Werk

Titel: Notizen.

Jahr: 1938

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?37721857X_0048|log24

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Notizen.

Beweis, daß beim Duffingschen Schwingungsproblem die freien Pendelschwingungen nicht Verzweigungslösungen sein können.

Von K. LACHMANN in Berlin.

Das von Herrn Iglisch behandelte Problem[1]) kann mit Hilfe elliptischer Funktionen untersucht werden.

Für die Lösungen der Gleichung

$$\ddot{x}(t) + \alpha^2 \sin x(t) = 0, \tag{1}$$

welche für $t = 0$ und $t > 0$ verschwinden, ist — abgesehen von $x \equiv 0$ —

$$\dot{x}(t) = 2\alpha k \operatorname{cn} \alpha t \quad \text{mit} \quad 0 < k^2 < 1 \tag{2}$$

und

$$\alpha t_n = 2nK \quad \text{mit} \quad K > \frac{\pi}{2} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{3}$$

wenn t_n die n-te Nullstelle von (1) und K das vollständige elliptische Integral erster Gattung ist.

Aus (1) folgt durch Ableiten

$$\dddot{x}(t) + \alpha^2 \cos x(t) \cdot \dot{x} = 0, \tag{4}$$

folglich genügt mit (2)

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{2\alpha k} \dot{x}(t) = \operatorname{cn} \alpha t \tag{5}$$

der Gleichung

$$\ddot{\varphi}(t) + \alpha^2 \cos x(t) \cdot \varphi(t) = 0 \tag{6}$$

mit den Anfangswerten

$$t = 0; \quad \varphi_1 = 1; \quad \dot{\varphi}_1 = 0. \tag{7}$$

Die Lösung $\varphi_2(t)$ von (6) mit den Anfangswerten

$$t = 0; \quad \varphi_2 = 0; \quad \dot{\varphi}_2 = 1 \tag{8}$$

ist daher

$$\varphi_2(t) = \varphi_1(t) \int_0^t \frac{dt}{\varphi_1^2(t)} = \operatorname{cn} \alpha t \int_0^t \frac{dt}{\operatorname{cn}^2 \alpha t}. \tag{9}$$

Mit

$$E(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi = \int_0^u dn^2 u\, du = \operatorname{el} u \tag{10}$$

und

$$k'^2 \int_0^u \frac{du}{\operatorname{cn}^2 u} = \frac{\operatorname{sn} u\, dn\, u}{\operatorname{cn} u} - \operatorname{el} u + k'^2 u; \quad k'^2 = 1 - k^2 \tag{11}$$

wird

$$\varphi_2(t) = \frac{1}{\alpha k'^2} (\operatorname{sn} \alpha t \operatorname{dn} \alpha t - \operatorname{el} \alpha t \operatorname{cn} \alpha t) + t \operatorname{cn} \alpha t. \tag{12}$$

1) Jahresber. d. D. M. V. 45, 131—132.

Diese Gleichung ist die Lösung der zu (1) gehörenden Jacobischen Gleichung (6) mit den Anfangsbedingungen (8), aus der die von Herrn Iglisch durch Abschätzen gefundenen Ergebnisse ohne Mühe gewonnen werden können.

Mit

$$(13)\quad \alpha\,\varphi_2\Big(\frac{(2m+1)K}{\alpha}\Big) = \frac{(-1)^m}{k'};\quad \alpha\,\varphi_2\Big(\frac{2mK}{\alpha}\Big) = \frac{2m(-1)^{m+1}}{k'^2}(E - k'^2_1 K)$$

und

$$(14)\qquad 0 < E - k'^2 K < 1 \quad \text{für} \quad 0 < k^2 < 1$$

wird

$$(15)\quad \begin{cases} \varphi_2\Big(\frac{(4m+1)K}{\alpha}\Big) > 0;\quad \varphi_2\Big(\frac{(4m+2)K}{\alpha}\Big) > 0;\quad \varphi_2\Big(\frac{(4m+3)K}{\alpha}\Big) < 0 \\ \text{und}\quad \varphi_2\Big(\frac{(4m+4)K}{\alpha}\Big) < 0. \end{cases}$$

Nun trennen sich aber die Nullstellen von $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ gegenseitig und $\varphi_1(t) = \operatorname{cn}\alpha t$ hat die n-te Nullstelle $\frac{2n-1}{\alpha}K$ und die $(n+1)$-te $\frac{2n+1}{\alpha}K$. Folglich gilt für die n-te Nullstelle τ_n von $\varphi_2(t)$

$$(16)\qquad \frac{2n-1}{\alpha}K < \tau_n < \frac{2n+1}{\alpha}K$$

und, da $\varphi_2\Big(\frac{(2n-1)K}{\alpha}\Big)$ und $\varphi_2\Big(\frac{2nK}{\alpha}\Big)$ nach (15) dasselbe, $\varphi_2\Big(\frac{2nK}{\alpha}\Big)$ und $\varphi_2\Big(\frac{(2n+1)K}{\alpha}\Big)$ verschiedenes Vorzeichen haben,

$$(17)\qquad \frac{2n}{\alpha}K < \tau_n < \frac{2n+1}{\alpha}K$$

oder mit (3)

$$(18)\qquad t_n < \tau_n < t_n + \frac{t_1}{2}.$$

(Eingegangen am 12. 1. 1938.)

Eine Bemerkung zur numerischen Berechnung von Determinanten und Inversen von Matrizen.

Von B. L. van der Waerden.

Aus einer Abhandlung von T. Banachiewicz[1]) entnehme ich die folgende Matrixidentität, die wohl wert ist, allgemein bekannt zu werden:

$$(1)\qquad \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & B_1 \\ 0 & D_1 \end{pmatrix}, \qquad (I = \text{Einheitsmatrix})$$

mit $B_1 = A^{-1}B$ und $D_1 = D - CB_1 = D - CA^{-1}B$.

Herr Banachiewicz verwendet statt der Matrixbezeichnung die damit gleichwertige Theorie der „Krakoviane". Die Identität kann benutzt werden:

1) T. Banachiewicz, Zur Berechnung der Determinanten wie auch der Inversen, und zur darauf basierten Auflösung der Systeme linearer Gleichungen. Acta Astronomica 3 (1937) 41—67.