Eingegangen am 28. 4. 1938.)

270. *Zur Kinematik.* Spiegelt man in der Euklidischen Ebene ein festes Achsenkreuz A an allen Geraden g , so entsteht eine zweigliedrige Schar von Achsenkreuzen A_g . Denken wir uns an A_g eine starre Scheibe befestigt, so ist sie dem in gewissem Sinne einfachsten Bewegungsvorgang mit zwei Freiheitsgraden unterworfen. Dieser Bewegungsvorgang soll durch einen Gelenkmechanismus verwirklicht werden. Über Gelenkmechanismen vergleiche etwa G. Koenigs, *Leçons de Cinématique*, Paris 1897, Chap. XI.

Hamburg.

WILHELM BLASCHKE.

(Eingegangen am 29. 5. 1938.)

Lösungen.

Lösung der Aufgabe 207. (Dieser Jahresbericht 45 (1935), S. 110.)

Die Aufgabe lautete:

Gegeben sei eine Menge $\mathfrak{M}$ natürlicher Zahlen $m_1 < m_2 < m_3 < \dots$ mit der natürlichen Dichte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{m_n} = h.$$

Man bilde die Menge $\mathfrak{P} = \{p\}$ aller m_1 -, m_2 -, m_3 -, ... stelligen Zahlen (etwa im Zehnersystem), die offenbar keine natürliche Dichte besitzt. Sie besitzt aber, soll gezeigt werden, die Dirichlet-Dichte

$$\lim_{s \rightarrow 1} (s - 1) \sum_{\mathfrak{P}} p^{-s} = h.$$

Die Iteration dieser konvergenzvernichtenden Transformation $\mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{P}$ liefert auch keine Dirichlet-Dichte mehr; sondern die Existenz der natürlichen Dichte für $\mathfrak{M}$ ist notwendig für die Existenz der Dirichlet-Dichte bei $\mathfrak{P}$.

Kiel-Kitzeberg.

ARNOLD SCHOLZ.

Lösung:

Die $m_1, m_2, m_3, \dots$ stetigen Zahlen mögen im Zahlssystem der Zahl $g > 1$ gebildet werden. Für $s > 1$ ist

$$\begin{aligned} \sum_{p=g^{m-1}}^{g^m-1} p^{-s} &> \int_{g^{m-1}}^{g^m} p^{-s} dp = \frac{g^{(m-1)(1-s)} - g^{m(1-s)}}{s-1} \\ &= \frac{x^{m-1} - x^m}{s-1} > \sum_{p=g^{m-1}}^{g^m-1} p^{-s} + g^{-ms} - g^{-(m-1)s}, \end{aligned}$$

wobei $x = g^{1-s}$ gesetzt wurde; also $x < 1$ für $s > 1$ und $x \rightarrow 1$ für $s \rightarrow 1$. Summiert man die Ungleichung über alle $m \in \mathbb{N}$, multipliziert mit $(s-1)$ und läßt $s \rightarrow 1$ gehen, so bleibt der rechts auftretende Ausdruck

$$\sum_{m \in \mathbb{N}} (g^{-ms} - g^{-(m-1)s}) \leq \sum_{m=0}^{\infty} 2g^{-m}$$

für $s \rightarrow 1$ beschränkt, also

$$(s-1) \sum_{m \in \mathbb{N}} (g^{-ms} - g^{-(m-1)s}) \rightarrow 0.$$

Die rechte und linke Seite streben also, falls überhaupt ein Limes existiert, demselben Grenzwert zu, und man erhält, falls eine Seite einen Sinn hat,

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 1} (s-1) \sum_{\mathbb{N}} p^{-s} &= \lim_{x \rightarrow 1} (s-1) \sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{x^{m-1} - x^m}{s-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \sum_{m=1}^{\infty} a_m x^{m-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^2 \sum_{m=1}^{\infty} s_m x^{m-1}, \end{aligned}$$

wobei

$$a_m = \begin{cases} 1 & \text{für } m \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$s_m = \sum_{\mu=1}^m a_{\mu}$$

gesetzt wurde. Die Aussagen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{m_n} = h \quad \text{und} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{s_m}{m} = h$$

sind äquivalent.

$$\text{I.} \quad \text{Aus } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{m_n} = h \quad \text{folgt} \quad \lim_{s \rightarrow 1} (s-1) \sum_{\mathbb{N}} p^{-s} = h.$$

Beweis (vgl. Hardy u. Littlewood, Proc. Lond. M. S., Ser. 2, Bd. 13, S. 174, wo das Hauptmoment des folgenden Beweises als bekannter Satz zitiert wird):

Aus der umgeformten Voraussetzung folgt, daß für jedes $\varepsilon > 0$ ein M existiert, so daß

$$(I) \quad |s_m - hm| < \varepsilon m \quad \text{für } m > M$$

ist. Wir müssen nur noch

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^2 \sum_{m=1}^{\infty} s_m x^{m-1} = h$$

zeigen. Da die endlich vielen s_m , für die (1) nicht gilt, auf das Konvergenzverhalten von (2) ohne Einfluß sind, dürfen wir die s_m so abändern, daß (1) für alle s_m gilt. Dann ist

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left| (1-x)^2 \sum_{m=1}^{\infty} s_m x^{m-1} - h \right| = \lim_{x \rightarrow 1} \left| (1-x)^2 \sum_{m=1}^{\infty} (s_m - hm) x^{m-1} \right| \leq \varepsilon,$$

q. e. d.

$$\text{II.} \quad \text{Aus } \lim_{s \rightarrow 1} \sum_{\mathfrak{p}} p^{-s} = h \quad \text{folgt} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{m_n} = h.$$

Beweis: Die Voraussetzung lautet umgeformt

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m x^m \sim \frac{h}{1-x} \quad \text{für} \quad x \rightarrow 1.$$

Wendet man nun einen Satz von Hardy und Littlewood an (l. c. S. 180, Theorem 8), indem man dort

$$A = h$$

$$\alpha = 1$$

$$L(u) = 1$$

setzt — für die Anwendung dieses Satzes macht es offenbar nichts aus, daß die a_m nicht, wie in der Voraussetzung von Hardy und Littlewood gefordert, positiv, sondern nur nichtnegativ sind —, so erhält man

$$s_m \sim hm \quad \text{für} \quad m \rightarrow \infty,$$

q. e. d.

Berlin.

ALFRED STÖHR.

(Eingegangen am 30. 12. 1936.)

Lösung der Aufgabe 220. (Dieser Jahresbericht 46 (1936), S. 3.)

Die Aufgabe lautete:

Es sei K eine geschlossene konvexe Kurve vom Umfange U . G sei eine Treffgerade von K ; mit φ_1 und φ_2 bezeichnen wir die Winkel, die die nach außen gerichteten Normalen in den Schnittpunkten von G und K mit den nach außen weisenden Teilen von G bilden. Es gilt dann

$$\int \left(\frac{1}{\cos \varphi_1} + \frac{1}{\cos \varphi_2} \right) G = \pi U,$$

wobei G die Dichte der Geraden G ist. Darstellungsformen derselben bei W. Blaschke, Vorlesungen über Integralgeometrie, erstes Heft, Leipzig und Berlin 1935, B. G. Teubner.

Entsprechendes gilt im Raum, wenn eine geschlossene konvexe Fläche F von der Oberfläche O vorgegeben wird. Bezeichnet man mit ϑ_1 und ϑ_2 die Winkel, die die nach außen weisenden Teile einer Treffgeraden G von F mit den ebenfalls nach außen gerichteten Normalen in den Schnittpunkten von F und G bilden, so kommt

$$\int \left(\frac{1}{\cos \vartheta_1} + \frac{1}{\cos \vartheta_2} \right) G = 2\pi O.$$

Dabei ist G die Dichte der Geraden G im Raume. Eine Darstellungsform dieser Dichte bei W. Blaschke, Integralgeometrie I, Actualités scientifiques 252, Paris 1935, Hermann.

Hamburg.

OTTO VARGA.

Lösung:

Die Lösung ergibt sich durch Integration der Formel (66) in W. Blaschke, Vorlesungen über Integralgeometrie, erstes Heft, 1935, S. 13, die sich in folgender Weise auf mehr Dimensionen verallgemeinern läßt: Sei $\mathfrak{x}(u, v)$ eine Fläche im dreidimensionalen Raum. Die Geradendichte ergibt sich nach W. Blaschke, Integralgeometrie I, Act. scient. 252, zu

$$\begin{aligned} G &= (\dot{\mathfrak{x}} a_2) (\dot{\mathfrak{x}} a_3) (\dot{a}_1 a_2) (\dot{a}_1 a_3) \\ &= (\dot{\mathfrak{x}} a_2) (\dot{\mathfrak{x}} a_3) d\omega(a_1). \end{aligned}$$

a_1 ist der Einheitsvektor in Richtung der Geraden, $d\omega(a_1)$ das von ihm bestrichene Flächenelement der Einheitskugel. Aus

$$\dot{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x}_u \cdot \dot{u} + \mathfrak{x}_v \cdot \dot{v}$$

ergibt sich unter Berücksichtigung des Alternierens

$$\begin{aligned} (\dot{\mathfrak{x}} a_2) (\dot{\mathfrak{x}} a_3) &= \dot{u} \dot{v} \begin{vmatrix} \mathfrak{x}_u a_2 & \mathfrak{x}_u a_3 \\ \mathfrak{x}_v a_2 & \mathfrak{x}_v a_3 \end{vmatrix} \\ &= \dot{u} \dot{v} (a_1, \mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v) (a_1, a_2, a_3) \\ &= \cos \vartheta \cdot d\omega. \end{aligned}$$

$d\omega$ ist das Flächenelement der Fläche $\mathfrak{x}$.

Also ist

$$G = \cos \vartheta \cdot d\omega \cdot d\omega.$$

Offenbar ergibt sich derselbe Ausdruck in n Dimensionen. Die Integration über $d\omega$ ist nur über die Halbkugel zu erstrecken, so daß man erhält

$$\int \left(\frac{1}{\cos \vartheta_1} + \frac{1}{\cos \vartheta_2} \right) \cdot G = \frac{\omega}{2} O,$$

wobei ω die Oberfläche der Einheitskugel bedeutet.

Freiburg i. Br.

H. GERIKE.

(Eingegangen am 27. 8. 1936.)

Lösung der Aufgabe 224. (Dieser Jahresbericht 46 (1936), S. 46.)

Die Aufgabe lautete:

$$\text{Sei} \quad F_n(x) = \sum_{v=0}^n \binom{2n-v}{v} \cdot x^v \quad (n \geq 1).$$

Es ist zu zeigen:

1. $F_n(x)$ ist dann und nur dann irreduzibel, wenn $2n+1$ eine Primzahl ist.
2. Für jedes n ist $F_n(x)$ Normalgleichung bzw. Produkt von Normalgleichungen.

Berlin.

ALFRED STÖHR.

Der in der Aufgabe gegebene Satz ist ein Sonderfall allgemeinerer Ergebnisse, die E. Jacobsthal in der Abhandlung „Fibonacci'sche Polynome und Kreisteilungsgleichungen“, Sitzungsberichte der Berliner Math. Ges. 17 (1918), S. 43—51 veröffentlicht hat. Lösungen gingen ein von den Herren F. Buser und E. Trost (Thalwil und Zürich), W. Gröbner (Colle Isarco (Gossensaß), Italien).

Lösung der Aufgabe 226. (Dieser Jahresbericht 46 (1936), S. 46.)

Die Aufgabe lautete:

Es seien K_1, K_2 zwei sich schneidende Kreisscheiben einer Ebene E ; G eine Gerade in E derart, daß durch Spiegelung von K_1 an G eine Kreisscheibe K_1^* entsteht, die K_2 wieder trifft. Alle solchen Geraden G bilden die Schnittgeraden einer Ellipse in E , die die Mittelpunkte der K_i zu Brennpunkten und die Summe der Halbmesser der K_i zur großen Achse hat. Entsprechend erhält man, wenn die Kreisscheiben keinen Punkt gemeinsam haben, die Treffgeraden einer Hyperbel.

Hamburg.

W. BLASCHKE.

Lösung:

Es ist klar, daß diejenigen Geraden G , für die K_1^* den Kreis K_2 von außen berührt, Tangenten an die gesuchte Figur sein müssen. Das Folgende bezieht sich auf diese Geraden.

Es werde in E ein kartesisches Koordinatensystem so gewählt, daß die Zentren von K_1 und K_2 in die Punkte $M_1(-d, 0)$ bzw. $M_2(+d, 0)$ fallen. Die Koordinaten der Mittelpunkte M_1^* genügen der Gleichung

$$(1) \quad (x-d)^2 + y^2 = (r_1 + r_2)^2.$$

G ist das Mittellot zu der Strecke $M_1 M_1^*$; ihr Mittelpunkt $P\left(\frac{x-d}{2}, \frac{y}{2}\right)$ genügt nach (1) der Gleichung

$$\left(\frac{x-d}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = \left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)^2.$$

Der Fußpunkt des Lotes von M_1 auf die Tangente liegt also auf einem Kreise, dem Hauptkreis der gesuchten Ellipse, wenn $2d < r_1 + r_2$; der gesuchten Hyperbel, wenn $2d > r_1 + r_2$.

Glarus (Schweiz).

WILLI LÜSSY.

(Eingegangen am 8. 9. 1936.)

Weitere Lösungen gingen ein von den Herren H. Baron (Berlin), W. Gröbner (Colle Isarco (Gossensaß), Italien), F. Gruber (Wien).

Lösung der Aufgabe 231. (Dieser Jahresbericht 46 (1936), S. 79.)

Die Aufgabe lautete:

Es sei F eine starr bewegliche, geschlossene konvexe Fläche. Wenn drei verschiedene Lagen von F nie mehr als zwei gemeinsame Punkte haben, so ist F eine Kugel.

Hamburg.

W. BLASCHKE.

Lösung:

ε sei eine Ebene, die a) F in der Kurve K schneidet,
b) F nicht halbiert.

Wir betrachten ein der konvexen Kurve K einbeschriebenes gleichseitiges Dreieck Δ_0 mit dem Mittelpunkt H , und eine dreizählige Raumdrehung D_0 , die das Dreieck Δ_0 in sich überführt. Ist A eine kongruente Abbildung des Raumes, so bezeichne $A(M)$ die Bildmenge einer Punktmenge M . Zunächst ist $F \equiv D_0(F) \equiv D_0^2(F)$; denn wären unter diesen drei Flächen zwei verschieden, so wären alle drei verschieden (Gruppeneigenschaft), hätten aber die drei Eckpunkte des Dreieckes Δ_0 gemeinsam, im Widerspruch mit der Voraussetzung des Satzes. Mit obiger Identität verbunden ist:

$$c) K \equiv D_0(K) \equiv D_0^2(K).$$

Es sei nun D eine beliebige Raumdrehung mit der invarianten Ebene ε und dem Fixpunkt H . Die beiden kongruenten Kurven K und $D(K)$ haben jedenfalls gemeinsame Punkte, da beide den Punkt H umschließen. Ist S ein solcher, so ist es auch $D_0(S)$ und $D_0^2(S)$, wie aus der dreizähligen Symmetrie c) folgt. Die genannten drei Punkte bilden das gleichseitige Dreieck Δ . Ist jetzt noch D_* eine zweizählige Raumdrehung um eine Höhe von Δ , so haben die drei Flächen $F, D(F), D_*(F)$ die drei Ecken von Δ gemeinsam. Zwei Flächen müssen also identisch sein. Wegen der Voraussetzung b) über die Ebene ε ist sowohl $F \equiv D_*(F)$ als auch $D(F) \equiv D_*(F)$ ausgeschlossen. Es bleibt also $F \equiv D(F)$ und damit folgt

$$d) K \equiv D(K);$$

K ist also ein Kreis!

Elementare Erzeugungen der Fläche F aus ebenen Schnitten, die allerdings so gewählt werden müssen, daß Schnitte, die gemäß Voraussetzung b) unzulässig sind, vermieden werden, liefern eine Kugel.

Anmerkung: Dieses Verfahren liefert auch den analogen, von T. Kubota in Tôhoku Math. J. Bd. 21 (1922) S. 21—25 bewiesenen Satz bezüglich einer ebenen konvexen Kurve.

Bern (Schweiz).

H. HADWIGER und W. SCHERRER.

(Eingegangen am 12. 2. 1937.)

Weitere Lösungen gingen ein von den Herren H. Bückner (Königsberg Pr.) und A. Rosenthal (Heidelberg).

Lösung der Aufgabe 237. (Dieser Jahresbericht 47 (1937), S. 1.)

Die Aufgabe lautete:

Man beweise die folgende Verschärfung des ersten Bieberbachschen Flächensatzes: Ist $f(z)$ in $|z| < 1$ regulär mit $f(0) = 0, f'(0) = 1$, so ist der Flächeninhalt des sternförmigen Kernes des Bildbereiches mindestens gleich π , und gleich π nur für $f(z) = z$. Unter dem sternförmigen Kern $\mathfrak{K}$ des Bildbereiches ist dabei der größte schlichte, sternförmige, $f(0)$ enthaltende Teilbereich der Riemannschen Fläche zu verstehen, auf die $|z| < 1$ durch $f(z)$ abgebildet wird.

Berlin.

H. GRUNSKY.

Lösung:

$w = f(z)$ sei zunächst noch auf $|z| = 1$ regulär vorausgesetzt; von dieser Voraussetzung kann man sich durch einen geeigneten Grenzübergang leicht befreien. Man setze

$$z = \varrho e^{i\vartheta}, \quad w = r e^{i\varphi}, \quad W = F(z) = \frac{f(z)}{z}, \quad W = R e^{i\Phi}.$$

Faßt man W als Funktion von w auf, so kann man das über den Rand von $\mathfrak{K}$ erstreckte Integral

$$I = \int \log R d\Phi = \int (\log r - \log \varrho) d(\varphi - \vartheta)$$

bilden. I stellt den Flächeninhalt des Bildbereiches dar, auf den $\mathfrak{K}$ durch $\log W(w)$ abgebildet wird, ist also nichtnegativ. Andererseits ist

$$(1) \quad I = \int \log r d\varphi - \int \log \varrho d\varphi - \int \log R d\vartheta.$$

Ferner ist nach der Cauchyschen Integralformel das Integral über den Rand des Originals von $\mathfrak{K}$ in der z -Ebene erstreckt:

$$\int \log F(z) d \log z = 2\pi i \log F(0) = 0.$$

Nimmt man links den Imaginärteil, so erhält man:

$$(2) \quad \int \log R d\vartheta = - \int \Phi d \log \varrho = \int \log \varrho d\Phi = \int \log \varrho d\varphi - \int \log \varrho d\vartheta.$$

Nun ist aber

$$(3) \quad \int \log \varrho \, d\varphi = 0,$$

denn der Rand von $\mathfrak{R}$ wird gebildet z. T. von Bogen, auf denen $\varrho = 1$ ist, z. T. von Strecken $\varphi = \text{const.}$ Ferner ist auf dem Rande $\mathfrak{R}$ überall $\varrho \leq 1$, so daß also

$$(4) \quad \int \log \varrho \, d\vartheta \leq 0.$$

(1), (2), (3), (4) ergeben zusammen mit $I \geq 0$:

$$(5) \quad \mathfrak{L} = \frac{1}{2\pi} \int \log r \, d\varphi \geq 0.$$

Nun ist der Flächeninhalt von $\mathfrak{R}$:

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{2} \int r^2 \, d\varphi.$$

Nach dem Satze vom arithmetischen und geometrischen Mittel und nach (5) ist

$$\mathfrak{D} \geq \pi \exp \frac{1}{2\pi} \int \log r^2 \, d\varphi = \pi \exp 2\mathfrak{L} \geq \pi,$$

w. z. b. w. $I = 0$ gilt nur wenn $F(z) = \text{const.}$, also wenn $f(z) = z$; also gilt nur dann $\mathfrak{D} = \pi$.

Man kann den Beweis leicht auch nach der Methode von Grötzsch und Ahlfors führen.

Berlin-Charlottenburg.

H. GRUNSKY.

(Eingegangen am 6. I. 1937.)

Zusatz vom 18. 3. 1938. Inzwischen haben Golusin (Rec. math. Moscou (2) 2 (1937), 617—619) und Bermant (C. R. Acad. Sci. URSS. (2) 18 (1938), 137—140) Be-
weise des Satzes veröffentlicht. Der von Golusin bedient sich der Methode von Grötzsch und Ahlfors, der von Bermant deckt sich mit dem vorstehend
wiedergegebenen.

H. GRUNSKY.

Lösung der Aufgabe 238. (Dieser Jahresbericht 47 (1937), S. I.)

Die Aufgabe lautete:

P_1, P_2, P_3, P_4 seien die Schnittpunkte der Kegelschnitte k und k' . Eine Gerade g durch P_4 schneide k in P_4 und P , k' in P_4 und P' ; O sei der Schnittpunkt der Tangente von k in P und der Tangente von k' in P' . Dann liegen die Punkte O, P, P', P_1, P_2 und P_3 auf einem Kegelschnitt l . Ist z. B. P_4 ein Schnittpunkt zweier Kreise k und k' , so ist auch l ein Kreis.

Rücken irgendwelche von den Schnittpunkten P_1, P_2, P_3, P_4 zusammen, so ergeben sich bekannte Sätze über Zentralkollineationen, die k in k' überführen.

Eisenstadt (Österreich).

F. HOHENBERG.

Lösung:

In dem von P_4 getragenen Strahlenbüschel werden den vier Strahlen $P_4P_1, P_4P_2, P_4P_3, P_4P$ durch k die vier Strahlen PP_1, PP_2, PP_3, PO und durch k' die vier Strahlen $P'P_1, P'P_2, P'P_3, P'O$ projektiv zugeordnet; mithin sind die Büschel $[P]$ und $[P']$ projektiv und erzeugen einen Kegelschnitt l durch die sechs Punkte P, P', P_1, P_2, P_3, O . Sind k und k' Kreise, so muß es auch l sein, da P_1 und P_2 die uneigentlichen Kreispunkte sind.

Berlin.

R. MÜLLER und U. GRAF.

(Eingegangen am 30. 9. 1937.)

Weitere Lösungen gingen ein von den Herren H. Baron (Berlin), F. Gruber (Wien), F. Hohenberg (Eisenstadt) (drei Lösungen), H. Neumann (München), K. Vanek (Wien) (zwei Lösungen), H. Toepken (Frankfurt a.M.).

Herr H. Neumann (München), dessen Lösung auf den Sätzen von Pascal und Brianchon beruhte, machte noch auf folgende Verallgemeinerung aufmerksam:

P_1, P_2, P_3, P_4 seien die Schnittpunkte der Kegelschnitte k und k' . Zwei Geraden g_1 und g_2 durch P_4 mögen k und k' noch in Q_1 und Q_1' , bzw. in Q_2 und Q_2' schneiden. O sei der Schnittpunkt von Q_1Q_2 und $Q_1'Q_2'$. Dann liegen $P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_1', O$ sowohl wie $P_1, P_2, P_3, Q_2, Q_2', O$ auf je einer Kurve zweiten Grades.

Diese Verallgemeinerung kann wie oben bewiesen werden.

Lösung der Aufgabe 240. (Dieser Jahresbericht 47 (1937), S. 1.)

Die Aufgabe lautete:

Eine zahlentheoretische Funktion $f(x, y)$ werde für ganzzahlige nicht-negative Argumente folgendermaßen eindeutig definiert:

1. Für $x = y = 0$ ist $f(x, y) = 0$,
2. sonst ist $f(x, y)$ die kleinste ganze Zahl ≥ 0 , die unter den Werten $f(0, y), f(1, y), \dots, f(x-1, y); f(x, 0), f(x, 1), \dots, f(x, y-1)$ fehlt.

Gesucht wird ein nichtrekurrentes Verfahren zur Berechnung von $f(x, y)$.

Berlin.

R. SPRAGUE.

1. Lösung:

Es sei im dyadischen Zahlensystem

$$x = a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + \dots + a_n \cdot 2^n \quad a_v = 0 \text{ oder } 1$$

$$y = b_0 + b_1 \cdot 2 + b_2 \cdot 2^2 + \dots + b_n \cdot 2^n \quad b_v = 0 \text{ oder } 1.$$

Es werde definiert

$$x \circ y = c_0 + c_1 \cdot 2 + c_2 \cdot 2^2 + \dots + c_n \cdot 2^n \quad c_v = 0 \text{ oder } 1,$$

wo $c_v \equiv a_v + b_v \pmod{2}$.Behauptung: $f(x, y) = x \circ y$.

Beweis: Es gelten die Regeln

$$(1) \quad x \circ x = 0; \quad x \circ y = y \circ x; \quad (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z).$$

$$\alpha) 0 \circ 0 = f(0, 0) = 0.$$

$\beta)$ Aus (I) folgt $(x \circ y) \circ y = x$, d. h. x ist durch $x \circ y$ und y eindeutig bestimmt. $x \circ y$ kommt also in der Reihe $0 \circ y, 1 \circ y, 2 \circ y, \dots, (x-1) \circ y$ (und ebenso in der Reihe $x \circ 0, x \circ 1, x \circ 2, \dots, x \circ (y-1)$) nicht vor.

$\gamma)$ Sei $0 \leq z < x \circ y$, $z = d_0 + d_1 \cdot 2 + \dots + d_n \cdot 2^n$ ($d_n = 0$ oder 1), $z \circ x \circ y = e_0 + e_1 \cdot 2 + \dots + e_r \cdot 2^r$ ($e_r = 0$ oder 1 , $e_r = 1$, $r \leq n$).

Wegen $z < x \circ y$ ist $d_r = 0$, $c_r = 1$. Also ist entweder $a_r = 1$, $b_r = 0$ oder $a_r = 0$, $b_r = 1$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte das erstere. Dann ist

$$z \circ y = (z \circ x \circ y) \circ x < x.$$

$z = (z \circ y) \circ y$ kommt also in der Reihe

$$0 \circ y, 1 \circ y, 2 \circ y, \dots, (x-1) \circ y$$

vor. (Dieselbe Überlegung ist bei der Theorie des sog. Nim-Spiels zu machen; s. dafür etwa die Bücher von Ahrens oder Kowalewski.)

Berlin.

ALFRED STÖHR.

(Eingegangen am 27. 4. 1937.)

2. Lösung:

Man kann $f(x, y)$ folgendermaßen berechnen: Man schreibt x und y im dyadischen Zahlssystem und „addiert“ sie mit folgenden Regeln:

$$0 + 0 = 1 + 1 = 0 \quad 1 + 0 = 0 + 1 = 1.$$

Das Resultat ist $f(x, y)$, im dyadischen Zahlssystem geschrieben.

Zum Beweis verschaffen wir uns eine Übersicht über die Funktionswerte. Wir schreiben sie in eine Matrix, in der x die Zeilennummer und y die Spaltennummer ist. Die Richtung der zunehmenden x heiße rechts und die Richtung der zunehmenden y heiße unten.

Nach Definition ist f eindeutig und, wie man sofort sieht, symmetrisch in x und y . Punkt z der Definition besagt, daß $f(x, y)$ die kleinste Zahl ≥ 0 ist, die in der gleichen Zeile links und in der gleichen Spalte oberhalb noch nicht steht.

Wir betrachten nun die quadratische Teilmatrix A_{n+1} , die in den ersten 2^{n+1} -Spalten und -Zeilen liegt, und zerlegen sie in quadratische Teilmatrizen der Zeilenzahl 2^n .

$$(I) \quad A_{n+1} = \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_n & A_n + (2^n) \\ A_n + (2^n) & A_n \end{pmatrix}.$$

Über die Teilmatrizen behaupten wir: B_n und C_n sind einander gleich und entstehen aus A_n durch Addition von 2^n zu jedem Element. D_n ist gleich A_n . A_n enthält in jeder Spalte und in jeder Zeile alle Werte von 0 bis $2^n - 1$.

Wir beweisen das durch Schluß von n auf $n+1$.

Da in jeder Zeile von A_n schon alle Werte von 0 bis $2^n - 1$ verbraucht werden, müssen alle Elemente von $B_n \geq 2^n$ sein. Bilden wir also aus B_n

eine Matrix A_n' indem wir von jedem Element 2^n abziehen, so enthält A_n' keine negativen Werte. Die Relationen des Kleinerseins und des Verschiedenseins werden durch Subtraktion einer festen Zahl nicht berührt. Daher genügt A_n' dem Punkt 2 der Definition. Es genügt aber auch der ersten Bedingung, weil in der linken oberen Ecke von B_n der Wert 2^n steht, nämlich die kleinste Zahl ≥ 0 , die unter den Zahlen $0, \dots, 2^n - 1$ fehlt. Da die Definition für f eindeutig ist, muß $A_n' = A_n$ sein. Ebenso beweist man die Behauptung über C_n .

Auch die Behauptung $D_n = A_n$ entspringt aus der Definition. Denn die Werte $< 2^n$ sind für D_n noch frei, da in den Matrizen B_n und C_n ja nur Werte $\geq 2^n$ vorkommen. Da f eindeutig definiert ist, muß also $D_n = A_n$ sein.

Man kann dem Bewiesenen die folgende Form geben:

$$\left. \begin{array}{l} (2) \quad f(2^n + a, b) = f(a, 2^n + b) = f(a, b) + 2^n \\ (3) \quad f(2^n + a, 2^n + b) = f(a, b) \end{array} \right\} \text{ für } 0 \leq a, b < 2^n.$$

Auf diese Weise könnte man $f(x, y)$ durch Rekursion berechnen. Schreibt man aber x und y im dyadischen Zahlensystem, so erkennt man jetzt sofort die Richtigkeit der anfangs erwähnten Berechnungsweise. Die Additionsregeln $1 + 0 = 0 + 1 = 1$ entsprechen der Formel (2). Die Regel $1 + 1 = 0$ entspricht der Formel (3). Wenn in der dyadischen Schreibweise eine Potenz von 2 überhaupt nicht auftritt, so kommt sie bei der Reduktion nicht vor. Dem entspricht die Additionsregel $0 + 0 = 0$.

Kennelbach (Vorarlberg).

GUSTAV LOCHS.

(Eingegangen am 7. 5. 1937.)

Weitere Lösungen gingen ein von den Herren A. van Heemert (Hilversum, Holland), W. Landherr (Rostock), P. Lorenzen (Göttingen), R. Sprague (Berlin), E. Trost (Zürich), H. Urban (Berlin).

Lösung der Aufgabe 244. (Dieser Jahresbericht 47 (1937), S. 3.)

Die Aufgabe lautete:

Man fällt von irgendeinem Punkte P der Ebene eines beliebigen Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ auf die Seiten a_j des Dreiecks die Lote PP_j , bezeichnet ferner im Fußpunktdreiecke $P_1 P_2 P_3$ die den Ecken P_j gegenüberliegenden Seiten mit p_j und verbindet endlich den Punkt P mit den Ecken A_j des Dreiecks durch die Strecken $PA_j = d_j, j = 1, 2, 3$. Versteht man unter ω den Brocardschen Winkel des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$, dann gilt

$$\left(\frac{d_1}{p_1}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{p_2}\right)^2 + \left(\frac{d_3}{p_3}\right)^2 = \operatorname{cosec}^2 \omega.$$

Bayreuth.

OSKAR DEGEL.

Lösung:

Das Viereck $A_1 P_3 P P_2$ hat bei A_1 den Dreieckswinkel α_1 und ist bei P_3 und P_2 rechtwinklig, ist also ein Sehnenviereck. Die Diagonale $A_1 P = d_1$ ist ein Durchmesser seines Umkreises. Wählt man auf dem Kreise einen Punkt B derart, daß Winkel $BA_1 P = \alpha_1$, so ist die Sehne

$BP = P_2P_3 = p_1$ und Winkel $A_1BP = \frac{\pi}{2}$. Also ist, unabhängig von der Lage des Punktes P ,

$$\frac{d_1}{p_1} = \frac{1}{\sin \alpha_1} = \operatorname{cosec} \alpha_1.$$

Entsprechendes gilt von α_2 und α_3 , weshalb

$$\text{I.} \quad \left(\frac{d_1}{p_1}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{p_2}\right)^2 + \left(\frac{d_3}{p_3}\right)^2 = \operatorname{cosec}^2 \alpha_1 + \operatorname{cosec}^2 \alpha_2 + \operatorname{cosec}^2 \alpha_3,$$

wiederum unabhängig von P .

Andererseits weiß man, daß für den Brocardschen Winkel ω die Beziehung gilt

$$\operatorname{ctg} \omega = \operatorname{ctg} \alpha_1 + \operatorname{ctg} \alpha_2 + \operatorname{ctg} \alpha_3$$

oder

$$\operatorname{ctg}^2 \omega = \operatorname{ctg}^2 \alpha_1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha_2 + \operatorname{ctg}^2 \alpha_3 + 2[\operatorname{ctg} \alpha_1 \operatorname{ctg} \alpha_2 + (\operatorname{ctg} \alpha_1 + \operatorname{ctg} \alpha_2) \operatorname{ctg} \alpha_3].$$

$$\text{Da} \quad \operatorname{ctg} \alpha_3 = -\operatorname{ctg} (\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{1 - \operatorname{ctg} \alpha_1 \operatorname{ctg} \alpha_2}{\operatorname{ctg} \alpha_1 + \operatorname{ctg} \alpha_2},$$

hat die eckige Klammer zur Rechten den Wert 1, und man erhält

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \omega = (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha_1) + (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha_2) + (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha_3)$$

oder

$$\text{II.} \quad \operatorname{cosec}^2 \omega = \operatorname{cosec}^2 \alpha_1 + \operatorname{cosec}^2 \alpha_2 + \operatorname{cosec}^2 \alpha_3.$$

Mit Rücksicht auf die Beziehung I. ist damit die Behauptung bewiesen.

Zollikon-Zürich.

ERNST VÖLLM.

(Eingegangen am 12. 2. 1937.)

Weitere Lösungen gingen ein von den Herren H. Baron (Berlin), L. Ehrlich (Berlin), F. Gruber (Wien), E. Trost (Zürich).

Lösung der Aufgabe 246. (Dieser Jahresbericht 47 (1937), S. 39.)

Die Aufgabe lautete:

Man gewinne die Koeffizienten der logarithmischen Potenzreihe unmittelbar aus der Umkehrung der Exponentialreihe durch Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten; ferner entsprechend die Entwicklungskoeffizienten des bei $x = 0$ regulären Umkehrelements von $x = ye^{-y}$.

Jena.

HERMANN SCHMIDT.

Lösung:

$$\text{Es sei} \quad x = 1 - e^{-y},$$

so daß für $y = 1, 2, \dots$

$$(I) \quad x^y = \sum_{\lambda=0}^y \binom{y}{\lambda} (-1)^\lambda e^{-x\lambda} = \sum_{\lambda=y}^{\infty} c_{y\lambda} y^\lambda$$

$$\text{mit} \quad c_{yy} = 1, c_{y\lambda} = \frac{(-1)^\lambda}{\lambda!} \sum_{x=1}^y (-1)^x \binom{y}{x} x^\lambda \quad (\lambda = y, y+1, \dots).$$

Setzt man zur Berechnung der unbekannten Koeffizienten u_ν der Umkehrreihe

$$(2) \quad y = \sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu x^\nu$$

(1) in (2) ein (also umgekehrt als üblich), so ergeben sich in den Unbekannten *lineare* Rekursionsformeln:

$$u_1 = 1, \quad \sum_{\nu=1}^{\lambda+1} u_\nu c_{\nu, \lambda+1} = 0 \quad (\lambda \geq 1),$$

somit

$$\begin{aligned} u_{\lambda+1} &= \frac{(-1)^\lambda}{(\lambda+1)!} \sum_{\nu=1}^{\lambda} u_\nu \sum_{\kappa=1}^{\nu} (-1)^\kappa \binom{\nu}{\kappa} \kappa^{\lambda+1} \\ &= \frac{(-1)^\lambda}{(\lambda+1)!} \sum_{\kappa=1}^{\lambda} (-1)^\kappa \kappa^\lambda \sum_{\nu=\kappa}^{\lambda} \kappa \binom{\nu}{\kappa} u_\nu. \end{aligned}$$

Nimmt man nun induktiv an, es sei $u_\nu = \frac{1}{\nu}$ für $1 \leq \nu \leq \lambda$ (was für $\lambda = 1$ richtig ist), so folgt auf Grund einer bekannten Beziehung für Binomialkoeffizienten

$$u_{\lambda+1} = \frac{1}{(\lambda+1)!} \sum_{\kappa=1}^{\lambda} (-1)^{\lambda-\kappa} \binom{\lambda}{\kappa} \kappa^\lambda = \frac{\Delta^\lambda v_0}{(\lambda+1)!}.$$

Dabei bezeichnet $\Delta^\lambda v_\kappa$ die λ -te Differenzenfolge der Folge $v_\kappa = \kappa^\lambda$ ($\kappa = 0, 1, 2, \dots$; λ fest ≥ 1 , insbesondere $\Delta v_\kappa = v_{\kappa+1} - v_\kappa$). Es ist daher $\Delta^\lambda v_0 = \lambda!$, $u_{\lambda+1} = \frac{1}{\lambda+1}$, w. z. b. w.

Für $x = ye^{-y}$ wird noch einfacher $c_{\nu, \lambda} = \frac{(-1)^{\lambda-\nu} \nu^{\lambda-\nu}}{(\lambda-\nu)!}$, und daher reduziert sich $\sum_{\nu=1}^{\lambda+1} u_\nu c_{\nu, \lambda+1}$ für $u_\nu = \frac{\nu^{\nu-1}}{\nu!}$ auf $\frac{\Delta^{\lambda+1} v_0}{(\lambda+1)!} = 0$ ($\lambda \geq 1$).

Jena.

HERMANN SCHMIDT.

(Eingegangen am 11. 2. 37.)

Lösung der Aufgabe 247. (Dieser Jahresbericht 47 (1937), S. 39.)

Die Aufgabe lautete:

$\mathfrak{s}$ bezeichne das offene Intervall $(0, 1)$, $\bar{\mathfrak{s}}$ das abgeschlossene. Es sei $g(x)$ in $\bar{\mathfrak{s}}$ stetig und positiv, an der Stelle $x = 1$ analytisch; ferner nehme $f(x) = (1-x)^\alpha g(x)$ auf $\mathfrak{s}$ monoton ab ($\alpha \geq 0$); falls $\alpha = 0$, möge $f(1) < 1$ sein. Man soll die in $\mathfrak{s}$ gelegene Lösung von

$$(A) \quad x^n = f(x)$$

für $n \rightarrow \infty$ asymptotisch entwickeln ($n > 0$, nicht notwendig ganz).
Beispiele: $x^n = 1 - x$; $x^{n+1} = \sin \pi x$.

Jena.

HERMANN SCHMIDT.

Lösung:

Daß es genau eine Lösung x_n der gesuchten Art gibt, ist auf Grund der Voraussetzungen unmittelbar klar. Zu ihrer asymptotischen Darstellung setzen wir in $0 < u < 1$

$$\psi_n(u) = \frac{f(1-u)}{(1-u)^n}.$$

Es wird dann mit den Bezeichnungen

$$\gamma = \lg g(1), \quad h(u) = \frac{g(1-u) - g(1)}{g(1)}$$

$$(1) \quad \frac{\lg \psi_n(u)}{n} = \lg(1-u)^{-1} + \frac{\alpha}{n} \lg n + \frac{\gamma}{n} + \frac{1}{n} \lg(1+h(u)).$$

Für $\alpha = 0$ hat diese Funktion, sobald n groß genug ist, eine Nullstelle mit der konvergenten Potenzreihenentwicklung

$$u_n = -\frac{\gamma}{n} + \frac{\gamma'}{n^2} + \dots,$$

wegen $\gamma < 0$ liegt $1 - u_n$ für hinreichend großes n in $\mathfrak{B}$, ist also $= x_n$.

Für $\alpha > 0$ setzen wir zur Abkürzung

$$(2) \quad \frac{\alpha}{n} = t,$$

und führen $u = t \lg \frac{1}{t} (1+v)$ ein, was für $0 < t < \delta$, $-\varepsilon < v < +\varepsilon$ sicher zulässig ist, da dann $0 < u < 1$ ausfällt. Dann wird

$$\begin{aligned} \frac{\lg \psi_n(u)}{n} = t \lg \frac{1}{t} \left\{ v + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(t \lg \frac{1}{t} \right)^{\nu} \frac{(1+v)^{\nu}}{\nu+1} + \frac{\lg_2 \frac{1}{t} + \lg(1+v) + \frac{\gamma}{\alpha}}{\lg \frac{1}{t}} \right. \\ \left. + \frac{1}{\alpha \lg \frac{1}{t}} \lg[1 + h(t \lg \frac{1}{t} (1+v))] \right\} \quad (\lg_2 = \lg \lg). \end{aligned}$$

Nun wird geeignete $\delta_j > 0$ ($j = 0, 1, 2$), $\eta > 0$ die folgende Funktion der komplexen Veränderlichen z_j , v in $|z_j| < \delta_j$, $|v| < \eta$ ($\leq \varepsilon$) regulär sein:

$$(3) \quad F(z_0, z_1, z_2; v) = v + \frac{\gamma}{\alpha} z_1 + z_2 + z_1 \lg(1-v) + \frac{z_1}{\alpha} \lg[1 + h(z_0(1+v))] + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z_0^{\nu} (1+v)^{\nu}}{\nu+1};$$

es ist ja $h(w)$ bei $w = 0$ regulär, $h(0) = 0$ (der Logarithmus sei als Hauptwert festgelegt).

Wählt man daher $\delta_j' \leq \delta_j$, $\eta' \leq \eta$ geeignet, so hat zu jedem Wertsystem z_j mit $|z_j| < \delta_j'$ die Gleichung $F = 0$ genau eine Auflösung v mit $|v| < \eta'$, und diese wird durch die konvergente Potenzreihe mit reellen Koeffizienten dargestellt:

$$(4) \quad v = \mathfrak{P}_0(z_1, z_2) + \sum_{\nu=1}^{\infty} z_0^{\nu} \mathfrak{P}_{\nu}(z_1, z_2) \quad (\mathfrak{P}_0(0, 0) = 0).$$

Falls $t < \delta^* (\leq \delta)$ dürfen hier die (reellen) Werte

$$(5) \quad z_0 = t \lg \frac{1}{t}, \quad z_1 = \frac{1}{\lg \frac{1}{t}}, \quad z_2 = \frac{\lg_2 \frac{1}{t}}{\lg \frac{1}{t}}$$

eingetragen werden, und dadurch geht vermöge (2) eine reelle Lösung

$$x = 1 - t \lg \frac{1}{t} (1 + v)$$

von (A) hervor, die sicher in $\mathfrak{s}$ liegt, also mit x_n übereinstimmt. Die Potenzreihendarstellung (4) erzeugt nun eine asymptotische Darstellung: die Potenzprodukte

$$z_1^\lambda t_2^{x-\lambda} = \frac{\left(\lg_2 \frac{1}{t}\right)^{x-\lambda}}{\left(\lg \frac{1}{t}\right)^x} = \varphi_\nu(t) \left\{ 0 \leq \nu = \frac{x(x+1)}{2} + \lambda; 0 \leq \lambda \leq x \right\}$$

bilden für $t \rightarrow +0$ eine Skala („mit Multiplikation“¹⁾). Aus (4) folgt sofort durch Abschätzung der Summe, daß bei beliebigem k für $t \rightarrow +0$

$$(6) \quad v = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \varphi_\nu(t) + o(\varphi_k(t)),$$

wo die a_ν durch die Potenzreihe geliefert werden (insbesondere ist $a_1 = -1$, $a_2 = -\frac{\gamma}{\alpha}$). Die (konvergente) Reihe in (5) ist aber auch asymptotisch; zum Nachweis genügt es, den Rest $R_K \left(K = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \right)$ nach Berücksichtigung aller Glieder einer Dimension $\leq k$ in z_1, z_2 abzuschätzen²⁾; unter Benutzung der Cauchyschen Koeffizientenabschätzung für Funktionen mehrerer Veränderlicher folgt aber sofort, etwa für $|z_j| \leq \frac{\delta_{j'}}{2}$,
 $|R_K| \leq \eta' \left(\frac{|z_1|}{\delta_1'} + \frac{|z_2|}{\delta_2'} \right)^{k+1} : \left(1 - \left(\frac{|z_1|}{\delta_1'} + \frac{|z_2|}{\delta_2'} \right) \right) = o(\varphi_K(t))$ bei Berücksichtigung von (5).

Damit hat man für x_n die asymptotische Reihe

$$x_n \sim 1 - \frac{\alpha}{n} \lg \frac{n}{\alpha} + \frac{\alpha}{n} \lg_2 \frac{n}{\alpha} + \frac{\gamma}{n} + \dots$$

mit der Skala $\psi_{\nu+1} = \frac{\alpha}{n} \lg \frac{n}{\alpha} \varphi_\nu \left(\frac{\alpha}{n} \right)$; $\psi_0 = 1$. Die Reihe ist sogar konvergent aber nicht notwendig gegen x_n . — Wie der Fall $\alpha = 0$ zeigt, erklärt sich das Auftreten der logarithmischen Skala nicht etwa durch das exponentielle Auftreten von n in (A); die Annäherung der Wurzel an 1 verzögert sich vielmehr auf Grund von $\alpha > 0$ gegenüber der Größenordnung $1/n$.

Jena.

HERMANN SCHMIDT.

(Eingegangen am 11. 2. 1937.)

1) Vgl. z. B. a) J. B. D. M. V. 44 (1934), S. 50; b) Math. Ann. 113 (1937), 637 ff.
 2) Vgl. z. B. b), S. 633 oben.