## Werk

**Titel:** Asymptotische Verteilungen einiger Schätzverfahren bei Trend und Fehlern in den V...

**Autor:** Krämer, W.

**Jahr:** 1985

**PURL:** https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?358794056_0032|log27

## Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

*Metrika, Volume 32, 1985, page 151–162*

# Asymptotische Verteilungen einiger Schätzverfahren bei Trend und Fehlern in den Variablen

Von *W. Krämer*, Wien[1]

*Übersicht*: Die vorliegende Arbeit untersucht die Konsequenzen von Trend für die asymptotischen Eigenschaften einiger Schätzverfahren in Fehler-in-den-Variablen-Modellen, bei Vorliegen der funktionalen Spezifikation. Dabei wird Trend als über alle Grenzen wachsende empirische Varianz der Regressoren interpretiert. Die untersuchten Schätzverfahren sind die Gewöhnliche und die Verallgemeinerte Kleinst-Quadrate-Methode (OLS bzw. GLS) sowie ein von Theil angegebenes Schätzverfahren, das die Kenntnis der Kovarianzmatrix der Fehler der exogenen Variablen voraussetzt. Es zeigt sich, daß im Gegensatz zum Standardfall ohne Trend OLS unter gewissen Zusatzbedingungen konsistent ist, und in diesem Fall die asymptotischen Verteilungen aller drei Verfahren übereinstimmen.

## 1 Einleitung und Zusammenfassung

Ökonometrische Modelle mit Fehlern in den Variablen stoßen in den letzten Jahren, nach einer langen Periode relativer Vernachlässigung, wieder auf zunehmendes Interesse. Ohnehin wurde die Existenz von Fehlern in nahezu allen ökonomischen Variablen kaum jemals bestritten, und standen vor allem statistisch-technische Schwierigkeiten einer verbreiteten Anwendung derartiger Modelle im Wege. Verglichen mit ökonometrischen Modellen ohne Variablenfehler sind Parameterschätzungen und deren stochastische Eigenschaften in Error-Modellen erheblich aufwendiger abzuleiten.

Der vorliegende Beitrag untersucht die asymptotischen Verteilungen einiger Schätzverfahren bei funktionaler Spezifikation (nichtstochastische Regressoren) des Fehler-in-den-Variablen-Modells. Im Gegensatz zum Standardfall wird dabei die Existenz von Trend in den Variablen des Modells zugelassen, in Weiterführung von *Schneeweiß* [1982] und *Krämer*. Man prüft leicht nach, daß Trend in den Variablen (im weiter unten spezifizierten Sinn) mit den Standardannahmen der asymptotischen Schätztheorie nicht kompatibel ist und daher auch die bekannten Standardresultate (etwa Inkonsistenz von OLS) nicht ohne weiteres übertragbar sind.

Im folgenden wird die Gewöhnliche Kleinst-Quadrate-Methode (OLS) der Verallgemeinerten Kleinst-Quadrate-Methode (GLS) und einem von *Theil* [S. 614] vorgeschla-

[1] Dr. *W. Krämer*, Institut für Höhere Studien, Stumpergasse 56, A–1060 Wien.

0026-1335/85/0300151-162$2.50 © 1985 Physica-Verlag, Wien

genen Verfahren gegenübergestellt, das die Kenntnis der Kovarianzmatrix der Fehler der exogenen Modellvariablen voraussetzt. Es zeigt sich, daß OLS bei trendbehafteten Regressoren und unter einigen Zusatzannahmen konsistent ist und in diesem Fall die asymptotischen Verteilungen aller Verfahren übereinstimmen. Die asymptotische Verteilung des Verfahrens von Theil für den Fall von trendbehafteten exogenen Variablen wurde schon von *Schneeweiß* [1976] abgeleitet. Verglichen mit *Krämer* und *Schneeweiß* [1982], wo allein linearer Trend betrachtet wird, ist der Trendbegriff im vorliegenden Beitrag wesentlich allgemeiner gehalten, und werden in Verallgemeinerung von *Schneeweiß* [1982] auch multiple Regressionen zugelassen.

Der folgende Abschnitt 2 klärt die Notation und stellt Modell und Schätzverfahren vor. Resultate und Beweise finden sich in Abschnitt 3.

## 2 Modell und Schätzverfahren

Man betrachte die Beziehung

$$y_t = \beta_1 z_{t1} + \ldots + \beta_k z_{tk} + \epsilon_t \qquad t = 1, \ldots, T \tag{1}$$

oder kompakt in Matrixschreibweise

$$y = Z\beta + \epsilon. \tag{2}$$

Dabei ist $y$ ein $T \times 1$-Vektor von Werten der abhängigen (endogenen) Variablen, $Z$ eine nichtstochastische $T \times K$-Matrix, $T \geqslant K$, $rg(Z) = K$, von Werten der exogenen Variablen, $\beta$ ein unbekannter $K \times 1$-Parametervektor und $\epsilon$ ein $T \times 1$-Störgrößenvektor mit $E(\epsilon) = 0, E(\epsilon\epsilon') = \sigma_\epsilon^2 I$.

Im Gegensatz zum Standardregressionsmodell seien gewisse Spalten von $Z$ durch zufällige Beoachtungsfehler gestört, d.h. an Stelle von $Z = [Z^{(1)} \vdots Z^{(2)}]$ wird $X = [X^{(1)} \vdots X^{(2)}]$ beobachtet, mit $X^{(1)} = Z^{(1)}, X^{(2)} = Z^{(2)} + V^{(2)}$ und einer $T \times K_2$-Zufallsmatrix $V^{(2)}$ $(K_2 \leqslant K)$. Sei $\beta = [\beta^{(1)\prime}, \beta^{(2)\prime}]'$ die zu $Z = [Z^{(1)} \vdots Z^{(2)}]$ analoge Zerlegung von $\beta$. Zur Vereinheitlichung der Schreibweise sei ferner $V = [V^{(1)} \vdots V^{(2)}]$ mit $V^{(1)} \equiv 0$ und $X = Z + V$. Mit diesen Vereinbarungen gilt

$$\begin{aligned} y &= [X^{(1)} \vdots X^{(2)} - V^{(2)}] \begin{bmatrix} \beta^{(1)} \\ \beta^{(2)} \end{bmatrix} + \epsilon \\ &= [X^{(1)} \vdots X^{(2)}] \begin{bmatrix} \beta^{(1)} \\ \beta^{(2)} \end{bmatrix} + \epsilon - V^{(2)} \beta^{(2)} \\ &= X\beta + u \end{aligned} \tag{3}$$

mit $u = \epsilon - V^{(2)} \beta^{(2)}$. Die letzte Gleichung liegt der OLS-Schätzung für $\beta$ zugrunde.

Für die Zeilen $v_t^{(2)}$ von $V^{(2)}$ wird vorausgesetzt, daß $E(v_t^{(2)}) = 0$ und

$$E\left\{\begin{bmatrix} \epsilon_t \\ \\ v_t^{(2)\prime} \end{bmatrix} [\epsilon_t, v_t^{(2)}]\right\} = \begin{bmatrix} \sigma_\epsilon^2 & \omega' \\ \\ \omega & \Omega \end{bmatrix} = \Sigma \text{ (regulär)}. \tag{4}$$

Zusätzlich seien $[\epsilon_t, v_t^{(2)}]$ und $[\epsilon_s, v_s^{(2)}]$ für $\sigma \neq t$ unabhängig, mit identischer Verteilung.

Von zentraler Bedeutung für alles weitere sind die Annahmen zum Grenzverhalten der Regressoren $z_{ti}$. Zur Vermeidung unnötig komplexer Schreibweise sei dabei Konvergenz durch "$\to$" oder „lim" symbolisiert, mit Unterdrückung, wo immer das ohne Verwechslungsgefahr möglich ist, des Index' $T$. Für spätere Zwecke seien hier ferner "$\xrightarrow{p}$" und "plim" zur Kennzeichnung von stochastischer und "$\xrightarrow{D}$" für Konvergenz in Verteilung eingeführt, und "o" sowie "0" sollen für Ordnungsrelationen sowohl im gewöhnlichen als auch im stochastischen Sinn stehen.

Zur Normalisierung von $Z'Z$ diene im weiteren eine Matrix $D_T$, mit

$$D_T = \begin{bmatrix} (\sum_{t=1}^{T} z_{t1}^2)^{1/2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (\sum_{t=1}^{T} z_{tK}^2)^{1/2} \end{bmatrix},$$

Diagonalelementen $D_{T,ii} > o$ $(i = 1, \ldots, K)$ und $D_{T,ij} = o$ $(i \neq j)$. Die asymptotischen Eigenschaften der weiter unten vorzustellenden Schätzverfahren werden unter den folgenden zwei Annahmen abgeleitet:

$$\max_{t=1,\ldots,T} |z_{ti}| = o(D_{T,ii}) \quad (i = 1, \ldots, K), \tag{5}$$

$$D_T^{-1} Z'Z D_T^{-1} \to Q \text{ (regulär)}. \tag{6}$$

Diese Formulierung folgt *Grenander/Rosenblatt* [1957]. Sie ist allgemeiner als in *Krämer* [1983], wo nur linearer Trend zugelassen ist, und auch weniger restriktiv als die Standardannahme

$$\frac{1}{T} Z'Z \to Q^* \text{ (regulär)}. \tag{7}$$

Aus (7) folgt unmittelbar, daß $\frac{1}{\sqrt{T}} D_T \to \bar{D}$ (regulär), und

$$D_T^{-1} Z'Z D_T^{-1} = \left(\frac{1}{\sqrt{T}} D_T\right)^{-1} \frac{1}{T} Z'Z \left(\frac{1}{\sqrt{T}} D_T^{-1}\right) \to \bar{D}^{-1} Q^* \bar{D}^{-1} \text{ (regulär)},$$

und auch (5) erweist sich mit einigen Zusatzüberlegungen als Konsequenz von (7). Umgekehrt folgt (7) aber nicht notwendig aus (5) und (6). Insbesondere ist (7), verletzt wenn einige Komponenten von $Z$ einen Trend enthalten, eine in ökonomischen Anwendungen sicher häufige und im Zentraum der vorliegenden Arbeit stehende Situation. Bei linearem Trend hat man etwa $Z'Z = 0\,(T^3)$, [*Krämer*] und ganz allgemein bei einem polynomialen Trend $p$'ter Ordnung $Z'Z = 0\,(T^{2p+1})$, im Widerspruch zu (7). *Grenander/Rosenblatt* [S. 245–254] geben eine Reihe von konkreten Regressorenmatrizen an, die (5) und (6), aber nicht (7) erfüllen.

Durch (5) und (6), obwohl allgemeiner als (7), werden auch weiterhin gewisse Variablenverläufe, etwa solche mit exponentiellem Trend, ausgeschlossen, während polynomiale Trends diese Bedingungen erfüllen. (5) impliziert Bedingung (1) in *Grenander/Rosenblatt* [S. 233], oder Bedingung (A5′) in *Schneeweiß* [1976, S. 114], d.h. die hier zugelassenen Zeitreihen sind, in der Terminologie von Grenander und Rosenblatt, „langsam wachsend". Außerdem folgt aus (5) sofort, daß

$$\sum_{t=1}^{T} z_{ti}^2 \to \infty \quad (i = 1, \ldots, K), \tag{8}$$

was bei Grenander und Rosenblatt sowie Schneeweiß als zusätzliche Bedingung formuliert werden muß.

Im weiteren sei eine trendbehaftete Variable in Verschärfung von (8) definiert durch

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} z_{ti}^2 \to \infty, \tag{9}$$

während für trendfreie Variable

$$\sum_{t=1}^{T} z_{tj}^2 = 0\,(T) \tag{10}$$

gelten soll. Die trendfreien Variablen seien, getrennt nach den Kriterien exakt/fehlerbehaftet in den Teilmatrizen $Z^{(1a)}$ und $Z^{(2a)}$, die trendbehafteten Variablen analog in den Teilmatrizen $Z^{(1b)}$ und $Z^{(2b)}$ zusammengefaßt, mit

$$Z^{(1)} = [Z^{(1a)} \vdots Z^{(1b)}],\; Z^{(2)} = [Z^{(2a)} \vdots Z^{(2b)}]$$

$$Z = [Z^{(1a)} \vdots Z^{(1b)} \vdots Z^{(2a)} \vdots Z^{(2b)}].$$

Analog seien auch $V$, $X$, $\beta$, $D_T$ und $\Sigma$ zerlegt. So wird etwa (4) in ausführlicher Schreibweise zu

$$\Sigma = E\left\{\begin{bmatrix} \epsilon_t \\ v_t^{(2a)'} \\ v_t^{(2b)'} \end{bmatrix} [\epsilon_t, v_t^{(2a)}, v_t^{(2b)}]\right\} = \begin{bmatrix} \sigma_\epsilon^2 & \omega^{(a)'} & \omega^{(b)'} \\ \omega^{(a)} & \Omega^{(aa)} & \Omega^{(ab)} \\ \omega^{(b)} & \Omega^{(ba)} & \Omega^{(bb)} \end{bmatrix}.$$

Die OLS-Schätzung $\hat{\beta}^{(\mathrm{OLS})}$ für $\beta$ ist im vorliegenden Modellzusammenhang gegeben durch

$$\hat{\beta}^{(\mathrm{OLS})} = (X'X)^{-1}\, X'y. \tag{11}$$

Unter (7) ist $\hat{\beta}^{(\mathrm{OLS})}$ im allgemeinen inkonsistent, wie in der Lehrbuchliteratur an zahlreichen Beispielen zu sehen [siehe etwa *Schönfeld,* S. 105]. Alternative Schätzungen, von denen im folgenden zwei näher untersucht werden sollen, unterscheiden sich vor allem durch die zur Schätzung von $\beta$ herangezogenen Zusatzinformationen (wobei hier offen bleibt, aus welchen Quellen diese Kenntnis stammt). Die Verallgemeinerte KQ–Schätzung setzt (bis auf eine skalare Konstante), die Kenntnis von $\Sigma$ voraus, und ist damit definiert durch

$$\sum_{t=1}^{T} [\epsilon_t, v_t^{(2)}]\, \Sigma^{-1}\, [\epsilon_t, v_t^{(2)}]' = \min! \tag{12}$$

mit der Nebenbedingung

$$y = X^{(1)}\, \hat{\beta}^{(1)(\mathrm{GLS})} + (X^{(2)} - V^{(2)})\, \hat{\beta}^{(2)(\mathrm{GLS})} + \epsilon. \tag{13}$$

Dieses Minimierungsproblem, mit den Variablen $\epsilon$, $V^{(2)}$ und $\hat{\beta}^{(\mathrm{GLS})} = [\hat{\beta}^{(1)(\mathrm{GLS})'} : \hat{\beta}^{(2)(\mathrm{GLS})'}]'$, bleibt unter skalarer Multiplikation von $\Sigma$ invariant. Für Einzelheiten siehe etwa *Schönfeld* [S. 114–118]. Die dort [S. 114] angegebenen Regeln sind zu (12) und (13) äquivalent. Im bivariaten Regressionsmodell mit fehlergestörter exogener Variablen läßt sich ein geschlossener Ausdruck für $\hat{\beta}^{(\mathrm{GLS})}$ ableiten [*Schneeweiß*, 1980, S. 55]. Das erscheint grundsätzlich auch für $K = 3$, nicht aber für $K \geqslant 4$ möglich, da die Berechnung von $\hat{\beta}^{(\mathrm{GLS})}$ die Lösung einer Gleichung $K$'ten Grades erfordert. Wie man weiter sofort sieht, wird durch das in (12) und (13) gegebene Minimierungsproblem für $v_t^{(2)}$ = leer (keine Fehler in den exogenen Variablen) gerade die OLS-Schätzung $\hat{\beta}^{(\mathrm{OLS})}$ definiert.

*Theil* [S. 614] schlägt ein Schätzverfahren vor, das auf der Kenntnis (bzw. konsistenten Schätzbarkeit) von $\Omega$ basiert. Mit

$$\tilde{\Omega} = E\, [v_t^{(1)} : v_t^{(2)}]'\, [v_t^{(1)} : v_t^{(2)}] = \begin{bmatrix} o & o \\ o & \Omega \end{bmatrix}$$

ist die zugehörige Parameterschätzung $\hat{\beta}^{(\mathrm{Th})}$ gegeben durch

$$\hat{\beta}^{(\mathrm{Th})} = (X'X - T\tilde{\Omega})^{-1} X'y. \tag{14}$$

Offenbar ist auch $\hat{\beta}^{(\mathrm{Th})}$ bei fehlerfreien Beobachtungen mit $\hat{\beta}^{(\mathrm{OLS})}$ identisch und für $\omega = o$ auch konsistent. Schneeweiß (1976) diskutiert eine auf der zusätzlichen Kenntnis von $\omega$ basierende Verallgemeinerung und weist deren Konsistenz und asymptotische Normalverteilung auch für $\omega \neq 0$ nach.

## 3 Asymptotische Verteilungen

Konsistenz von OLS vorausgesetzt, werden nun die asymptotischen Verteilung von $\hat{\beta}^{(\mathrm{OLS})}$, $\hat{\beta}^{(\mathrm{GLS})}$ und $\hat{\beta}^{(\mathrm{Th})}$ verglichen. Daher zunächst eine Bedingung für die Konsistenz von OLS.

**Satz 1 (Konsistenz von OLS)**

$Z^{(2a)}$ leer (d.h. alle fehlerbehafteten exogenen Variablen enthalten Trend) $\Rightarrow \hat{\beta}^{(\mathrm{OLS})}$ ist (schwach) konsistent. Unter der Zusatzvoraussetzung

$$\frac{1}{\sqrt{T}} D_T^{(a)} \to \bar{D}^{(a)} \quad \text{(regulär)}$$

(eine Verschärfung von (5)) [2]), und abgesehen von einer Parametermenge vom Maß 0, gilt auch die Umkehrung.

**Beweis**

Sei zunächst $Z^{(2a)}$ leer, d.h.

$$D_T = \begin{bmatrix} D_T^{(1a)} & & 0 \\ & D_T^{(1b)} & \\ 0 & & D_T^{(2b)} \end{bmatrix}.$$

Dann gilt

$$\hat{\beta}^{(\mathrm{OLS})} - \beta = (X'X)^{-1} X'u$$
$$= D_T^{-1} D_T (X'X)^{-1} D_T D_T^{-1} X'u \tag{15}$$

mit

$$D_T^{-1} X'u = D_T^{-1} Z'u + D_T^{-1} V'u = 0(1). \tag{16}$$

Die letzte Behauptung ergibt sich unmittelbar aus

$$p\lim D_T^{-1} V'u = 0 \tag{17}$$

und der Konstanz der Varianz aller Komponenten von $D_T^{-1} Z'u$. Wegen $Z^{(2a)}$ = leer prüft man weiterhin leicht nach, daß

$$p\lim D_T^{-1} X'X D_T^{-1} = \lim D_T^{-1} Z'Z D_T^{-1} = Q, \tag{18}$$

woraus wegen $D_T (X'X)^{-1} D_T \to Q^{-1} < \infty$, $D_T^{-1} \to 0$ und (15) die Konsistenz von OLS sofort folgt.

---

[2] Daß dies in der Tat eine Verschärfung bedeutet, zeigt etwa das Beispiel $z_t := 1/\sqrt{t}$. Diese Folge erfüllt (5) und (6), aber $\Sigma z_t^2 / T \to 0$, d.h. $\bar{D}^{(a)}$ ist singulär. Allerdings ist die Regularitätsvoraussetzung für $\bar{D}^{(a)}$ vor allem durch die Beweistechnik bedingt und möglicherweise überflüssig.

Sei nun umgekehrt $Z^{(2a)}$ nicht leer, und zusätzlich existiere $\bar{D}^{(a)} = \lim \frac{1}{\sqrt{T}} D_T^{(a)}$ (regulär). Zunächst gilt (18) nun nicht mehr, aber

$$p\lim D_T^{-1} X'X D_T^{-1} = Q + R \tag{19}$$

ist weiterhin regulär. Dabei ist $R$ eine Blockdiagonal-Matrix mit $\bar{D}^{(2a)^{-1}} \Omega^{(aa)} \bar{D}^{(2a)^{-1}}$ als einzigem von 0 verschiedenen Block. Man arrangiere ferner die Spalten von $Z$ und $X$ dergestalt um, daß die trendfreien Komponenten zusammenhängende Teilmatrizen bilden, d.h. $Z = [Z^{(a)} \colon Z^{(b)}]$ und $X = [X^{(a)} \colon X^{(b)}]$. Mit diesen Vereinbarungen läßt sich (15) schreiben als

$$\hat{\beta}^{(\mathrm{OLS})} - \beta = [\sqrt{T} D_T^{-1}]\,[D_T (X'X)^{-1} D_T] \left[ \frac{1}{\sqrt{T}} D_T^{-1} X'u \right], \tag{20}$$

wobei

$$\lim \sqrt{T} D_T^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{D}^{(a)^{-1}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, p\lim D_T (X'X)^{-1} D_T = (Q+R)^{-1} \tag{21}$$

und

$$\frac{1}{\sqrt{T}} D_T^{-1} X'u = \frac{1}{\sqrt{T}} D_T^{-1} Z'u + \frac{1}{\sqrt{T}} D_T^{-1} V'u \tag{22}$$

$$\overset{P}{\to} \lim (\sqrt{T} D_T^{-1})\, p\lim \frac{1}{T} V'u$$

$$= \begin{bmatrix} (\bar{D}^{(a')})^{-1} \; p\lim \frac{1}{T} V^{(a)\prime} u \\ 0 \end{bmatrix} \neq 0.$$

Die letzte Ungleichheit, aus der die Inkonsistenz von OLS unmittelbar folgt, ergibt sich aus

$$p\lim \frac{1}{T} V^{(2a)\prime} u = \omega^{(a)} - \Omega^{(aa)} \beta^{(2a)} - \Omega^{(ab)} \beta^{(2b)} \neq 0 \tag{23}$$

(bis auf eine Parametermenge vom Lesbesgue-Maß 0), **q.e.d.**

Die in Satz 1 gegebene Konsistenzbedingung erscheint – Gültigkeit und Plausibilität der übrigen Modellannahmen vorausgesetzt – nicht sehr restriktiv. Mit Sicherheit trendfreie Variablen hat man in ökonometrischen Modellen vor allem in Gestalt von saisonalen oder sonstigen Dummies oder monetären Variablen wie Zinssätzen, die eine sachlogisch vorgegebene Obergrenze besitzen und bei denen Meßfehler vergleichsweise unbedeutend erscheinen. Typische fehlerbehaftete Variable wie Bruttosozialprodukt oder Geldmenge jedoch enthalten in aller Regel auch einen Trend, d.h. erfüllen die Voraussetzungen von Satz 1.

Wie der Beweis ferner zeigt, sind für die Konsistenz von OLS (zusätzlich zu den Bedingungen von Satz 1) nicht (5) und (6), sondern nur (6) und (8) erforderlich. Zur Herleitung der asymptotischen Verteilung von $\hat{\beta}^{(OLS)}$ ist (5) aber von zentraler Bedeutung, wie die folgenden Lemmata zeigen.

**Lemma 1** [*Huber*]

Seien $\gamma_{tt}$ $(t = 1, \ldots, T)$ die Diagonalelemente von $Z(Z'Z)^{-1}Z'$. Dann gilt

$$D_T (Z'Z)^{-1} Z'u \xrightarrow{D} N(0, \sigma_u^2 Q^{-1}) \Longleftrightarrow \max \gamma_{tt} \to 0 \qquad t = 1, \ldots, T. \tag{24}$$

Zum Beweis siehe *Huber* [S. 803]. (24) ist eine notwendige und hinreichende Bedingung für asymptotische Normalität von OLS im Standardregressionsmodell, von Huber für variable Regressorenzahl gezeigt, aber unmittelbar auf den hier vorliegenden Modellzusammenhang anwendbar.

**Lemma 2**

Aus (5) und (6) folgt $\max \gamma_{tt} \to 0 \quad t = 1, \ldots, T$.

**Beweis**

Sei $(c_{ij}) = (Z'Z)^{-1}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \max \gamma_{tt} &= \max \sum_{i,j=1}^{K} z_{ti} z_{tj} c_{ij} \qquad t = 1, \ldots, T \\ &\leqslant \sum_{i,j=1}^{K} (\max_t |z_{ti}|)(\max_t |z_{tj}|)\, |c_{ij}| \\ &= \sum_{i,j=1}^{K} \frac{(\max_t |z_{ti}|)}{D_{T,ii}} \frac{(\max_t |z_{tj}|)}{D_{T,jj}} D_{T,ii} D_{T,jj} |c_{ij}|. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung verschwinden die ersten beiden Faktoren im letzten Ausdruck für $T \to \infty$, und

$$D_{T,ii} D_{T,jj} |C_{ij}| \to |(Q^{-1})_{ij}| < \infty.$$

woraus das Lemma sofort folgt.

**Satz 2 (Asympt. Normalverteilung und rel. Effizienz von OLS)**

Sei $Z^{(2a)}$ leer, und es gelte (5) und (6). Dann gilt

$$D_T (\hat{\beta}^{(OLS)} - \beta) \xrightarrow{D} N(0, \sigma_u^2 Q^{-1}), \tag{25}$$

und diese Grenzverteilung ist identisch mit der von $D_T (\hat{\beta}^{(GLS)} - \beta)$ und $D_T (\beta^{(Th)} - \beta)$.

**Beweis**

Man hat

$$D_T(\hat{\beta}^{(OLS)} - \beta) = D_T(X'X)^{-1}X'u \tag{26}$$

$$= D_T(Z'Z)^{-1}Z'u + [D_T(X'X)^{-1}D_T - D_T(Z'Z)^{-1}D_T]D_T^{-1}X'u$$

$$+ D_T(Z'Z)^{-1}D_T[D_T^{-1}X'u - D_T^{-1}Z'u].$$

Dabei sind $D_T^{-1}X'u$ und $D_T(Z'Z)^{-1}D_T$ (stochastisch) beschränkt, und wegen (17) und (18) verschwinden die Ausdrücke in eckigen Klammern für $T \to \infty$, woraus (25) wegen Lemma 1 unmittelbar folgt.

Zum Beweis des 2. Teils wird gezeigt, daß

$$D_T(\hat{\beta}^{(OLS)} - \hat{\beta}^{(GLS)}) \xrightarrow{p} 0 \tag{27}$$

$$D_T(\hat{\beta}^{(OLS)} - \hat{\beta}^{(Th)}) \xrightarrow{p} 0. \tag{28}$$

Dabei folgt (28) sofort aus

$$D_T(\hat{\beta}^{(OLS)} - \hat{\beta}^{(Th)}) = D_T[(X'X)^{-1} - (X'X - T\tilde{\Omega})^{-1}]X'y$$

$$= \{D_T(X'X)^{-1}D_T - [D_T^{-1}(X'X - T\tilde{\Omega})D_T^{-1}]^{-1}\}D_T^{-1}X'y,$$

$D_T^{-1}X'y = 0(1)$ und

$$\{D_T(X'X)^{-1}D_T - [D_T(X'X - T\tilde{\Omega})D_T^{-1}]^{-1}\} \xrightarrow{p} 0. \tag{29}$$

Zum Beweis von (29) beachte man, daß

$$D_T^{-1}(X'X - T\tilde{\Omega})D_T^{-1} = D_T^{-1}X'XD_T^{-1} - \sqrt{T}D_T^{-1}\tilde{\Omega}\sqrt{T}D_T^{-1},$$

wobei $D_T^{-1}X'XD_T^{-1} \xrightarrow{p} Q$ (wegen (18)), und

$$\sqrt{T}D_T^{-1}\tilde{\Omega}\sqrt{T}D_T^{-1} \xrightarrow{p} 0$$

(da für die Diagonalelemente von $D_T$, die zu den von 0 verschiedenen Zeilen und Spalten von $\tilde{\Omega}$ gehören, nach Voraussetzung $D_{T,ii}/\sqrt{T} \to \infty$, d.h. $\sqrt{T}/D_{T,ii} \to 0$).

Der Beweis von (27) erfordert einige zusätzliche Überlegungen. Dazu sei $[\beta^{(1)'}, \beta^{(2)'}]'$ die in (3) vereinbarte Zerlegung von $\beta$ entsprechend der Aufteilung $X = [X^{(1)} : X^{(2)}]$ in korrekt gemessene und gestörte exogene Variable. Nach *Schönfeld* [S. 117] ist $\hat{\beta}^{(2)(GLS)}$ gegeben durch

$$(W - \mu\Sigma)\begin{bmatrix} -1 \\ \hat{\beta}^{(2)(\mathrm{GLS})} \end{bmatrix} = 0, \tag{30}$$

mit

$$W = \begin{bmatrix} \tilde{y}'\tilde{y} & \tilde{y}'\tilde{X}^{(2)} \\ \tilde{X}^{(2)\prime}\tilde{y} & \tilde{X}^{(2)\prime}\tilde{X}^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{y} = y - X^{(1)}(X^{(1)\prime}X^{(1)})^{-1}X^{(1)\prime}y$$

$$\tilde{X}^{(2)} = X^{(2)} - X^{(1)}(X^{(1)\prime}X^{(1)})^{-1}X^{(1)\prime}X^{(2)}$$

$\mu$ kleinster Eigenwert von $P\,W\,P'$

$P$ regulär mit $P'P = \Sigma^{-1}$.

Daraus folgt

$$\hat{\beta}^{(2)(\mathrm{GLS})} = (\tilde{X}^{(2)\prime}\tilde{X}^{(2)} - \mu\Omega)^{-1}(\tilde{X}^{(2)\prime}y - \mu\omega). \tag{31}$$

Andererseits gilt

$$\hat{\beta}^{(2)(\mathrm{OLS})} = (\tilde{X}^{(2)\prime}\tilde{X}^{(2)})^{-1}\tilde{X}^{(2)\prime}\tilde{y}, \tag{32}$$

d.h.

$$D_T^{(2)}[\hat{\beta}^{(2)(\mathrm{GLS})} - \hat{\beta}^{(2)(\mathrm{OLS})}] \tag{33}$$

$$= [D_T^{(2)-1}(\tilde{X}^{(2)\prime}\tilde{X}^{(2)} - \mu\Omega)D_T^{(2)-1}]^{-1}D_T^{(2)-1}(\tilde{X}^{(2)\prime}\tilde{y} - \mu\omega)$$

$$- [D_T^{(2)-1}\tilde{X}^{(2)\prime}\tilde{X}^{(2)}D_T^{(2)-1}]^{-1}D_T^{(2)-1}\tilde{X}^{(2)\prime}y$$

$$= [(D_T^{(2)-1}(\tilde{X}^{(2)\prime}\tilde{X}^{(2)} - \mu\Omega)D_T^{(2)-1})^{-1} -$$

$$- (D_T^{(2)-1}\tilde{X}^{(2)\prime}\tilde{X}^{(2)}D_T^{(2)-1})^{-1}]$$

$$\cdot D_T^{(2)-1}(\tilde{X}^{(2)\prime}\tilde{y} - \mu\omega)$$

$$+ (D_T^{(2)-1}\tilde{X}^{(2)\prime}\tilde{X}^{(2)}D_T^{(2)-1})[D_T^{(2)-1}\mu\omega] \xrightarrow{p} 0.$$

Zum Beweis dieser letzten Behauptung beachte man, daß

$$\mu = \min_a \frac{a'PWP'a}{a'a} = \min_b \frac{b'Wb}{b'P^{-1}(P^{-1})'b}$$

mit von Null verschiedenen Vektoren $a$ und $b = P'a$. Für $b = (1, -\beta^{(2)\prime})'$ liefert dies

$$\mu \leqslant \| u - X^{(1)} (X^{(1)\prime} X^{(1)})^{-1} X^{(1)\prime} u \|^2 / b' \tilde{\Sigma} b$$

$$= 0\,(T) = o\,(D_T^{(2)}) \text{ (komponentenweise)},$$

d.h. die Ausdrücke in eckigen Klammern verschwinden für $T \to \infty$. Wegen stochastischer Beschränktheit der übrigen Ausdrücke folgt daraus (33).

Es bleibt zu zeigen, daß auch

$$D_T^{(1)} (\hat{\beta}^{(1)(\mathrm{OLS})} - \hat{\beta}^{(1)(\mathrm{GLS})}) \xrightarrow{p} 0. \tag{34}$$

Dazu beachte man [*Schönfeld*. S. 116], daß

$$\hat{\beta}^{(1)(\mathrm{GLS})} = (X^{(1)\prime} X^{(1)})^{-1} X^{(1)\prime} [y : X^{(2)}] \begin{bmatrix} 1 \\ -\hat{\beta}^{(2)(\mathrm{GLS})} \end{bmatrix},$$

während

$$\hat{\beta}^{(1)(\mathrm{OLS})} = (X^{(1)\prime} X^{(1)})^{-1} X^{(1)\prime} [y : X^{(2)}] \begin{bmatrix} 1 \\ -\hat{\beta}^{(2)(\mathrm{OLS})} \end{bmatrix},$$

d.h.

$$D_T^{(1)} (\hat{\beta}^{(1)(\mathrm{OLS})} - \hat{\beta}^{(1)(\mathrm{GLS})}$$

$$= D_T^{(1)} (X^{(1)\prime} X^{(1)})^{-1} D_T^{(1)} D_T^{(1)-1} X^{(1)\prime} X^{(2)} D_T^{(2)-1} D_T^{(2)}$$

$$[\hat{\beta}^{(2)(\mathrm{OLS})} - \hat{\beta}^{(2)(\mathrm{GLS})}].$$

Da $Q^{-1} = p\lim D_T (X'X)^{-1} D_T$ regulär, existieren auch

$$p\lim D_T^{(1)} (X^{(1)\prime} X^{(1)})^{-1} D_T^{(1)} < \infty$$

$$p\lim D_T^{(1)-1} X^{(1)\prime} X^{(2)} D_T^{(2)-1} < \infty,$$

woraus (34) wegen $D_T^{(2)} [\hat{\beta}^{(2)(\mathrm{OLS})} - \hat{\beta}^{(2)(\mathrm{GLS})}] \xrightarrow{p} 0$ sofort folgt und was den Beweis des Satzes komplettiert, **q.e.d.**

Um Satz 2 in der herkömmlichen Weise zur Konstruktion von (asymptotischen) Signifikanztests und Konfidenzintervallen zu gebrauchen, ist eine Modifikation von (25) vonnöten, da $D_T$ nicht beobachtbar. Stattdessen kann $\tilde{D}_T$ verwendet werden, mit $\tilde{D}_{T,ii} = (\sum_{t=1}^{T} x_{ti}^2)^{1/2}$. Wie man leicht nachprüft, gilt unter den Voraussetzungen von Satz 2, daß

$$\tilde{D}_T D_T^{-1} \xrightarrow{p} I_K,$$

d.h. $\tilde{D}_T(\hat{\beta}^{(OLS)} - \beta) = \tilde{D}_T D_T^{-1} D_T(\hat{\beta}^{(OLS)} - \beta)$ und $D_T(\hat{\beta}^{(OLS)} - \beta)$ haben die gleiche Grenzverteilung.

**Danksagung**

Ich danke einem anonymen Gutachter für zahlreiche Hinweise und Verbesserungsvorschläge.

**Literaturverzeichnis**

*Grenander, U.*, und *M. Rosenblatt*: Statistical Analysis of Stationary Time Series. New York 1957.
*Huber, P.*: Robust Regression: Asymptotics, Conjectures and Monte Carlo. Annals of Statistics **1**, 1973, 799–821.
*Krämer, W.*: Kleinst-Quadrate Schätzung ökonometrischer Error-Modelle mit Trend in exogenen Variablen. Allgemeines Statistisches Archiv, 1983, 252–259.
*Schneeweiß, H.*: Consistent Estimation of a Regression with Errors in the Variables. Metrika **23**, 1976, 101–115.
–: Modelle mit Fehlern in den Variablen. Methods of Operations Research **37**, 1980, 41–77.
–: A Simple Regression Model with Trend and Error in the Exogenous Variables. In: Games Economic Dynamics, and Time Series Analysis, hrsg. v.: Deistler-Fürst-Schwödiauer, Wien–Würzburg 1982.
*Schönfeld, P.*: Methoden der Ökonometrie. Band **2**, München 1971.
*Theil, H.*: Principles of Econometrics. New York 1971.

Eingegangen am 6. April 1983
(Revidierte Fassung eingegangen am 8. Juni 1983)