Werk

Titel: Verallgemeinerung eines Studyschen Satzes aus der komplexen Geometrie.

Autor: Peters, H.

Jahr: 1935

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?37721857X_0045|log11

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

bekanntlich zu seiner großen Verwunderung der Held von Jules Vernes „Le tour du monde" seine Wette: Er braucht zur Reise um die Welt nach *seiner* Zeitrechnung zwar etwas mehr als die in der Wette ausbedungenen 80 Tage, währenddessen ist aber das Datum in London, seinem Ausgangspunkt, erst 79 Tage weitergerückt.

3. Die Vieldeutigkeit des Datums kann wie beim Logarithmus durch einen Verzweigungsschnitt behoben werden. Dieser läuft auf dem 180. Meridian, der bei der stetigen Fortsetzung des Datums nicht überschritten werden darf. Überfährt ein Schiff diesen Meridian, so muß es daher, um den Anschluß an den als verbindlich erklärten Datumzweig nicht zu verlieren, die Stetigkeit unterbrechen und sein Datum um einen Tag vor- bzw. zurückstellen. Und genau wie beim Logarithmus ist es nicht nötig, daß der Verzweigungsschnitt ein Meridian, d. h. eine Gerade der z-Ebene, ist, sondern es kann eine beliebige andere, die Pole verbindende, doppelpunktfreie Kurve sein. In der Tat hat man die Datumgrenze auch gar nicht genau mit dem 180. Meridian, der einige Inseln schneiden würde, zusammenfallen lassen, sondern führt sie in einer Kurve um diese herum.

4. Gerade so wenig, wie man die Logarithmusfunktion für $z = 0$ und $z = \infty$ so definieren kann, daß sie dort stetig (und damit regulär) wird, vermag man in den Polen ein Datum zu fixieren. In jeder noch so kleinen Umgebung der Pole kann man jedes beliebige Datum (nach Durchführung der Datumgrenze nur beliebig innerhalb 24 Stunden) antreffen.

(Eingegangen am 22. 8. 1934.)

Verallgemeinerung eines Studyschen Satzes aus der komplexen Geometrie.

Von H. PETERS in Bonn.[1])

Für die zuerst von C. Segre[2]) behandelte Figur von sechs linear abhängigen Punkten der komplexen Ebene hat E. Study[3]) eine Konstruktion angegeben, die es gestattet, zu fünf vorgegebenen Punkten den sechsten zu finden. Diese Konstruktion beruht auf folgendem Satz:

1. Man nehme fünf Punkte 1, 2, ..., 5 der komplexen Ebene, so daß keine drei durch eine Gerade und alle fünf nicht durch eine

1) Aus dem Mathematischen Arbeitslager Kronenburg (Eifel).

2) C. Segre, Le rappresentazioni reali delle forme complesse, Math. Ann. 40, S. 436.

3) E. Study, Kürzeste Wege im komplexen Gebiet, Math. Ann. 60, S. 347.

ternäre Kette verbunden werden können. Jeden der fünf Punkte spiegele man an der ternären Kette durch die vier übrigen Punkte, d. h. man unterwerfe ihn der involutorischen Antikollination, die mit der jeweils durch die vier übrigen Punkte eindeutig bestimmten ternären Kette verbunden ist. So erhält man fünf weitere Punkte $1', 2', \ldots, 5'$. Die fünf Geraden $11', 22', \ldots, 55'$ laufen dann durch einen Punkt, (den sechsten linear abhängigen Punkt).

Dieser Satz läßt sich wie folgt im komplexen Raum R_3 verallgemeinern:

2. Man nehme sechs Punkte $1, 2, \ldots, 6$ des komplexen Raumes, so daß keine vier durch eine Ebene und alle sechs nicht durch eine quaternäre Kette verbunden werden können. Jeden der sechs Punkte spiegele man an der quaternären Kette durch die fünf übrigen Punkte. So erhält man sechs weitere Punkte $1', 2', \ldots, 6'$. Dann gehören die sechs Geraden $11', 22', \ldots, 66'$ einem Regulus an.

Dem Beweise schicken wir eine Hilfsbetrachtung voraus: Die räumliche Aufgabe, das Spiegelbild der Geraden 16 in Bezug auf die quaternäre Kette durch die Punkte $1, 2, \ldots, 5$ zu finden, kann man mit Hilfe einer ebenen Konstruktion lösen. Zu diesem Zwecke projiziere man die Punkte $2, 3, \ldots, 6$ von 1 aus auf eine Ebene, welche die quaternäre Kette in einer ternären Kette schneidet, z. B. auf die von den Punkten 2, 3, 4 aufgespannte Ebene $\langle 2\,3\,4\rangle$. So erhält man die Punkte $2, 3, 4, 5_1, 6_1$. Alsdann spiegele man den Punkt 6_1 an der durch die Punkte $2, 3, 4, 5_1$ bestimmten Kette und verbinde den Bildpunkt mit 1. Die so erhaltene Gerade ist die gesuchte. Die Richtigkeit dieser Konstruktion sieht man leicht ein, wenn man die Punkte $1, 2, \ldots, 5$ als reell voraussetzt und den nicht reellen Punkt 6 dem Konjugium unterwirft.

Der ausstehende Beweis ergibt sich nun wie folgt: Man projiziere die räumliche Figur vom Punkte 1 aus auf die Ebene $\langle 2\,3\,4\rangle$. In dieser Ebene erhält man so die Punkte $2, 3, 4, 5_1, 6_1; 2_1' 3_1', 4_1', 5_1', 6_1'$. Nach der obigen Hilfsbetrachtung und dem Satz 1 laufen dann die Geraden $2\,2_1'$, $3\,3_1'$, $4\,4_1'$, $5\,5_1'$, $6\,6_1'$ durch einen Punkt, die Ebenen $\langle 1\,2\,2'\rangle, \langle 1\,3\,3'\rangle, \ldots, \langle 1\,6\,6'\rangle$ also durch eine Gerade. Diese Gerade ist eine gemeinsame Treffgerade der Geraden $1\,1', 2\,2', \ldots, 6\,6'$.

Projiziert man die räumliche Figur nun noch von 2 aus auf $\langle 3\,4\,1\rangle$ und von 3 aus auf $\langle 4\,1\,2\rangle$, so ergibt sich: Die Schnittgeraden der Ebenen

(I) $\langle 1\,2\,2'\rangle, \langle 1\,3\,3'\rangle, \ldots, \langle 1\,6\,6'\rangle$

(II) $\langle 2\,1\,1'\rangle, \langle 2\,3\,3'\rangle, \ldots, \langle 2\,6\,6'\rangle$

(III) $\langle 3\,1\,1'\rangle, \langle 3\,2\,2'\rangle, \ldots, \langle 3\,6\,6'\rangle$

sind gemeinsame Treffgeraden der Geraden 1 1', 2 2', ..., 6 6'. Aus den Voraussetzungen über die Lage der sechs Punkte 1, 2, ..., 6 folgt, daß die Geraden (I), (II), (III) paarweise windschief sind, also einen Regulus bestimmen. Mithin gehören auch die Geraden 1 1', 2 2', ..., 6 6' einem Regulus an, nämlich dem zu dem eben genannten konjugierten.

Nimmt man die sechs Punkte als Eckpunkte des Koordinatentetraeders, Einheitspunkt und einen weiteren Punkt a an und setzt man

$$\mathfrak{A}_{ik} = a_i \bar{a}_k - a_k \bar{a}_i,$$

so lauten die Plückerschen Koordinaten der sechs Geraden:

i	$\mathfrak{x}_{01}$	$\mathfrak{x}_{02}$	$\mathfrak{x}_{03}$	$\mathfrak{x}_{23}$	$\mathfrak{x}_{31}$	$\mathfrak{x}_{12}$
1	$\frac{\mathfrak{A}_{01}}{\bar{a}_0 - \bar{a}_1}$	$\frac{\mathfrak{A}_{02}}{\bar{a}_0 - \bar{a}_2}$	$\frac{\mathfrak{A}_{03}}{\bar{a}_0 - \bar{a}_3}$	*	*	*
2	$-\frac{\mathfrak{A}_{01}}{\bar{a}_0 - \bar{a}_1}$	*	*	*	$-\frac{\mathfrak{A}_{31}}{\bar{a}_3 - \bar{a}_1}$	$+\frac{\mathfrak{A}_{12}}{\bar{a}_1 - \bar{a}_2}$
3	*	$-\frac{\mathfrak{A}_{02}}{\bar{a}_0 - \bar{a}_2}$	*	$\frac{\mathfrak{A}_{23}}{\bar{a}_2 - \bar{a}_3}$	*	$-\frac{\mathfrak{A}_{12}}{\bar{a}_1 - \bar{a}_2}$
4	*	*	$-\frac{\mathfrak{A}_{03}}{\bar{a}_0 - \bar{a}_3}$	$-\frac{\mathfrak{A}_{23}}{\bar{a}_2 - \bar{a}_3}$	$+\frac{\mathfrak{A}_{31}}{\bar{a}_3 - \bar{a}_1}$	*
5	$\mathfrak{A}_{01}\bar{a}_2\bar{a}_3$	$\mathfrak{A}_{02}\bar{a}_3\bar{a}_1$	$\mathfrak{A}_{03}\bar{a}_1\bar{a}_2$	$\mathfrak{A}_{23}\bar{a}_0\bar{a}_1$	$\mathfrak{A}_{31}\bar{a}_0\bar{a}_2$	$\mathfrak{A}_{12}\bar{a}_0\bar{a}_3$
6	$\mathfrak{A}_{01}$	$\mathfrak{A}_{02}$	$\mathfrak{A}_{03}$	$\mathfrak{A}_{23}$	$\mathfrak{A}_{31}$	$\mathfrak{A}_{12}$

Mit ihrer Hilfe kann man den Satz 2 unmittelbar verifizieren. Die angegebenen Linienkoordinaten sind eine Verallgemeinerung der Koordinaten, die man erhält, wenn man aus den von J. L. Coolidge[1]) angegebenen Formeln für ein spezielles System von sechs linear abhängigen Punkten der komplexen Ebene die Koordinaten der Verbindungsgeraden des sechsten Punktes mit den übrigen fünf berechnet.

Die gleiche Schlußweise, die uns von der komplexen Ebene aus zum komplexen Raum geführt hat, gestattet es, vom R_3 auf den R_4 überzugehen. Bekanntlich nennt man $n+1$ Geraden des R_n, für welche die Matrix der Grassmannschen Koordinaten den Rang $r \leqq n$ hat, in Schläflischer Lage. Diese Bezeichnung soll dahingehend erweitert werden, daß ein System von $p \geqq n+1$ Geraden im R_n, für welche die Matrix der Grassmannschen Koordinaten den Rang $r \leqq n$ hat, als in Schläflischer Lage befindlich bezeichnet wird. Der Studysche Satz läßt sich dann allgemein wie folgt aussprechen:

1) J. L. Coolidge, The Geometry of the Complex Domain, Oxford 1924, S. 132.