Werk

Titel: Bemerkungen zur Variationsrechnung.

Autor: Sommerfeld, A.

Jahr: 1900

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?37721857X_0008|log28

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

$$\mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty} f_n(x, y)$$

für alle diejenigen Punkte x, y innerhalb der gegebenen ebenen Randcurve existirt, deren Coordinaten x, y rationale Zahlen sind. Da andererseits für sämtliche Punkte innerhalb der Randcurve

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial x}\right| < \text{tang } \varphi, \qquad \left|\frac{\partial f_i}{\partial y}\right| < \text{tang } \varphi$$
$$(i = 1, 2, 3, \ldots)$$

ausfällt, so folgt leicht, dafs die unendliche Reihe von Functionen $f_1, f_2, f_3, \ldots$ für das Innere der Curve einschliefslich des Randes gleichmäfsig convergirt, d. h. es ist

$$f(x, y) = \mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty} f_n(x, y)$$

eine stetige Function der Veränderlichen x, y.

Die Fläche $z = f(x, y)$ ist die gesuchte Potentialfläche. Der Nachweis hierfür bietet keine Schwierigkeit; er gelingt am einfachsten, wenn wir die Existenz der Minimalfunction, d. h. die Lösung der Randwertaufgabe für den Kreis und eine beliebige stetige Randfunction benutzen; doch läfst sich der Nachweis auch auf directem Wege erbringen.

Neben der Einfachheit und Durchsichtigkeit des eben kurz gekennzeichneten Schlufsverfahrens erblicke ich den Hauptvorteil der neuen Methode darin, dafs sie nur die Minimums-Eigenschaft benutzt und von der speciellen Natur der Aufgabe, d. h. von den besonderen Eigenschaften der geodätischen Linie bezw. der Potentialfunction keinen Gebrauch macht; das Schlufsverfahren ist daher auch auf allgemeinere Probleme der Flächentheorie und der mathematischen Physik anwendbar.

Göttingen, den 11. October 1899.

Bemerkungen zur Variationsrechnung.

Von **A. Sommerfeld** in Clausthal.

In seiner Abhandlung „Zur Theorie der Variationsrechnung und der Differentialgleichungen“ (Crelle, Bd. 17, 1837) hat Jacobi ohne Beweis ein Kriterium aufgestellt, welches notwendig erfüllt sein mufs, wenn ein Maximum oder Minimum statthaben soll. Nachdem noch 1853 Bertrand die Notwendigkeit dieses Kriteriums bezweifelt hatte, gab Weierstrafs in seinen Vorlesungen den ersten Beweis dafür, indem er sich auf das einfachste Variationsproblem

beschränkte. Herr H. A. Schwarz hat, wie ich aus der Nachschrift einer seiner Vorlesungen ersehen habe, diesen Beweis erheblich vereinfacht. Ich habe mich nun überzeugt, dass das Schwarz'sche Verfahren, entsprechend ausgestaltet, auch in allen höheren Fällen zu einem einfachen und strengen Beweise des (sinngemäfs erweiterten) Jacobi'schen Kriteriums führt, z. B. im Falle eines Doppelintegrals, welcher den Gegenstand dieses Vortrags bilden soll.

Vorgelegt sei das Integral

$$J = \iint F(x, y, z, p, q)\, dx\, dy,$$

in welchem F eine analytische Function ihrer Veränderlichen, z die Unbekannte, p und q ihre Ableitungen nach x und y bedeuten. Die Integration ist erstreckt über irgend ein Gebiet G in der xy-Ebene. Es soll z (bei vorgegebenen Randwerten auf der Begrenzung von G) als Function von x und y so bestimmt werden, dafs J einen gröfst- oder kleinstmöglichen Wert annimmt.

Indem man z um eine stetige, auf der Begrenzung von G verschwindende Function ζ von x und y, und dementsprechend p und q um $\pi = \frac{\partial \zeta}{\partial x}$ und $\varkappa = \frac{\partial \zeta}{\partial y}$ vermehrt, bildet man die erste Variation J_1, d. h. die Glieder erster Ordnung in der Taylor'schen Entwickelung von J nach Potenzen von ζ, π und $\varkappa$ und schliefst aus dieser auf die Differentialgleichung des Problems, welche man als erstes oder Lagrange'sches Kriterium bezeichnen kann. Ist letztere gelöst, so sind des weiteren z, p und q, also auch die sogleich vorkommenden Gröfsen $\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}$, ... bekannte Functionen von x und y.

Darauf berechnet man die zweite Variation J_2, d. h. man bestimmt die Glieder zweiter Ordnung in der genannten Taylor'schen Entwickelung, nämlich

$$(1)\quad J_2 = \iint (A_{00}\zeta^2 + A_{11}\pi^2 + A_{22}\varkappa^2 + 2A_{01}\zeta\pi + 2A_{02}\zeta\varkappa + 2A_{12}\pi\varkappa)\, dx\, dy,$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$A_{00} = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2},\quad A_{11} = \frac{\partial^2 F}{\partial p^2},\quad A_{22} = \frac{\partial^2 F}{\partial q^2},\quad A_{01} = \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial p},\quad A_{02} = \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial q},$$

$$A_{12} = \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q}.$$

Nimmt man an, dafs aufser ζ auch π und $\varkappa$ innerhalb G stetige Functionen von x und y sind, so läfst sich J_2 durch geeignete partielle Integration folgendermafsen umformen:

$$(2)\qquad J_2 = \iint \zeta L(\zeta)\, dx\, dy + \int \zeta (P\, dy - Q\, dx),$$

das erste Integral über das Innere, das zweite über die Begrenzung von G erstreckt. Dabei bedeutet $L(\zeta)$ einen linearen (und sich selbst adjungirten) Differentialausdruck zweiter Ordnung, nämlich

$$L(\zeta) = A_0\zeta - \frac{\partial}{\partial x}(A_{11}\pi + A_{12}\varkappa) - \frac{\partial}{\partial y}(A_{21}\pi + A_{22}\varkappa),$$
$$A_0 = A_{00} - \frac{\partial A_{01}}{\partial x} - \frac{\partial A_{02}}{\partial y}, \quad A_{21} = A_{12},$$

während P und Q Abkürzungen für die folgenden Ausdrücke sind:

$$P = A_{01}\zeta + A_{11}\pi + A_{21}\varkappa, \quad Q = A_{02}\zeta + A_{12}\pi + A_{22}\varkappa.$$

Aus (2) schliefst man nun auf ein zweites notwendiges Kriterium, welches man das Legendre'sche nennen wird, weil es dasjenige Kriterium verallgemeinert, welches Legendre für einfache Integrale angegeben hat. Es besagt, dafs die quadratische Form

$$A_{11}X^2 + 2A_{12}XY + A_{22}Y^2 \tag{3}$$

in dem Gebiete G nirgends indefinit sein darf, dafs sie also definit oder semidefinit (d. h. von positiver oder verschwindender Determinante) sein muss, u. zw. beständig $\geqq 0$ im Falle des Minimums, beständig $\leqq 0$ im Falle des Maximums. Das Statthaben des Gleichheitszeichens, d. h. des semidefiniten Charakters macht des weiteren einige Schwierigkeiten, ähnlich wie in der Theorie der Maxima und Minima von Functionen mehrerer Veränderlicher der Fall, wo die Glieder zweiter Ordnung eine semidefinite Form bilden. Für die Differentialgleichung $L(\zeta) = 0$ besagt dieses Kriterium, dafs sie von „elliptischem" oder „parabolischem", nicht aber von „hyperbolischem Typus" sein darf.

Dies vorausgeschickt, bezeichnen wir als Jacobi'sches Kriterium die folgende Aussage: Für das Zustandekommen eines Maximums oder Minimums ist es notwendig, dafs es keine Lösung u der Differentialgleichung $L(u) = 0$ gebe, welche in einem ganz im Innern von G gelegenen Gebiete g mitsamt ihren ersten und zweiten Ableitungen stetig und im allgemeinen von Null verschieden ist, und welche auf der Begrenzung C desselben verschwindet.

Zum Beweise nehmen wir an, es gebe eine Lösung u von den genannten Eigenschaften, und definiren mit ihrer Hilfe die Variation ζ das eine Mal so, dafs die zweite Variation positiv, das andere Mal so, dafs sie negativ wird. Wir setzen zu dem Ende

$$\begin{cases} \text{in } g & : \ \zeta = u + \varepsilon U \\ \text{in } G - g & : \ \zeta = \quad \varepsilon U, \end{cases} \tag{4}$$

(unter $G - g$ das Restgebiet von G verstanden, welches nach Fortnahme von g übrig bleibt). Hier bedeutet U eine sonst willkürliche stetige Function mit stetigen ersten Differentialquotienten, welche nur der Bedingung zu genügen hat, auf der Randcurve von G zu verschwinden und die im folgenden erforderlichen Differentialquotienten zu besitzen. ε setzen wir als kleine Zahl voraus, über die

wir so verfügen können, dafs das Vorzeichen der zweiten Variation nur von den Gliedern mit dem Factor ε (nicht von denen mit dem Factor ε^2) abhängt.

Da nach den Gl. (4) ζ, aber nicht π und $\varkappa$ innerhalb G stetig ist, gehen wir bei der Berechnung der zweiten Variation von dem Integrale (1) aus. Dieses zerfällt in ein Integral über $G - g$ und ein solches über g. Das erstere ist nach (4) von der Ordnung ε^2, so dafs wir es nicht hinzuschreiben brauchen. Da andererseits in dem Gebiete g auch π und $\varkappa$ stetig sind, so können wir das Integral über g in die Form (2) umsetzen. Schreiben wir wieder nur die Glieder von der Ordnung ε hin und berücksichtigen, dafs im Innern von g der Wert von $L(u)$, auf der Randcurve C der Wert von u verschwindet, so haben wir

$$(5) \qquad J_2 \equiv \varepsilon \iint_g u L(U)\, dx\, dy$$

$$+ \varepsilon \int_C U \left\{ \left(A_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy - \left(A_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + A_{22} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\} dx,$$

mit dem Zeichen $\equiv$ andeutend, dafs die Gleichheit nur in den Gliedern erster Ordnung besteht.

Darauf ziehen wir eine Verallgemeinerung des Green'schen Satzes für beliebige lineare Differentialausdrücke heran. Sie lautet, angewandt auf den sich selbst adjungirten Differentialausdruck L und auf das Gebiet g:

$$\iint_g \big(u L(U) - U L(u) \big)\, dx\, dy =$$

$$= \int_C \left\{ A_{11} \left(U \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial U}{\partial x} \right) + A_{12} \left(U \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial U}{\partial y} \right) \right\} dy$$

$$- \int_C \left\{ A_{21} \left(U \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial U}{\partial x} \right) + A_{22} \left(U \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial U}{\partial y} \right) \right\} dx$$

und geht direct in den Green'schen Satz der Potentialtheorie über, wenn wir $A_{11} = A_{22} = 1$, $A_{12} = A_{21} = A_0 = 0$ machen. Unter den vorliegenden Verhältnissen ($L(u) = 0$ in g, und $u = 0$ auf C) zeigt sie, dafs das erste Glied der rechten Seite von (5) gerade gleich dem zweiten wird.

Führen wir noch die (im Sinne des Uhrzeigers gerechnete) Bogenlänge s als Integrationsvariable ein, so erhalten wir als definitive Form der zweiten Variation:

$$(6) \quad J_2 \equiv 2\varepsilon \int_C U \left\{ \left(A_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cos(n,x) + \left(A_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + A_{22} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cos(n,y) \right\} ds,$$

unter n die nach dem Innern von g positiv gerechnete Normale verstanden.

Nun war U eine in weiten Grenzen willkürliche Function. Jedenfalls können wir in der Weise über sie verfügen, dafs ihre Werte auf C das eine Mal dasselbe Vorzeichen haben wie der $\{\}$-Factor in der letzten Gleichung, das andere Mal das entgegengesetzte. Das eine Mal wird alsdann J_2 positiv, das andere Mal negativ — vorausgesetzt, dafs der genannte Factor auf C nicht identisch Null ist, worauf wir sogleich näher eingehen. Von dem somit constatirten Vorzeichenwechsel der zweiten Variation können wir aber sofort auf einen Vorzeichenwechsel der sog. vollständigen Variation, d. h. auf das Nichtvorhandensein eines Maximums oder Minimums schliefsen. Wir brauchen zu dem Zwecke nur die in (4) definirten Werte von ξ mit einer Zahl δ zu multipliciren und letztere so klein zu nehmen, dafs bei der Taylor'schen Entwickelung das Vorzeichen der vollständigen Variation lediglich von den in δ quadratischen Gliedern, d. h. eben von unserer zweiten Variation abhängt.

Es bleibt noch der Ausnahmefall zu erledigen, wo in (6) der Factor unter dem Integralzeichen längs C identisch verschwindet. Dies würde erstens eintreten, wenn zugleich

$$(7) \qquad A_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + A_{12}\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{und} \quad A_{21}\frac{\partial u}{\partial x} + A_{22}\frac{\partial u}{\partial y} = 0\,.$$

Da nun $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ nicht gleichzeitig längs C verschwinden können, ohne dafs u im Innern von C identisch verschwindet, was gegen die Voraussetzungen ist, so muss $A_{11}A_{22} - A_{12}^2 = 0$, d. h. die Form (3) mufs überall längs C semidefinit sein. Verschwindet zweitens der Klammerfactor, ohne dafs die Gleichungen (7) einzeln bestehen, so bemerken wir, dafs u längs C constant (nämlich gleich Null) ist, und dafs daher

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varrho\cos(n, x)\,, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \varrho\cos(n, y)$$

wird, wo ϱ eine nicht identisch verschwindende Function von s ist. Der fragliche Factor heifst dann

$$\varrho\left(A_{11}\cos^2(n, x) + 2\,A_{12}\cos(n, x)\cos(n, y) + A_{22}\cos^2(n, y)\right);$$

sein Verschwinden besagt abermals, dafs die Form (3) längs C von semidefinitem Charakter sein müfste, oder dafs diese Curve für unsere Differentialgleichung $L = 0$ eine parabolische Curve ist.

Der Beweis für die Notwendigkeit des Jacobi'schen Kriteriums ist somit vollständig erbracht, es sei denn, dafs die oben genannte Curve C eine parabolische Curve für die Differentialgleichung $L = 0$ ist oder, was dasselbe bedeutet, eine Curve semidefiniten Charakters für die zugehörige Form (3) darstellt.