

Werk

Titel: Aufgaben und Lösungen.

Jahr: 1935

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?37721857X_0045|log39

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

Aufgaben und Lösungen.

Aufgaben.

196. Die Summe der Abstände eines beliebigen Punktes in der Ebene eines Dreiecks von den drei Ecken ist mindestens gleich dem sechsfachen Inkreisradius. Gleichheit besteht nur für den Mittelpunkt des gleichseitigen Dreiecks.

Breslau.

M. SCHREIBER.

(Eingegangen am 16. 12. 1934.)

197. Für $|\Re(u)| < \frac{1}{2}$ bleibe $\Gamma(u) = \frac{1}{u} + O(1)$

und für $u \neq 0(1)$ gelte $\Gamma(u) = \frac{1}{u} \Gamma(u+1)$.

Beide Bedingungen zusammen kennzeichnen eine analytische Lösung.

Lafayette (Indiana).

WILHELM MAIER.

Math. Dept. Purdue Univ.

(Eingegangen am 1. 3. 1935.)

198. Wählt man $\left| \frac{a}{b} \right| = 1$, $\left| \arg \frac{a}{b} \right| < \pi$, $0 < \Re(\lambda)$ und eine in ν analytische Funktion $g(\nu)$ so, daß die Reihe

$$\sum_{\pm \infty}^{\equiv x(1)} a^\nu b^{\lambda-\nu} g(\nu) g(\lambda-\nu)$$

konvergiert, so läßt der quadratische Additionssatz

$$\sum_{\pm \infty}^{\equiv x(1)} a^\nu b^{\lambda-\nu} g(\nu) g(\lambda-\nu) = (a+b)^\lambda g(\lambda)$$

mit dem Anfangswert $g(1) = 1$ und $\lim_{\nu \rightarrow \infty} g(\nu) = \infty$ für $|\Im(u)| \rightarrow \infty$ nur eine Lösung zu:

$$g(u) = \frac{1}{\Gamma(1+u)}.$$

Lafayette (Indiana).

WILHELM MAIER.

Math. Dept. Purdue Univ.

(Eingegangen am 1. 3. 1935.)

199. In der Euklidischen Ebene sei E ein Eibereich. df_i ; $i = 1, 2, 3$ seien drei Flächenelemente in E und D der Durchmesser des Kreises durch sie. Dann gilt

$$\int_E \int_E \int_E \frac{1}{D^3} \cdot df_1 \cdot df_2 \cdot df_3 = L^3,$$

worin L den Umfang von E bedeutet.

Hamburg.

WILHELM BLASCHKE.

(Eingegangen am 28. 3. 1935.)

200. Es sei F eine Eifläche (= geschlossene konvexe Fläche), $L(\xi)$ die Länge ihrer Schattengrenze bei Parallelbeleuchtung in Richtung des Einheitsvektors ξ , $d\omega_\xi$ das Flächenelement der Einheitskugel K und

$$\bar{L} = \frac{1}{4\pi} \int_K L(\xi) d\omega_\xi$$

die mittlere Länge der Schattengrenzen von F . Sind R_i die Hauptkrümmungshalbmesser von F in einem Punkt mit der äußeren Normalen ξ und bedeutet $u(R_1, R_2)$ den Umfang einer Ellipse mit den Halbachsen R_i , so gilt

$$\bar{L} = \frac{1}{4\pi} \int_K u(R_1, R_2) d\omega_\xi.$$

Hamburg.

WILHELM BLASCHKE.

(Eingegangen am 10. 5. 1935.)

201. Es sei C eine geschlossene, konvexe Kurve und P ein Punkt innerhalb oder am Rande des von C begrenzten konvexen Bereiches. Der Radius der konvexen Kurve C werde durch das Maximum der folgenden Funktion definiert:

$$u(P) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r_P(\varphi) d\varphi,$$

wo r_P die Entfernung des Punktes P von einem auf C laufenden Punkt Q bedeutet, und wo r eine Funktion des Winkels ist, den PQ mit einer gegebenen Richtung bildet. Für welche Kurven unter allen geschlossenen und konvexen Kurven mit vorgeschriebenem Flächeninhalt bzw. Umfang nimmt dieser Radius extreme Werte an?

Szeged (Ungarn).

STEPHAN VINCZE.

(Eingegangen am 1. 4. 1935.)

202. Es sei $f(z)$ in $|z| = \varrho < 1$ regulär, $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$, $f(z) \neq 0$ für $0 < |z| < 1$, $0 < r < 1$. Dann gilt für jeden Zweig des log

$$\frac{1}{\pi r^2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\varrho=0}^r |\log f(\varrho e^{i\varphi})|^2 \varrho d\varrho d\varphi \geq \frac{\pi^2}{3} - 1.$$

Ahmadabad (Br.-Indien).

V. LEVIN.

(Eingegangen am 21. 5. 1935.)

Lösungen.

Lösung der Aufgabe 133 (Dieser Jahresbericht Bd. 42, S. 2).

Die Aufgabe lautete:

Ist A das Produkt einer symmetrischen und einer schief-symmetrischen Matrix, so ist zugleich mit k auch $-k$ ein Eigenwert von A . Der Satz, der nicht nur das Routhsche Lemma über die Eigenfrequenzen linearer stationärer Hamiltonscher Systeme, sondern auch seine Birkhoffsche Übertragung auf Pfaffsche Systeme enthält, kann ohne jede Rechnung (Integralinvarianten oder dergleichen) bewiesen werden. — Sind die Elementarteiler von A stets einfach?

Baltimore.

A. WINTNER.

Lösung.

Die Elementarteiler von A sind nicht stets einfach, wie aus dem folgenden Beispiel hervorgeht. Die Matrix

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

ist das Produkt der symmetrischen Matrix A_1 und der schief-symmetrischen Matrix A_2 , wo

$$A_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad A_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Die charakteristische Determinante von A ist durch $(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)^2$ teilbar; der größte gemeinschaftliche Teiler der ersten Minoren ist 1. Die den Eigenwerten 1 und -1 entsprechenden Elementarteiler sind also $(\lambda - 1)^2$ und $(\lambda + 1)^2$; sie sind nicht einfach.

In meiner Arbeit *Die linearen Komplexe in der nicht-Euklidischen Geometrie* (Proc. Kon. Ak. Amsterdam, vol. XXXV, S. 507–521, 682–693, 1932) handelt es sich um die Eigenschaften der linearen Komplexe im R_{2n-1} , wo mittels einer quadratischen Varietät Q eine Cayley-Metrik eingeführt ist. Bei der Klassifikation der nicht-speziellen Komplexe ist dabei von Bedeutung diejenige Kollineation des Raumes, welche aus der Multiplikation der Polkorrelation Q und der Nullkorrelation des Komplexes hervorgeht. Die Matrix A dieser Kollineation ist also das Produkt einer symmetrischen und einer schief-symmetrischen Matrix (welche beide als nicht-singulär vorausgesetzt sind). Es wird dann nicht nur gezeigt, daß zugleich mit k auch $-k$ ein Eigenwert von A ist, sondern auch, daß die zwei Reihen von Elementarteilern, welche diesen Eigenwerten entsprechen, dieselben Exponenten haben. Ich habe weiter bewiesen, daß diese Eigen-

schaft genügt, um die Matrizen A vollständig zu charakterisieren. Ich zeigte nämlich, daß A immer äquivalent ist mit einer Matrix A^* des folgenden Typus

$$A^* = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{nn} & -a_{n-1,n} & \dots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n,n-1} & -a_{n-1,n-1} & \dots & -a_{1,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n1} & -a_{n-1,1} & \dots & -a_{11} \end{vmatrix}$$

und daß auch umgekehrt jede nicht-singuläre Matrix A^* mit willkürlichen Elementen a_{ij} eine Matrix A ist. Die Elementarteiler von A^* sind diejenigen der Matrix n -ter Ordnung $\|a_{ij}\|$ zusammen mit denjenigen der Matrix $\|-a_{ij}\|$. Man kann also immer Matrizen A^* mit den Eigenwerten $k_1, k_2, \dots, k_v; -k_1, -k_2, -k_v$ angeben, wobei die Eigenwerte k_i vorgeschriebene Elementarteiler besitzen und die Eigenwerte $-k_i$ solche, welche mit denen von k_i übereinstimmen.

Sappemeer (Niederlande).

O. BOTTEMA.

(Eingegangen am 27. II. 1934.)

Lösung der Aufgabe 176 (Dieser Jahresbericht Bd. 44, S. 69).

Die Aufgabe lautete:

Kann man eine Anordnungstafel aus 43 „Punkten“ und 43 „Geraden“ bilden, die folgenden Bedingungen genügt: Auf jeder „Geraden“ liegen 7 „Punkte“; durch jeden „Punkt“ gehen 7 „Geraden“; 2 verschiedene „Punkte“ bestimmen eine und nur eine „Gerade“ und 2 „Geraden“ haben stets einen und nur einen „Punkt“ gemein?

Mannheim.

W. HEUSER.

Lösung:

Die verlangte Figur enthält Lösungen des Eulerschen Problems der 36 Offiziere, ist also unmöglich.

Beweis: Man zeichne eine Gerade und ihre sieben Punkte als „unendlich fern“ aus. Die übrige Figur besteht dann aus 7 Scharen von je 6 parallelen Geraden und 36 Punkten (den „Offizieren“), so daß jeder Punkt mit genau einer Geraden aus jeder Schar inzident ist. Je vier Scharen liefern aber schon eine Lösung des Eulerschen Problems, wenn man durch die Geraden der beiden ersten Scharen die Ortskoordinaten, durch die der dritten die Regimentsnummer und durch die der vierten Schar den Dienstgrad des „Offiziers“ bestimmt.

Leipzig.

FRIEDRICH LEVI.

(Eingegangen am 1. 2. 1935.)