Werk

Titel: Formes harmoniques sur une surface de RIEMANN.

Autor: Bader, Roger; Sörensen, Werner

Jahr: 1960

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?358147735_0034|log14

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Formes harmoniques sur une surface de RIEMANN

par ROGER BADER et WERNER SÖRENSEN

A l'origine de ce travail[1]) se trouve une question posée dans [4] et déjà étudiée dans [8]. et [5]. Il s'agissait de caractériser ou de construire des différentielles méromorphes ou méroharmoniques sur une surface de RIEMANN non compacte (problème de COUSIN), différentielles qui se distingueraient, dans la classe de celles ayant les mêmes singularités et les mêmes périodes, par un comportement régulier à la frontière de la surface.

Nous nous sommes d'emblée limités ici aux différentielles réelles.

Dans les trois travaux cités et dans d'autres [11] on a fait largement usage des méthodes de géométrie différentielle qui sont utilisées pour aboutir aux théorèmes de décomposition de KODAIRA-DE RHAM. Suivant une idée partiellement exploitée dans [9], nous avons fait un usage encore plus systématique de ces méthodes, en douant la surface de RIEMANN d'une métrique particulière, c'est-à-dire en la considérant comme un espace de RIEMANN. Comme métrique nous avons pris celle qui est induite naturellement par une différentielle abélienne de première espèce et de norme finie. Sauf sur un ensemble de points isolés (les zéros de la différentielle) la métrique est localement euclidienne et cela revient en quelque sorte à représenter de façon bien déterminée la surface de RIEMANN comme surface de recouvrement (feuillets plans) du plan de GAUSS.

L'avantage de ce choix quelque peu arbitraire de la métrique consiste essentiellement en la possibilité d'utiliser les fonctions de GREEN et de NEUMANN pour l'établissement des noyaux de GREEN-DE RHAM; ceux-ci ont alors une expression qui généralise celle du cas euclidien où l'on sait qu'elle est particulièrement simple. D'autre part on peut alors, par rapport à cette métrique, poser des problèmes aux limites sur la surface non compacte, ce qui permet en particulier de préciser le comportement à la frontière des différentielles à singularités polaires de façon à rendre leur détermination unique.

Pourtant, bien que cette métrique dérive d'un élément de la surface de RIEMANN (la différentielle abélienne choisie) qui lui est intimement lié, nous n'avons pas pu, sauf dans des circonstances particulières, délimiter l'influence de ce choix sur les résultats obtenus. Nos résultats restent donc, pour la plupart, liés à cette différentielle particulière, mais leur expression relativement simple n'exclut pas la possibilité d'en démontrer le caractère intrinsèque: peut-être

[1]) Travail subventionné par le Fonds national suisse de la recherche scientifique (subsides nos 788 et 1029).

faudrait-il pour cela avoir quelques renseignements sur la distribution des zéros d'une telle différentielle?

Profitant des particularités de l'espace de RIEMANN envisagé (deux dimensions, presque partout localement euclidien), nous avons plutôt porté notre attention sur les différents problèmes aux limites qui se posent naturellement pour l'équation de POISSON et dont un seul (le problème de NEUMANN) sert finalement à la résolution proposée du problème de COUSIN. Nous avons remarqué que, moyennant des hypothèses raisonnables sur la surface de RIEMANN (hypothèses (N) et (Γ^0): les énergies des potentiels de NEUMANN et de GREEN, relatifs à la métrique, dépendent continuement des masses) on obtenait des inégalités du type de POINCARÉ (majoration de la norme ordinaire en fonction de la D-norme pour certaines classes de formes différentielles) qui sont nécessaires et suffisantes à la résolution des problèmes aux limites posés. Il devient donc raisonnable de penser ou d'espérer que ces inégalités de POINCARÉ seront les hypothèses de base à faire sur des espaces de RIEMANN quelconques pour poser correctement les différents problèmes aux limites: une fois en possession de ces inégalités on doit pouvoir en effet, bien que nous ne l'ayons pas fait systématiquement dans notre cas à cause des singularités de la métrique, résoudre les problèmes aux limites par l'utilisation des méthodes de l'espace de HILBERT et d'un théorème de DE RHAM sur la régularité des solutions d'une équation de POISSON [2].

Signalons enfin que l'étude des problèmes aux limites a permis de préciser le théorème de décomposition de KODAIRA-DE RHAM dans les cas envisagés comme cela est fait pour les espaces de RIEMANN compacts (existence et propriétés de l'opérateur G).

1. Notions relatives à une différentielle Φ

1.1. La surface S_Φ. Les espaces $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_n$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}_n$, $\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}$.

Sur toute surface de RIEMANN S, d'ordre de connexion supérieur à 1, il existe une différentielle abélienne Φ, régulière sur S et à intégrale de DIRICHLET finie [3].

Soit $\Phi = dz$ l'expression de Φ en coordonnées locales. En posant $ds^2 = dz \cdot \overline{dz}$, on définit une métrique sur S, singulière aux points isolés en lesquels $\Phi = 0$. Pour abréger, nous appelons ces points les points Φ et nous désignons par S_Φ l'espace de RIEMANN obtenu en excluant les points Φ de la surface S.

A toute forme C^∞ sur S_Φ, φ, correspond sur S_Φ une forme adjointe $*\varphi$ également C^∞ sur S_Φ, définie par:

$$*f = \frac{i}{2} f dz \wedge \overline{dz},\ *(a dz + \overline{a dz}) = i(-a dz + \overline{a dz}),\ *A dz \wedge \overline{dz} = -2iA\,.$$

A toute forme C^∞ sur S, φ, correspond sur S une différentielle $d\varphi$ également C^∞ sur S, définie indépendamment de Φ par:

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\overline{dz},\ d(a\,dz + \overline{a\,dz}) = \left(\frac{\partial \bar{a}}{\partial z} - \frac{\partial a}{\partial \bar{z}}\right)dz \wedge \overline{dz},\ d(A\,dz \wedge \overline{dz}) = 0\,.$$

A toute forme C^∞ sur S_Φ, φ, correspond sur S_Φ une codifférentielle $\delta\varphi$ également C^∞ sur S_Φ, définie par:

$$\delta f = 0,\ \delta(a\,dz + \overline{a\,dz}) = -2\left(\frac{\partial \bar{a}}{\partial z} + \frac{\partial a}{\partial \bar{z}}\right),\ \delta(A\,dz \wedge \overline{dz}) = 2\left(\frac{\partial A}{\partial z}dz - \frac{\partial A}{\partial \bar{z}}\overline{dz}\right).$$

On dira qu'une forme φ, C^∞ sur S_Φ, est C^∞ sur S si son comportement au voisinage des points Φ permet un prolongement par continuité en ces points et si la forme ainsi prolongée, toujours notée φ, est C^∞ sur S.

$\mathfrak{E}$ désignera l'espace des formes qui sont C^∞ sur S. $\mathfrak{E}_n$ désignera le sous-espace de $\mathfrak{E}$ formé des éléments dont les différentielles d'ordre $\leqslant n$, ainsi que leur adjointe, appartiennent à $\mathfrak{E}$. A cause des singularités qui peuvent survenir aux points Φ dans le calcul de l'adjointe et de la codifférentielle, ces espaces sont strictement inclus les uns dans les autres [9].

$\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}_n$ désigneront les sous-espaces de $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_n$, formés des éléments à support compact sur S.

$\mathfrak{A}_n$ désignera le sous-espace de $\mathfrak{E}_n$ formé des éléments dont les différentielles d'ordre $\leqslant n$ sont de A-norme finie $(A(\varphi) = (\varphi, \varphi) = \int \varphi \wedge *\varphi)$.

Avec le produit scalaire $(\varphi, \psi) = \int \varphi \wedge *\psi$ les espaces $\mathfrak{D}_n$ et $\mathfrak{A}_n$ sont préhilbertiens et partout denses dans leur complété commun, l'espace des formes de A-norme finie, qui sera désigné par $\mathfrak{A}$.

$\mathfrak{B}_1$ (resp. $*\mathfrak{B}_1$) désignera le sous-espace de $\mathfrak{E}_1$ des formes φ qui sont éléments de $\mathfrak{A}$ ainsi que leur différentielle $d\varphi$ (resp. codifférentielle $\delta\varphi$). $\mathfrak{B}$ (resp. $*\mathfrak{B}$) désignera l'espace de HILBERT des formes φ telles que $\varphi \in \mathfrak{A}$ et $d\varphi \in \mathfrak{A}$ (resp. $\delta\varphi \in \mathfrak{A}$).

Nous appellerons D-norme de φ la quantité $D(\varphi) = (d\varphi, d\varphi) + (\delta\varphi, \delta\varphi)$.

L'opérateur δ est le transposé métrique [1] de l'opérateur d sur l'espace $\mathfrak{D}_1$. L'opérateur de Laplace, $\Delta = d\delta + \delta d$ est son propre transposé métrique sur $\mathfrak{D}_1$.

1.2. Topologies sur les espaces de formes. Courants.

Un ensemble $\mathfrak{M}$ de formes φ est dit localement borné au point p si, dans un voisinage compact de p, les dérivées partielles d'ordre $\leqslant k$ des coefficients des formes φ sont bornées, quel que soit k.

$\mathfrak{M}$ est borné dans $\mathfrak{E}$ s'il est localement borné en tout point p. Il est dit borné dans $\mathfrak{D}$ s'il est borné dans $\mathfrak{E}$ et si toutes les formes de $\mathfrak{M}$ ont leur support compris dans un compact fixe [1].

$\mathfrak{M}$ est borné dans $\mathfrak{A}$ si l'ensemble des A-normes des φ est borné.

$\mathfrak{M}$ sera dit borné dans $\mathfrak{E}_n$ (ou $\mathfrak{D}_n$) si les formes φ appartiennent à $\mathfrak{E}_n$ (ou $\mathfrak{D}_n$) et si $\mathfrak{M}$ est borné dans $\mathfrak{E}$ (ou $\mathfrak{D}$).

$\mathfrak{M}$ sera dit borné dans $\mathfrak{A}_n$ s'il est borné dans $\mathfrak{E}$ et si l'ensemble des normes des différentielles d'ordre $\leqslant n$ des formes φ est borné.

Il conviendra d'appeler courant toute fonctionnelle linéaire (T, φ) sur $\mathfrak{D}_0$, continue dans le sens suivant: $|(T, \varphi)|$ reste borné sur tout ensemble de formes borné dans $\mathfrak{D}_0$.

L'espace vectoriel des courants, dual de $\mathfrak{D}_0$, est noté $\mathfrak{D}_0'$. Nous désignerons de même par $\mathfrak{D}_n'$ l'espace des fonctionnelles linéaires continues sur $\mathfrak{D}_n$.

La différentielle dT d'un courant T sera l'élément de $\mathfrak{D}_1'$ défini par:

$$(dT, \varphi) = (T, \delta\varphi), \qquad \varphi \in \mathfrak{D}_1 .$$

La définition de la codifférentielle δT d'un courant comme élément de $\mathfrak{D}_1'$ et des différentielles d'ordre n de T comme éléments de $\mathfrak{D}_n'$ est complètement analogue.

1.3. Valeurs à la frontière

Le courant T est continu en moyenne à l'infini si $|(T, \varphi)|$ reste borné sur tout ensemble de formes de $\mathfrak{D}_0$ qui est borné dans $\mathfrak{A}$.

Soit alors φ une forme quelconque de $\mathfrak{E} \cap \mathfrak{A}$. Il existe une suite de formes $\varphi_n \in \mathfrak{D}_0$ telles que:

1. le support de $\varphi - \varphi_n$ soit extérieur à tout compact K pourvu que n soit assez grand,

2. $A(\varphi - \varphi_n)$ tende vers 0.

On voit que (T, φ_n) converge vers une limite indépendante de la suite (φ_n) choisie, si T est continu en moyenne à l'infini ([1], p. 167, prop. 6). La définition de (T, φ) peut donc être étendue, si T est continu en moyenne à l'infini, à tout $\varphi \in \mathfrak{E} \cap \mathfrak{A}$, en posant:

$$(T, \varphi) = \lim (T, \varphi_n) .$$

Ces définitions s'étendent de manière évidente au cas où T est une fonctionnelle linéaire de $\mathfrak{D}_n'$.

Si T et dT sont des fonctionnelles linéaire continues en moyennes à l'infini, la fonctionnelle linéaire:

$$(FT, \varphi) = (dT, \varphi) - (T, \delta\varphi)$$

est définie pour tout $\varphi \in {}^*\mathfrak{B}_1$. Elle est nulle sur $\mathfrak{D}_1$ et représente *la frontière de* T.

On voit immédiatement que *la frontière de* $*T$ est la fonctionnelle linéaire:

$$(F'T, \varphi) = (\delta T, \varphi) - (T, d\varphi) ,$$

définie et continue sur $\mathfrak{B}_1$ si T et δT sont continus en moyenne à l'infini.

2. Espaces de champs harmoniques. Formules de décomposition [5, 11]

Une forme C^∞, φ, est un *champ harmonique* si elle vérifie sur S_Φ les équations

$$d\varphi = 0 , \qquad \delta\varphi = 0$$

Les champs harmoniques de degré 0 sont les constantes Les champs harmoniques de degré 1 sont, sur tout domaine simplement connexe, différentielles de fonction harmonique Les champs harmoniques de degré 2 sont les constantes multipliées par $dz \wedge \overline{dz}$.

Proposition 2.1. Les champs harmoniques de $\mathfrak{A}$ forment un espace de HILBERT $\mathfrak{C}$.

La proposition est triviale pour les degrés 0 et 2. Pour le degré 1 il suffit de constater qu'une suite de CAUCHY en A-norme de champs harmoniques est, dans tout domaine simplement connexe, une suite de différentielles de fonctions harmoniques qui forment une suite de CAUCHY avec la norme intégrale de DIRICHLET.

Un champ harmonique de $\mathfrak{A}$ est dit *symétrique* si son adjointe est nulle à la frontière; il est dit *antisymétrique* s'il est nul à la frontière. Ces deux notions sont indépendantes de Φ.

Proposition 2.2. Les champs harmoniques symétriques (antisymétriques) constituent un sous-espace $\mathfrak{C}_s$ ($\mathfrak{C}_a$) de $\mathfrak{C}$.

En effet, la relation $(c_n, df) = 0$ pour tout $f \in \mathfrak{B}_1$ entraîne la relation $(c, df) = 0$ pour la limite c de la suite de CAUCHY en A-norme, c_n.

Proposition 2.3. Dans le cas du degré 1 le complémentaire orthogonal $\mathfrak{C}_s^\perp$ ($\mathfrak{C}_a^\perp$) de $\mathfrak{C}_s$ ($\mathfrak{C}_a$) dans $\mathfrak{C}$ est le sous-espace $\mathfrak{C}_h$ ($\mathfrak{C}_c$) des champs homologues (cohomologues) à zéro de $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_a + \mathfrak{C}_c = \mathfrak{C}_s + \mathfrak{C}_h .$$

Il est immédiat que si $\varphi = df$, $\varphi \in \mathfrak{C}_s^\perp$. Pour démontrer la réciproque, établissons d'abord le lemme suivant.

Lemme 2. Soit C un cycle quelconque de la surface. La forme fermée γ

associée à la fonctionnelle $\int_C \varphi$ définie sur l'espace des formes fermées de $\mathfrak{A}$ par

$$(\gamma, \varphi) = \int_C \varphi$$

est un champ harmonique symétrique.

Remarquons d'abord que $\int_C \varphi$ est une fonctionnelle linéaire continue sur l'espace des formes fermées de $\mathfrak{A}$, qui est manifestement un sous-espace de $\mathfrak{A}$. L'existence de γ est donc assurée par le théorème de RIESZ.

Prenons $\varphi = df$, où f est à support compact. L'équation

$$(\gamma, \varphi) = (\gamma, df) = \int_C df = 0$$

devient

$$(\delta\gamma, f) = 0 .$$

Elle entraîne que $\delta\gamma = 0$. Par suite γ est un champ harmonique.

Comme $\int_C df = 0$ vaut pour tout $f \in \mathfrak{B}_1$, on a $(\delta\gamma, f) = (\gamma, df)$ pour toutes ces formes, ce qui signifie que $*\gamma$ est nulle à la frontière. γ est donc un champ symétrique.

La proposition résulte immédiatement du lemme. Soit en effet c un champ quelconque de $\mathfrak{A}$, c_s sa projection sur l'espace des champs symétriques. Soit C un cycle quelconque, γ le champ symétrique associé:

$$(c - c_s, \gamma) = 0 \quad \text{donc} \quad \int_C c - c_s = 0 .$$

Toutes les périodes de $c - c_s$ sont donc nulles, $c - c_s = df$ est donc homologue à zéro.

Un champ harmonique de degré 1 est dit *analytique* s'il est à la fois homologue et cohomologue à zéro. Un tel champ $du = *dv$ est un effet la partie réelle de la différentielle df d'une fonction analytique uniforme $f(z)$.

Proposition 2.4. Les champs harmoniques analytiques de $\mathfrak{A}$ forment un sous-espace $\mathfrak{C}_A$ de $\mathfrak{C}$.

On appelle *champ de SCHOTTKY* [4] un champ harmonique de $\mathfrak{A}$ orthogonal à tout champ harmonique analytique. L'espace des champs de SCHOTTKY $\mathfrak{C}_S$ est le complémentaire orthogonal de $\mathfrak{C}_A$ dans $\mathfrak{C}$:

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_A + \mathfrak{C}_S .$$

Proposition 2.5. L'espace $\mathfrak{C}_S$ des champs de SCHOTTKY est la fermeture de la somme $\mathfrak{C}_a + \mathfrak{C}_s$ des espaces de champs antisymétriques et symétriques:

$$\mathfrak{C}_S = \overline{\mathfrak{C}_a + \mathfrak{C}_s} .$$

L'inclusion $\mathfrak{C}_S \supset \overline{\mathfrak{C}_a + \mathfrak{C}_s}$ est immédiate car $\mathfrak{C}_S \supset \mathfrak{C}_a$ et $\mathfrak{C}_S \supset \mathfrak{C}_s$. D'autre part $\varphi \in \mathfrak{C}_a^\perp$ et $\varphi \in \mathfrak{C}_s^\perp$ entraîne $\varphi = \delta\psi$ et $\varphi = df$ respectivement, donc $\varphi \in \mathfrak{C}_A = \mathfrak{C}_S^\perp$. Ceci entraîne $\overline{\mathfrak{C}_a + \mathfrak{C}_s} \supset \mathfrak{C}_S$.

Dans le cas d'un domaine relativement compact à frontière très régulière, tout champ de SCHOTTKY admet une décomposition unique:

$$c_S = c_a + c_s$$

en un champ antisymétrique et un champ symétrique [4]. De plus, comme $\mathfrak{C}_a$ et $\mathfrak{C}_s$ sont de dimension finie et disjoints, il existe deux constantes finies K' et K'' ne dépendant que du domaine, telles que

$$\begin{aligned} A(c_a) &\leqslant K' A(c_a + c_s) \\ A(c_s) &\leqslant K'' A(c_a + c_s) \end{aligned} \tag{C}$$

quels que soient les champs c_a et c_s.

Nous dirons d'une surface greenienne qu'elle vérifie *l'hypothèse* (C) s'il existe deux constantes finies K' et K'' ne dépendant que de la surface telles que les conditions (C) soient vérifiées quels que soient les champs c_a et c_s[2]).

Cette hypothèse est indépendante de la métrique.

Proposition 2.6. Sur une surface greenienne vérifiant l'hypothèse (C), tout champ c de degré 1 de $\mathfrak{A}$ admet une décomposition

$$c = c_h + c_c$$

c_h et c_c étant respectivement homologue et cohomologue à zéro, où

$$A(c_h) \leqslant L' A(c)\,, \qquad A(c_c) \leqslant L'' A(c)\,,$$

L' et L'' deux constantes finies ne dépendant que de la surface.

Il suffit évidemment, à cause de la décomposition orthogonale $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_A + \mathfrak{C}_S$, de prouver la propriété pour un champ de SCHOTTKY c_S.

a) L'hypothèse (C) entraîne immédiatement $\mathfrak{C}_a \cap \mathfrak{C}_s = \emptyset$. Par suite:

$$\mathfrak{C}_S = \overline{(\mathfrak{C}_h \cap \mathfrak{C}_S) + (\mathfrak{C}_c \cap \mathfrak{C}_S)}\,.$$

b) L'hypothèse (C) entraîne $\overline{\mathfrak{C}_a + \mathfrak{C}_s} = \mathfrak{C}_a + \mathfrak{C}_s$. Donc tout élément c_S peut s'écrire:

$$c_S = c_a + c_s\,,$$

c) Envisageons un élément c_S de C_S de la forme

$$c_S = c_c + c_h\,,$$

[2]) L'hypothèse (C) revient à supposer les espaces $\mathfrak{C}_a$ et $\mathfrak{C}_s$ non asymptotiques au sens de J. Dixmier: Etudes sur les variétés et les opérateurs de JULIA avec quelques applications, Bull. Soc. Math. de France, 77 (1949), p. 21.

et soit c'_S un élément quelconque de $\mathfrak{C}_S$ qu'on peut toujours écrire, d'après b), sous la forme:

$$c'_S = c'_a + c'_s .$$

On a $(c_c, c'_S) = (c_c, c'_s) = (c_S, c'_s)$, d'où $(c_c, c'_S)^2 \leqslant A(c_S) K'' A(c'_S)$, pour tout c'_S, c'est-à-dire $A(c_c) \leqslant K'' A(c_S)$.

De façon analogue on trouve:

$$A(c_h) < K' A(c_S) .$$

A cause de a) et c):

$$\mathfrak{C}_S = \mathfrak{C}_h \frown \mathfrak{C}_S + \mathfrak{C}_c \frown \mathfrak{C}_S ,$$

et la proposition est démontrée, avec $L' = 1 + K'$, $L'' = 1 + K''$.

Remarque: Etant donné une forme φ de $\mathfrak{A}$, nous appellerons $C\varphi$, $C_a\varphi$, etc., les projections de φ dans les espaces $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}_a$, etc.

3. Problèmes élémentaires relatifs à l'équation $\Delta T = U$ dans le cas du degré zéro

3.1. Problème de DIRICHLET sur une surface greenienne

Nous allons d'abord établir la proposition suivante:

Proposition 3.1.1. Sur une surface greenienne $F1 \neq 0$.

Pour cela il suffit de construire une forme $\varphi \in *\mathfrak{B}_1$ telle que $(1, \delta\varphi) \neq 0$. Etant donné un domaine relativement compact Ω, à frontière très régulière, ne contenant pas de points Φ, considérons la mesure harmonique ω de la frontière de S par rapport à $S - \Omega$ [10]. On sait que $0 < D_{S-\Omega}(\omega)$. Prolongeons ω dans Ω de façon à obtenir une fonction C^∞ sur S, $\bar{\omega}$. Avec $\varphi = d\bar{\omega}$ on a $\varphi \in *\mathfrak{B}_1$ et

$$(1, \delta\varphi) = (1, \delta\varphi)_\Omega = -\int_{\Omega'} *\varphi = -\int_{\Omega'} *d\omega = -D_{S-\Omega}(\omega) < 0 .$$

Le principe de DIRICHLET [6, 7] nous permet alors d'établir un premier résultat contenu dans la proposition suivante:

Proposition 3.1.2. Soit U une distribution dont le support comporte un nombre fini de points d'une surface greenienne. L'équation $\Delta T = U$ admet une et une seule solution T, continue en moyenne à l'infini ainsi que dT, et telle que $FT = 0$.

L'unicité est immédiate: $\Delta T = 0$, T et dT continus en moyenne à l'infini, $FT = 0$ entraînent que $dT \in \mathfrak{C}$ [1] et que:

$$(dT, dT) = 0 ,$$

donc $T = \text{const}$. La proposition 3.1.1. entraîne alors $T = 0$.

Pour l'existence de la solution, traitons d'abord le cas où $CU = 0$ (le champ de $\mathfrak{C}$, CT, est défini pour tout courant T continu en moyenne à l'infini par $(CT, \varphi) = (T, C\varphi)$; [1]). Nous allons construire la solution de ce problème pour les domaines S_ν d'une exhaustion canonique de S ($\overline{S_\nu} \subset S_{\nu+1}$; support de $U \subset S_0$), puis obtenir T par passage à la limite.

Soit t_0 la fonction harmonique avec singularités sur S_0, prolongeable par symétrie sur le double de SCHOTTKY de S_0 [8], telle que la distribution associée $T_0 = vpt_0$ (valeur principale) satisfasse l'équation $\Delta T = U$ (t_0 existe car $CU = 0$). Soient t_ν, $\nu > 0$ les fonctions harmoniques avec singularités sur S_ν, prolongeables par antisymétrie sur le double de SCHOTTKY de S_ν, telles que les distributions associées $T_\nu = vpt_\nu$ satisfassent l'équation $\Delta T = U$. Appelons encore t_ν et T_ν les fonctions et distributions prolongées au delà de S_ν par 0. T_ν, $\nu > 0$, vérifie la relation:

$$(dT_\nu, \varphi) = (T_\nu, \delta\varphi), \quad \text{pour tout} \quad \varphi \in *\mathfrak{B}_1 .$$

a) La suite (dt_ν) converge en A-norme sur $S - S_0$:

Formons $\tau_\nu = t_\nu - t_0$. τ_ν est C^1 sur S_ν et τ est C^0 sur S. $\Delta\tau_\nu = 0$ dans S_0 et dans $S_\nu - \overline{S_0}$. Ainsi, pour $0 < \mu < \nu$:

$$D(\tau_\nu - \tau_\mu, \tau_\nu) = 0 , \quad \text{donc} \quad D(\tau_\mu) = D(\tau_\nu) + D(\tau_\nu - \tau_\mu) .$$

Donc la suite de nombres positifs $D(\tau_\nu)$ est monotone décroissante et tend vers un nombre d. Lorsque μ et $\nu \to \infty$, $D(\tau_\mu) \to d$, $D(\tau_\nu) \to d$ et par suite $D(\tau_\nu - \tau_\mu) \to 0$. Or $D(\tau_\nu - \tau_\mu) = D(t_\nu - t_\mu)$.

b) Les fonctions t_ν sont bornées uniformément hors de S_0:

La fonction t_ν est harmonique sur $S_\nu - S_0$. Comme t_ν, au voisinage du support de U, prend des valeurs positives et négatives, car $CU = 0$, il en est ainsi sur S_1'. t admet donc un minimum négatif $m_{\nu,1}$ et un maximum positif $M_{\nu,1}$ sur S_1'. $m_{\nu,0}$ et $M_{\nu,0}$ étant définis de la même manière, on a:

$$m_{\nu,0} \leqslant m_{\nu,1} \quad \text{et} \quad M_{\nu,0} \geqslant M_{\nu,1} \quad \text{d'où} \quad 0_{S_1'}(t_\nu) \leqslant 0_{S_0'}(t_\nu) ,$$

$0_{S_i'}(t_\nu)$ désignant l'oscillation $M_{\nu,i} - m_{\nu,i}$. Cette relation vaut pour $\nu > 1$. D'après un lemme de JOHANSSON [8], il existe une constante k indépendante de ν, telle que $0_{S_0'}(t_\nu) \leqslant k 0_{S_0'}(t_1)$. Donc t_ν est borné indépendamment de ν sur S_0, et par suite sur $S_\nu - S_0$.

c) Soit (t_n) une suite partielle de t_ν, convergent uniformément sur tout compact, ainsi que les différentielles dt_n, vers une fonction t, respectivement vers la différentielle dt. $T = vpt$ est une solution du problème posé qui, d'après a) et b) est continue en moyenne à l'infini ainsi que dT. En effet

$\Delta T = U$, car tous les t_n ont mêmes singularités. De plus, pour tout $\varphi \in *\mathfrak{B}_1$, on a

$$(T, \delta\varphi) = \lim (T_n, \delta\varphi), \quad (dT, \varphi) = \lim (dT_n, \varphi).$$

Comme $(T_n, \delta\varphi) = (dT_n, \varphi)$ pour tout n, on a bien $FT = 0$.

Le cas général où $CU \neq 0$ peut être maintenant obtenu en remarquant simplement que la fonction de GREEN, $g(p, q)$, résoud le problème $\Delta T = \delta_q$, δ_q mesure de Dirac au point q, T, dT continus en moyenne à l'infini, $FT = 0$. La propriété $Fg = 0$ s'obtient de nouveau par passage à la limite: pour les domaines S_ν et les fonctions de GREEN $g_\nu(p, q)$ supposées prolongées par zéro en dehors de S_ν, on a

$$(dg_\nu(p, q), \varphi(p)) = (g_\nu(p, q), \delta\varphi(p)) \text{ pour tout } \varphi \in *\mathfrak{B}_1.$$

Or la suite (g_ν) converge uniformément sur tout compact de $S - (q)$ vers g, les g_ν sont bornés dans leur ensemble à l'extérieur d'un voisinage de q, enfin les nombres $D_{S-\Omega}(g_\nu)$, Ω compact contenant q, sont bornés; donc par passage à la limite $Fg = 0$.

3.2. Problème de NEUMANN sur une surface greenienne

Proposition 3.2. Soit, sur une surface greenienne, U une distribution dont le support comporte un nombre fini de points, orthogonale aux champs de $\mathfrak{C}$, $CU = 0$. L'équation $\Delta T = U$ admet une solution unique T continue en moyenne à l'infini ainsi que dT, telle que $F'dT = 0$, c'est-à-dire $(dT, d\varphi) = (U, \varphi)$ pour tout $\varphi \in \mathfrak{E}_2 \cap \mathfrak{B}_1$, et telle que $CT = 0$.

Remarquons que la condition $CU = 0$ est nécessaire pour avoir $F'dT = 0$ car $(\delta dT, c) = 0$.

L'unicité de la solution résulte du fait que $\Delta T = 0, T, dT$ continus en moyenne à l'infini entraîne que dT est un élément de $\mathfrak{C}$ donc de $\mathfrak{C}_h$; or $F'dT = 0$ entraîne que $dT \in \mathfrak{C}_s$; donc $dT = 0$ car $\mathfrak{C}_s \cap \mathfrak{C}_h = \emptyset$; donc $T = \text{const.}$ et $CT = 0$ entraîne $T = 0$.

Nous allons démontrer l'existence en construisant la solution de ce problème pour les domaines S_ν d'une exhaustion canonique de S ($\overline{S_\nu} \subset S_{\nu+1}$; support de $U \subset S_0$) puis obtenir T par passage à la limite.

Soit t_ν la fonction harmonique avec singularités, prolongeable par symétrie sur le double de SCHOTTKY de S_ν, dont la distribution associée $T_\nu = vpt_\nu$ satisfait l'équation $\Delta T = U$ (t_ν existe car $CU = 0$), T_ν vérifie la condition $(dT_\nu, d\varphi) = (U, \varphi)$, pour tout $\varphi \in \mathfrak{E}_2 \cap \mathfrak{B}_1$.

a) (dt_ν) converge en A-norme sur tout compact de S-support de U; l'ensemble des A-normes de (dt_ν) dans $S_\nu - S_0$ est borné:

$$\text{Formons } \tau_\nu = t_\nu - t_0 \text{ sur } \overline{S_0}$$
$$= t_\nu \text{ sur } S_\nu - \overline{S_0}.$$

τ_ν est C^∞ dans S_0 et dans $S_\nu - \overline{S}_0$; de plus $*d\tau_\nu$ est continue au travers de S_0'.

Envisageons l'ensemble des formes φ, $(\varphi)_\nu$, vérifiant les conditions: φ est C^∞ dans S_0, φ est C^∞ dans $S_\nu - \overline{S}_0$, $\varphi + t_0$ est C^0 dans S_ν – support de U, $D_\nu(\varphi) < \infty$. τ_ν fait partie de cet ensemble. Montrons que $D_\nu(\tau_\nu) \leqslant D_\nu(\varphi)$:

$$D_\nu(\varphi - \tau_\nu, \tau_\nu) = 0$$
$$D_\nu(\varphi) = D_\nu(\varphi - \tau_\nu) + D_\nu(\tau_\nu) \quad \text{d'où} \quad D_\nu(\tau_\nu) \leqslant D_\nu(\varphi)\,.$$

Soit $\mu < \nu$. On a $(\varphi)_\mu \supset (\varphi)_\nu$. Par suite $\tau_\nu \in (\varphi)_\mu$. Donc:

$$D_\mu(\tau_\mu) \leqslant D_\mu(\tau_\nu) \leqslant D_\nu(\tau_\nu)\,.$$

Les nombres $D_\mu(\tau_\mu)$ forment une suite monotone croissante. De plus:

$$\begin{aligned} D_\mu(\tau_\nu - \tau_\mu) &= D_\mu(\tau_\nu) + D_\mu(\tau_\mu) - 2D_\mu(\tau_\nu, \tau_\mu) \\ &= D_\mu(\tau_\nu) - D_\mu(\tau_\mu) < D_\nu(\tau_\nu) - D_\mu(\tau_\mu) \end{aligned}$$

car $$D_\mu(\tau_\nu, \tau_\mu) = D_\mu(\tau_\mu, \tau_\mu) + D_\mu(\tau_\nu - \tau_\mu, \tau_\mu) = D_\mu(\tau_\mu, \tau_\mu)\,.$$

La classe $(\varphi)_S$ n'est pas vide: par exemple $ft_1 - t_0 \in (\varphi)_S$ si f est une fonction C^∞, égale à 1 sur $\overline{S}_0$, à 0 sur $S - S_1$.

Soit $d = \inf_{\varphi \in (\varphi)_S} D(\varphi)$. Quel que soit $\varphi \in (\varphi)_S$, on a:

$$D_\mu(\tau_\mu) \leqslant D_\mu(\varphi) \leqslant D(\varphi)\,, \quad \text{par suite} \quad D_\mu(\tau_\mu) \leqslant d\,.$$

Les nombres $D_\mu(\tau_\mu)$ sont donc bornés. Il en est de même des nombres $D_{S_\mu - S_0}(t_\mu)$. Comme les premiers forment une suite croissante, ils convergent. Par suite $D_\mu(\tau_\nu - \tau_\mu)$ tend vers 0. Les $d\tau_\nu$ forment une suite de CAUCHY en A-norme sur tout compact. Il en est de même pour les formes dt_ν sur tout compact de S-support de U. Ainsi les dt_ν convergent uniformément sur tout compact de S-support de U.

b) Si l'on fixe la constante arbitraire dont dépend t_ν en posant $t_\nu(P) = 0$, $P \in S_0$, (t_ν) converge uniformément sur tout compact vers une fonction t; la distribution associée T permet de construire la solution $(1 - C)T$ du problème. En effet:

$$(dT_\nu, d\varphi)_\nu = (U, \varphi) \quad \text{pour tout} \quad \varphi \in \mathfrak{E}_2 \cap \mathfrak{B}_1, \quad \text{et par suite} \quad F'dT = 0\,;$$

3.3. Solution de $\Delta T = U$ sur une surface non greenienne

Proposition 3.3. Soit, sur une surface non greenienne, U une distribution dont le support comporte un nombre fini de points, orthogonale aux champs de C, $CU = 0$; l'équation $\Delta T = U$ admet une solution unique T continue en moyenne à l'infini ainsi que dT, telle que $CT = 0$.

La condition $CU = 0$ est nécessaire, sinon l'équation $\Delta T = \delta_q$ aurait une solution, ce qui équivaudrait à l'existence de la fonction de Green, contrairement à l'hypothèse.

L'unicité est immédiate car $\Delta T = 0$, T, dT continus en moyenne à l'infini signifie que T est une fonction harmonique à intégrale de DIRICHLET finie car $dT \in \mathfrak{A}$; donc $T = \text{const.}$ [3] et la condition $CT = 0$ entraîne $T = 0$.

Pour démontrer l'existence on peut procéder soit comme en 3.1., cas $CU = 0$, en prenant $T - CT$, soit comme en 3.2.

4. Les opérateurs Γ, Γ^0 et N. Hypothèses relatives à la surface

4.1. Définitions

La solution du problème de DIRICHLET (surface greenienne) pour $(U, \varphi) = \varphi(q)$ est la fonction de GREEN, à une singularité logarithmique $+$ en q. Nous la désignerons par $g(p, q)$.

La solution du problème de NEUMANN (surface greenienne) pour $(U, \varphi) = \varphi(q) - \varphi(q_0)$ est la fonction de NEUMANN généralisée à une singularité logarithmique $+$ en q et une singularité logarithmique $-$ en q_0. Nous la désignerons par $n(p; q, q_0)$.

Pour une surface non greenienne désignons encore par $g(p; q, q_0)$ la solution de l'équation de POISSON pour $(U, \varphi) = \varphi(q) - \varphi(q_0)$ construite par la méthode du n° 3.1.; par $n(p; q, q_0)$ la solution normalisée par $CT = 0$. g et n diffèrent d'au plus une constante. Nous les appellerons encore fonctions de GREEN et de NEUMANN généralisées.

Soit $k(p, q)$ la forme double:

$$k(p, q) = 1_p 1_q + (dx_p dx_q + dy_p dy_q) + dx_p \wedge dy_p \cdot dx_q \wedge dy_q$$

où $dx + i dy = dz$ est la différentielle abélienne Φ. Constituons les formes doubles:

$$\gamma^0(p, q) = g(p, q) k(p, q), \quad \gamma(p; q, q_0) = g(p; q, q_0) k(p, q)$$
$$\nu(p; q, q_0) = n(p; q, q_0) k(p, q).$$

Soient Γ, Γ^0 et N les opérateurs admettant γ, γ^0 et ν pour noyaux métriques:

$$\Gamma\varphi(p) = (\gamma(p; q, q_0), \varphi(q)), \quad \Gamma^0\varphi(p) = (\gamma^0(p, q), \varphi(q))$$
$$N\varphi(p) = (\nu(p; q, q_0), \varphi(q)).$$

Pour tout $\varphi \in \mathfrak{D}$, les formes $\Gamma\varphi$, $\Gamma^0\varphi$ et $N\varphi$ sont définies. $\Gamma^0\varphi$ est C^∞. $\Gamma\varphi$ et $N\varphi$ sont C^∞ sauf en $p = q_0$ où leurs coefficients présentent la singularité:

$$-\frac{1}{2\pi} \log | pq_0 | (k(p, q), \varphi(q)).$$

Ce sont donc encore des formes C^∞ sur S lorsque $C\varphi = 0$.

Proposition 4.1. Les formes $\Gamma^0\varphi$, $\Gamma(1-C)\varphi$ et $N(1-C)\varphi$ sont définies et C^∞ ; elles vérifient sur S_Φ les relations:

$$\Delta\Gamma^0\varphi = \varphi\,, \qquad \Delta\Gamma(1-C)\varphi = \Delta N(1-C)\varphi = (1-C)\varphi\,.$$

La démonstration peut se faire par calcul direct ; pour une autre démonstration [9, p. 23].

Soulignons que $\Gamma^0\varphi$ est seulement définie si la surface S est greenienne et que l'opérateur Γ ne sera utilisé que dans le cas où S est non greenienne.

4.2. Hypothèse (N)

Dans la suite de ce travail nous faisons l'hypothèse que $N(1-C)\varphi$ a une énergie finie pour tout $\varphi \in \mathfrak{A}$ de degré 0 et que cette énergie dépend continuement de φ sur $\mathfrak{A}$:

$$D(N(1-C)\varphi) \leqslant \text{const.}\, A(\varphi)\,, \quad \text{pour tout} \quad \varphi \in \mathfrak{A}\,, \quad \text{de degré } 0\,.$$

Cette hypothèse est évidemment satisfaite si la surface est compacte ou si elle est constituée par un domaine relativement compact à frontière très régulière d'une autre surface de RIEMANN. Nous ignorons si elle est réalisée sur toute surface de RIEMANN. Il conviendrait d'abord de savoir dans quelle mesure elle dépend du choix de Φ.

Si la surface est non greenienne l'hypothèse (N) entraîne que $\Gamma(1-C)\varphi$, qui ne diffère de $N(1-C)\varphi$ que d'un champ de $\mathfrak{C}$, a également une énergie finie dépendant continuement de φ sur $\mathfrak{A}$.

4.3. Hypothèse (Γ^0)

Sur une surface greenienne nous faisons pour Γ^0 l'hypothèse correspondante à (N), à savoir que le potentiel $\Gamma^0\varphi$ a une énergie finie pour tout φ de $\mathfrak{A}$ et que cette énergie dépend continuement de φ sur $\mathfrak{A}$:

$$D(\Gamma^0\varphi) \leqslant \text{const.}\, A(\varphi)\,, \quad \text{pour tout} \quad \varphi \in \mathfrak{A}\,, \quad \text{de degré } 0\,.$$

Concernant la réalisation de cette hypothèse, ou sa dépendance de Φ on peut faire les mêmes remarques que pour l'hypothèse (N).

4.4. Proposition 4.4.1. Sur une surface non greenienne les formes $\Gamma(1-C)\varphi$ et $*\Gamma(1-C)\varphi$ sont nulles à la frontière, pour tout φ de $\mathfrak{A}$.

Envisageons d'abord le cas du degré 0 et posons $(1-C)\varphi = f$:

$$\Gamma(1-C)\varphi = (g(p;q,q_0), f(q))\,.$$

Nous avons: $(d_p g(p;q,q_0), \psi(p)) = (g(p;q,q_0), \delta\psi(p))$, pour tout ψ de $*\mathfrak{B}_1$, comme il est montré au n° 3.1. L'hypothèse (N) entraîne que $d\Gamma(1-C)$

est un opérateur borné sur $\mathfrak{A}$. L'égalité précédente montre que son transposé métrique, c'est-à-dire $(d\Gamma(1-C))'$, est tel que:

$$(d\Gamma(1-C))'\psi = (1-C)\Gamma'\delta\psi\,, \quad \text{pour tout } \psi \text{ de } *\mathfrak{B}_1\,.$$

On peut donc écrire:

$$(d\Gamma f, \psi) = (f, \Gamma'\delta\psi)\,, \quad \text{pour tout } \psi \text{ de } *\mathfrak{B}_1\,.$$

Prenons $\psi = d\Gamma g$, $Cg = 0$, $g \in \mathfrak{A}$. On a:

$$(d\Gamma f, d\Gamma g) = (f, \Gamma' g)\,.$$

Cette relation montre que $(\Gamma' g, (1-C)\varphi)$ existe pour tout φ de $\mathfrak{A}$, de degré 0. Or $(\Gamma' g, \varphi)$ existe pour tout φ de $\mathfrak{D}$, donc $(\Gamma' g, C\varphi) = (\Gamma' g, 1)C\varphi$ existe pour tout φ de $\mathfrak{A}$. La relation:

$$(\Gamma' g, \varphi) = (\Gamma' g, (1-C)\varphi) + (\Gamma' g, 1)C\varphi\,,$$

montre alors que $\Gamma' g$ définit une fonctionnelle linéaire continue sur $\mathfrak{A}$ car:

$$|(\Gamma' g, \varphi)| = |(d\Gamma f, d\Gamma g)| \leqslant D^{\frac{1}{2}}(\Gamma f) D^{\frac{1}{2}}(\Gamma g) \leqslant \text{const.}\, A^{\frac{1}{2}}(\varphi) A^{\frac{1}{2}}(g)\,;$$

$(1-C)\Gamma'(1-C)$ est donc un opérateur borné sur $\mathfrak{A}$. Son transposé métrique est $(1-C)\Gamma(1-C)$. Ainsi:

$$(\Gamma' g, f) = (g, \Gamma f)\,,$$

et on a bien: $(d\Gamma f, \psi) = (\Gamma f, \delta\psi)$, pour tout ψ de $*\mathfrak{B}_1$.

Notons encore:

$D(\Gamma(1-C)\varphi) = (\Gamma(1-C)\varphi, (1-C)\varphi)$, pour tout φ de $\mathfrak{A}$, de degré 0.

Le cas du degré 2 se traite de la même manière car à φ de degré 2, élément de $\mathfrak{A}$, correspond $\varphi' = *\varphi$ de degré 0, également élément de $\mathfrak{A}$ et $D(\Gamma(1-C)\varphi) = D(\Gamma(1-C)\varphi')$.

Dans le cas du degré 1, posons $\varphi' = (1-C)\varphi = a\,dx + b\,dy$.

1. $C\varphi' = 0$ implique $Ca = Cb = 0$. En effet $C\varphi' = 0$ implique $(\varphi', dx) = 0$, c'est-à-dire $(a, 1) = 0$, d'où $Ca = 0$; de même $(\varphi', dy) = (b, 1) = 0$ entraîne $Cb = 0$.

2. $\Gamma(1-C)\varphi = \Gamma a\,dx + \Gamma b\,dy$. Comme $A(\varphi') = A(a) + A(b)$, $\varphi' \in \mathfrak{A}$ implique $a \in \mathfrak{A}$ et $b \in \mathfrak{A}$, donc Γa et Γb sont de $A + D$-norme finie. D'après le résultat ci-dessus, les coefficients Γa et Γb sont nuls à la frontière.

L'affirmation résulte du lemme suivant:

Lemme 4.4. Si une forme $F = A\,dx + B\,dy$ a des coefficients de $A + D$-norme finie, nuls à la frontière et finis sur S, F et $*F$ sont nuls à la frontière.

F est bien de $A + D$-norme finie. Soit $\psi = f dx \wedge dy$ une forme de $*\mathfrak{B}_1$. Il s'agit de prouver que:

$$(dF, \psi) = (F, \delta\psi) .$$

On note que $\psi \in *\mathfrak{B}_1$ signifie que f est de $A + D$-norme finie. Par suite $f dx$ et $f dy$ appartiennent à $*\mathfrak{B}$. Les relations:

$$(dA, \varphi) = (A, \delta\varphi) , \quad (dB, \varphi) = (B, \delta\varphi) , \quad \text{pour tout } \varphi \in *\mathfrak{B}_1 ,$$

sont encore vraies pour tout $\varphi \in *\mathfrak{B}$, car $*\mathfrak{B}_1$ est dense sur $*\mathfrak{B}$ avec la norme $A + (\delta, \delta)$ (d'après [2], p. 79 nous savons que A^∞ sur S_Φ est dense sur $*\mathfrak{B}$, or A^∞ sur S_Φ est contenu dans $*\mathfrak{B}_1$). Ainsi:

$$\begin{aligned}(dF, \psi) &= (dA, f dy) + (dB, f dx) = (A, \delta(f dy)) + (B, \delta(f dx)) = \\ &= \left(A, \frac{\partial f}{\partial y}\right) + \left(B, \frac{\partial f}{\partial x}\right) = \left(A dx + B dy, \frac{\partial f}{\partial y} dx - \frac{\partial f}{\partial x} dy\right) \\ (dF, \psi) &= (F, \delta\psi) .\end{aligned}$$

On démontre de la même manière que $(\delta F, \psi) = (F, d\psi)$, pour tout $\psi \in \mathfrak{B}_1$.

Comme, de façon générale, pour tous φ, φ' dont les coefficients sont de $A + D$-norme finie, $\varphi = a dx + b dy$, $\varphi' = a' dx + b' dy$

$$D(\varphi, \varphi') = (da, da') + (db, db') - (da, *db') + (db, *da') ,$$

on a: $\quad D(\varphi, \varphi) \leqslant ((da, da)^{\frac{1}{2}} + (db, db)^{\frac{1}{2}})^2 ,$

et par suite, d'après ce qui précède:

$$(\Gamma(1 - C)\varphi, (1 - C)\varphi) = D(\Gamma(1 - C)\varphi) \leqslant \text{const.}\, A(\varphi) ,$$

pour tout φ de $\mathfrak{A}$.

La continuité de l'opérateur $d\Gamma(1 - C)$, supposée vraie pour le degré 0 est donc démontrée pour les degrés 1 et 2. La continuité de l'opérateur $(1 - C)\Gamma(1 - C)$ est démontrée pour les 3 degrés.

Proposition 4.4.2. Pour tout φ de $\mathfrak{A}$, de degré 0, la forme $*dN(1 - C)\varphi$ est nulle à la frontière. De même, pour tout φ de $\mathfrak{A}$, de degré 2, $\delta N(1 - C)\varphi$ est nulle à la frontière.

Examinons le cas du degré 0. Nous avons:

$$(d_p n(p; q, q_0), d\psi(p)) = \psi(q) - \psi(q_0) , \quad \text{pour tout } \psi \text{ de } \mathfrak{B}_1 ,$$

comme il est montré au n° 3.2. L'hypothèse (N) entraîne que $dN(1 - C)$ est un opérateur borné sur $\mathfrak{A}$. L'égalité précédente montre que son transposé métrique $(dN(1 - C))'$ est tel que:

$$(dN(1 - C))' d\psi = (1 - C)(\psi(q) - \psi(q_0)) = \psi ,$$

pour tout ψ de $\mathfrak{B}_1$. On peut donc écrire (mêmes notations qu'en 4.4.1):

$$(dNf, d\psi) = (f, \psi) ,$$

ce qui démontre l'affirmation.

Pour φ de degré 2, $\varphi' = *\varphi$ est de degré 0 et $N(1 - C)\varphi = *N(1 - C)\varphi'$, $\delta N(1 - C)\varphi = - *dN(1 - C)\varphi'$.

Proposition 4.4.3. Sur une surface greenienne les formes $\Gamma^0\varphi$ et $*\Gamma^0\varphi$ sont nulles à la frontière, pour tout φ de $\mathfrak{A}$.

La démonstration peut se faire exactement de la même manière que celle de la proposition 4.4.1., moyennant quelques simplifications dues à la disparition du facteur $(1 - C)$.

On a ici:

$$(\Gamma^0\varphi, \varphi) = D(\Gamma^0\varphi) \leqslant \text{const. } A(\varphi) , \quad \text{pour tout } \varphi \text{ de } \mathfrak{A} .$$

De nouveau, la continuité de l'opérateur $d\Gamma^0$, supposée vraie pour le degré 0 est donc démontrée pour les degrés 1 et 2. La continuité de l'opérateur Γ^0 est démontrée dans les 3 cas.

5. Inégalités du type de POINCARÉ

En se fondant sur les hypothèses (Γ^0) et (N), il est possible d'établir simplement quelques inégalités fondamentales qui bornent la norme ordinaire d'une forme par sa D-norme.

Proposition 5.1. Il existe une constante finie, ne dépendant que de la surface, telle que pour toute forme φ de $A + D$-norme finie vérifiant $C\varphi = 0$, on ait:

$$A(\varphi) \leqslant \text{const. } D(\varphi) .$$

Envisageons d'abord le cas du degré 0. Soit f une fonction de $A + D$-norme finie, $Cf = 0$. En utilisant la proposition 4.4.2.:

$$A^2(f) = (dNf, df)^2 \leqslant D(Nf)D(f) \leqslant \text{const. } A(f)D(f) .$$

Ainsi: $$A(f) \leqslant \text{const. } D(f) .$$

La démonstration est la même pour le degré 2.

Envisageons maintenant le cas du degré 1.

a) Sur une surface greenienne, constituons:

$$\varphi' = \delta\Gamma^0 d\varphi + d\Gamma^0\delta\varphi .$$

On vérifie immédiatement que

$$d\varphi' = d\varphi\,, \quad \delta\varphi' = \delta\varphi\,, \quad C\varphi' = 0\,. \quad \text{Donc} \quad \varphi' = \varphi\,.$$

Par suite:

$$A^{\frac{1}{2}}(\varphi) \leqslant A^{\frac{1}{2}}(\delta\Gamma^0 d\varphi) + A^{\frac{1}{2}}(d\Gamma^0\delta\varphi) = (\Gamma^0 d\varphi, d\varphi) + (\Gamma^0\delta\varphi, \delta\varphi)\,,$$

en utilisant la proposition 4.4.3. Donc:

$$A(\varphi) \leqslant \text{const.}\, D(\varphi)\,, \quad \text{en utilisant l'hypothèse } (\Gamma^0)\,.$$

b) Sur une surface non greenienne, la formule:

$$\Delta\Gamma(1 - C)\varphi = \varphi - C\varphi\,,$$

montre que:

$$\begin{aligned} C d\varphi &= d\delta\Gamma(1 - C)d\varphi - d\varphi = d\,(\delta\Gamma(1 - C)d\varphi - \varphi) \\ C\,\delta\varphi &= \delta d\Gamma(1 - C)\,\delta\varphi - \delta\varphi = \delta\,(d\Gamma(1 - C)\,\delta\varphi - \varphi)\,. \end{aligned}$$

Si l'on n'a pas identiquement $C d\varphi = 0$, il existe donc une forme α de A-norme finie pour laquelle $*d\alpha = 1$. Si l'on n'a pas $C\,\delta\varphi = 0$, il existe de même une forme β pour laquelle $\delta\beta = 1$.

Soit φ une forme de $A + D$-norme finie telle que $C\varphi = 0$. Constituons:

$$\varphi' = \delta\Gamma(1 - C)d\varphi + d\Gamma(1 - C)\,\delta\varphi + (1 - C)\alpha(*C d\varphi) + (1 - C)\beta C\delta\varphi\,.$$

On vérifie immédiatement que:

$$d\varphi' = d\varphi\,, \quad \delta\varphi' = \delta\varphi\,, \quad C\varphi' = 0\,. \quad \text{Donc} \quad \varphi' = \varphi\,.$$

Par suite:

$$\begin{aligned} A^{\frac{1}{2}}(\varphi) \leqslant A^{\frac{1}{2}}\,&(\delta\Gamma(1 - C)d\varphi) + A^{\frac{1}{2}}\,(d\Gamma(1 - C)\,\delta\varphi) + \\ &+ A^{\frac{1}{2}}\,((1 - C)\alpha(*C d\varphi)) + A^{\frac{1}{2}}\,((1 - C)\beta C\,\delta\varphi)\,. \end{aligned}$$

En appliquant la proposition 4.4.1. pour les formes de degré 0 et 2 à $\delta\varphi$ et $d\varphi$, on voit qu'il existe une constante finie telle que $A(\varphi) \leqslant \text{const.}\, D(\varphi)$, ce qu'il fallait démontrer.

Proposition 5.2. Sur une surface greenienne, il existe une constante finie ne dépendant que de la surface, telle que pour toute forme φ de $A + D$-norme finie, satisfaisant à $F\varphi = 0$, $F'\varphi = 0$, on ait:

$$A(\varphi) \leqslant \text{const.}\, D(\varphi)\,.$$

Pour une forme de degré 0, nulle à la frontière, nous avons:

$$A(\varphi) = (\delta d\Gamma^0\varphi, \varphi) = D(\Gamma^0\varphi, \varphi) \leqslant D^{\frac{1}{2}}(\Gamma^0\varphi)D^{\frac{1}{2}}(\varphi) \leqslant \text{const.}\, A^{\frac{1}{2}}(\varphi)D^{\frac{1}{2}}(\varphi)$$

ce qui démontre la proposition dans ce cas. La démonstration est analogue dans le cas du degré 2.

Dans le cas du degré 1, posons $\varphi = (1 - C)\varphi + C\varphi$. Nous venons de montrer que:

$$A((1 - C)\varphi) \leqslant \text{const. } D(\varphi) .$$

Nous pouvons poser (proposition 2.6.) $C\varphi = dh_0 + \delta h_2$. Nous avons (proposition 2.6.):

$$A(dh_0) \leqslant \text{const. } A(C\varphi) , \quad A(\delta h_2) \leqslant \text{const. } A(C\varphi) .$$

Or on peut supposer sans restriction que $Ch_0 = Ch_2 = 0$. La proposition 5.1. permet alors d'écrire:

$$A(h_0) \leqslant \text{const. } A(C\varphi) , \quad A(h_2) \leqslant \text{const. } A(C\varphi) .$$

Par ailleurs:

$$A(C\varphi) = (\varphi, C\varphi) = (\varphi, dh_0) + (\varphi, \delta h_2) .$$

Comme φ et $*\varphi$ sont nuls à la frontière, on a donc:

$$A(C\varphi) = (\delta\varphi, h_0) + (d\varphi, h_2) .$$

Par suite:

$$A(C\varphi) \leqslant A^{\frac{1}{2}}(\delta\varphi)A^{\frac{1}{2}}(h_0) + A^{\frac{1}{2}}(d\varphi)A^{\frac{1}{2}}(h_2) \leqslant \text{const. } A^{\frac{1}{2}}(C\varphi)D^{\frac{1}{2}}(\varphi) .$$

Il existe donc une constante finie telle que

$$A(C\varphi) \leqslant \text{const. } D(\varphi)$$

ce qu'il restait à démontrer.

Proposition 5.3. Sur une surface greenienne il existe une constante ne dépendant que de la surface, telle que pour toute forme φ vérifiant les conditions $F\varphi = 0$ et $C_a\varphi = 0$, on ait:

$$A(\varphi) \leqslant \text{const. } D(\varphi) .$$

Pour le degré 0, la propriété revient à la proposition 5.2. puisqu'alors $C_a\varphi = 0$ est automatiquement réalisée.

Pour le degré 2, la proposition revient à la proposition 5.1. puisqu'alors $F\varphi = 0$ est automatiquement réalisée.

Pour le degré 1, remarquons d'abord que $F\varphi = 0$ implique $Cd\varphi = 0$. Formons alors:

$$\varphi' = \delta N(1 - C)d\varphi + d\Gamma^0\delta\varphi .$$

On vérifie immédiatement que φ' est nul à la frontière. En effet, pour tout $\psi \in *\mathfrak{B}_1$:

$$(d\varphi', \psi) = (d\varphi, \psi),$$
$$(\varphi', \delta\psi) = (\delta N d\varphi, \delta\psi) + (d\Gamma^0 \delta\psi, \delta\psi) = (\Delta N d\varphi, \psi) = (d\varphi, \psi).$$

Comme $d\varphi' = d\varphi$, $\delta\varphi' = \delta\varphi$, φ' ne diffère de φ que par un champ de $\mathfrak{C}_a$. Or $C_a\varphi' = 0$. Donc $\varphi' = \varphi$. On a:

$$A^{\frac{1}{2}}(\varphi) \leqslant \text{const.}\ (A^{\frac{1}{2}}(d\varphi) + A^{\frac{1}{2}}(\delta\varphi)),$$

ce qui démontre la propriété.

6. Formes pseudoharmoniques

Une forme $\varphi \in \mathfrak{E}$ est dite *pseudoharmonique* si elle vérifie sur S_Φ l'équation $\Delta\varphi = 0$. La forme est *harmonique* si elle appartient à $\mathfrak{E}_1$.

Proposition 6.1. Il existe une forme pseudoharmonique σ de $A + D$-norme finie, vérifiant les conditions suivantes:

a) $\sigma = dt + \overline{dt}$ en Φ_0 où $dz = tdt$,

b) $\sigma = a\Phi + \overline{a\Phi}$, où $|a| < \infty$ en tout autre point Φ,

c) $F\sigma = F'\sigma = 0$.

Soient en effet u et v les fonctions vérifiant les conditions suivantes:

a) u et v sont harmoniques, de D-norme finie hors d'un compact contenant Φ_0,

b) u est singulière comme $R\left(\frac{1}{t}\right)$, en Φ_0; v est singulière en Φ_0 comme $I\left(\frac{1}{t}\right)$,

c) u et v sont nulles à la frontière.

Constituons la fonction complexe $f = u + iv$, puis

$$\sigma = f\Phi + \overline{f\Phi}.$$

Il est immédiat que σ est pseudoharmonique et vérifie les conditions a) et b). Les fonctions u et v peuvent être construites par la méthode utilisée au n° 3.1. Elles sont donc de $A + D$-norme finie en dehors d'un compact contenant Φ_0; de plus elles sont nulles à la frontière. La propriété c) se démontre alors comme le lemme 4.4. car σ est de $A + D$-norme finie.

Les deux formes σ et $*\sigma$ seront appelées les deux *formes pseudoharmoniques élémentaires* attachées au point Φ_0. Le cas où $dz = t_n dt$, $n > 1$, se traite de façon analogue: il y a alors $2n$ formes pseudoharmoniques élémentaires attachées au point Φ_0.

Remarquons encore ici, ce dont nous aurons besoin plus loin (n° 7), qu'en vertu de l'étude de la convergence faite au n° 3.1., σ est limite uniforme sur

tout compact des σ_ν correspondants aux domaines S_ν et que les nombres $D_\nu(\sigma_\nu) + A_\nu(\sigma_\nu)$ sont bornés dans leur ensemble.

Proposition 6.2. Sur une surface greenienne, étant donné une forme continue, α, de $A + D$-norme finie, il existe une forme pseudoharmonique ω telle que $F(\omega - \alpha) = F'(\omega - \alpha) = 0$.

a) Considérons les formes φ de $\mathfrak{D}$, nulles ainsi que leur $*$ aux points Φ. Les formes $\alpha + \varphi$ forment un ensemble convexe dans l'espace des formes de $A + D$-norme finie. La norme $D(\alpha + \varphi)$ atteint un minimum d. Il existe une suite minimale $\omega_n = \alpha + \varphi_n$, telle que $D(\omega_n) \to d$, suite de CAUCHY en D-norme. La suite φ_n est donc également une suite de CAUCHY en D-norme, donc en $A + D$-norme, en vertu de la proposition 5.2. Il existe donc une limite φ_∞ telle que $(A + D)\varphi_\infty < \infty$ et $D(\alpha + \varphi_\infty) = d$; nous écrirons $\omega = \alpha + \varphi_\infty$.

b) En écrivant que $D(\omega, \psi) = 0$ pour tout $\psi \in \mathfrak{E}$ à support compact sur S_Φ, on voit que ω est harmonique sur S_Φ.

c) Etant donné un compact à frontière très régulière Ω, contenant un seul point Φ_0, appelons σ la forme pseudoharmonique égale ainsi que son $*$ à α au point Φ_0, égale ainsi que son $*$ à ω sur Ω' [9]. On a:

$$D_\Omega(\sigma, \sigma - \omega) = \lim_n D_\Omega(\sigma, \sigma - \omega_n) = \lim_n \int_{\Omega'} (\sigma - \omega_n) \wedge *d\sigma - \delta\sigma \wedge *(\sigma - \omega_n) = 0.$$

Donc $D_\Omega(\sigma) \leqslant D_\Omega(\omega)$. Si ω n'était pas égale à σ dans Ω on pourrait former une suite ω'_n convergent vers ω à l'extérieur de Ω et vers σ dans Ω, qui aurait une D-norme inférieure à celle de ω, ce qui est absurde. Nous avons donc démontré qu'aux points Φ, ω est C^∞. Ainsi ω est pseudoharmonique.

Nous avons encore la proposition suivante, valable sur toute surface.

Proposition 6.3. Les formes pseudoharmoniques de $A + D$-norme finie constituent un espace de HILBERT en $A + D$-norme.

La proposition est immédiate pour les formes de degré 0 et 2 car les formes pseudoharmoniques sont alors harmoniques.

Pour une forme pseudoharmonique de degré 1, $\sigma = a\,dx + b\,dy$, a et b sont des fonctions harmoniques sur S_Φ. Ces fonctions peuvent présenter aux points Φ des singularités, telles toutefois que σ soit C^∞ en ces points.

a) Si σ_n converge en A-norme vers σ, on peut dire, puisque $A(\sigma) = A(a) + A(b)$, que les fonctions harmoniques sur S_Φ, a_n et b_n convergent en norme vers les fonctions harmoniques sur S_Φ, a et b: en effet $(a_n, \Delta\varphi) = 0$ pour tout $\varphi \in \mathfrak{D}_2$, donc $(a, \Delta\varphi) = 0$, donc $\Delta a = 0$ sur S_Φ.

b) Les coefficients des $\sigma_n = \alpha_n dt + \bar{\alpha}_n \overline{dt}$ exprimés dans une uniformisante locale dt convergent en chaque point Φ. En effet, on peut choisir une forme

pseudoharmonique φ dans un compact Ω contenant un seul point Φ_0, nulle ainsi que son $*$ sur Ω' (supposée très régulière) telle que pour tous les σ_n:

$$D_\Omega(\sigma_n, \varphi) = \int_{\Phi_0} \sigma_n \wedge *d\varphi - \delta\psi \wedge *\sigma_n = R(\alpha_n(0)) \quad \text{ou} \quad I(\alpha_n(0)) .$$

c) Soient σ_n' les formes pseudoharmoniques dans Ω, égales en Φ_0 à la limite σ des σ_n, à mêmes valeurs que les σ_n sur Ω' (pour l'existence de ces formes pseudoharmoniques dans un domaine relativement compact à frontière très régulière [9]). Soit ω la forme pseudoharmonique égale à σ en Φ_0 et sur Ω'. On a

$$D_\Omega(\omega - \sigma_n') = \int_{\Omega'} (\omega - \sigma_n') \wedge *d(\omega - \sigma_n') - \delta(\omega - \sigma_n') \wedge *(\omega - \sigma_n') \to 0 .$$

Donc $\sigma_n' \to \omega$ en D-norme. Or $\sigma_n - \sigma_n' \to 0$ en D-norme. Ainsi $D_\Omega(\omega - \sigma) = 0$ donc $\omega = \sigma$ car $\omega = \sigma$ sur Ω'. Ainsi σ est pseudoharmonique.

7. L'équation $\Delta\mu = \psi$ dans le cas greenien

Nous allons résoudre l'équation $\Delta\mu = \psi$ en imposant à la solution trois sortes de conditions aux limites.

7.1. Problème de DIRICHLET

Proposition 7.1. Si $\psi \in \mathfrak{A}_0$, l'équation $\Delta\mu = \psi$ admet dans $\mathfrak{A}_1$ une solution unique vérifiant les conditions aux limites $F\mu = F'\mu = 0$, et telle que

$$D(\mu, \varphi) = (\psi, \varphi) , \quad \text{pour tout} \quad \varphi \in \mathfrak{A}_1 , \quad F\varphi = F\ \varphi = 0 .$$

Unicité. Si μ et μ' sont deux solutions, $\mu - \mu' \in \mathfrak{A}_1$ est une forme harmonique. $D(\mu - \mu', \varphi) = 0$ pour tout $\varphi \in \mathfrak{A}_1$, $F\varphi = F'\varphi = 0$, implique, puisqu'on peut prendre $\varphi = \mu - \mu'$ que $\mu - \mu'$ est un champ de $\mathfrak{C}$. Mais $F(\mu - \mu') = F'(\mu - \mu') = 0$ entraîne que $\mu - \mu' \in \mathfrak{C}_a \cap \mathfrak{C}_s$, donc $\mu = \mu'$.

Existence. Des propositions 5.2 et 6.3. il découle que l'ensemble des formes pseudoharmoniques de $A + D$-norme finie nulles ainsi que leur $*$ à la frontière constitue un espace de HILBERT avec la norme D. Il en résulte que (ψ, σ) est une fonctionnelle linéaire continue dans cet espace. Il existe donc une forme pseudoharmonique $H^0\psi$, de $A + D$-norme finie, telle que $FH^0\psi = F'H^0\psi = 0$, satisfaisant à la relation

$$D(H^0\psi, \sigma) = (\psi, \sigma) ,$$

pour tout σ pseudoharmonique de $A + D$-norme finie, telle que $F\sigma = F'\sigma = 0$.

Montrons que la forme:

$$\mu = (\Gamma^0 + H^0)\psi\,, \qquad \mu \in \mathfrak{E}\,,$$

est la solution du problème. $\mu \in \mathfrak{E}$ vérifie sur S_Φ l'équation $\Delta\mu = \psi$. D'autre part $F\mu = F'\mu = 0$. Le fait que $\mu \in \mathfrak{E}_1$ découle des deux lemmes suivants:

Lemme 7.1.1. La forme $\Gamma^0\psi$, où $\psi \in \mathfrak{A}$, vérifie la relation:

$$D(\Gamma^0\psi, \sigma) = 0\,,$$

pour tout σ pseudoharmonique de $A + D$-norme finie.

Soit $g_\nu(p, q)$ la fonction de GREEN relative à S_ν. Posons:

$$\Gamma^0_\nu\psi = (g_\nu(p, q)k(p, q), \psi(q))_{S_\nu}\,.$$

Supposons d'abord le support K de ψ compact et contenu dans S_ν. Il résulte des remarques finales de la proposition 3.1.2. que:

$$D_\Sigma(\Gamma^0\psi - \Gamma^0_\nu\psi) \to 0\,, \quad D_{S-\Sigma}(\Gamma^0\psi - \Gamma^0_\nu\psi) \quad \text{borné},$$

quel que soit le compact Σ. Par suite:

$$D(\Gamma^0\psi, \varphi) = \lim D_\nu(\Gamma^0_\nu\psi, \varphi)\,,$$

sous la seule condition $D(\varphi) < \infty$. Cette relation a lieu en particulier si $\varphi = \sigma$ est une forme pseudoharmonique de $A + D$-norme finie. Or:

$$D_\nu(\Gamma^0_\nu\psi, \sigma) = (\Gamma^0_\nu\psi, \Delta\sigma)_\nu + \int_{S_\nu + \Phi} \Gamma^0_\nu\psi \wedge *d\sigma - \delta\sigma \wedge *\Gamma^0_\nu\psi = 0\,,$$

puisque $\Gamma^0_\nu\psi = *\Gamma^0_\nu\psi = 0$ sur S'_ν et qu'aux points Φ les singularités de $*d\sigma$ et de $\delta\sigma$ sont compensées par les zéros de $\Gamma^0_\nu\psi$ et $*\Gamma^0_\nu\psi$.

Donc $D(\Gamma^0\psi, \sigma) = 0$ si σ est pseudoharmonique de $A + D$-norme finie et $\psi \in \mathfrak{D}$. Montrons que cette relation vaut pour tout $\psi \in \mathfrak{A}$. Soit $\psi_n \in \mathfrak{D}$, on a

$$D(\Gamma^0(\psi - \psi_n)) = (\Gamma^0(\psi - \psi_n), \psi - \psi_n) \leqslant \text{const.}\, A(\psi - \psi_n)\,.$$

Donc si $A(\psi - \psi_n) \to 0$, on a également $D(\Gamma^0(\psi - \psi_n)) \to 0$. Donc:

$$D(\Gamma^0\psi_n, \sigma) = 0 \quad \text{entraîne} \quad D(\Gamma^0\psi, \sigma) = 0\,.$$

Lemme 7.1.2. La relation $D(\mu, \sigma) = (\Delta\mu, \sigma)$, pour tout σ pseudoharmonique de $A + D$-norme finie tel que $F\sigma = F'\sigma = 0$, entraîne $\mu \in \mathfrak{A}_1$, si $\mu \in \mathfrak{E}$, $\Delta\mu$ et μ étant respectivement de A et D-norme finie.

En effet, on a pour les deux formes pseudoharmoniques élémentaires attachées en un point Φ_0:

$$D(\mu, \sigma) = (\Delta\mu, \sigma) + \int_{\Phi_0} \sigma \wedge *d\mu - \delta\mu \wedge *\sigma\,,$$

puisque l'égalité est vraie pour les σ_ν correspondants à σ dans S_ν et que le passage à la limite est possible en vertu de la remarque faite à la proposition 6.1. ($d\mu$, $\delta\mu$, $\Delta\mu \in \mathfrak{A}$). Il en résulte que:

$$\int_{\Phi_0} \sigma \wedge *d\mu - \delta\mu \wedge *\sigma = 0 ,$$

pour ces deux formes. Un calcul local [9, p. 10] montre que ces deux conditions entraînent la régularité de $*d\mu$ et de $\delta\mu$ au point Φ_0. Donc $\mu \in \mathfrak{A}_1$.

Le raisonnement fait correspond au cas où $dz = t\,dt$ mais s'étend sans autre au cas où $dz = t^n dt$ par la considération des $2n$ formes pseudoharmoniques élémentaires attachées alors au point Φ_0.

La dernière propriété qu'il reste à vérifier est contenue dans le lemme suivant:

Lemme 7.1.3. Si $D(\mu, \sigma) = (\psi, \sigma)$, pour tout σ pseudoharmonique de $A + D$-norme finie tel que $F\sigma = F'\sigma = 0$, alors $D(\mu, \varphi) = (\psi, \varphi)$, pour tout φ de $A + D$-norme finie tel que $F\varphi = F'\varphi = 0$, $\varphi \in \mathfrak{A}_1$, ψ et μ étant respectivement de A et D-norme finie.

Pour tous ces φ et pour tous les φ_n à support compact, nuls ainsi que leur $*$ aux points Φ:

$$D(\mu, \varphi) - (\psi, \varphi) = D(\mu, \varphi + \varphi_n) - (\psi, \varphi + \varphi_n) .$$

Or, on a montré (proposition 6.2) qu'on peut choisir φ_n de telle manière que $\varphi + \varphi_n$ tende en $A + D$-norme vers une forme pseudoharmonique de $A + D$-norme finie nulle ainsi que son $*$ à la frontière Donc on a bien:

$$D(\mu, \varphi) = (\psi, \varphi), \quad \text{pour tout} \quad \varphi \in \mathfrak{A}_1, \quad F\varphi = F'\varphi = 0 .$$

Remarques 1) L'existence de $\Gamma^0 + H^0$ aurait pu être obtenue directement par projection dans l'espace des formes de $A + D$-norme finie nulles ainsi que leur $*$ à la frontière.

2) La dernière propriété établie, qui entraîne l'unicité du problème pourrait être satisfaite par toute solution $\mu \in \mathfrak{A}_1$ de $\Delta\mu = \psi$ telle que $F\mu = F'\mu = 0$ si on savait montrer que $\delta d\mu$, $d\delta\mu \in \mathfrak{A}$, ou encore si l'on savait démontrer que $\mathfrak{D}$ est dense dans l'espace des formes de $A + D$-norme finie nulles ainsi que leur $*$ à la frontière.

7.2. Problème de NEUMANN

Proposition 7.2. Si, mais seulement si, $\psi \in \mathfrak{A}_0$ vérifie la condition $C\psi = 0$, l'équation $\Delta\mu = \psi$ admet dans $\mathfrak{A}_1$ une solution vérifiant la condition à la frontière $F\delta\mu = F'd\mu = 0$. La solution est unique si l'on exige $C\mu = 0$.

Unicité. Si μ et μ' sont deux solutions, $D(\mu - \mu', \varphi) = 0$, pour tout

$\varphi \in \mathfrak{A}_1$ implique, puisqu'on peut prendre $\varphi = \mu - \mu'$, que $\mu - \mu'$ est un champ de $\mathfrak{C}$. Comme $C(\mu - \mu') = 0$, on a $\mu = \mu'$.

Existence: La condition $C\psi = 0$ est bien nécessaire car:

$$0 = D(\mu, c) = (\psi, c), \quad \text{pour tout champ de } \mathfrak{C}.$$

De la proposition 5.1. et de la proposition 6.3. il découle que l'ensemble des formes pseudoharmonique de $A + D$-norme finie, orthogonales aux champs de $\mathfrak{C}$, est un espace de HILBERT avec la norme D. On en déduit l'existence d'une forme pseudoharmonique $H\psi$ de $A + D$-norme finie, telle que $CH\varphi = 0$, vérifiant la relation:

$$D(H\psi, \sigma) = (\psi, \sigma),$$

pour tout σ pseudoharmonique de $A + D$-norme finie, $C\sigma = 0$. Il est immédiat que cette relation vaut alors pour toute forme pseudoharmonique de $A + D$-norme finie.

Montrons que la forme:

$$\mu = (1 - C)(\Gamma^0 + H)\psi, \qquad \mu \in \mathfrak{E},$$

est la solution du problème. μ satisfait sur S_Φ à l'équation $\Delta\mu = \psi$. μ vérifie la relation $D(\mu, \sigma) = (\psi, \sigma)$, pour tout σ pseudoharmonique de $A + D$-norme finie, en vertu du lemme 7.1.1. et de la propriété de $H\psi$. En vertu du lemme 7.1.2., $\mu \in \mathfrak{E}_1$ et par suite $\mu \in \mathfrak{A}_1$.

De façon analogue au lemme 7.1.3. on a le lemme suivant:

Lemme 7.2.1. Si $D(\mu, \sigma) = (\psi, \sigma)$, pour tout σ pseudoharmonique de $A + D$-norme finie, alors $D(\mu, \varphi) = (\psi, \varphi)$, pour tout $\varphi \in \mathfrak{A}_1$, ψ et μ étant respectivement de A- et D-norme finie.

Il résulte enfin du lemme suivant que $d\delta\mu$ et $\delta d\mu$ sont de A-norme finie et que $F\delta\mu = F'd\mu = 0$. Appelons G l'opérateur:

$$G = (1 - C)(\Gamma^0 + H)(1 - C).$$

Lemme 7.2.2. Les deux décompositions:

$\varphi = d\delta G\varphi + \delta dG\varphi + C\varphi$, $\varphi = H_1\varphi + H_2\varphi + C\varphi$, pour tout $\varphi \in \mathfrak{A}$, ($H_1\varphi \in \overline{d\mathfrak{D}}$, adhérence de $d\mathfrak{D}$ sur S_Φ dans $\mathfrak{A}$, $H_2\varphi \in \overline{\delta\mathfrak{D}}$; [2, p. 72]) sont identiques.

On peut poser $H_1\varphi = d\alpha$; $d\alpha$ est limite en A-norme de $d\alpha_n$, $\alpha_n \in \mathfrak{D}$ sur S_Φ. A cause de la proposition 5.2. α est limite en $A + D$-norme de la suite (α_n). Donc $F\alpha = 0$. De même on peut poser $H_2\varphi = \delta\beta$, avec $F'\beta = 0$, β limite en $A + D$-norme de $\beta_n \in \mathfrak{D}$ sur S_Φ.

Formons $\varphi_n = d\alpha_n + \delta\beta_n$ et $\omega_n = d\Gamma^0\alpha_n + \delta\Gamma^0\beta_n$. On a $d\omega_n = \beta_n$, $\delta\omega_n = \alpha_n$ et ω_n appartient à $\mathfrak{A}_1$. D'autre part:

$$(\alpha_n, \delta\psi) + (\beta_n, d\psi) = (\varphi_n, \psi),$$
$$(\delta G\varphi_n, \delta\psi) + (dG\varphi_n, d\psi) = (\varphi_n, \psi), \quad \text{pour tout } \psi \text{ de } \mathfrak{A}_1.$$

En prenant $\psi = G\varphi_n - \omega_n$ et en soustrayant membre à membre les deux relations précédentes on obtient $\alpha_n = \delta G\varphi_n$ et $\beta_n = dG\varphi_n$. Or G transforme toute partie bornée de $\mathfrak{A}$ en une partie bornée de l'espace des formes de $A + D$-norme finie, comme nous le verrons indépendamment en 9c). Donc quand α_n et β_n tendent en A-norme vers α et β, φ_n tend vers $(1 - C)\varphi$ et on a:

$$\alpha = \delta G\varphi, \quad \beta = dG\varphi, \quad \text{c.q.f.d.}$$

7.3. Problème mixte

Proposition 7.3. Si, mais seulement si, $\psi \in \mathfrak{A}$ vérifie la condition $C_a\psi = 0$, l'équation $\Delta\mu = \psi$ admet dans $\mathfrak{A}_1$ une solution vérifiant la condition à la frontière $F\mu = 0$, et $F\delta\mu = 0$ dans le sens généralisé:

$$D(\mu, \varphi) = (\psi, \varphi), \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathfrak{A}_1, \quad F\varphi = 0.$$

La solution est unique si l'on exige que $C_a\mu = 0$.

Unicité. Si μ et μ' sont deux solutions, $D(\mu - \mu', \varphi) = 0$, pour tout $\varphi \in \mathfrak{A}_1$, $F\varphi = 0$. Comme on peut prendre $\varphi = \mu - \mu'$, $\mu - \mu'$ est un champ de $\mathfrak{C}$, donc de $\mathfrak{C}_a$. Comme $C_a(\mu - \mu') = 0$, on a $\mu = \mu'$.

Existence. La condition $C_a\psi = 0$ est bien nécessaire car:

$$0 = D(\mu, c_a) = (\psi, c_a), \quad \text{pour tout champ de } \mathfrak{C}_a.$$

De la proposition 5.3. et de la proposition 6.3. résulte que l'ensemble des formes pseudoharmoniques de $A + D$-norme finie, telles que $F\sigma = 0$ et $C_a\sigma = 0$, est un espace de HILBERT avec la norme D. On en déduit l'existence d'une forme pseudoharmonique $H_a\psi$ de $A + D$-norme finie orthogonale aux champs de $\mathfrak{C}_a$, nulle à la frontière, satisfaisant à la relation:

$$D(H_a\psi, \sigma) = (\psi, \sigma),$$

pour tout σ pseudoharmonique de $A + D$-norme finie, $F\sigma = 0$, $C_a\sigma = 0$. Il est immédiat que cette relation vaut alors pour toute forme σ pseudoharmonique de $A + D$-norme finie, telle que $F\sigma = 0$.

Montrons que la forme

$$\mu = (1 - C_a)(\Gamma^0 + H_a)\psi$$

est la solution du problème. μ vérifie sur S_Φ l'équation $\Delta\mu = \psi$. μ vérifie la

condition aux limites $F\mu = 0$. μ satisfait à

$$D(\mu, \sigma) = (\psi, \sigma)$$

pour tout σ pseudoharmonique de $A + D$-norme finie, tel que $F\sigma = 0$. En vertu du lemme 7.1.2., on a donc $\mu \in \mathfrak{A}_1$, car $\mu \in \mathfrak{E}$ et est de $A + D$-norme finie.

On a de la même manière que le lemme 7.1.3.:

Lemme 7.3. Si $D(\mu, \sigma) = (\psi, \sigma)$, pour tout σ pseudoharmonique de $A + D$-norme finie tel que $F\sigma = 0$, alors $D(\mu, \varphi) = (\psi, \varphi)$ pour tout φ de $A + D$-norme finie tel que $F\varphi = 0$, $\varphi \in \mathfrak{A}_1$, ψ et μ étant respectivement de A- et D-norme finie.

8. L'équation $\Delta\mu = \psi$ dans le cas non greenien

Nous ne considérerons dans la suite que des surfaces non greeniennes qui, munies de la métrique induite par Φ, satisfont à l'hypothèse (N). Nous supposerons en outre que sur ces surfaces:

Toute forme harmonique de $A + D$-norme finie est un champ de $\mathfrak{C}$.

Notons que pour les formes de degrés 0 et 2, cette propriété est vérifiée sur toute surface non greenienne, puisqu'une fonction harmonique à intégrale de DIRICHLET finie est une constante sur une telle surface. Pour les formes de degré 1, nous supposerons que cette propriété a lieu, sans savoir si cette hypothèse restreint la classe des surfaces envisagées.

Proposition 8.1. Sur une surface non greenienne du type envisagé, toute forme de $A + D$-norme finie est nulle ainsi que son $*$ à la frontière.

Démontrons d'abord la proposition dans le cas du degré 1:

a) Tout champ de $\mathfrak{C}$ est nul ainsi que son $*$ à la frontière.

Cela résulte immédiatement des décompositions orthogonales $c = c_s + df$ et $c = c_a + \delta\varphi$ établies dans la proposition 2.3. et du fait que les seules fonctions harmoniques à intégrale de DIRICHLET finie sont les constantes.

b) Toute forme de $A + D$-norme finie orthogonale aux champs de $\mathfrak{C}$ est nulle ainsi que son $*$ à la frontière. Nous allons le prouver en montrant que tout $(1 - C)\psi$ de $A + D$-norme finie est limite en $A + D$-norme de $(1 - C)\varphi$, où φ est à support compact.

Envisageons l'espace de HILBERT des formes orthogonales aux champs, muni de la D-norme (voir proposition 5.1.). Montrons que le sous-ensemble des formes $(1 - C)\varphi$, où $\varphi \in \mathfrak{D}$, y est dense. Soit μ un élément de l'espace orthogonal au sous-ensemble, c'est-à-dire tel que $D(\mu, \varphi) = 0$ pour tout $\varphi \in \mathfrak{D}$. On établit successivement que:

1) μ est harmonique sur S_Φ; en effet, si φ a son support sur S_Φ, $D(\mu, \varphi) = 0$ s'écrit $(\Delta\mu, \varphi) = 0$ d'où l'on tire $\Delta\mu = 0$.

2) μ est pseudoharmonique; en effet, si Ω est un compact ne contenant qu'un point Φ et si σ désigne la forme pseudoharmonique dont les coefficients ont même valeur que ceux de μ sur Ω' et en Φ (où μ est continu), on a $D(\mu, \mu - \sigma) = 0$ et $D(\sigma, \mu - \sigma) = 0$ d'où l'on tire aisément $\mu = \sigma$.

3) μ est harmonique; en effet, pour tout φ ayant son support dans Ω, $D(\mu, \varphi) = 0$ s'écrit

$$\int_\Phi \varphi \wedge *d\mu - \delta\mu \wedge *\varphi = 0 .$$

Comme le développement de φ en Φ est arbitraire, on en tire que $*d\mu$ et $\delta\mu$ sont réguliers en Φ. Donc $\mu \in \mathfrak{E}_1$.

4) μ est nul; en effet, sur la surface envisagée, la forme harmonique μ est un champ; or μ est orthogonal aux champs.

Tout $(1 - C)\psi$ de $A + D$-norme finie est donc limite en D-norme de $(1 - C)\varphi$, où $\varphi \in \mathfrak{D}$. En vertu de la proposition 5.1., il est aussi limite de ces mêmes formes en $A + D$-norme.

Pour les formes de degré 0, c'est-à-dire les fonctions, on constate d'abord que d'après ce qui précède:

$$(1, \delta\varphi) = 0 \quad \text{pour tout} \quad \varphi \in *\mathfrak{B}_1 ,$$

car l'égalité vaut pour tout φ de $\mathfrak{B} \cap *\mathfrak{B}$, donc pour tout φ de $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{B} \cap *\mathfrak{B}$ donc pour tout φ de $*\mathfrak{B}$ car $\mathfrak{A}_\infty$ de S_Φ est dense sur $*\mathfrak{B}$ ([2], p. 79) et $\mathfrak{A}_\infty$ de S_Φ est contenu dans $\mathfrak{A}_1$. Donc tous les champs de degré 0 sont nuls à la frontière.

On peut alors refaire le même raisonnement que plus haut: l'ensemble des $(1 - C)\varphi$, $\varphi \in \mathfrak{D}$, de degré 0 est ici dense dans $\mathfrak{B}$.

La proposition se démontre de manière analogue pour les formes de degré 2 et est ainsi complètement établie.

Corollaire 8. Sur les surfaces non greeniennes envisagées toute forme de $\mathfrak{B}$ est nulle à la frontière.

En effet d'après la proposition précédente, si $\varphi \in \mathfrak{B} \cap *\mathfrak{B}$ on a:

$$(\varphi, \delta\psi) = (d\varphi, \psi) \quad \text{pour tout} \quad \psi \in *\mathfrak{B} ;$$

la relation est donc vraie pour tout $\varphi \in \mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{B} \cap *\mathfrak{B}$, donc pour tout $\varphi \in \mathfrak{A}_\infty$ sur S_Φ et comme $\mathfrak{A}_\infty$ sur S_Φ est dense sur $\mathfrak{B}$, l'égalité vaut pour tout φ de $\mathfrak{B}$.

Proposition 8.2. Si, mais seulement si, $\psi \in \mathfrak{A}_0$ vérifie la condition $C\psi = 0$, l'équation $\Delta\mu = \psi$ admet dans $\mathfrak{A}_1$ une solution unique telle que $C\mu = 0$ et que $d\delta\mu$, $\delta d\mu \in \mathfrak{A}$.

L'unicité est immédiate.

Existence. La condition $C\psi = 0$ est bien nécessaire car:

$$0 = D(\mu, c) = (\psi, c)\,, \quad \text{pour tout champ de } \mathfrak{C}\,.$$

Comme dans le cas greenien on définit $H\psi$, forme pseudoharmonique de $A + D$-norme finie satisfaisant à:

$$D(H\psi, \sigma) = (\psi, \sigma)\,,$$

pour toute forme pseudoharmonique σ de $A + D$-norme finie.

Pour la forme $\Gamma\psi$ on a le lemme suivant, correspondant au lemme 7.1.1.:

Lemme 8.1. La forme $\Gamma\psi$, où $\psi \in \mathfrak{A}$, $C\psi = 0$, vérifie la relation:

$$D(\Gamma(1 - C)\psi, \sigma) = 0\,,$$

pour tout σ pseudoharmonique élémentaire.

Posons $\Gamma\psi = a\,dx + b\,dy$, $\sigma = a'\,dx + b'\,dy$. A l'extérieur d'un compact ε qui contient le point Φ_σ où σ n'est pas nul a, b, a', b' sont de $A + D$-norme finie et on peut écrire:

$$D_{S-\varepsilon}(\Gamma\psi, \sigma) = (da, da')_{S-\varepsilon} + (db, db')_{S-\varepsilon} - (da, *db')_{S-\varepsilon} + (db, *da')_{S-\varepsilon}\,.$$

Comme a et b sont nuls à la frontière (résultat établi au cours de la démonstration de la proposition 4.4.1.) le deuxième membre vaut:

$$\int_{\varepsilon'} \delta\sigma \wedge *\Gamma\psi - \Gamma\psi \wedge *d\sigma\,.$$

Or cette quantité tend vers 0 quand le compact ε se reserre autour du point Φ_σ.

Montrons maintenant que la forme:

$$\mu = (1 - C)(\Gamma + H)\psi$$

est la solution du problème. On a d'abord $\mu \in \mathfrak{B} \cap *\mathfrak{B}$, $\Delta\mu = \psi$. Ensuite $\mu \in \mathfrak{E}$. Pour voir que $\mu \in \mathfrak{E}_1$ on applique le lemme correspondant au lemme 7.1.2.:

Lemme 8.2. Si $\mu \in \mathfrak{E} \cap \mathfrak{B} \cap *\mathfrak{B}$, la relation $D(\mu, \sigma) = (\Delta\mu, \sigma)$, pour tout σ pseudoharmonique élémentaire, entraîne $\mu \in \mathfrak{E}_1$.

La démonstration de ce lemme est identique à celle du lemme 7.1.2.

La dernière propriété de μ, savoir $d\delta\mu$, $\delta d\mu \in \mathfrak{A}$ résulte du lemme correspondant au lemme 7.2.2.:

Lemme 8.3. En appelant G l'opérateur $(1 - C)(\Gamma + H)(1 - C)$, les deux décompositions:

$\varphi = d\delta G\varphi + \delta dG\varphi + C\varphi$, $\varphi = H_1\varphi + H_2\varphi + C\varphi$, pour tout $\varphi \in \mathfrak{A}$, sont identiques.

Ce lemme peut se démontrer de manière très analogue à ce qui est fait au lemme 7.2.2. Il faut d'abord remarquer qu'on a:

$$D(G\varphi, \psi) = ((1 - C)\varphi, \psi) , \quad \text{pour tout} \quad \psi \in \mathfrak{A}_1 .$$

En effet cette égalité vaut pour tout $(1 - C)\psi$, $\psi \in \mathfrak{D}_1$ et pour tout σ pseudoharmonique élémentaire, donc pour tout ψ de $\mathfrak{B} \cap *\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{B} \cap *\mathfrak{B}$.

Il suffit alors de poser $H_1\varphi = d\alpha$, $H_2\varphi = \delta\beta$, de constater que $(1 - C)\alpha$ et $(1 - C)\beta$ sont limites en $A + D$-norme de $(1 - C)\alpha_n$, $(1 - C)\beta_n$ où α_n, $\beta_n \in \mathfrak{D}$, et enfin d'utiliser la forme ω_n construite comme φ' à la proposition 5.1.:

$$\omega_n = \delta\Gamma(1 - C)\beta_n + d\Gamma(1 - C)\alpha_n + (1 - C)\alpha_0(*C\beta_n) + (1 - C)\beta_0(C\alpha_n)$$

(ici α_0, β_0 désigne le couple α, β de la proposition 5.1.!). La suite du raisonnement est immédiate en prenant de nouveau $\varphi_n = d\alpha_n + \delta\beta_n$.

9. Propriétés de l'opérateur G

a) G est son propre transposé métrique.

En effet nous avons, parce que $G\varphi \in \mathfrak{A}_1$, pour tout $\varphi \in \mathfrak{A}_0$ et que $CG\varphi = 0$, $F\delta G\varphi = F' dG\varphi = 0$:

$$D(G\varphi, G\psi) = (G\varphi, \psi) = (\varphi, G\psi) ,$$

pour tout φ, $\psi \in \mathfrak{A}_0$, donc pour tout φ, $\psi \in \mathfrak{A}$.

b) $G\Delta\varphi = \varphi - C\varphi$, pour toute forme de $\mathfrak{D}_2$.

Soit ψ une forme quelconque de $\mathfrak{D}_0$. Nous avons:

$$(G\Delta\varphi, \psi) = (\Delta\varphi, G\psi) = (\varphi, \Delta G\psi) = (\varphi, \psi - C\psi) = (\varphi - C\varphi, \psi)$$

puisque φ et ψ sont à support compact. D'où l'égalité annoncée en tout point de S.

c) L'opérateur G transforme une partie bornée de $\mathfrak{A}_0$ en une partie bornée de $\mathfrak{A}_2$.

En effet l'opérateur H est continu dans $\mathfrak{A}$; d'après la proposition 5.1.:

$$A(H\varphi) \leqslant \text{const. } D(H\varphi) = \text{const. } (\varphi, H\varphi) \leqslant \text{const. } A^{\frac{1}{2}}(\varphi) A^{\frac{1}{2}}(H\varphi) ,$$

donc:

$$A(H\varphi) \leqslant \text{const. } A(\varphi) .$$

Plus, l'opérateur H transforme toute partie bornée de $\mathfrak{A}$ en une partie bornée de $\mathfrak{A}_0$. En effet, la convergence en A-norme de fonctions harmoniques

entraîne leur convergence uniforme sur tout compact. Au voisinage d'un point Φ, on peut écrire:

$$H\varphi = \alpha(dt + \bar{dt}) + h \quad \text{ou} \quad i\alpha(dt - \bar{dt}) + h,\ \alpha = \text{const.},\ h \text{ harmonique},$$

et on a vu, lemme 6.3., que si $(H\varphi)$ est une suite de CAUCHY en A-norme, (α) est une suite convergente, donc (h) est une suite de CAUCHY en A-norme; $H\varphi$ appartenant à $\mathfrak{E}_0$, $(H\varphi)$ est donc borné dans $\mathfrak{A}_0$ si (φ) est borné dans $\mathfrak{A}$.

De même l'opérateur C transforme toute partie bornée de $\mathfrak{A}$ en une partie bornée de $\mathfrak{A}_0$.

Enfin, l'opérateur Γ^0 a un noyau métrique C_∞ en dehors de la diagonale $p = q$ où il a une singularité logarithmique. Un raisonnement identique à celui de DE RHAM ([1], p. 139) montre alors que Γ^0 transforme toute partie bornée de $\mathfrak{A}_0$ en une partie bornée de $\mathfrak{E}_0$ parce que $\Gamma^0\varphi \in \mathfrak{E}_0$. On peut faire le même raisonnement avec l'opérateur $\Gamma(1 - C)$ dans le cas non greenien.

On a (proposition 5.1.):

$$A(G\varphi) \leqslant \text{const. } D(G\varphi) = (\varphi, G\varphi) \leqslant \text{const. } A(\varphi),$$

ce qui montre qu'une partie bornée de $\mathfrak{A}_0$ a pour image par G, non seulement une partie bornée de $\mathfrak{A}_0$, mais de $\mathfrak{A}_1$ car $G\varphi \in \mathfrak{E}_1$; enfin c'est même une partie bornée de $\mathfrak{A}_2$ car $G\varphi \in \mathfrak{E}_2$ et:

$$(d\delta G\varphi, d\delta G\varphi) + (\delta dG\varphi, \delta dG\varphi) = (\Delta G\varphi, \Delta G\varphi) = (\varphi, (1 - C)\varphi) \leqslant \text{const. } A(\varphi).$$

d) G vérifie pour toute forme de $\mathfrak{D}_1$ les formules:

$$dGd\varphi = 0\,, \qquad \delta G\delta\varphi = 0\,.$$

Pour démontrer la première, par exemple, différentions les deux membres de l'équation:

$$\Delta Gd\varphi = d\varphi - Cd\varphi$$
$$d\Delta Gd\varphi = \Delta dGd\varphi = 0\ ;$$

$dGd\varphi$ est donc une forme harmonique. Seul le cas du degré 2 n'est pas trivial. Comme $F' dGd\varphi = 0$ cette forme harmonique est un champ de $\mathfrak{C}$, donc 0 en vertu de la proposition 3.1.1. dans le cas greenien et du fait suivant dans le cas non greenien: à cause de la proposition 8.1. tout champ de degré 2 de $\mathfrak{C}$ a son $*$ nul à la frontière donc $dG_1 d\varphi$ qui est un champ (toute fonction harmonique à intégrale de DIRICHLET finie est une constante) est orthogonale aux champs, donc identiquement nulle.

e) La partie G_1 de G, relative aux formes de degré 1, vérifie pour toute forme de $\mathfrak{D}_1$ les formules:

$$dG_1\delta\varphi = \varphi\,, \qquad \delta G_1 d\varphi = \varphi\,.$$

Différentions en effet les deux membres de l'équation:

$$\Delta G_1 \delta\varphi = \delta\varphi - C\,\delta\varphi ,$$

on obtient:

$$d\Delta G_1 \delta\varphi = \Delta dG_1 \delta\varphi = \Delta\varphi ,$$

d'où

$$\Delta (dG_1 \delta\varphi - \varphi) = 0 .$$

La forme $dG_1\delta\varphi - \varphi$ est donc harmonique et l'on peut conclure comme en d).

f) Si T est un courant continu en moyenne à l'infini, les propriétés de G signalées en c) permettent de définir GT en posant:

$$(GT, \varphi) = (T, G\varphi) , \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathfrak{D}_0 .$$

Cette définition s'étend naturellement au cas de fonctionnelles linéaires continues de $\mathfrak{D}_1'$ ou $\mathfrak{D}_2'$, pour peu qu'elles soient continues en moyenne à l'infini.

g) Si T est continu en moyenne à l'infini, on a dans $\mathfrak{D}_2'$:

$$\Delta GT = T - CT .$$

En effet: $(\Delta GT, \varphi) = (GT, \Delta\varphi) = (T, G\Delta\varphi) = (T, \varphi - C\varphi) = (T - CT, \varphi)$, pour toute forme de $\mathfrak{D}_2$.

h) Si T et $*T$ sont nuls à la frontière on a dans $\mathfrak{D}_1'$:

$$dGdT = 0 , \quad \delta G\delta T = 0 , \quad dG_1\delta T = T , \quad \delta G_1 dT = T .$$

Ces formules s'obtiennent par transposition à partir de celles de d) et e).

Sur une surface non greenienne, il suffira de supposer T, dT et δT continus en moyenne à l'infini parce qu'alors le corollaire 8 entraîne immédiatement que T et $*T$ sont nuls à la frontière.

i) Si T, $*T$, $*dT$, δT sont nuls à la frontière, on a:

$$G\Delta T = T - CT .$$

En effet:

$$(Gd\delta T, \varphi) = (d\delta T, G\varphi) = (\delta T, \delta G\varphi) = (T, d\delta G\varphi) ,$$
$$(G\delta dT, \varphi) = (\delta dT, G\varphi) = (dT, dG\varphi) = (T, \delta dG\varphi) ,$$

pour tout $\varphi \in \mathfrak{D}_0$, d'où:

$$(G\Delta T, \varphi) = (T, \Delta G\varphi) = (T, \varphi - C\varphi) = (T - CT, \varphi) .$$

Même remarque qu'en *h*) dans le cas non greenien: il suffit alors de supposer T, dT, δT, $d\delta T$ et δdT continus en moyenne à l'infini.

10. Application au problème de COUSIN [12]

Un courant T sera dit fermé, cofermé ou harmonique selon que $dT = 0$ dans $\mathfrak{D}_1'$, $\delta T = 0$ dans $\mathfrak{D}_1'$, $\Delta T = 0$ dans $\mathfrak{D}_2'$. Nous utiliserons dans la suite

la proposition suivante qui adapte à notre cas l'important théorème de régularité des courants harmoniques de DE RHAM ([1], p. 149).

Proposition 10. Un courant harmonique dans un domaine relativement compact Ω est une forme harmonique dans Ω.

L'essentiel de cette proposition résulte donc du théorème cité de DE RHAM qui, appliqué à S_Φ, nous apprend que le courant harmonique est une forme harmonique sur $S_\Phi \cap \Omega$, soit α. Il reste à montrer que $\alpha \in \mathfrak{E}_1$ sur Ω, c'est-à dire à étudier le comportement de α aux points Φ.

Il résulte de $\Delta\alpha = 0$ dans $\mathfrak{D}_2'$ que, pour tout $\varphi \in \mathfrak{D}_2$, nul en dehors d'un compact contenu dans Ω et ne contenant qu'un seul point Φ, soit Φ_0, on doit avoir:

$$\int_{\Phi_0} \alpha \wedge *d\varphi - \varphi \wedge *d\alpha + \delta\alpha \wedge *\varphi - \delta\varphi \wedge *\alpha = 0 .$$

Supposons comme toujours que $\Phi = tdt$ en Φ_0.

Considérons d'abord le cas du degré 0. Montrons que $\alpha \in \mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 = \mathfrak{E}_1$ en prouvant que le développement de α en Φ_0 ne peut contenir l'expression:

$$a_0 \log t\bar{t} + \sum_1^\infty \left(\frac{a_n}{t^n} + \frac{\bar{a}_n}{\bar{t}_n} \right), \quad a_0 \text{ réel} ,$$

en montrant que la relation écrite plus haut entraîne $a_0 = a_n = 0$. Ceci s'obtient en prenant successivement $\varphi = f$ pour a_0, $\varphi = f(a_n t^n + \bar{a}_n \bar{t}^n)$ pour a_n, $n > 0$ (f étant une fonction C^∞, égale à 1 dans un voisinage de Φ_0, dont le support compact contenu dans Ω ne renferme pas d'autres points Φ que Φ_0). La proposition est ainsi démontrée dans le cas du degré 0 et du même coup dans le cas du degré 2 car alors $*\alpha$ est un courant harmonique de degré 0!

Considérons finalement le cas du degré 1. Montrons que $\alpha \in \mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0$, c'est-à-dire que le développement de α en Φ_0 ne peut contenir l'expression:

$$\log t\bar{t}\,(a_0 t dt + \bar{a}_0 \bar{t} d\bar{t}) + \sum_1^\infty \left(\frac{a_n}{t^n} + \frac{\bar{b}_n}{\bar{t}^n} \right) t dt + \left(\frac{\bar{a}_n}{\bar{t}^n} + \frac{b_n}{t^n} \right) \bar{t} dt ,$$

en montrant que notre relation entraîne $a_0 = a_n = b_n = 0$. Ceci s'obtient en prenant successivement $\varphi = f(a_0 t dt + \bar{a}_0 \bar{t} d\bar{t})$ pour a_0, $\varphi = f(a_n t \bar{t}^n dt + \bar{a}_n \bar{t} t^n d\bar{t})$ pour a_n et $\varphi = f(b_n t^{n+1} dt + \bar{b}_n \bar{t}^{n+1} d\bar{t})$ pour b_n. Pour montrer que $\alpha \in \mathfrak{E}_1$ il suffit, par exemple, de prendre $\varphi = f(dt + d\bar{t})$ et $\varphi = if(dt - d\bar{t})$ ([9], p. 15) et ceci achève la démonstration de la proposition.

10.1. Examinons le problème de COUSIN suivant, intéressant en théorie des fonctions, et qui regarde spécialement le degré 1.

On donne dans des ouverts V_i formant un recouvrement de S des formes

ω_i fermées et cofermées en dehors d'un point singulier q_i de V_i, vérifiant la condition de compatibilité suivante: $\omega_i - \omega_j$ est une forme fermée et cofermée dans $V_i \cap V_j$. On demande de trouver une forme fermée et cofermée dans tout domaine de la surface $S - (q_i)$ telle que $\omega - \omega_i$ soit un champ harmonique dans V_i.

La forme ω n'est pas caractérisée univoquement par ses parties singulières et ses périodes. Il faut lui imposer en outre une condition de régularité à l'infini. Nous choisirons la suivante: le courant $T = vp\,\omega$ doit être continu en moyenne à l'infini.

Soit $T_j = vp\,\omega_j$ le courant associé dans V_j à la forme ω_j. Soient U_0 et U_2 les courants ou plus exactement les formes linéaires continues sur $\mathfrak{D}_1$, définies localement pas δT_j et dT_j, définitions possibles grâce aux conditions de compatibilité:

$$\delta(T_j - T_k) = 0\,, \quad d(T_j - T_k) = 0\,, \quad \text{dans} \quad V_j \cap V_k\,.$$

Le courant cherché T doit satisfaire aux conditions suivantes:

1) $dT = U_2$, $\delta T = U_0$.

2) T est continu en moyenne à l'infini.

3) T est orthogonal aux champs de $\mathfrak{C}$.

Les conditions 1) et 2) déterminent la solution à un champ harmonique de $\mathfrak{C}$ près (proposition 10). La condition 3) fixe celui-ci univoquement. La solution est donc unique si elle existe.

Pour que la solution existe il suffit que les fonctionnelles U_0 et $*U_2$ soient nulles à la frontière.

Formons le courant $T = G_1(dU_0 + \delta U_2)$, ce qui est possible puisque l'hypothèse faite implique que dU_0 et δU_2 sont continus en moyenne à l'infini. Vérifions qu'il satisfait aux conditions.

1) Les formules de 9.h) sont applicables:

$$dT = dG_1\delta U_2 = U_2\,, \quad \delta T = \delta G_1 dU_0 = U_0 \quad \text{dans } \mathfrak{D}_1'\,.$$

2) dU_0 et δU_2 étant continus en moyenne à l'infini, il en est de même de $G_1 dU_0$ et $G_1\delta U_2$ et par suite de T.

3) $CT = CG_1(dU_0 + \delta U_2) = 0$.

Remarque. Si les singularités sont en nombre fini, l'hypothèse faite sur U_0 et $*U_2$ est automatiquement réalisée. Cette hypothèse est de toute manière nécessaire si l'on exige que pour la solution T, les fonctionnelles δT et $*dT$ soient nulles à l'infini. Dans le cas non greenien il suffit, à cause du corollaire 8, de supposer U_0, dU_0, U_2 et δU_2 continus en moyenne à l'infini.

10.2. Examinons enfin le problème suivant, intéressant surtout pour le degré 0.

On donne dans des ouverts V_i formant un recouvrement de S des formes

méroharmoniques ω_i, vérifiant la condition de compatibilité suivante: $\omega_i - \omega_j$ est une forme harmonique dans $V_i \cap V_j$. On demande de trouver une forme méroharmonique ω telle que $\omega - \omega_i$ soit harmonique dans V_i quel que soit i.

Soient $T_i = vp\,\omega_i$ le courant associé dans V_i à ω_i, $T = vp\,\omega$ le courant associé à la solution ω, si elle existe.

Formons dans V_i la fonctionnelle $U_i = \Delta T_i$. Les U_i définissent globalement une fonctionnelle U de $\mathfrak{D}_2'$ et le problème peut être formulé comme suit: résoudre l'équation $\Delta T = U$.

Dans le cas greenien d'abord, supposons que U soit continu en moyenne à l'infini. En cherchant une solution continue en moyenne à l'infini ainsi que ses différentielles premières, on détermine le problème à une forme harmonique (proposition 10) de $A + D$-norme finie près. Imposons lui donc d'être nulle ainsi que son $*$ à la frontière et la solution sera unique.

En appelant G^0 l'opérateur $\Gamma^0 + H^0$, la solution est alors donnée par $G^0 U$.

Remarquons d'abord que G^0 est son propre transposé métrique: pour tout couple φ, $\psi \in A_0$ on a:

$$D(G^0\varphi, G^0\psi) = (G^0\varphi, \psi) = (\varphi, G^0\psi)\,,$$

donc cette dernière égalité vaut encore pour tout couple φ, $\psi \in \mathfrak{A}$.

On a d'autre part $G^0 \Delta\varphi = \varphi$ pour tout $\varphi \in \mathfrak{D}_2$, comme le montre un calcul direct analogue à ce qui est fait sous 9b).

Des deux propriétés précédentes il résulte que:

$$\Delta G^0 U = U \quad \text{dans } \mathfrak{D}_2'\,.$$

On montre, comme en 9c) que G^0 transforme toute partie bornée de $\mathfrak{A}_0$ en une partie bornée de $\mathfrak{A}_1$, donc aussi toute partie bornée de $\mathfrak{A}$ en une partie bornée de $\mathfrak{B} \cap *\mathfrak{B}$.

Montrons que $F G^0 U = F' G^0 U = 0$. Nous avons besoin pour cela de remarquer que $G^0\delta\varphi$ et $G^0 d\varphi$ peuvent être définis comme éléments de $\mathfrak{A}$ pour tout φ de $\mathfrak{A}$: considérons $G^0\delta\varphi$ pour $\varphi \in \mathfrak{D}_1$; nous avons, pour tout $\psi \in \mathfrak{A}$:

$$(G^0\delta\varphi, \psi) = (\delta\varphi, G^0\psi) = (\varphi, dG^0\psi)\,;$$

comme forme linéaire continue sur $\mathfrak{A}$, $G^0\delta\varphi$ dépend donc continuement de φ dans $\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{D}_1$ est dense dans $\mathfrak{A}$) et on peut définir $G^0\delta\varphi$ pour tout φ de $\mathfrak{A}$ par la relation précédente car si $\varphi \in *\mathfrak{B}_1$ on a aussi ($F G^0\psi = 0$):

$$(\varphi, dG^0\psi) = (\delta\varphi, G^0\psi) = (G^0\delta\varphi, \psi)\,.$$

Ceci montre que si $\varphi_n \in \mathfrak{D}_1$ tend vers φ dans $\mathfrak{A}$,

$$(dG^0 U, \varphi_n) = (U, G^0\delta\varphi_n) \quad \text{tend vers} \quad (U, G^0\delta\varphi)\,.$$

Cette relation nous montre que dG^0U est continu en moyenne à l'infini. D'autre part, si $\varphi \in *\mathfrak{B}_1$ on a ($\varphi_n \in \mathfrak{D}_1$, φ_n tend vers φ dans $\mathfrak{A}$):

$$(dG^0U, \varphi) = \lim (dG^0U, \varphi_n) = (U, G^0\delta\varphi) = (G^0U, \delta\varphi),$$

ce qui montre bien que $FG^0U = 0$.

De la même manière on peut obtenir que $F'G^0U = 0$.

Dans le cas non greenien la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation $\Delta T = U$, où U est continu en moyenne à l'infini, ait une solution T continue en moyenne à l'infini ainsi que ses différentielles premières et secondes, est que $CU = 0$. La solution est unique avec la condition $CT = 0$.

D'après le corollaire 8 une telle solution satisfait à $F\delta T = F'dT = 0$ et donc on a bien $(c, U) = (c, \Delta T) = 0$ pour tout c de $\mathfrak{C}$.

La solution est GU. On a évidemment $\Delta GU = U$, d'après les propriétés de l'opérateur G et on peut montrer que dGU, δGU, $d\delta GU$ et δdGU sont continus en moyenne à l'infini comme on a montré que dG^0U et δG^0U l'étaient. On remarque en effet ici qu'on peut définir $Gd\varphi$, $G\delta\varphi$, $Gd\delta\varphi$, $G\delta d\varphi$ comme éléments de $\mathfrak{A}$ pour tout φ de $\mathfrak{A}$ par les relations ($\psi \in \mathfrak{A}$):

$$(Gd\varphi, \psi) = (\varphi, \delta G\psi), \quad (G\delta\varphi, \psi) = (\varphi, dG\psi),$$
$$(Gd\delta\varphi, \psi) = (\varphi, d\delta G\psi), \quad (G\delta d\varphi, \psi) = (\varphi, \delta dG\psi),$$

ce qui permet de conclure comme plus haut.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. DE RHAM, *Variétés différentiables*, Paris, Hermann (1955).

[2] G. DE RHAM, *Sur certaines équations de la théorie des formes différentielles harmoniques*. Second colloque sur les équations aux dérivées partielles (1954), 67–82.

[3] R. NEVANLINNA, *Quadratisch integrierbare Differentiale auf einer* RIEMANNschen *Mannigfaltigkeit*. Ann. Acad. scient. fenn., series A, Mathematica-Physica, 1 (1941), 34 p.

[4] L. V. AHLFORS, *Open* RIEMANN *surfaces and extremal problems on compact subregions*. Comment. Math. Helv. 24 (1950), 100–134.

[5] L. V. AHLFORS, *The method of orthogonal decomposition for differentials on open* RIEMANN *surfaces*. Ann. Acad., Sc. fenn. series A, I Math., 249/7 (1958), 15 p.

[6] H. WEYL, *Method of orthogonal projection in potential theory*. Duke Math. J., 7 (1940), 411–444.

[7] P. E. CONNER, *The* NEUMANN*'s problem for differential forms on* RIEMANN*ian manifolds*. Memoirs of the american mathematical society (1956).

[8] R. BADER, *Fonctions à singularités polaires sur des domaines compacts et des surfaces de* RIEMANN *ouvertes*. Ann. Ec. Norm. Sup., 3, 71, 3 (1954), 243–300.

[9] W. SÖRENSEN, *Utilisation d'une métrique singulière dans l'étude des formes harmoniques sur une surface de* RIEMANN. Bull. Soc. Neuch. Sc. Nat., 81 (1958), 5–46.

[10] M. PARREAU, *Sur les moyennes des fonctions harmoniques et analytiques et la classification des surfaces de* RIEMANN. Ann. Inst. Fourier, 3 (1951), 103–197.

[11] A. PFLUGER, *Theorie der* RIEMANNschen *Flächen*. Springer (1957).

[12] L. SCHWARTZ, *Courant associé à une forme différentielle méromorphe sur une variété analytique complexe*. Géométrie différentielle, Colloques internationaux du C. N. R. S. Strasbourg (1953), 185–195.

(Reçu le 5 septembre 1959)