Werk

Titel: Aufgaben und Lösungen.

Jahr: 1935

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?37721857X_0045|log36

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Der mathematische Unterricht der höheren Schule wird die ihm gestellten Aufgaben erfüllen, wenn ihm eine genügende (auch in den oberen Klassen des Gymnasiums nicht unter ein gewisses Mindestmaß herabgehende) Anzahl von Stunden zugebilligt wird. Eine solche Berücksichtigung der Mathematik muß man für alle Arten höherer Schulen schon deshalb fordern, weil die ernste wirtschaftliche Lage unseres Volkes gebieterisch von uns verlangt, die Beherrschung der Naturkräfte, die Ausnutzung der Bodenschätze, überhaupt jeden Fortschritt in der Technik, soweit wie irgend möglich zu treiben. Das ist aber nur möglich, wenn unser Nachwuchs gründlich mathematisch vorgebildet wird.

Aufgaben und Lösungen.

Aufgaben.

183. Es sei r ganzzahlig > 1, p bedeute eine Primzahl γ die Eulersche Konstante; dann ist

$$\text{(1)} \qquad \prod_{n=1}^{r-1}{}' \Gamma\left(\frac{n}{r}\right) = e^{\frac{1}{2}\varphi(r)\log 2\pi - \frac{1}{2}\Lambda(r)} = (2\pi)^{\frac{1}{2}\varphi(r)} \cdot e^{-\frac{1}{2}\Lambda(r)},$$

$$\text{(2a)} \qquad p^p = e^{-\gamma(p-1) - \sum_{1}^{p-1} \frac{\Gamma'\left(\frac{n}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{p}\right)}},$$

$$\text{(2b)} \qquad \sum_{p \mid r} \frac{\log p}{p-1} = -\log r - \gamma - \frac{1}{\varphi(r)} \sum_{1}^{r-1}{}' \frac{\Gamma'\left(\frac{n}{r}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{r}\right)}.$$

Hierbei bedeutet der Strich in dem Produkt der linken Seite von (1) und in der Summe der rechten Seite von (2a, b), daß n nur die zu p bzw. r teilerfremden Zahlen durchläuft, $\Lambda(r)$ in (1) ist $= \log p$, falls r eine Potenz einer Primzahl p ist, sonst $= 0$ (wie bei Landau, Handbuch, S. 125).

Breslau. Dr. H. Kober.

(Eingegangen am 30. 10. 1933.)

184. Es seien a und n beliebige ganze Zahlen, $n \geqq 1$. Dann ist die Kongruenz

$$x_1^n + x_2^n + \cdots + x_n^n \equiv a \pmod{p}$$

für alle Primzahlen p lösbar.

Uppsala. Trygve Nagell.

(Eingegangen am 9. 1. 1934.)

185. Eine Eilinie $\mathfrak{E}$ besitze die folgende Eigenschaft: Für irgend ein umschriebenes Dreieck ABC, dessen Seiten BC, CA, AB Stützgeraden in den Punkten D, E, F der Eilinie $\mathfrak{E}$ sind, schneiden sich die Verbindungslinien AD, BE, CF in ein und demselben Punkt.

Dann muß diese Eilinie $\mathfrak{E}$ notwendig eine Ellipse sein. Also ist diese Eigenschaft für die Ellipse kennzeichnend.

Der duale Satz gibt auch eine kennzeichnende Eigenschaft der Ellipse.

Sendai (Japan) T. Kubota.

(Eingegangen am 6. 3. 1934.)

186. Der Aiyarsche Satz (Vgl. T. Kubota, Tôhoku Math. Journ. 35 und 37) lautet:

„Es seien D, E, F die Mittelpunkte der Seiten BC, CA, AB des Dreiecks ABC, LL' irgendeine Gerade und Ap, Bq, Cr die von den Ecken A, B, C auf LL' gefällten Lote. Dann gibt es einen durch q, r gehenden Kreis X mit dem Mittelpunkt D, einen durch r, p gehenden Kreis Y mit dem Mittelpunkt E, und einen durch p, q gehenden Kreis Z mit dem Mittelpunkt F. Derjenige Kreis Σ, der die drei Kreise X, Y, Z orthogonal schneidet, wird als orthopolarer Kreis der Geraden LL' in bezug auf das Dreieck ABC bezeichnet. Die von p, q, r auf BC, CA, AB gefällten Lote schneiden sich in einem Punkte, dem Orthopole (nach Neuberg) von LL' in bezug auf das Dreieck. Er ist, wie leicht ersichtlich, der Mittelpunkt von Σ. Dann gilt: Ist K irgendein dem Dreieck ABC einbeschriebener Kegelschnitt und K' ein zu ihm konfokaler, LL' berührender Kegelschnitt, so schneidet der orthoptische Kreis von K und K' den orthopolaren Kreis von LL' orthogonal.

Aus diesem Satz kann man unmittelbar die folgenden bekannten Sätze folgern:

Satz von Neuberg: die beiden Simsonschen Geraden des Indreiecks ABC eines Kreises K in bezug auf zwei Punkte P, Q auf K schneiden sich im Neubergschen Orthopole der Geraden PQ.

Satz von Lemoyne (gewöhnlicher Beweis ist umständlich). Es seien ein Dreieck ABC und eine Gerade l gegeben. Dann hat der Fußpunktkreis von einem Punkte P der Geraden l in bezug auf den Neubergschen Orthopol von l eine konstante Potenz. (Gallatly, Modern Geometry of the Triangle.)

Sendai (Japan). T. Kubota

(Eingegangen am 6. 3. 1934.)

187. Es sei M eine dreidimensionale geschlossene Mannigfaltigkeit; der simpliziale Komplex M' sei durch baryzentrische Unterteilung („Normalunterteilung") einer Zellenzerlegung von M entstanden, und K^1 sei der Komplex aller Kanten von M'. Man zeige:

1) K^1 ist ein Zyklus mod. 2;

2) wenn M orientierbar ist, so ist K^1 homolog 0 mod. 2;

3) unter den nicht-orientierbaren M gibt es sowohl solche, in denen K^1 homolog 0 mod. 2, als auch solche, in denen K^1 nicht homolog 0 mod. 2 ist.

Zürich. E. Stiefel.

(Eingegangen am 16. 2. 1935.)

188. Wie groß ist die Maximalanzahl M_n der Doppelpunkte eines ebenen n-Ecks?

Cambridge (England). Bernhard H. Neumann.

(Eingegangen am 9. 3. 1934.)

189. Bekanntlich läßt sich jede geschlossene dreidimensionale Mannigfaltigkeit durch ein Vollpolyeder darstellen, dessen Seitenflächen paarweise zugeordnet und zu identifizieren sind — ebenso wie man jede geschlossene Fläche durch ein Polygon mit paarweiser Kantenzuordnung topologisch geben kann. In zwei Dimensionen ist die Kugelfläche dadurch charakterisiert, daß in jedem darstellenden Polygon wenigstens zwei zugeordnete Kanten benachbart sind und man durch „Beiziehen" solcher Kantenpaare das Polygon auf eine Normalform, ein Zweieck, bringen kann. Man zeige, daß Entsprechendes in drei Dimensionen nicht gilt. Man gebe also ein einfachstes Beispiel eines Vollpolyeders an, das sich durch paarweise Seitenzuordnung zur dreidimensionalen Sphäre schließt und das sich trotzdem durch Beiziehen zugeordneter Seitenflächen mit gemeinsamer Kante nicht auf die Normalform, ein Zweiflach (Vollkugel, in der zur Äquatorebene spiegelbildliche Punkte der Oberfläche zu identifizieren sind), bringen läßt.

Dresden. W. THRELFALL.

(Eingegangen am 10. 2. 1935.)

190. (Gegenstück zur Aufgabe 168.) In einer anisotropen Ebene sind drei gerichtete Kreise K_1, K_2, K_3 gegeben. Man zeichne den gerichteten Kreis, dessen Ähnlichkeitspunkte in bezug auf K_1, K_2, K_3 drei vorgegebenen eigentlichen Geraden angehören.

Bayreuth. OSKAR DEGEL.

(Eingegangen am 10. 8. 1934.)

191. Ist p eine natürliche Primzahl $\neq 2$, sind weiter α, β, γ ganze rationale nicht durch p teilbare Zahlen, so gilt (Bachmann, Arithmetik der quadratischen Formen, Bd. 1, S. 489) für die Anzahl der mod. p inkongruenten Lösungspaare ganzer rationaler Zahlen (ξ, η) der Kongruenz $\alpha\xi^2 + \beta\eta^2 \equiv \gamma\,(p)$ die Formel

$$n = p - \left(\frac{-\alpha\beta}{p}\right),$$

wo $\left(\frac{m}{p}\right)$ den quadratischen Restcharakter bedeutet. Welche analoge Formel gilt, wenn statt p ein Primideal $\mathfrak{p}$ eines algebraischen Körpers k mit der Absolutnorm p^f (p natürliche Primzahl $\neq 2$) eingeführt wird und α, β, γ; ξ, η ganze Zahlen in k, wovon α, β, γ nicht durch $\mathfrak{p}$ teilbar sind, bedeuten? Nebst Beweis!

Graz. L. HOLZER.

(Eingegangen am 9. 9. 1934.)

192. Zu beweisen: Sei k ein algebraischer Zahlkörper mit einer Klassenzahl > 1. (Klassenzahl, Klassenkörper usw. sind bei der Aufgabe durchweg im weitern Sinne oder durchweg im engern Sinne zu verstehen.) Wir bilden die Klassenkörperturmkette

$$k < k_1 < k_2 < \cdots < k_n.$$

K sei ein Körper über k mit einer Klassenzahl 1. Dann gilt $K \geqq k_n$. Bricht insbesondere der Klassenkörperturm nicht ab, so gibt es keinen solchen Körper K über k.

Graz. L. HOLZER.

(Eingegangen am 9. 9. 1934.)

193. Zu beweisen: Seien die Körper k und $K > k$ über k_0 Galoissch, $(k : k_0) = n$, existiere weiter in k_0 ein zu n teilerfremdes Primideal $\mathfrak{p}_0$, das in k Potenz eines Primideals $\mathfrak{p}$ ersten Relativgrades wird, wo dann $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}$ in K Primideal bleibt. Dann ist $K \mid k_0$ Abelsch.

Graz. L. HOLZER.

(Eingegangen am 9. 9. 1934.)

194. Nichtkommutative Gruppen ungrader Primzahlpotenzordnung l^3 gibt es bekanntlich nur zwei: eine Gruppe $\mathfrak{S}$, deren Elemente S alle der Gleichung $S^l = 1$ genügen, und eine Gruppe $\mathfrak{T}$, bei der die Elemente S dieser Eigenschaft eine Untergruppe der Ordnung l^2 bilden, während die übrigen Elemente T die Ordnung l^2 haben. — Nun seien K_1 und K_2 die zyklischen Unterkörper l-ten Grades der p-ten und q-ten Einheitswurzeln, p und q Primzahlen $\equiv 1 \bmod l$, aber $p \not\equiv 1\ (l^2)$ und l-ter Nichtrest $\bmod q$, während q ein l-ter Rest $\bmod p$ sei. Dann gibt es, wie gezeigt werden soll, stets einen K_1 und K_2 enthaltenden Körper mit der Gruppe $\mathfrak{T}$.

Kiel. ARNOLD SCHOLZ.

(Eingegangen am 29. 10. 1934.)

195. (Im Anschluß an die Hassesche Aufgabe 169).

Zu zeigen, daß sich ein zyklischer Körper K_m/k vom Grade l^m (l Primzahl) dann und nur dann in einen zyklischen Körper K_n/k vom Grade l^n ($m < n$) einbetten läßt, wenn sich die Einteilung Z_m der teilerfremden Zahlrestklassen mod $\mathfrak{f}$, dem Führer von K_m/k, nach den k_m zugeordneten Zahlrestklassen in eine zyklische Einteilung Z_n von der Relativordnung l^{n-m} aufspalten läßt. — Hierzu ist insbesondere notwendig, daß K_m/k relativreell ist und jeder zu l prime Teiler $\mathfrak{p}$ des Führers eine Norm $\equiv 1 \bmod l^{n-m(\mathfrak{p})}$ hat, wenn $\mathfrak{p}$ grade im Unterkörper $l^{m(\mathfrak{p})}$-ten Grades von K_m noch unverzweigt ist. Hinreichend sind diese Bedingungen sicher, wenn $\mathfrak{f}$ höchstens einen Primleiter von l enthält.

Dann und nur dann, wenn der l-Teil des Körpers der l^n-ten Einheitswurzeln in k liegt, ist jeder K_m zu einem K_n erweiterbar.

Kiel. ARNOLD SCHOLZ.

(Eingegangen am 9. 1. 1935).

Lösungen.

Lösung der Aufgabe 117. (Dieser Jahresbericht Bd. 41 (1932), S. 33.)

Die Aufgabe lautete:

Die Gleichung $(x+1)^{28}+x^{28}+1=0$ ist algebraisch (d. h. durch Wurzelziehen) vollständig aufzulösen.

Sofia. L. TSCHAKALOFF.

Lösung.

Es sei $F(x)=(x+1)^{28}+x^{28}+1=0$. Mit x ist $\frac{1}{x}$ und $-1-x$, daher auch $-\frac{1}{1+x}$, $-\frac{x}{1+x}$ und $-\frac{x+1}{x}$ Wurzel von $F(x)=0$. Unter den Lösungen der Gleichungen

$$x=\frac{1}{x},\quad x=-1-x,\quad x=-\frac{1}{1+x},\quad x=-\frac{x}{1+x}$$

sind nur die beiden primitiven dritten Einheitswurzeln Wurzeln von $F(x)=0$, und zwar Doppelwurzeln. Man setze

$$F(x)=\Phi(x)\cdot(x^2+x+1)^2.$$

Die allgemeinste Gleichung 6. Grades, bei der zwischen den sechs Wurzeln $x_1,\ldots,x_6$ die Beziehungen

$$(1)\qquad x_2=\frac{1}{x_1},\quad x_3=-1-x_1,\quad x_4=-\frac{1}{1+x_1},\quad x_5=-\frac{x_1+1}{x_1},$$
$$x_6=-\frac{x_1}{x_1+1}$$

bestehen, läßt sich mit Hilfe eines Parameters y in der Form

$$f(x,y)=x^6+3x^5+(y+3)x^4+(2y+1)x^3+(y+3)x^2+3x+1=0$$

darstellen. Die Gleichung $f(x,y)=0$ läßt sich, als reziproke Gleichung 6. Grades, durch Wurzelzeichen nach x auflösen.

Das Polynom 24. Grades Φ zerfällt in vier Faktoren, von denen jeder sechs Wurzeln, welche die Relationen (1) erfüllen, hat. Es gibt daher vier Zahlen

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,$$

so daß $\Phi=\prod_1^4 f(x,y_i)$ ist. Hieraus lassen sich die elementarsymmetrischen Funktionen der y_i berechnen. Man hat also eine Gleichung 4. Grades für die y_i und die vier Gleichungen 6. Grades $f(x,y_i)=0$ zu lösen, was beides durch Wurzelziehen möglich.

Göttingen. PETER SCHERK.

(Eingegangen am 21. 11. 1934.)

Weitere Lösungen legten Herr J. Barinaga (Madrid) und Herr J. Mahrenholz (Kottbus) vor.

Lösung der Aufgaben 160 und 168. (Dieser Jahresbericht Bd. 43, 1933, S. *62* und Bd. 44, 1934, S. *12*.)

Aufgabe 160 lautete:

Man konstruiere (geometrisch) einen Kreis, der aus drei gegebenen Kreisen Sehnen von der Größe der Durchmesser schneidet.

Helsinki. J. M. ANGERVO.

Aufgabe 168 lautete:

(Verallgemeinerung der Aufgabe 160.)

Es seien drei Kreise C_1, C_2, C_3 gegeben. Man konstruiere (geometrisch) einen Kreis, dessen Schnittgeraden mit C_1, C_2, C_3 durch vorgegebene drei Punkte gehen.

Sofia. NIKOLA OBRESCHKOFF.

Von mehreren Seiten wird bemerkt, daß die gestellten Aufgaben schon in Lehrbüchern behandelt sind. Vgl. W. Fiedler, Zyklographie, Leipzig 1882, Nr. 107; E. Müller, Vorlesungen über darstellende Geometrie, II. Bd., Die Zyklographie, herausgeg. von J. L. Krames, Wien 1929, S. 72; Bussler, Mathematisches Übungsbuch II, Aufg. 35.

Die sehr zahlreich eingegangenen Lösungen werden darum nicht veröffentlicht.

Lösung der Aufgabe 161. (Dieser Jahresbericht Bd. 43, 1933, S. *63*.)

Die Aufgabe lautete:

Die Polarentheorie eines festen eigentlichen Kegelschnittes a läßt sich erweitern, wenn man diesem eine beliebig, aber fest gegebene (a nicht berührende) Gerade q adjungiert.

Durch einen beliebigen Punkt P (weder auf a, noch auf q) lege man ein Büschel B_g von Geraden g; irgendeine derselben treffe a im Punktepaare (G_1, G_2), und q im Punkte G. Der zu G in bezug auf (G_1, G_2) vierte harmonische Punkt erzeugt, wenn g innerhalb B_g variiert, einen kovarianten Kegelschnitt k, die „Hyperpolare" von P in bezug auf a und q.

Diese Hyperpolare k führt zu bemerkenswerten Sätzen. Zunächst lassen sich sofort sechs Punkte auf k nebst ihren Tangenten angeben.

Versteht man unter p die Polare von P, unter Q den Pol von q in bezug auf a, so geht k einmal durch die vier Schnittpunkte von p und q mit a, andererseits durch P und Q.

Die Tangenten an k in P und Q bestimmen sich dadurch, daß sie sich im Treffpunkte R von p und q schneiden.

Was die Tangenten an k in den vier Schnittpunkten von p und q mit a angeht, so seien wenigsten zwei reell, etwa die Schnittpunkte P_1, P_2 von a und p. Bedeutet dann t_a die Tangente an a in P_1, t_k die an k, so ist t_k die zu p in bezug auf das Paar $\{t_a (P_1, Q)\}$ vierte harmonische Gerade.

Die Hyperpolare k zerfällt in ein Geradenpaar nur in den beiden Grenzfällen, wo entweder q durch P geht — dann sondert sich q als uneigentlicher Teil ab, und k geht in die Polare p von P über — oder aber die Gerade (P, Q) ist Tangente von a, wo das Geradenpaar k sofort angebbar wird.

Umgekehrt läßt sich die Hyperpolare k als ein beliebiger (eigentlicher) Kegelschnitt, nebst zwei beliebigen (k nicht berührenden) Geraden p, q als gegeben annehmen; man frage nach zugehörigen Urkegelschnitten.

Die Polare des Punktes $R(p, q)$ in bezug auf k trifft k in P und Q. Dann liegen zwei gleichberechtigte Fälle vor; entweder, wie oben für a, ist P Pol von p, Q von q, oder aber, für einen zweiten Urkegelschnitt a', ist P Pol von q, Q Pol von p. Zwischen den vier, demselben Büschel angehörenden Kegelschnitten a, a', k, pq besteht die Beziehung, daß das Paar (a, a') harmonisch ist zum Paar (k, pq). Den obigen Entwicklungen treten die dualen zur Seite, wobei sich die beiden Paare (P, Q) und (p, q) vertauschen.

Durch Vereinigung aller Fälle entsteht die folgende, aus einem geschlossenen System von fünf Kegelschnitten, einem Punkte- und einem Geraden-Paare zusammengesetzte Figur.

„Man gehe aus von einem Urkegelschnitte, der als Ordnungsgebilde mit a, als Klassengebilde mit α bezeichnet sei, nebst zwei Geraden p, q, mit den Polen P, Q. Dann existiert ein Ordnungskegelschnitt k, als Hyperpolare von P in bezug auf a und q, oder auch von Q in bezug auf a und p; zugleich ein Klassenkegelschnitt k_1, als Hyperpolare von p in bezug auf α und Q, oder auch von q in bezug auf α und P.

Zum Urkegelschnitt a gehört ein gleichberechtigter zweiter, a' für den k die Hyperpolare von P in bezug auf p, oder auch von Q in bezug auf q ist. Entsprechend gehört zu α ein zweiter gleichberechtigter Klassenkegelschnitt α_1', für den k die Hyperpolare von p in bezug auf P, oder von q in bezug auf Q ist.

Obige Eigenschaften bleiben im wesentlichen auch in den Grenzfällen erhalten, wo der Punkt P, oder Q, oder beide zugleich auf a rücken, oder, wo a in ein Paar verschiedener Geraden zerfällt (und entsprechend dual).

Der letztere Fall führt zu einer neuen Eigenschaft eines eigentlichen, vollständigen Vierecks, mit den Ecken A_i, A_k, A_l, A_m und den Seiten $a_{ik} = (A_i, A_k)$ usf.

Man greife irgendeine Ecke, etwa A_m heraus, und spalte das Restdreiseit (a_{il}, a_{kl}, a_{ik}) wieder in ein Paar zweier Seiten und die dritte, etwa (a_{il}, a_{kl}) und a_{ik}.

Dann gehört zu dieser Einteilung eine Hyperpolare k_{ml} von A_m in bezug auf den Urkegelschnitt (a_{il}, a_{kl}) und die Gerade a_{ik}. Nach dieser Regel entstehen zwölf Hyperpolaren, die aber zu je vier zusammenfallen, indem jeweils $k_{ml} = k_{lm} = k_{ki} = k_{ik}$ ist.

Bei geeigneter metrischer Partikularisierung ergeben sich eigenartige Sätze. Nimmt man z. B. den Urkegelschnitt a als Kreis an, q als die unendlichferne Gerade, so werden auch k und a' Kreise, dagegen k_1 und α_1' Parabeln usf. Wählt man im besonderen a als den nullteiligen Kugelkreis, P und q beliebig, so gelangt man zu neuen Sätzen in der Theorie der konfokalen Flächen zweiter Ordnung.

Die obigen Angaben finden ihr Analogon im Raume und überhaupt im S_n.

Die Sätze sind ganz oder teilweise, synthetisch oder analytisch, am besten invarianttheoretisch, abzuleiten.

Königsberg. W. Franz Meyer.

Lösung.

1. Die Hyperpolare k eines Punktes P bezüglich eines Kegelschnittes a und einer Geraden q ist auf Grund der in der Aufgabe gegebenen Definition der Hyperpolare leicht punktweise zu konstruieren, besonders wenn man bedenkt, daß der zu G bezüglich (G_1, G_2) vierte harmonische Punkt auf der Polaren von G liegen muß. Aus der Betrachtung besonderer Lagen von g (g geht durch einen Schnittpunkt von a mit q oder berührt a oder geht durch Q oder durch den Schnittpunkt R von p und q) folgt, daß k durch die erwähnten sechs Punkte geht.

2. Der analytischen Behandlung der Aufgabe werde ein rechtwinkliges Koordinatensystem zugrunde gelegt; darin habe der Urkegelschnitt die Gleichung $a \equiv y^2 - 2a_1 x - a_2 x^2$; die gegebene Gerade sei durch die Gleichung $q \equiv y - mx - n = 0$, der Punkt P durch seine Koordinaten $(x_0; y_0)$ gegeben; dann hat die Polare dieses Punktes die Gleichung $p \equiv y y_0 - a_1(x + x_0) - a_2 x x_0 = 0$. Man verbindet einen beliebigen Punkt G von q mit P; aus der Gleichung dieser Geraden und der der Polaren von q bestimmt man die Koordinaten von G und setzt sie in $q = 0$ ein; dann erhält man nach leichten Umformungen als Gleichung der Hyperpolaren

$$k \equiv pg - q_0 a = 0; \; q_0 = y_0 - m x_0 - n. \tag{1}$$

Die Gleichung sagt zunächst aus, daß k ein Kegelschnitt ist, der durch die Schnittpunkte von a mit p und q geht, ferner, daß k in p und q zerfällt, wenn P auf q liegt.

Zu derselben Gleichung kommt man, wenn man einen beliebigen Punkt G' von p mit den Pol Q von q verbindet und im übrigen entsprechend wie vorher verfährt; daraus folgt, daß k Hyperpolare von P bezüglich a und q und auch von Q bezüglich a und p ist.

3. Man kann aber zur Gleichung von k noch auf grundsätzlich anderem Wege gelangen: Gegeben seien der Urkegelschnitt a und zwei Punkte P und Q mit ihren Polaren p und q, die a in P_1 und P_2 bzw. Q_1 und Q_2 reell oder imaginär schneiden. Man frage nun nach dem Ort aller Punkte Π, deren Verbindungsgeraden mit $P\,Q\,Q_1\,Q_2$ (oder auch $P\,Q\,P_1\,P_2$) vier harmonische Strahlen bilden, und zwar so, daß die Strahlen ΠP und ΠQ ein zugeordnetes Paar bilden. In beiden Fällen erhält man als Ort für Π wieder die Hyperpolare k; damit ist nicht nur erneut bewiesen, daß k durch die angegebenen sechs Punkte geht, sondern auch, daß k jedem der beiden erwähnten Vierecke harmonisch umbeschrieben ist. Fällt insbesondere Π in eine Ecke eines dieser Vierecke, so geht ihre Verbindungslinie mit Π in die Tangente an k über. Daher bildet die an k gelegte Tangente eines der vier Punkte $P\,Q\,Q_1\,Q_2$ (oder $P\,Q\,P_1\,P_2$) mit den Verbindungslinien dieses Punktes mit den drei andern vier harmonische Strahlen. Insbesondere folgt daraus noch, daß die in P und Q an k gelegten Tangenten sich im Schnittpunkt R von p und q schneiden, daß also R der Pol von PQ bezüglich a und bezüglich k ist.

4. Die Determinante von k läßt sich, abgesehen von unwesentlichen Faktoren, auf die Form $\Delta = q_0 t_1 t_2$ bringen, wo $t_1 = 0$ und $t_2 = 0$ die Gleichungen der in Q_1 und Q_2 an a gelegten Tangenten bedeuten. Daher zerfällt k, wenn P entweder auf q liegt — dieser Fall ist schon er-

ledigt — oder auf einer dieser Tangenten; liegt P z. B. auf t_1, so zerfällt k in t_1 selbst und die Verbindungsgerade von Q_2 mit dem Berührungspunkt der zweiten von P an a gelegten Tangente.

5. Die Gestalt von k hängt ab vom Vorzeichen der Diskriminante; diese ist $D = (a_1 + a_2 x_0 - m y_0)^2 + 4 q_0 (a_1 m - a_2 n)$; daher wird k Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem P innerhalb, auf oder außerhalb der „Grenzparabel" $D = 0$ liegt. Diese Parabel berührt q im Halbierungspunkt von $Q_1 Q_2$, ferner t_1 und t_2 in Punkten, deren Abstände von Q durch Q_1 und Q_2 halbiert werden. Der Brennpunkt F der Grenzparabel ist der einzige Punkt, dessen Hyperpolare ein Kreis ist. Er bildet mit $Q\,Q_1\,Q_2$ ein harmonisches Viereck. Liegt P auf der Leitlinie der Grenzparabel, so ist k gleichseitige Hyperbel; wandert P auf einem Kegelschnitt, der mit dieser Parabel Brennpunkt und Leitlinie gemeinsam hat, so sind die zugehörigen Hyperpolaren einander ähnlich.

6. Sind k, p und q gegeben und fragt man nach zugehörigen Urkegelschnitten a, so ist zunächst klar, daß diese durch die Schnittpunkte von k mit p und q gehen müssen, daß also ihre Gleichung $k - \lambda p q = 0$ oder $p q (1 - \lambda) - q_0 a = 0$ sein muß, wo λ eine noch zu bestimmender Parameter ist. Macht man zur Bedingung, daß q Polare von Q oder p Polare von P ist, so erhält man jedesmal $\lambda = 1$, also $a = 0$, wie es sein muß. Verlangt man, daß P Pol von q und Q Pol von p ist, so erhält man $\lambda = -1$, also einen zweiten Urkegelschnitt

$$a' \equiv 2 p q - q_0 a = 0. \tag{2}$$

Da a und a' aus k und $(p q)$ durch $\lambda = +1$ und $\lambda = -1$ erhalten werden, folgt, daß das eine Kegelschnittpaar zum anderen harmonisch ist.

7. Dual zu der gestellten Aufgabe liegt folgende Fragestellung vor: Gegeben sind a, q und P; einen beliebigen Punkt G auf q verbindet man mit P und konstruiert den zu dieser Geraden bezüglich der beiden von G an a gelegten Tangenten vierten harmonischen Strahl; welche Kurve hüllt dieser Strahl ein? Auf Grund der Fragestellung lassen sich beliebig viele Tangenten der gesuchten „Hyperpolare von q bezüglich a und P" konstruieren, insbesondere lassen sich sechs Tangenten sofort angeben, nämlich q und p selbst, ferner die in $P_1 P_2 Q_1 Q_2$ an a gelegten Tangenten. Die analytische Behandlung, die der des Abschnitts 2 durchaus entspricht, führt zur Gleichung

$$k' \equiv r^2 + 4 a_1^2 q_0 p q = 0, \tag{3}$$

wo $r = y\{(a_1 m - a_2 n) x_0 - a_1 n\} - x\{(a_1 m - a_2 n) y_0 - a_1^2\} - a_1 (a_1 x_0 - n y_0) = 0$ die Gleichung von PQ ist. Die Gleichung zeigt, daß auch diese Hyperpolare ein Kegelschnitt ist, und daß dieser p und q in ihren Schnittpunkten mit r berührt, daß also R auch Pol von PQ bezüglich k' ist. Dieser Kegelschnitt k' ist Polarkegelschnitt von k bezüglich a, denn die Tangente, die als vierter harmonischer Strahl k' erzeugt, ist die bezüglich a konstruierte Polare jenes vierten harmonischen Punktes im ersten Abschnitt, der k erzeugte. Ebenso kann man natürlich auch k' erhalten, wenn man in jedem Punkt von k die Tangente zeichnet und ihren Pol bezüglich a konstruiert.

Sind k', P und Q gegeben, so ziehe man die Gerade PQ, die k' in zwei Punkten schneidet; die Tangenten dieser Punkte sind dann p und q; die Frage nach dem Urkegelschnitt ergibt dann wieder zwei Möglichkeiten: entweder ist P Pol von p und Q Pol von q; dann erhält man den Ausgangskegelschnitt $\alpha \equiv a$; oder P ist Pol von q und Q Pol von p; dann erhält man einen neuen Urkegelschnitt α' mit der Gleichung

$$(4) \qquad \alpha' \equiv (p^2 - a a_0)(a_1^2 + a_2 n^2 - 2 a_1 m n) + a_0 a_1^2 q^2 = 0,$$

der die vier in $P_1 P_2 Q_1 Q_2$ an a gelegten Tangenten berührt, außerdem Polarkegelschnitt zu a' bezüglich a ist. Es mag noch erwähnt werden, daß auch für die beiden neuen Urkegelschnitte a' und α' die Gerade r Polare von R ist, und daß sich a' und α' zweimal auf r schneiden.

8. Zerfällt der Urkegelschnitt in ein Paar gerader Linien, so bleiben alle Entwickelungen über die Hyperpolare k vollständig erhalten. Schreibt man die Gleichungen der Seiten des entstehenden Vierecks $A_i A_k A_l A_m$ in der Form $a_{ik} = y(x_i - x_k) - x(y_i - y_k) - (x_i y_k - x_k y_i) = 0$, wo die (x_i, y_i) die Koordinaten der Viereckssecken sind, so lautet die Gleichung der Hyperpolare des Punkts A_m bezüglich des Kegelschnitts (a_{ik}, a_{il}) und der Geraden a_{kl}: $k_{im} \equiv a_{ik} a_{lm} - a_{il} a_{km} = 0$, woraus folgt, daß $k_{im} = k_{kl} = k_{mi} = k_{lk}$ ist. Daher sind jedem Viereck nur drei Kegelschnitte harmonisch umbeschrieben, von denen übrigens höchstens einer eine Ellipse sein kann. Diese Ellipse ist, wie sich aus den Entwickelungen über die Grenzparabel ergibt, ein Kreis, wenn das gegebene Viereck ein harmonisches Viereck ist; dann ist jede Ecke Brennpunkt der zu den drei Gegenseiten gehörenden und sie berührenden Grenzparabel. Dadurch erhält die Theorie des harmonischen Vierecks eine neue Bereicherung; einige der angeführten Sätze seien für dieses spezialisiert: Jede Ecktransversale des harmonischen Vierecks wird durch die drei Gegenseiten und den zweiten Schnitt mit dem Umkreis in vier harmonischen Punkten getroffen; eine Ecktangente bildet mit den drei von dieser Ecke ausgehenden Seiten vier harmonische Strahlen; jede Tangente, die man an den Umkreis legt, wird von den vier Ecktangenten in vier harmonischen Punkten geschnitten; auf jeder Tangente einer Grenzparabel schneiden die drei berührenden Seiten gleiche Stücke ab.

9. Rückt q ins Unendliche, wird also n unendlich groß, so dividiere man die Gleichungen von k und a' gliederweise durch n, die von k' durch n^2, und setze $\frac{1}{n} = 0$; dann geht die Gleichung von k über in $a - p = 0$, die von a' in $a - 2p = 0$ und die von k' in $\{a_2 y_0 x - y(a_1 + a_2 x_0)\}^2 + 4 a_1^2 p = 0$; da p keine quadratischen Glieder enthält, folgt, daß k und a' Kegelschnitte sind, die zu a ähnlich sind und ähnlich liegen, also speziell Kreise werden, wenn a ein Kreis ist. Dagegen ist k' als Parabel zu erkennen. Für $n \to \infty$ geht übrigens k durch den Mittelpunkt von a, daher folgt auch geometrisch, daß k' als Polarkegelschnitt von k bezüglich a Parabel sein muß.

Treuburg. A. Boy.

(Eingegangen am 28. 2. 1934.)

Lösung der Aufgabe 166. (Dieser Jahresbericht Bd. 43 (1934), S. *114*.)

Die Aufgabe lautete:

Die für $0 < \Im(t)$ erklärte elliptische Thetafunktion

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_h\, e^{2\pi i h z + \pi i h^2 t} = \theta(z, t)$$

genügt einer quadratischen Integralgleichung. Setzt man $t^{-\frac{1}{2}}\theta\left(z, \frac{i}{t}\right) = \tau(z, t)$, so gilt für diese „normierte" Thetafunktion identisch in z und t

$$\int_0^1 d\varrho\ \tau(z, t-\varrho t)\left\{\tau(z, \varrho t) - \frac{1}{2}\tau\left(0, \frac{\varrho t}{4}\right) + \frac{1}{2}\right\} = \tau(z, t).$$

Lafayette (Ind.). WILHELM MAIER.

Lösung.

Statt die angegebene Relation direkt zu verifizieren, übersetze ich sie vermittels einer Funktionaloperation, der Laplace-Transformation

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt \equiv \mathfrak{L}\{F\},$$

in einen anderen Funktionsbereich, wo sie eine viel einfachere Gestalt hat. Zunächst kann man sie durch die Substitution $\varrho t = x$ unter Verwendung der symbolischen Abkürzung $\int_0^t F(x) G(t-x)\, dx = F * G$ (Faltung) auf die Form bringen

$$\tau(z, t) * \left\{\tau(z, t) - \frac{1}{2}\tau\left(0, \frac{t}{4}\right) + \frac{1}{2}\right\} = t\,\tau(z, t).$$

Hierauf wenden wir die Laplace-Transformation an.

Setzen wir $\mathfrak{L}\{\tau(z, t)\} = y(z, s)$, so muß für diese Funktion wegen der bekannten Gesetze (siehe „Die Integrodifferentialgleichungen vom Faltungstypus", Math. Ann. 89 (1923) S. 192):

$$\mathfrak{L}\{F*G\} = \mathfrak{L}\{F\}\cdot\mathfrak{L}\{G\},\quad \mathfrak{L}\left\{F\left(\frac{t}{4}\right)\right\} = 4\,\mathfrak{L}_{4s}\{F(t)\},\quad \mathfrak{L}\{tF\} = -\frac{d}{ds}\mathfrak{L}\{F\}$$

die Differentialgleichung erfüllt sein:

$$(\alpha)\qquad y(z, s)\cdot\left\{y(z, s) - 2y(0, 4s) + \frac{1}{2s}\right\} = -\frac{dy(z, s)}{ds}.$$

Die Funktion $y(z, s)$ ist eine einfache, elementare Funktion: Zunächst ist

$$\tau(z, t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i h z - \pi h^2 \frac{1}{t}},$$

also, da man die Laplace-Transformation hier nach geläufigen Sätzen gliedweise anwenden kann und

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\, e^{-\pi h^2 \frac{1}{t}}\right\} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}\, e^{-2|h|\sqrt{\pi s}}$$

ist:

$$\mathfrak{L}\{\tau(z, t)\} = \sqrt{\frac{\pi}{s}} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i h z - 2|h|\sqrt{\pi s}}.$$

Dies gilt für den Konvergenzbereich der Reihe, d. h. für $s > \pi \mathfrak{J}^2(z)$. Einfache Umformungen ergeben:

$$y(z, s) = \sqrt{\frac{\pi}{s}} \left\{1 + \sum_1^\infty e^{2(\pi i z - \sqrt{\pi s})h} + \sum_1^\infty e^{-2(\pi i z + \sqrt{\pi s})h}\right\}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{s}} \left\{1 + \frac{e^{2(\pi i z - \sqrt{\pi s})}}{1 - e^{2(\pi i z - \sqrt{\pi s})}} + \frac{e^{-2(\pi i z + \sqrt{\pi s})}}{1 - e^{-2(\pi i z + \sqrt{\pi s})}}\right\}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{s}} \frac{e^{2\sqrt{\pi s}} - e^{-2\sqrt{\pi s}}}{\left(e^{2\sqrt{\pi s}} + e^{-2\sqrt{\pi s}}\right) - \left(e^{2\pi i z} + e^{-2\pi i z}\right)}$$

$$(\beta) \qquad = \sqrt{\frac{\pi}{s}} \frac{\mathfrak{Sin}\, 2\sqrt{\pi s}}{\mathfrak{Cos}\, 2\sqrt{\pi s} - \cos 2\pi z}.$$

Die Verifikation, daß die Funktion (β) der Gleichung (α) genügt, gestaltet sich besonders einfach, wenn man (α) in der Gestalt schreibt:

$$y(z, s) - 2y(0, 4s) + \frac{1}{2s} = -\frac{d \lg y(z, s)}{ds}.$$

Die linke Seite hat den Wert

$$\sqrt{\frac{\pi}{s}} \frac{\mathfrak{Sin}\, 2\sqrt{\pi s}}{\mathfrak{Cos}\, 2\sqrt{\pi s} - \cos 2\pi z} - \sqrt{\frac{\pi}{s}} \frac{\mathfrak{Sin}\, 4\sqrt{\pi s}}{\mathfrak{Cos}\, 4\sqrt{\pi s} - 1} + \frac{1}{2s},$$

die rechte

$$-\frac{d}{ds} \lg \sqrt{\frac{\pi}{s}} - \frac{d}{ds} \lg \mathfrak{Sin}\, 2\sqrt{\pi s} + \frac{d}{ds} \lg\left(\mathfrak{Cos}\, 2\sqrt{\pi s} - \cos 2\pi z\right)$$

$$= \frac{1}{2s} - \sqrt{\frac{\pi}{s}} \frac{\mathfrak{Cos}\, 2\sqrt{\pi s}}{\mathfrak{Sin}\, 2\sqrt{\pi s}} + \sqrt{\frac{\pi}{s}} \frac{\mathfrak{Sin}\, 2\sqrt{\pi s}}{\mathfrak{Cos}\, 2\sqrt{\pi s} - \cos 2\pi z}.$$

Dies stimmt aber wegen

$$\mathfrak{Sin}\, 4\sqrt{\pi s} = 2\, \mathfrak{Sin}\, 2\sqrt{\pi s}\, \mathfrak{Cos}\, 2\sqrt{\pi s}, \quad \mathfrak{Cos}\, 4\sqrt{\pi s} - 1 = 2\, \mathfrak{Sin}^2\, 2\sqrt{\pi s}$$

mit der linken Seite überein.

Freiburg i. B. DOETSCH.

(Eingegangen am 9. 5. 1934.)

Lösung der Aufgabe 167. (Dieser Jahresbericht Bd. 43 (1934), S. *114*.)

Die Aufgabe lautete:

Es sollen in der Ebene n voneinander verschiedene Punkte $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n = a_0$ so bestimmt werden, daß die Entfernungen

$$\varrho(a_i, a_j) \leqq 1,$$
$$\varrho(a_i, a_{i+1}) = 1 \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1)$$

sind. Man zeige: dies ist möglich, wenn n ungerade, unmöglich, wenn n gerade und $\geqq 4$ ist.

Zürich und Berlin. H. Hopf und E. Pannwitz.

Erste Lösung:

Beweis: 1. Für $n = 2$ sei $a_\nu = \frac{1}{2}(-1)^\nu$.

Für ungerades n setze man $\left|1 - e^{\frac{2\pi i}{n} \cdot \frac{n-1}{2}}\right| a_\nu = e^{\frac{2\pi i}{n} \cdot \nu \cdot \frac{n-1}{2}}$. Dann sind offenbar alle Bedingungen erfüllt.

2. Die Bedingungen seien für gewisses $n \geqq 5$ und gewisse a_ν erfüllt ($n = 4$ ist offenbar unmöglich). Es sei

$$\mathfrak{C}_\nu = \text{Menge der } x \text{ mit } |x - a_\nu| = 1;$$
$$\mathfrak{K}_\nu = \quad ,, \quad ,, \; x \; ,, \; |x - a_\nu| \leq 1;$$
$$\mathfrak{M} = \text{Durchschnitt aller } \mathfrak{K}_\nu.$$

Hierin sei auch $\nu > n$ zugelassen; für $\mu \equiv \nu \pmod{n}$ sei $a_\mu = a_\nu$. Die Punkte $a_\nu, a_{\nu+1}, a_{\nu+2}$ sind verschieden, da $n \geq 3$ ist. Ferner ist $a_\nu < \mathfrak{C}_{\nu+1}$, $a_{\nu+2} < \mathfrak{C}_{\nu+1}$;

$$a_\nu < \mathfrak{K}_\mu, \; a_{\nu+2} < \mathfrak{K}_\mu \text{ für alle } \mu.$$

Es sei $b_{\nu,\nu+2}$ der kleinere der Bögen $a_\nu, a_{\nu+2}$ von $\mathfrak{C}_{\nu+1}$ (diese Bögen können nicht gleich sein, da $|a_\nu - a_{\nu+2}| \leq 1$). Offenbar ist $b_{\nu,\nu+2} < \mathfrak{K}_\mu$. Denn $\mathfrak{C}_{\nu+1}$ hat mit $\mathfrak{K}_\mu$ einen gewissen Bogen gemeinsam, der kleiner als π ist und der $a_\nu, a_{\nu+2}$ enthält. Es folgt $b_{\nu,\nu+2} < \mathfrak{M}$.

Genauer liegt $b_{\nu,\nu+2}$ auf dem Rand von $\mathfrak{M}$. Jeder solche Bogen ist wegen $n > 4$ durch seine Endpunkte völlig bestimmt; denn $a_{\nu^1} = a_{\nu+2}$, $a_{\nu^1+2} = a_\nu$ ist für $n > 4$ unmöglich, und aus $a_{\nu^1} = a_\nu$, $a_{\nu^1+2} = a_{\nu+2}$ folgt $\nu^1 \equiv \nu$ (mod n). Da der Bogen auf $\mathfrak{C}_{\nu+1}$ liegt, und $< \pi$ ist, ist er folglich eindeutig bestimmt.

Wegen $n > 4$ ist ferner $b_{\varkappa,\varkappa+2} \neq b_{\varkappa+2,\varkappa+4}$. Das Gebiet $\mathfrak{M}$ ist konvex, beschränkt und enthält drei Punkte, die nicht in gerader Linie liegen. Daraus folgt, daß der Rand von $\mathfrak{M}$ eine einfach geschlossene Kurve ist.

Der Kreisbogenzug

$$(1) \qquad b_{0,2}, b_{2,4}, b_{4,6}, \ldots b_{2\nu,2\nu+2}, \ldots$$

liegt auf dem Rand von $\mathfrak{M}$.

(1) durchläuft daher den ganzen Rand von $\mathfrak{M}$. Speziell liegt ein Teil des Bogens $b_{n-1,n+1}$, der ja auch auf dem Rand von $\mathfrak{M}$ liegt, auf einem der Bögen (1), etwa auf $b_{2\nu,2\nu+2}$.

Daher sind $b_{n-1,n+1}$, $b_{2\nu,2\nu+2}$ Bögen desselben Kreises.

$b_{n-1,n+1}$ liegt auf einem Kreis um a_n,

$b_{2\nu,2\nu+2}$,, ,, ,, ,, ,, $a_{2\nu+1}$;

Folglich ist $a_n = a_{2\nu+1}$, $n \equiv 2\nu + 1 \pmod{n}$. n ist daher ungerade.

Eine einfache Überlegung zeigt, daß sogar die folgenden schwächeren Bedingungen nur für ungerades n miteinander vereinbar sind:

$$|a_\varkappa - a_\lambda| \leq 1 \qquad (1 \leq \varkappa < \lambda \leq n).$$

Zu jedem $\varkappa$ gibt es λ und μ mit

$$1 \leq \lambda < \mu \leq n$$

und

$$|a_\varkappa - a_\lambda| = |a_\varkappa - a_\mu| = 1.$$

Für ungerades n sind diese Bedingungen übrigens äquivalent mit den obigen.

Cambridge. J. W. SUTHERLAND.

(Eingegangen am 21. 3. 34.)

Eine ähnliche Lösung sandte A. E. Mayer (Wien), der die Beziehungen zu Bereichen konstanter Breite ausnutzt.

Zweite Lösung.

Es möge sofort $n \geqq 4$ angenommen werden, da für $n = 2$ und 3 die Forderungen der Aufgabe trivialerweise erfüllbar sind.

$a_0, a_1, \ldots, a_n = a_0$ seien n Punkte der verlangten Art. Man verbinde a_i mit a_{i+1} $(i = 1, \ldots, n-1)$ geradlinig. Alsdann entsteht ein geschlossenes Polygon, dessen Seiten die Länge 1 haben und dessen Durchmesser (Maximalabstand zweier Punkte) gleich 1 ist. Dieses Polygon besitzt die folgende Eigenschaft: Je zwei nicht benachbarte Seiten schneiden sich in inneren Punkten, insbesondere enthält die Trägergerade einer Seite keine (von den Endpunkten dieser Seite verschiedene) Polygonecke. Angenommen, es sei dies schon gezeigt. Dann schließt man einfach so: Die Gerade $a_1 a_2$ zerlegt die Ebene in zwei Halbebenen; diejenige, in der a_0 liegt, heiße h, die andere h'. Nach der obigen Bemerkung muß die Seite $a_2 a_3$ die Seite $a_0 a_1$ schneiden. Folglich liegt auch a_3 in h. Da weiter $a_3 a_4$ und alle folgenden Seiten bis $a_{n-1} a_n$ die Seite $a_1 a_2$ schneiden müssen, schließt man sukzessive, daß a_4 in h', a_5 in h usw., also alle a_i mit ungeradem $i \geqq 3$ in h, mit geradem $i \geqq 4$ in h' liegen. Da aber $a_n = a_0$ in h liegt, muß n ungerade sein, wie behauptet.

Für ungerades n erfüllen die regulären Sternpolygone von der Seitenlänge 1 die Forderungen der Aufgabe.

Zum Beweis der obigen Behauptung genügt es folgendes zu zeigen: Sind a und b zwei Punkte der Entfernung 1, und sind c und d zwei von ihnen verschiedene Punkte der Entfernung 1, derart daß die Abstände von je zweien der vier Punkte höchstens 1 sind, so liegen c und d auf verschiedenen Seiten der Geraden ab, und die Strecke cd schneidet ab innen. Nach Voraussetzung müssen c und d dem Durchschnitt der beiden Kreise

vom Radius 1 um a und b angehören. In einer durch die Strecke ab begrenzten Hälfte dieses Kreisbogenzweiecks haben aber nur solche Strecken der Länge 1 Platz, deren einer Endpunkt mit a oder b zusammenfällt. Da aber c und d von a und b verschieden sind, kann cd mit keiner dieser Strecken identisch sein. c und d müssen also auf verschiedenen Seiten von ab liegen.

Kopenhagen. W. FENCHEL.

(Eingegangen 6. 3. 34.)

Ähnliche Lösungen sandten: H. Baer (Frankfurt a. M.), L. Ehrlich (Berlin), J. Fox (Brooklyn), R. Frucht (Triest), L. Goeritz (Rostock), F. Gruber (Wien), J. Juilfs (Berlin), R. Lauffer (Graz), E. Linés Escardó (Madrid), B. Neumann (Cambridge), L. Rédei (Mezötur (Ungarn)), L. A. Santaló (Madrid), P. Scherk (Göttingen), W. Schulz (Berlin).

Lösung der Aufgabe 169. (Dieser Jahresbericht Bd. 44 (1934), S. *41*.)

Die Aufgabe lautete:

Unter welchen Bedingungen läßt sich ein über einem algebraischen Zahlkörper k zyklischer Zahlkörper K_1 vom Primzahlgrade l in einen über k zyklischen Körper K_n vom Primzahlpotenzgrade l^n $(n > 1)$ einbetten?

Marburg (Lahn). H. Hasse.

Lösung.

Ist $\mathfrak{f}$ der Führer von K_1/k, also der niedrigste Modul $\mathfrak{f}$ in k, für den alle Primzahlen $\equiv 1 \bmod \mathfrak{f}$ aus k in K_1 (in Primideale) voll zerfallen, und ist Q die K_1 zugeordnete Untergruppe der teilerfremden Zahlrestklassengruppe $R \bmod \mathfrak{f}$, d. h. die Gesamtheit aller Restklassen, die in K_1 voll zerfallende Primzahlen enthalten, so ist entweder $\mathfrak{f} = 1$ und $Q = R$ oder $\mathfrak{f} \neq 1$ und ind $Q = l$.

Im ersten Fall läßt sich K_1 stets in einen K_n einbetten, im zweiten Fall dann und nur dann, wenn sich die Faktorgruppe R/Q der Ordnung l zu einer zyklischen Gruppe der Ordnung l^n aufspalten läßt, sei es mod $\mathfrak{f}$, sei es nach einem Vielfachen $\mathfrak{f}'$ von $\mathfrak{f}$.

Durchlaufen $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{v}$ die Primteiler von $\mathfrak{f}$, und zwar $\mathfrak{l}$ die in l aufgehenden, $\mathfrak{p}$ die nicht in l aufgehenden endlichen Primstellen, $\mathfrak{v}$ die unendlichen Primstellen, so ist für besagte Aufspaltbarkeit wiederum notwendig und hinreichend, daß

1. $\Pi \mathfrak{v} = 1$, also keine unendlichen Primstellen vorkommen, die Restklasseneinteilung R/Q von Vorzeichenbedingungungen unabhängig ist (m. a. W., daß K_1/k relativ-reell, d. h. die absolut konjugierten Körper zu K_1 noch soweit reell sind als die zugehörigen Konjugierten von k),

2. $N(\mathfrak{p}) \equiv 1 \; (l^n)$,

3. jedes ξ, das für beliebig hohes m bei l^{n-1}-ter Einheitswurzel ζ_{n-1} eine Darstellung

$$\xi \equiv \zeta_{n-1}^{a(\mathfrak{l})} \eta_{m,\mathfrak{l}}^{l} (\mathfrak{l}^m), \equiv 1 \bmod \Pi \mathfrak{p}$$

besitzt, in Q liegt.

Statt 3. läßt sich bei 1. und 2. auch knapper fordern:

3'. Jedes ξ', dessen l^{n-1}-te Potenz ein l^n-ter Potenzrest, grob gesagt, mod $l^m\mathfrak{f}$ für jedes m ist, liegt in Q.

(In 3'. ist aber 1. und 2. noch nicht enthalten.)

Beweis: K_1/k ist Klassenkörper mit dem Führer $\mathfrak{f}$, zur Klasseneinteilung J/H aller zu $\mathfrak{f}$ primen Ideale nach einer Untergruppe H vom Index l. Die obige Gruppe R ist mod E (Einheitengruppe) isomorph der Untergruppe der Zahlideale von J mod $\mathfrak{f}$, ebenso Q/E der Zahlidealuntergruppe von H. Die Einbettbarkeit von K_1 in einen K_n bedeutet nun klassenkörpertheoretisch, daß sich J/H zu einer zyklischen Gruppe der Ordnung l^n aufspalten läßt, mit irgendeinem Führer $\mathfrak{f}\mathfrak{m}$.

Unsere erste Behauptung kann daher so ausgesprochen werden, daß die Idealklassenaufspaltung gleichzeitig mit der Zahlklassenaufspaltung möglich ist: dann und nur dann läßt sich J/H zu einer zyklischen Gruppe l^n-ter Ordnung aufspalten, wenn dies für R/Q möglich ist, oder wenn $Q = R$.

Es wird sich ergeben, daß die Aufspaltung von R/Q unter den Bedingungen 1.—3. immer schon nach einem Modul $\mathfrak{f}'$ möglich ist, der sich von $\mathfrak{f}$ höchstens dadurch unterscheidet, daß er die l-Teiler in höherer Potenz enthält. Ferner ist dann die Aufspaltung von J/H mod $\mathfrak{f}'\mathfrak{q}$ mit passend gewähltem Primideal $\mathfrak{q}$ möglich.

Wir zeigen nun zuerst die Notwendigkeit der Bedingungen:

Ist $\mathfrak{f} \neq 1$, so liegen nicht alle Zahlideale in H und daher in jeder Klasse nach H Zahlideale, weil die Ordnung von J/H eine Primzahl. Die Klassen nach H lassen sich daher durch Potenzen einer beliebigen Zahl α repräsentieren, die nicht in Q liegt, und dasselbe gilt dann auch für jede Aufspaltung von J/H einer Ordnung l^n. Das erfordert aber die entsprechende Aufspaltbarkeit von Q/R.

Weiter folgt die Notwendigkeit der Bedingungen 1. und 2. so: Besagtes α muß in der Aufspaltung R/Q_n von R/Q eine Klasse der Ordnung l^n repräsentieren, wie es auch als erzeugender Repräsentant für R/Q gewählt sei. Ist nun $\mathfrak{f}\mathfrak{m}$ der Führer von Q_n, und spaltet man von $\mathfrak{f}$ einen Teiler $\mathfrak{p}$ ab, $\mathfrak{f} = \mathfrak{p}\mathfrak{w}$, so repräsentiert

$$\alpha \equiv \text{Primitivwurzel mod } \mathfrak{p}, \quad \equiv 1 \bmod \mathfrak{w}\mathfrak{m}$$

sicher eine erzeugende Klasse in R/Q und R/Q_n; denn sonst ginge $\mathfrak{p}$ nicht erst in $\mathfrak{f}$ auf. Dasselbe gilt ($l = 2$) für eine Abspaltung $\mathfrak{f} = \mathfrak{v}\mathfrak{w}$ mit $\alpha \equiv -1$ mod $\mathfrak{v}$, $\equiv +1$ mod $\mathfrak{w}\mathfrak{m}$. Es muß dann, da erst α^{l^n} in Q_n liegen soll, die Restklassengruppe jedes $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{v}$ eine durch l^n teilbare Ordnung haben, was $N(\mathfrak{p}) \equiv 1$ (l^n) erfordert und das Vorkommen eines $\mathfrak{v}$ auch für $l = 2$ schon bei $n = 2$ unmöglich macht.

Sind diese beiden Bedingungen 1. und 2. erfüllt, und ist $\mathfrak{f}$ prim zu l, so gibt es auch schon ein Q_n mit dem Führer $\mathfrak{f}$ selbst, wie unten gezeigt wird. Besitzt aber $\mathfrak{f}$ Teiler $\mathfrak{l}$, so hat man mehrere Basiselemente mod l^m, und man muß von vornherein mit einer Erhöhung des Exponenten von $\mathfrak{l}$ rechnen, damit die Basiselemente eine durch l^n teilbare Ordnung erhalten,

was nur dann nicht durchweg möglich ist, wenn eine l^{n-1}-te (oder niedere) Einheitswurzel als Basiselement auftritt. Daher muß auch noch die Bedingung 3. erfüllt sein, da sonst ξ als erzeugender Repräsentant für R/Q genommen werden könnte.

Wenn die Bedingungen 1. und 2. schon erfüllt sind, und wenn m in 3. so hoch gewählt ist, daß höchstens eine Einheitswurzel ein Basiselement niederer als l^n-ter Ordnung liefert, folgt aus 3. auch 3'.; denn dann gibt es in der ganzen Gruppe mod $l^m\mathfrak{f}$ höchstens zu jedem l-Teiler ein Basiselement niederer Ordnung, das aber nach 3. in Q liegen soll, und Potenzprodukte ξ' der übrigen Basiselemente, die der Potenzrestbedingung in 3'. genügen, liegen als l-te Potenzreste mod $l^m\mathfrak{f}$ in Q. (Nichttrivial ist 3. nur für den Fall, daß ζ_1, aber nicht ζ_n in k enthalten ist [ζ_ν primitive l^ν-te Einheitswurzel], und wenn außerdem $\mathfrak{f}$ wenigstens zwei verschiedene Teiler $\mathfrak{l}$ enthält; denn wir haben ja nur solche Zahlgruppen Q zu betrachten, die alle Einheiten aus k, g gebenenfalls auch ein ξ_{n-1}^a enthalten, und dann ist mit 1. und 2. auch 3. oder 3'. ohne weiteres erfüllt, wenn nur ein $\mathfrak{l}$ in $\mathfrak{f}$ aufgeht.) — Umgekehrt ist 3. in 3'. enthalten.

Jetzt beweisen wir, daß die notwendigen Bedingungen insgesamt auch hinreichend sind; zuerst, daß R/Q bei 1., 2., 3'. in geforderter Weise aufspaltbar ist:

Q definiert in R einen Charakter χ_1 l-ter Ordnung, wenn wir $\chi_1(\alpha) = \zeta_1$ für irgend α außerhalb Q ansetzen und $\chi_1(\gamma) = 1$ für alle γ in Q. Nun stellen wir für die teilerfremde Restklassengruppe R' mod $\mathfrak{f}' = \Pi\mathfrak{l}^m\Pi\mathfrak{p}$ eine Basis auf, in der Basiselemente ξ niederer als l^n-ter Ordnung nur mit $\chi_1(\xi) = 1$ auftreten. In R' läßt sich jetzt ein Charakter χ_n der Eigenschaft $\chi_n^{l^{n-1}} = \chi_1$ bilden, z. B. mit $\chi_n(\xi) = 1$ und $\chi_n(\eta) = \zeta_n{}^a$ für $\chi_1(\eta) = \zeta_1{}^a$, wo η die Basiselemente durch l^n teilbarer Ordnung durchläuft. $\chi_n(\gamma) = 1$ definiert eine Untergruppe $Q_n = \{\gamma\}$ vom Index l^n in R'.

Um jetzt für $\mathfrak{f} \neq 1$ aus der gewonnenen Aufspaltung von R/Q eine entsprechende Aufspaltung für J/H zu gewinnen, reicht der obige Zahlcharakter χ_n nicht immer aus; denn er braucht nicht für alle Einheiten eins zu sein, und selbst dann existiert nicht immer ein Idealcharakter, der für alle Hauptideale mit χ_n übereinstimmt. Wohl aber läßt sich χ_n durch einen niederen Charakter χ so korrigieren, daß $\chi_n : \chi$ einen Idealcharakter liefert und dabei χ_1 als l^{n-1}-te Potenz behält. Sei nämlich $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_r$ eine l-Basis für die Einheiten in k (jede Einheit $\varepsilon = \varepsilon_1^{x_1}, \ldots \varepsilon_r^{x_r}\eta^l$ darstellbar) und $\mathfrak{j}_1, \ldots \mathfrak{j}_e$ ein Repräsentantensystem für eine Basis der vollständigen absoluten l-Klassengruppe in k, das für jedes Ideal $\mathfrak{j}$ eine Darstellung $\mathfrak{j}^x = \xi\mathfrak{j}_1^{x_1}, \ldots \mathfrak{j}_e^{x_e}$ mit $(x, l) = 1$ und ξ in k liefert, wo x_i $(i = 1, \ldots e)$ eindeutig mod l_i, einer Potenz von l, für die $\mathfrak{j}_i^{l_i} = (\varrho_i)$ ausfällt. Für $\mathfrak{f} \neq 1$ dürfen wir alle $\mathfrak{j}_i$ aus H wählen. Bestimmt man jetzt ein Primideal $\mathfrak{q}$ mit einem l^{n-1}-ten Potenzrestcharakter χ so, daß für das l-unabhängige System $\varrho_1, \ldots \varrho_e$; $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_r$

$$\chi(\varrho_i) = \chi_n(\varrho_i); \quad \chi(\varepsilon_\varrho) = \chi_n(\varepsilon_\varrho)$$

ausfällt, so erzeugen $\mathfrak{j}_1, \ldots \mathfrak{j}_e$ und die Zahlen γ mit $\chi(\gamma) = \chi_n(\gamma)$ eine in H enthaltene Idealgruppe H_n mod $\mathfrak{f}'\mathfrak{q}$, deren Faktorgruppe zyklisch von der Ordnung l^n ist.

Für $\mathfrak{f} = 1$ muß hingegen wenigstens ein Basiselement $\mathfrak{j}_1$ außerhalb H liegen, während sich dann die andern $\mathfrak{j}_i = \mathfrak{j}_1^{a_i}\mathfrak{h}_i$ mit $\mathfrak{h}_i < H$ ausdrücken lassen. Nun setze man einen Charakter

$$\chi(\varrho_1) = \zeta_n^{l_1},\ \chi(\varrho_2) = \zeta_n^{a_2 l_2},\ \ldots\ \chi(\varrho_e) = \zeta_n^{a_e l_e};\quad \chi(\varepsilon_\varrho) = 1$$

an (alles Potenzen von ζ_{n-1}) und bestimme einen zugehörigen Primmodul $\mathfrak{q}$, dessen Primitivrest α den Charakter $\zeta_n^{\,l}$ habe. χ ist also wieder ein l^{n-1}-ter Potenzrestcharakter und $N(q) \equiv 1 \bmod l^{n-1}$. Dann erzeugen $\mathfrak{h}_1 = \alpha^{-1}\mathfrak{j}_1^{\,l}$, $\mathfrak{h}_2, \ldots \mathfrak{h}_e$ und die γ mit $\chi(\gamma) = 1$ eine in H enthaltene Idealgruppe $H_n \bmod \mathfrak{q}$, und die Klassen nach H_n sind durch $\mathfrak{j}_1, \mathfrak{j}_1^2, \ldots \mathfrak{j}_1^{\,l} \sim \alpha_1$, $\ldots \mathfrak{j}_1^{l^n} \sim \alpha_1^{l^{n-1}} \sim 1$ repräsentiert.

Kiel. ARNOLD SCHOLZ.

(Eingegangen am 9. 1. 1935.)

Lösung der Aufgabe 171. (Dieser Jahresbericht Bd. 44 (1934), S. *41*.)

Die Aufgabe lautete:

Zu beweisen: Eine rational-unzerlegbare ganzzahlige Gleichung $f(x) = x^5 + a_1 x^4 + \cdots + a_5 = 0$, deren Diskriminante D einen Primfaktor p genau in der 1. Potenz enthält, hat als Galoissche Gruppe über den rationalen Zahlkörper die symmetrische $\mathfrak{S}_5$.

Leipzig. B. L. V. D. WAERDEN.

Erste Lösung.

Als transitive Gruppen 5. Grades kommen in Betracht: die zyklische $\mathfrak{Z}_5$, die Diedergruppe $\mathfrak{D}_{10}$, die maximal-auflösbare $\mathfrak{L}_{20}$, die alternierende $\mathfrak{A}_5$ und die symmetrische $\mathfrak{S}_5$. Dabei ist $\mathfrak{L}_{20}$ die Gruppe derjenigen Permutationen der Nummern $t = 1, 2, 3, 4, 5$, die durch die linearen Substitutionen $t' \equiv at + b \pmod 5$ gegeben werden. Da die Diskriminante D kein Quadrat ist, ist das Differenzenprodukt $\sqrt{D}$ der Wurzeln nicht rational, also die Gruppe der Gleichung nicht in der alternierenden $\mathfrak{A}_5$ enthalten. Es kommen also nur $\mathfrak{L}_{20}$ und $\mathfrak{S}_5$ in Betracht.

Gesetzt, $\mathfrak{L}_{20}$ wäre die Gruppe, dann würde die Adjunktion von zwei Wurzeln x_1, x_2 an den Grundkörper P schon den Zerfüllungskörper Ω der Gleichung ergeben. Setzen wir weiter $\Delta = \mathsf{P}(\sqrt{D})$, so hat Ω den Grad 10 über Δ, also ist die Diskriminante von Ω gleich

$$D_\Omega = D_\Delta^{10} N_\Delta(D_{\Omega/\Delta}) \quad \text{(vgl. Hilbert, Zahlbericht, § 15).}$$

Nun ist D_Δ als Diskriminante von $k(\sqrt{D})$ durch p teilbar, also ist D_Ω durch p^{10} teilbar. Weiter hat Ω den Grad 4 über $\mathsf{K} = \mathsf{P}(x_1)$, also gilt auch

$$D_\Omega = D_\mathsf{K}^4 \cdot N_\mathsf{K}(D_{\Omega/\mathsf{K}}),$$

wobei $D_\mathsf{K} = D$ nach Voraussetzung genau durch p, also D_K^4 genau durch p^4 teilbar ist. Also ist $N_\mathsf{K}(D_{\Omega/\mathsf{K}})$ wenigstens durch p^6 teilbar.

Die definierende Gleichung von Ω in bezug auf K lautet

$$\frac{f(x)}{x - x_1} = g(x) = 0.$$

Die Diskriminante von $f(x)$ ist im Körper K durch die von $g(x)$ teilbar und diese wiederum durch die Körperdiskriminante $D_{\Omega/\mathsf{K}}$. Somit ist $D_{\Omega/\mathsf{K}}$ ein Teiler von D und $N_{\mathsf{K}}(D_{\Omega/\mathsf{K}})$ ein Teiler von D^5. Dann kann aber $N_{\mathsf{K}}(D_{\Omega/\mathsf{K}})$ höchstens durch p^5 teilbar sein, und wir haben einen Widerspruch.

Somit kann die Gruppe nur $\mathfrak{S}_5$ sein.

Leipzig. B. L. v. d. Waerden.

(Eingegangen am 16. 7. 1934.)

Zweite Lösung.

Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_5$ die Wurzeln der Gleichung, R der rationale Zahlkörper, k_i der Körper $R(\alpha_i)$, K der kleinste Galoissche Körper über k_i, also $K = k_1 \ldots k_5$ (oder schon $K = k_1 \ldots k_4$), s_i die i-te Potenzsumme der Wurzeln der Gleichung, also $s_i = \sum_{j=1}^{5} \alpha_j^i$, $\mathfrak{G}$ die Gruppe K/R, $\mathfrak{G}_i$ die zu k_i gehörige Automorphismengruppe aus $\mathfrak{G}$.

Da $f(x)$ normiert ist, so sind die α_i ganz-algebraisch. D dividiert durch die gemeinsame Körperdiskriminante Δ aller konjugierten Körper k_i gibt ein ganzzahliges rationales Quadrat. Es ist somit $\Delta \equiv 0(p)$, weiter p in k_i kritisch. Die Differente k_i/R enthält also ein Primideal $\mathfrak{p}_i/p$. Da die Körperdiskriminante Norm der Differente ist und p nur in der 1. Potenz enthält, so folgt, daß nur *ein* kritisches Primideal $\mathfrak{p}_i/p$ in k_i existiert, und zwar ersten Grades: $p = \mathsf{N}_{k_i/R}\,\mathfrak{p}_i$.

Im Körper $k' = R(\sqrt{D}) = R(\sqrt{\Delta})$ wird p Quadrat und zugleich Norm eines Primideals: $p = \mathfrak{p}'^2$. Es gilt $K > k'$.

I. Wir zeigen zunächst, daß unter den sonstigen Voraussetzungen des Satzes eine Zerlegung $p = \mathfrak{p}_i^5$ von p in k_i überhaupt, also auch im Falle $\mathfrak{G} = \mathfrak{S}_5$, ausgeschlossen ist.

Sei also zunächst $p = \mathfrak{p}_i^5$.

$\mathfrak{P}_i'$ sei ein Primteiler von p im Körper $k_i' = k_i k'$. Es sei p genau durch $\mathfrak{P}_i'^a$ teilbar. Wegen $\mathfrak{P}_i'/\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{P}_i'/\mathfrak{p}'$ ist $2/a$, $5/a$, somit $10/a$; man sieht leicht $a = 10$.

Wegen $K > k_i'$ hat ein beliebiger Primteiler $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{P}_i'$ in K und, da K Galoissch, jeder Primteiler von p in K bei der Zerlegung von p in K einen durch 10 teilbaren Exponenten. Man sieht übrigens leicht, daß $\mathfrak{P}_i'$ der einzige Primteiler von p in k_i' ist. Die Trägheitsgruppe von $\mathfrak{P}$ hat also eine durch 10 teilbare Ordnung.

Anwendung einer Substitution α_1/α_2, die k_1 in k_i überführt, ergibt aus der Idealgleichung $p = \mathfrak{p}_1^5$ die folgende: $p = \mathfrak{p}_i^5$. Wird also $\mathfrak{p}_1$ als Ideal (nicht mehr Primideal) in K betrachtet, so folgt $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_i$, da ein Ideal nur auf eine Art 5. Potenz sein kann. Bei dieser Auffassung werden wir gelegentlich alle $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}$ setzen.

Nun sind aber in diesem Fall I die Primzahlen $p = 2, 3, 5$ ausgeschlossen. Zum Beweise schreiben wir D in bekannter Art als Determinante

$$D = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ s_1 & \cdot & \cdot & \cdot & s_5 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_4 & s_5 & s_6 & s_7 & s_8 \end{vmatrix}.$$

Wäre $p = 2$, so erhielten wir, da $\mathfrak{p}_1$ dann ein Primideal ersten Grades ist, das in 2 aufgeht, also der Restklassenring der Primkörper der Charakteristik 2 ist, die Kongruenz $\alpha_1^2 \equiv \alpha_1 (\mathfrak{p}_1)$, ebenso $\alpha_i^2 \equiv \alpha_i (\mathfrak{p}_i)$, was, als Kongruenz in K aufgefaßt, gäbe: $\alpha_i^2 \equiv \alpha_i (\mathfrak{p})$. Es folgt durch Multiplikation mit α_i^{n-1} ($n > 0$, so daß α_i^{n-1} algebraisch ganz ist): $\alpha_i^{n+1} \equiv \alpha_i^n (\mathfrak{p})$ für $n > 0$ und durch Summation über i: $s_{n+1} \equiv s_n (\mathfrak{p})$ für $n > 0$ und diese letzte Kongruenz gilt auch mod 2, da die s_n ganze rationale Zahlen sind. Nun ergibt Subtraktion der zweiten Kolonne in D von der dritten, vierten, fünften die Teilbarkeit von D durch 8 gegen die Voraussetzung. Für $p = 3$ folgt analog aus der Kongruenz $\alpha_1^3 \equiv \alpha_1 (\mathfrak{p})$ für $n > 0$: $s_{n+2} \equiv s_n (3)$ und nun zeigt Subtraktion der zweiten Kolonne von der vierten und der dritten von der fünften: $D \equiv 0 (9)$. Ist endlich $p = 5$, so ist zunächst für $\alpha_1 \not\equiv 0 (\mathfrak{p}_1)$: $\alpha_1^4 \equiv 1 (\mathfrak{p}_1)$, also $\alpha_1^2 \equiv \pm 1 (\mathfrak{p}_1)$, eine Substitution α_1/α_i ergibt $\alpha_i^2 \equiv \pm 1 (\mathfrak{p})$ oder $\alpha_i^{n+2} \equiv = \alpha_i^n (\mathfrak{p})$ für $n \geqq 0$ und diese letzte Kongruenz, in der das Vorzeichen von i und n nicht abhängt, gilt offenbar, wenn $n > 0$ ist, auch für $\alpha_1 \equiv 0 (\mathfrak{p}_1)$ sogar mit beiden Vorzeichen. Summation ergibt für $n > 0$: $s_{n+2} \equiv \pm s_n (5)$, wo das Vorzeichen von n nicht abhängt. Hieraus folgt im Falle des positiven Vorzeichens durch denselben Schluß wie bei $p = 3$, im Falle des negativen durch entsprechende Addition (statt Subtraktion) die Teilbarkeit von D durch 25.

Da der Grad $(K:R)$ jedenfalls ein Teiler von $5!$ ist, p aber $\neq 2, 3, 5$ ist, so besteht schon die erste Verzweigungsgruppe von $\mathfrak{P}$ sicher nur aus dem Einselement. Da diese Normalteiler der Trägheitsgruppe mit zyklischer Faktorgruppe ist, so ist die Trägheitsgruppe zyklisch mit durch 10 teilbarer Ordnung. Da es unter den Permutationen mit 5 Elementen kein Exemplar der Ordnung 10 gibt, so ist der Fall I überhaupt ausgeschlossen.

II. Sei also die Zerlegung von p in k_1: $p = \mathfrak{p}_1^b \mathfrak{q}_1$ $(1 < b < 5)$ mit $\mathfrak{q}_1 \neq (1)$, $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{p}_1) = (1)$. $\mathfrak{q}_1$ enthält jedenfalls nur in k_1/R nicht kritische Primideale.

Wegen der Irreduzibilität von $f(x)$ in R ist $\mathfrak{G}$ eine transitive Gruppe von Permutationen von 5 Elementen. Da D kein Quadrat ist, kommen nur transitive Untergruppen der $\mathfrak{S}_5$ in Betracht, die nicht Untergruppen der alternierenden Gruppe sind. Es gibt außer $\mathfrak{S}_5$ eine einzige Gruppe dieser Art (s. Netto, Gruppen- und Substitutionentheorie, S. 155 u. 137), die dortselbst G_1 genannt wird. Angenommen, es sei $\mathfrak{G} = G_1$. G_1 besteht bei richtiger Numerierung der Wurzeln genau aus den Elementen der Potenzgruppe des fünfgliedrigen Zyklus (12345) und den Elementen der Potenzgruppen der viergliedrigen Zyklen (2354), (1534), (1452), (1325), (1243). Die erstgenannte Potenzgruppe von 5 Elementen heiße $\mathfrak{G}''$. Zu $\mathfrak{G}''$ als Normalteiler von $\mathfrak{G}$ mit zyklischer Faktorgruppe der Ordnung 4 ge-

hört ein Körper $k'' > k'$ zyklisch der Ordnung 4 über R. Da nun p in k' kritisch ist, so ist (vgl. die Bemerkung von Hasse zur Lösung der Aufgabe 156, dieser Bericht, Bd. 44, S. 61) $\mathfrak{p}'$ in k'' kritisch, es bleibt etwa $p = \mathfrak{p}''^4$. $\mathfrak{p}''$ hat den Grad 1.

Da K/k'' zyklisch der Ordnung 5 ist, so gilt für die Zerlegung von $\mathfrak{p}''$ in K nur einer der drei Fälle:

1. $\mathfrak{p}'' = \mathfrak{P}^5$, $p = \mathfrak{P}^{20}$. Wir fielen auf den Fall I zurück.

2. $\mathfrak{p}'' = \mathfrak{P}$ bleibt Primideal. Wir hätten $p = \mathfrak{P}^4$. Das ist unmöglich, denn $\mathfrak{P}$ kann nicht gleichzeitig Teiler der teilerfremden Ideale $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{q}_1$ sein.

3. $\mathfrak{p}'' = \mathfrak{P}_1 \ldots \mathfrak{P}_5$, wo die Primideale $\mathfrak{P}_i$ alle voneinander verschieden sind. Offenbar sind wie $\mathfrak{p}''$ alle $\mathfrak{P}_i$ vom Grade 1. Die Zerlegungsgruppe jedes $\mathfrak{P}_i$ fiele mit der Trägheitsgruppe zusammen. Nun bleibt

$$p = \mathfrak{P}_1^4 \ldots \mathfrak{P}_5^4.$$

Es wird also die Ordnung der Trägheitsgruppe jedes $\mathfrak{P}_i$ gleich 4. In G_1 gibt es als Gruppen der Ordnung 4 nur die Potenzgruppen der viergliederigen Zykeln, zu denen der Reihe nach die Körper k_i gehören. Da zu konjugierten Primidealen konjugierte Trägheitskörper gehören, so hat jedes $\mathfrak{P}_i$ einen Körper k_j als Trägheitskörper. Die Numerierung sei so gewählt, daß zu $\mathfrak{P}_i$ der Trägheitskörper k_i gehört. Die Trägheitsgruppe, zugleich Zerlegungsgruppe von $\mathfrak{P}_i$ ist also Potenzgruppe eines viergliedrigen Zyklus und nach unsern Vereinbarungen mit $\mathfrak{G}_i$ zu bezeichnen.

$\mathfrak{P}_1$ hat die Trägheitsgruppe $\mathfrak{G}_1$ der Ordnung 4. Ihre Elemente sind 1, (2354), (25) (34), (2453).

Kehren wir nun zu D zurück. Es ist:

$$D = \prod_{i,j=1,\ldots,5;\, i \neq j} (\alpha_i - \alpha_j).$$

D ist genau durch p, also genau durch $\mathfrak{P}_1^4$ teilbar.

Der erzeugende Automorphismus (2354) der Trägheitsgruppe von $\mathfrak{P}_1$ führt $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ der Reihe nach in $\alpha_3, \alpha_5, \alpha_2, \alpha_4$ über. Es folgt $\alpha_2 \equiv \alpha_3 \equiv \alpha_4 \equiv \alpha_5 (\mathfrak{P}_1)$ oder es werden die 12 Differenzen $\alpha_i - \alpha_j$ mit $i \neq 1$, $j \neq 1$, $i \neq j$ alle durch $\mathfrak{P}_1$ teilbar, so daß D durch $\mathfrak{P}_1^{12}$ teilbar würde. Es hat sich also ein Widerspruch ergeben.

Es folgt, daß die Annahme $\mathfrak{G} = G_1$ unzulässig ist. Es bleibt $\mathfrak{G} = \mathfrak{S}_5$, w. z. b. w.

Graz. L. Holzer.

(Eingegangen am 9. 9. 1934.)

Dritte Lösung.

Da die Diskriminante nach Voraussetzung kein Quadrat ist, so muß die Galois-Gruppe auch ungerade Permutationen enthalten; es kommen daher von den fünf transitiven Gruppen 5. Grades von vornherein nur die symmetrische Gruppe und die lineare Gruppe $\mathfrak{G}_{20}$ der Ordnung 20 in Frage. Soll insbesondere die Primzahl p genau in erster Potenz in der Diskriminante von $f(x)$ aufgehen, so gleichfalls in der Diskriminante des Körpers $\mathsf{P}(\vartheta)$, wenn $f(\vartheta) = 0$. Dann zerfällt aber $p = \mathfrak{p}^2\mathfrak{q}$ in $\mathsf{P}(\vartheta)$, wo $\mathfrak{p}$ ein Primideal 1. Grades und $\mathfrak{q}$ quadratfrei. Wir beweisen nun:

Besitzt $f(x)$ die $\mathfrak{G}_{20}$ als Galois-Gruppe, ist $f(\vartheta) = 0$ und zerfällt in $K = \mathsf{P}(\vartheta)$ die Primzahl $p = \mathfrak{p}^2\mathfrak{q}$ mit $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) = 1$ und quadratfreiem $\mathfrak{q}$, so gilt — ohne Rücksicht auf die Primidealeigenschaft von $\mathfrak{p}$ — $N(\mathfrak{p}) = p^2$; $N(\mathfrak{q}) = p$.

Damit scheidet dann auch die $\mathfrak{G}_{20}$ für den vorgelegten Fall aus.

Beweis: Im Normalkörper H 20. Grades sind die Trägheitsgruppen der p-Teiler teilerfremd zur Untergruppe $\mathfrak{G}_5$ der Ordnung 5 von $\mathfrak{G}_{20}$; denn sonst wäre $p = \mathfrak{p}^5$ in K. Also liegen sie in den fünf miteinander konjugierten zyklischen Untergruppen $\mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_4$ der Ordnung 4 von $\mathfrak{G}_{20}$ und verteilen sich auf diese gleichmäßig. Die zu K gehörige Untergruppe $\mathfrak{G}_0$ von $\mathfrak{G}_{20}$ enthält die Trägheitsgruppen der in $\mathfrak{q}$ aufgehenden Primteiler von p in H, die eben in K noch keine Verzweigung erlitten haben; $\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_4$ dagegen enthalten von den in $\mathfrak{p}$ aufgehenden Primteilern die Trägheitsgruppen, weil $\mathfrak{G}_0$ keine dieser Trägheitsgruppen enthält. Also gehen in $\mathfrak{p}^2$ viermal so viel verschiedene H-Primteiler von p auf als in $\mathfrak{q}$, und zwar alle in derselben Potenz und von gleichem Grade. Man hat daher $N(\mathfrak{p}^2) = N(\mathfrak{q}^4)$; $N(\mathfrak{q}) = p$, $N(\mathfrak{p}) = p^2$.

Kiel. ARNOLD SCHOLZ.

(Eingegangen am 29. 10. 1934.)

Vierte Lösung.

$f(x)$ sei allgemeiner irreduzibel vom Primzahlgrad l, und p gehe in der Gleichungsdiskriminante D in genau 1. Potenz auf. p geht dann auch in der Körperdiskriminante auf, und daher besitzt ein Primteiler $\mathfrak{p}$ von p im Resolventenkörper K von $f(x)$ eine Trägheitssubstitution $T \neq E$. Ist

$$f(x) = \prod_{\lambda=1}^{l} (x - \vartheta_\lambda); \quad T = (r_{11} \ldots r_{1e_1})(r_{21} \ldots r_{2e_2}) \ldots (r_{n1} \ldots r_{ne_n}),$$

T als Permutation geschrieben, so gilt

$$f(x) \equiv \prod_{\nu=1}^{n} (x - \vartheta_{r_{\nu 1}})^{e_\nu} \bmod \mathfrak{p},$$

und es ist

$$p^{\Sigma(e_\nu - 1)} \mid D,$$

wie man durch Übergang zur Zerlegung im rationalen Zahlkörper mod $\mathfrak{p}$ erhält, die mit der rationalen Zerlegung mod p übereinstimmt. Bildet dort $(x - \vartheta_{r_{\nu 1}})$ mit $f - 1$ weiteren Faktoren einen rationalen irreduziblen Faktor $x^f + \cdots \pmod p$, so liefert $(x^f + \cdots)^{e_\nu}$ wenigstens den Beitrag $f(e_\nu - 1)$ zur Summe $\sum (e_\nu - 1)$.

Diese ist aber nur dann $= 1$, wenn T eine Transposition ist. Die hier transitive Galoisgruppe enthält also eine Transposition T und ist daher symmetrisch.

Kiel. ARNOLD SCHOLZ.

(Eingegangen am 29. 10. 1934.)