Werk

Titel: Sur les structures fibrées osculatrices d'une surface de RIEMANN.

Autor: Teleman, Costake

Jahr: 1960

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?358147735_0034|log15

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Sur les structures fibrées osculatrices d'une surface de RIEMANN

par COSTAKE TELEMAN, Bucarest

En utilisant la théorie des classes des représentations de M. ANDRÉ WEIL [11] et la théorie des connexions infinitésimales (intégrables) de M. EHRESMANN, [2], nous donnons une interprétation géometrique des systèmes homographiques sur une surface de RIEMANN R, que nous avons définis dans [9]. Cette interprétation utilise des structures fibrées généralisant la structure fibrée tangente de R, ayant pour fibres des espaces projectifs.

1. Soit R une surface de RIEMANN fermée, de genre $g > 0$, que nous identifierons à l'ensemble des classes de transitivité z^Γ d'un groupe homographique Γ du cercle $|z| < 1$ si $g > 1$ ou du plan fini (z) si $g = 1$. On sait que le groupe Γ est engendré par $2g$ générateurs $S_1, S_1', S_2, S_2', \ldots, S_g, S_g'$ liés par une seule relation

$$S_1 S_1' S_1^{-1} S_1'^{-1} S_2 S_2' S_2^{-1} S_2'^{-1} \ldots S_g S_g' S_g^{-1} S_g'^{-1} = 1 .$$

Le cercle $|z| < 1$ ou le plan (z) joue le rôle de surface universelle de recouvrement de R et nous le désignerons par $\tilde{R}$ ou encore par $(\tilde{R}, R, \Gamma)$, pour mettre en évidence la structure fibrée définie dans $\tilde{R}$ par les classes de transitivité du groupe Γ.

Si $r : \Gamma \to G_{q+1} = GL(q+1, C)$ est une représentation linéaire d'ordre $q+1$ du groupe Γ, nous désignerons par $[r]$ la *représentation projective* de Γ qu'on obtient en composant r avec l'homomorphisme canonique χ_q de G_{q+1} sur le groupe quotient de G_{q+1} et de son centre Z_{q+1}. Le groupe G_{q+1} opère dans l'espace vectoriel complexe V^{q+1} à $q+1$ dimensions, tandis que $H_q = G_{q+1}/Z_{q+1}$ peut être identifié au groupe des homographies de l'espace projectif complexe P^q. Les représentations $r, [r]$ associent à la structure fibrée $(\tilde{R}, R, \Gamma)$ une structure fibrée $(E_r, R, V^{q+1}, G_{q+1})$ de fibre V^{q+1} et une structure fibrée $(E_{[r]}, R, P^q, H_q)$ de fibre P^q. Ces structures fibrées sont algébriques, d'après les résultats de SERRE [8] et ATIYAH [1].

Nous dirons avec M. ANDRÉ WEIL, que *deux représentations r, r' sont équivalentes s'il existe une matrice M, à éléments holomorphes dans $\tilde{R}$, ayant le déterminant $|M| \neq 0$ dans $\tilde{R}$ et subissant les transformations*

$$M^S = r(S)\, M\, r'(S^{-1}) , \quad S \in \Gamma . \tag{1}$$

En général, si F est une fonction définie dans $\tilde{R}$, nous désignerons par F^S la fonction qu'on obtient en composant F avec la fonction

$$z^S = \frac{\alpha_S z + \beta_S}{\gamma_S z + \delta_S}$$

définissant l'élément S du groupe Γ, donc $F^S(z) = F(z^S)$.

De même, nous dirons que *deux représentations projectives du groupe* Γ; $\varrho, \varrho' : \Gamma \to H_q$, *sont équivalentes, si on peut trouver une matrice* M, *holomorphe dans* $\tilde{R}$ *et ayant* $|M| \neq 0$ *et subissant des transformations de la forme*

$$\mu_S M^S = M_S M M_S'^{-1}, \tag{2}$$

où μ_S sont des fonctions méromorphes dans $\tilde{R}$ et M_S, M_S' sont des éléments de G_{q+1}, appartenant aux classes $\chi_q^{-1} \circ \varrho(S)$, $\chi_q^{-1} \circ \varrho'(S)$.

On peut démontrer les propositions suivantes:

Proposition 1. *Les structures fibrées algébriques associées à deux représentations linéaires (projectives) sont équivalentes si et seulement si ces représentations sont équivalentes.*

Proposition 2. *Si deux représentations linéaires* r, r' *sont équivalentes, les représentations projectives* $[r], [r']$ *sont aussi équivalentes.*

Proposition 3. *Si la représentation projective* p' *est équivalente à une représentation de la forme* $[r]$, r *étant une représentation linéaire de* Γ, *alors on peut trouver une représentation linéaire* r', *équivalente à* r, *telle que* $p' = [r']$.

2. Soit $u = (u_0, u_1 \ldots, u_q)$ un système homographique d'ordre q de la surface R [9, page 206]. Ce système définit une représentation projective π_u: $\Gamma \to H_q$. Nous allons démontrer le

Théorème 1. *Les représentations projectives définies par deux systèmes homographiques d'ordre* q *sont équivalentes.*

Considérons les transformations subies par les fonctions u_i, qui sont de la forme

$$\varrho_S u_i^S = \sum_{j=0}^{q} c_{iS}^j u_j, \quad (i = 0, 1, \ldots, q) \tag{3}$$

et que nous écrirons sous forme vectorielle

$$\varrho_S u^S = M_S u, \qquad M_S = (c_{iS}^j). \tag{4}$$

D'après la théorie de LAGUERRE et FORSYGHT [9, page 209] on peut trouver deux fonctions analytiques $h(z)$, $\lambda(z)$, telles que l'équation différentielle linéaire d'ordre $q+1$, ayant $\lambda u_0, \lambda u_1, \ldots, \lambda u_q$ pour intégrales et h pour

paramètre indépendant, ait les coefficients de $d^q(\lambda u)/dh^q$, $d^{q-1}(\lambda u)/dh^{q-1}$ nuls. La fonction h n'a pas d'autres singularités dans $\tilde{R}$ que des pôles simples et subit des transformations homographiques

$$h^S = \frac{a_S h + b_S}{c_S h + d_S} .$$

De plus, dh/dz ne s'annule en aucun point de $\tilde{R}$.

Les fonctions λu_i forment un système homographique définissant la même représentation projective du groupe Γ que le système u. Nous supposons qu'on a remplacé de l'avance le système u par λu. Dans ce cas, on peut prendre dans (4),

$$\varrho_S = \left(\frac{dh^S}{dh}\right)^{-\frac{q}{2}}, \tag{5}$$

donc ϱ_S est défini au signe près. De la formule (5) on déduit qu'on a $\varrho_{S'}(\varrho_S)^{S'} = \pm \varrho_{SS'}$, $(S, S' \in \Gamma)$ et on peut choisir les signes des ϱ_S tel que le signe – soit exclu. En appliquant alors l'opérateur S' aux deux membres de l'égalité (4), on obtient, en tenant compte que le wronskien W des fonctions u_i n'est pas nul, [9, page 206],

$$M_{SS'} = M_S M_{S'} ,$$

donc on a la représentation linéaire de Γ,

$$r : S \to M_S \tag{5'}$$

et $\pi_u = [r]$.

Soit ω une différentielle abélienne de première espèce de la surface R, n'ayant que des zéros simples. On a donc $\omega^S = \omega$, $(S \in \Gamma)$.

Les formules (4), (5) montrent que le vecteur

$$v = \left(\frac{\omega}{dh}\right)^{\frac{q}{2}} u , \quad (i = 0, 1, \ldots, q) \tag{6}$$

qui est définit dans $\tilde{R}$, au signe près, subit les transformations

$$v^S = \pm M_S v . \tag{7}$$

Si l'on considère la matrice carrée

$$\Phi = \left(\frac{d^j v_i}{\omega^j}\right), \quad \left(\frac{d}{\omega} = \frac{dz}{\omega}\frac{d}{dz}\right) \tag{8}$$

on a

$$\Phi^S = \pm M_S \Phi . \tag{9}$$

Notons qu'on a

$$|\Phi| = \pm 1 . \tag{10}$$

Considérons un second système homographique u', du même ordre q, et associons-lui une représentation $r' : S \to M'_S$ et une matrice Φ', par des formules analogues à (4) et (8).

Les matrices Φ, Φ' ont en chaque point deux déterminations, qui se permutent quand on entoure un zéro de ω, si q est un nombre impair. Par contre, la matrice

$$M = \Phi\Phi'^{-1} \tag{11}$$

est uniforme dans $\tilde{R}$ et a le module du déterminant égal à 1. Montrons que les éléments de la matrice M sont holomorphes dans $\tilde{R}$. En effet, Φ et Φ' sont régulières en chaque point de $\tilde{R}$ où $\omega \neq 0$. Dans le voisinage d'un zéro de ω, on peut trouver un uniformisateur ζ tel qu'on ait $\omega = \zeta d\zeta$ et en considérant le vecteur

$$t = \left(\frac{d\zeta}{dh}\right)^{\frac{q}{2}} u$$

on montre par recurrence qu'on a les formules

$$\frac{d^j v}{\omega^j} = \sum_{s=0}^{j} c_s^j \zeta^{\frac{q}{2} - 2j + s} \frac{d^s t}{d\zeta^s} , \tag{12}$$

où les c_s^j sont des constantes définies par

$$c_s^{j+1} = c_{s-1}^j + \left(\frac{q}{2} - 2j + s\right) c_s^j ; \quad c_s^j = 0 \ (j < s) .$$

Si l'on introduit la matrice

$$Z = (\zeta_s^j) , \quad \zeta_s^j = c_s^j \zeta^{\frac{q}{2} - 2j + s} ,$$

on peut écrire les formules (12) sous la forme

$$\Phi = TZ , \quad T = \left(\frac{d^s t_i}{d\zeta^s}\right)$$

et on a une formule analogue pour Φ', $\Phi' = T'Z$. On a donc dans le voisinage du point $\zeta = 0$, $M = TT'^{-1}$; or les éléments des matrices T, T' sont holomorphes dans le voisinage considéré et on a de plus $|T'| \neq 0$, ce qui prouve que M est une matrice régulière dans $\tilde{R}$.

La formule (11) et la formule (9), ainsi que la formule analogue à (9), con-

cernant la matrice Φ', montrent qu'on a des formules de la forme

$$\varepsilon_S M^S = M_S \, M \, M_S'^{-1}, \quad (\varepsilon_S = \pm 1)$$

qui démontrent le théorème 1.

4. Si l'on remplace les fonctions u_i d'un système homographique d'ordre q, par $q+1$ combinaisons linéaires des u_i, linéairement indépendantes, on obtient un nouveau système et les systèmes qu'on obtient de cette manière forment une *structure homographique* de la surface R [9]. Nous avons montré que les structures homographiques d'ordre q de la surface R forment une multiplicité linéaire de dimension complexe $(q^2+2q)(g-1)$, si $g>1$. Il en résulte que les systèmes homographiques d'ordre q de R forment une multiplicité à $(q^2+2q)(g-1)+(q+1)^2$ dimensions complexes, donc les représentations projectives π_u, définies par ces systèmes forment une multiplicité à $(q^2+2q)g$ dimensions.

Théorème 2. *Toute représentation projective Γ, équivalente à une représentation π_u, est de la forme $\pi_{u'}$, u' étant un système homographique de R du même ordre que u, si le genre g de R est >1.*

Démonstration. D'après la Proposition 3, toute représentation projective $p: \Gamma \to H_q$, équivalente aux représentations π_u, est de la forme $p=[r']$, r' étant une représentation linéaire d'ordre $q+1$, équivalente à la représentation (5').

Soit $r': S \to M_S' = r'(S)$ une représentation équivalente à (5') et M une matrice vérifiant les formules (1), régulière dans $\tilde{R}$ et ayant $|M| \neq 0$. La matrice différentielle régulière [11]

$$\Omega = dM \cdot M^{-1} \tag{13}$$

subira les transformations

$$\Omega^S = M_S \Omega M_S^{-1} \tag{14}$$

et la matrice différentielle

$$\theta = \Phi^{-1} \Omega \Phi \tag{15}$$

est uniforme dans $\tilde{R}$ et est invariante pour le groupe Γ, donc les éléments de θ sont des fonctions rationnelles sur R. Ces fonctions sont régulières en chaque point de $\tilde{R}$ où $\omega \neq 0$ et satisfont à la condition que $Z\theta Z^{-1}$ soit une matrice régulière dans le voisinage d'un zéro $\zeta = 0$ de ω. Cette dernière condition s'exprime par les formules

$$\theta_s^k + \sum_{\substack{s \leqslant j,\, r \leqslant k \\ r-j < k-s}}^{r,j} \zeta^{2(r-j+s-k)} c_s^j \tilde{c}_r^k \theta_j^r = \zeta^{s-k} \alpha_s^k, \tag{16}$$

où $\tilde{c}$ est la matrice inverse de (c_s^j) et α_s sont des formes différentielles régulières en $\zeta = 0$.

De ces conditions on déduit, en utilisant l'induction, qu'on a, si $g > 1$,

$$\theta_s^k = 0, (k < s - 1); \quad \theta_s^{s-1} = c_s \omega, (c_s = \text{const.}).$$

En écrivant alors la formule (16) pour $k = s$, on voit que θ_s^s a des pôles simples aux zéros de ω, avec les résidus égaux à $\sum_{j=s,s+1} c_s^j \tilde{c}_{j-1}^s c_j$; comme la somme de ces résidus doit être nulle, on doit avoir $\sum_{j=s,s+1} c_s^j \tilde{c}_{j-1}^s c_j = 0$. Pour $s = q$ on obtient $c_q = 0$ et en posant ensuite $s = q - 1, \ldots 1$ on trouve qu'on a $c_{q-1} = \ldots = c_1 = 0$, donc $\theta_s^{s-1} = 0$, $(s = 1, \ldots, q)$. Les formules (16) montrent alors que pour $k \geqslant s$, θ_s^k a des pôles, d'ordre $2(k - s)$ au plus, aux zéros de ω.

La matrice M est définie à une transformation de la forme [11]

$$M' = \Lambda M \tag{16'}$$

près, Λ étant une matrice régulière dans $\tilde{R}$, satisfaisant aux conditions

$$|\Lambda| \neq 0, \quad \Lambda^S = M_S \Lambda M_S^{-1}, \tag{17}$$

d'où il en résulte que les éléments de la matrice

$$U = \Phi^{-1} \Lambda \Phi \tag{18}$$

sont des fonctions rationnelles sur R, devenant infinies seulement aux zéros de ω. La condition que ZUZ^{-1} soit régulière dans le voisinage d'un zéro de ω donne

$$u_s^k + \sum_{\substack{s \leqslant j, r \leqslant k \\ r - j < k - s}}^{r,j} \zeta^{2(r-j+s-k)} c_s^j \tilde{c}_r^k u_j^r = \zeta^{s-k} \beta_s^k, \tag{19}$$

β_s^k étant une fonction holomorphe dans le voisinage du point $\zeta = 0$. Un raisonnement analogue à celui indiqué plus haut montre qu'on a $u_s^k = 0$ pour $k < s$, $u_0^0 = u_1^1 = \ldots = u_q^q = c$, $(c = \text{const.})$ et que pour $k > s$, $(u_s^k)^{-1}$ s'annule aux zéros de ω, avec l'ordre $2(k - s) - 1$ au plus, si $g > 1$. De plus, il faut remarquer que les formules (19) permettent de calculer, en chaque zéro de ω, pour u_s^k, les coefficients de $\zeta^{1-2(k-s)}$, $\zeta^{2-2(k-s)}$, $\ldots$, $\zeta^{1-(k-s)}$, en fonctions des coefficients analogues des u_j^r $(s \leqslant j \leqslant r \leqslant k, \; r - j < k - s)$. Les équations qui expriment que la fonction u_s^k, donnée par la formule (19), est rationnelle, donc que la somme des résidus $\oint u_s^k \omega_\alpha$ est nulle, quelque soit la différentielle de première espèce ω_α, n'imposent aucune relation entre les coefficients des fonctions u_s^k, elles permettent seulement de calculer certains des coefficients de ζ^{-1}, ζ^{-2} des fonctions $\zeta^{s-k} \beta_s^k$. Il en résulte la

Proposition 4. *Si on a des fonctions rationnelles u_s^k pour tous les indices k, s vérifiant $k - s < \alpha$, ou $k - s = \alpha$, $s < \beta$, vérifiant les conditions* (19) *pour ces indices, on peut completer ces fonctions à une matrice U vérifiant toutes les conditions* (19).

Si l'on désigne par $\Omega' = \Phi\theta'\Phi^{-1}$ la matrice différentielle $dM' \cdot M'^{-1}$ associée à la matrice (16'), on a

$$\theta' U = (HU - UH)\omega + dU + U\theta\,, \tag{20}$$

où $H\omega$ est la matrice $\Phi^{-1}d\Phi$ et a la forme

$$H\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{q-1} & 0 \end{pmatrix} \omega\,.$$

L'équation (20) donne les relations

$$u_j^{s+1}\omega = -\sum_{i=j,j+1,\dots,s} \theta_j'^i u_i^s + du_j^s + \sum_{i=j,j+1,\dots,s} \theta_i^s u_j^i + u_{j-1}^s\omega\,,\ (s<q)\,. \tag{21}$$

Supposons qu'on a $\theta_i^s = 0$ pour $s - i < \alpha (\alpha < q)$, $s < q$. Pour qu'on ait aussi $\theta_i'^s = 0\,(s - i < \alpha, s < q)$, il faut qu'on ait $u_j^s = 0$ pour $0 < s - j \leqslant \alpha$. Dans ce cas, la formule (21) pour $j = 0$, $s = \alpha$ donne

$$u_0^{\alpha+1}\omega = -\theta_0'^{\alpha}u_\alpha^\alpha + \theta_0^\alpha u_0^0\,;$$

donc si l'on prend $u_0^0 = u_1^1 = \dots = u_q^q = 1$ et

$$u_0^{\alpha+1} = \frac{\theta_0^\alpha}{\omega} \tag{22}$$

on aura $\theta_0'^\alpha = 0$. D'après la Proposition 4, on peut compléter les fonctions $u_j^s = 0$ $(0 < s - j \leqslant \alpha, s < q)$ et (22) à une matrice U et on obtient de (21) une matrice θ' ayant $\theta_i'^s = 0$ pour $s - i < \alpha$, $s < q$ et $s = \alpha$, $i = 0$.

Supposons que pour la matrice θ on a $\theta_i^s = 0$ pour $s - i < \alpha$, $s < q$ et pour $s - i = \alpha$, $i = 0, 1, \dots, \beta - 1$. On aura les mêmes conditions pour la matrice θ' si $u_j^s = 0$ pour $0 < s - j \leqslant \alpha$ et pour $s - j = \alpha + 1$, $j = 0, 1, \dots, \beta - 1$. L'équation (21) donne alors pour $j = \beta$, $s = \alpha + \beta$, $u_0^0 = \dots = u_q^q = 1$,

$$u_\beta^{\alpha+\beta+1}\omega = -\theta_\beta'^{\alpha+\beta} + \theta_\beta^{\alpha+\beta}$$

et on a $\theta_\beta'^{\alpha+\beta} = 0$ si $u_\beta^{\alpha+\beta+1}$ est choisi égal à $\theta_\beta^{\alpha+\beta}/\omega$. Il en résulte qu'on peut toujours supposer que la matrice θ vérifie les conditions

$$\theta_j^i = 0\,,\quad (i = 0, 1, \dots, q-1;\quad j = 0, 1, \dots, q)\,. \tag{23}$$

Supposons que la matrice (15) satisfait aux relations (23). L'équation (13) définit alors la matrice M [11]. Considérons la matrice $\Psi = M^{-1}\Phi$ qui subit les substitutions

$$\Psi^S = \pm M'_S \Psi . \tag{24}$$

On obtient d'autre part, par un calcul simple

$$d\Psi = \Psi(H\omega - \theta) ,$$

donc

$$d\Psi^i_j = \Psi^{i+1}_j \omega , (i < q); \quad d\Psi^q_j = \sum_{i=0}^{q} (\alpha_i - \theta^q_i)\, \Psi^i_j .$$

De ces formules on déduit qu'on a $d\,|\,\Psi\,| = -\,\theta^q_q\,|\,\Psi\,|$, donc $|\,\Psi\,| = e^{-\int \theta^q_q}$. Il en résulte que les fonctions $\Psi^0_0, \Psi^0_1, \ldots, \Psi^0_q$ forment un système homographique u' de la surface R et la formule (24) montre que la représentation projective $\pi_{u'}$ coïncide avec la représentation $[r']$. Le théorème 2 est ainsi démontré; pour $g = 1$, la propriété n'est plus vérifiée. Dans le cas $g = 1$, la représentation triviale de Γ dans H_q est équivalente aux représentations π_u et ne correspond à aucun système homographique u de la surface R.

5. Les fonctions $1, z, \ldots, z^q$ forment un système homographique d'ordre q de R. La représentation projective π_0 définie par ce système est la restriction à Γ de la représentation irréductible du groupe homographique H_1 dans H_q.

6. Les résultats obtenus précédemment montrent que les structures fibrées $(E_{\pi u}, R, P^q, H_q)$ associées aux représentations projectives π_u du groupe Γ, définies par les systèmes homographiques u de la surface R, sont isomorphes à une même structure (analytique), que nous désignérons par (E_q, R, P^q, H_q).

Les représentations π_u définissent des connexions intégrables dans la structure (E_q, R, P^q, H_q), [2, page 37]. Réciproquement, comme toute connexion intégrable de cette structure est définie par une représentation du groupe Γ dans H_q, équivalente aux représentations π_u, il en résulte, d'après le théorème 2, que toute connexion intégrable de la structure (E_q, R, P^q, H_q) est définie par un système homographique u de R si le genre de R est > 1.

La structure fibrée $(E_{\pi u}, R, P^q, H_q)$ étant définie comme l'ensemble des classes de transitivité du groupe G des transformations $(z, y) \to (z^S, M_S y)$ de $\tilde{R} \times P^q$ en lui-même, avec la projection $p_u : (z, y)^G \to z^\Gamma$, on voit que cette structure admet la section $z^\Gamma \to (z, y)^G$, $(z, y)^G = \bigcup_{S \in \Gamma} \{(z^S, M_S y)\}$.

La connexion donnée par la représentation π_u est définie dans $(E_{\pi u}, R, P^q, H_q)$ par l'équation $dy = 0$ et le système u définit le développement de la surface R dans la fibre P^q, par les formules

$$y_i = u_i(z) , \qquad (i = 0, 1, \ldots, q) ,$$

y_i étant des coordonnées homogènes dans P^q.

Par analogie avec la structure fibrée tangente à une variété, nous dirons que (E_q, R, P^q, H_q) est la structure fibrée, projective, osculatrice d'ordre q, de la surface R. On peut alors résumer les résultats obtenus dans cette Note:

Les connexions intégrables de la structure fibrée projective, osculatrice d'ordre q, de la surface fermée R, de genre $g > 1$, sont associées aux représentations projectives définies par les systèmes homographiques u, d'ordre q, de R. Les systèmes u définissent les développements de R dans la fibre P^q, suivant ces connexions.

On a ainsi l'interprétation géométrique des systèmes u.

7. Dans la structure fibrée (E_{π_u}, R, P^q, H_q), associons à chaque point $\xi = z^\Gamma$ de R l'espace projectif $P_\xi^{q'}$ engendré dans la fibre $p_u^{-1}(\xi)$ par les points $y^0 = u$, $y^1 = du/dz, \ldots$, $y^{q'} = d^{q'}u/dz^{q'}$, $(q' < q)$. La somme topologique des espaces $P_\xi^{q'}$ forme, avec la projection $p' : P_\xi^{q'} \to \xi$ une structure fibrée isomorphe à $(E_{q'}, R, P^{q'}, H_{q'})$. On a donc, pour chaque $q' < q$, un isomorphisme analytique $i_{q'q}$ de $(E_{q'}, R, P^{q'}, H_{q'})$ avec un sous-espace de (E_q, R, P^q, H_q), permutable avec les projections canoniques $E_{q'} \to R$, $E_q \to R$.

8. Notons ce théorème:

L'espace fibré sur R formé par les hyperquadriques non dégénérées des fibres de (E_q, R, P^q, H_q) admet une infinité de sections. Les éléments de ces sections sont des quadriques contenant les images par $i_{q'q}$ des fibres de $(E_{q'}, R, P^{q'}, H_{q'})$ pour $2q' \leqslant q$ ou les transformées par polarité de ces images.

9. *On peut montrer qu'aucune des représentations π_u ne peut être unitaire, donc en particulier, π_u n'est jamais finie.* En effet, si la représentation (5′) serait unitaire, la surface posséderait la métrique riemannienne partout régulière

$$ds = (|u_0|^2 + |u_1|^2 + \ldots + |u_q|^2)^{-\frac{1}{q}} |dh|,$$

ayant la courbure de GAUSS

$$K = (|u_0|^2 + \ldots + |u_q|^2)^{\frac{2}{q}-2}\left[(\Sigma u_i \bar{u}_i)\left(\Sigma \frac{du_i}{dh}\frac{d\bar{u}_i}{d\bar{h}}\right) - \left|\Sigma u_i \frac{d\bar{u}_i}{d\bar{h}}\right|^2\right] > 0$$

ce qui est impossible, d'après la formule de GAUSS-BONNET.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ATIYAH M. F., *Vector bundles over an elliptic curve.* Proc. London Math. Soc. III, 7 (1957), 414–452.

[2] EHRESMANN CH., *Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable.* Colloque de Topologie (Espaces fibrés), Bruxelles 1950.

[3] EICHLER M., *Verallgemeinerung der* ABELschen *Integrale.* Math. Z., 67 (1957), 267–298.

[4] GROTHENDIECK A., *Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de* RIEMANN. Amer. J. of Math., (1957), 121–138.

[5] GOURSAT E., APPELL P., *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales.* Tome I (1929), Tomme II, Paris.

[6] POINCARÉ H., Oeuvres, T. II. (1916), 402–462.

[7] SERRE J. P., *Faisceaux algébriques cohérents.* Ann. of Math. 61 (1955), 197–278.

[8] SERRE J. P., *Géométrie algébrique et Géométrie analytique.* Ann. Inst. Fourier, vol. VI (1956), 1–42.

[9] TELEMAN C., *Sur les structures homographiques d'une surface de* RIEMANN. Comment. Math. Helv. *33* (1959), 206–211.

[10] WASHNITZER G., *The characteristic classes of an algebraic fibre bundle.* Proc. Nat. Ac. of Sci. *42* (1956), 433–435.

[11] WEIL A., *Généralisation des fonctions abéliennes.* J. Math. pures et appliquées, 17 (1938), 47–87.

[12] WEIL A., *Fibre Spaces in Algebraic Geometry.* (Notes by Wallace), University of Chicago, 1952.

(Reçu le 8 octobre 1959)