Sepsis und dergl. mehr sind die Folgen. Wenn irgendwo so ist hier reiche chirurgische Erfahrung notwendig. Etwas ungefährlicher ist die sogenannte *Sekundärnaht,* wo infektionsverdächtige Wunden erst am 3., 4., 5. Tag durch Naht geschlossen werden, in einem Zeitpunkt, wo die Beurteilung derselben viel leichter ist.

Handelt es sich schließlich um eine *Allgemein-Infektion,* dann ist leider auch heute noch unsere Therapie an den Grenzen ihrer Leistungsfähigkeit angelangt. Dies zu verhüten, ist eine der wichtigsten Aufgaben der Behandlung der Verletzten. Die Fortschritte der modernen Kriegschirurgie liegen also auf dem Gebiet der *Prophylaxe. Die Chirurgie des Krieges soll in erster Linie eine Chirurgie der Prophylaxe der Wundinfektion sein* (*Garrè*). Darin wird sie unterstützt in der hervorragenden Wirkung prophylaktisch angewandter Sera, wie sie im Kampfe mit dem Wundstarrkrampf so glänzende Erfolge erzielt.

Aber selbst wenn wir den Verwundeten über die ersten gefährlichen Wochen gebracht, drohen ihm in gewissen Fällen noch Gefahren. Sie sind einmal bedingt durch die sogenannte *latente Infektion.* Wir verstehen darunter ein Wiederaufflackern eines klinisch nicht mehr manifesten Herdes. Erklären läßt sich dieser Vorgang nur so, daß in den alten Narben um Fremdkörper herum Bakterien zurückgeblieben, infolge schwartiger Abkapselung ganz eingeschlossen waren. Ein späterer Eingriff (plastische Verbesserung, Gefäß- oder Nervenoperation) führt zur Mobilisation dieser Keime durch Eröffnung der derben Narben und damit zur Möglichkeit der Propagation im Körper. Schwere Eiterungen anläßlich solcher Operationen ebenso wie Spättetanusfälle lassen sich nur so erklären.

Schließlich ist noch der Defekte zu gedenken, die der Körper aus eigenen Kräften nicht zu ersetzen vermag. Mit Hilfe der Transplantation, mit der Überpflanzung, der Pfropfung entsprechender Gewebe (Haut, Sehnen, Nerven, Gefäße usw.) gelingt manchmal funktionell vollwertiger Ersatz. Gerade die moderne Chirurgie hat auf diesem Gebiete Erstaunliches geleistet. Wenn auch dieses Mittel versagt, bleibt uns noch totes Material in Form der Prothesen. Anhangsweise seien diese Fragen nur kurz gestreift. Sie gehören nicht zu den gewöhnlichen Wundheilungsprozessen, sondern stellen viele kompliziertere Vorgänge dar. Mit ihnen gemein haben sie nur das, daß sie dem Ersatz verloren gegangener Gewebe oder Körperteile dienen und deshalb hier erwähnt wurden.

Die Leistungsfähigkeit dieser modernen Wundbehandlung zeigt sich am besten in ihren Erfolgen. Nach *Schjernings* Mitteilungen vom 2. Kriegschirurgenkongreß 1916 sind 86,6 % aller in den Feld- und Kriegslazaretten und 90,1 % aller in der Heimat Behandelten dienstfähig geworden und nur 1,5 % der in den Heimatlazaretten Aufgenommenen gestorben.

Die nichteuklidschen Geometrien und das Raumproblem.

Von Dr. Hilda Geiringer, z. Zt. Berlin.

(Schluß.)

III.

Beziehungen des Problems zur Philosophie.

Ohne auf alle sich hier bietenden Probleme einzugehen, weisen wir nur hin auf die schon oft hervorgehobene Widerlegung gewisser Kantscher Anschauungen durch die Tatsache der Existenz der nichteuklidschen Geometrie. Es folgt aus ihrer Existenz, daß wir nicht zugeben können, daß die Axiome der Geometrie in der gegebenen Form unseres Anschauungsvermögens begründet seien; denn wenn wirklich eine Anschauung a priori im Kantschen Sinne existiert, so kann sie nur eine einzige Form besitzen, es wäre dann nur *eine* Geometrie möglich. Da es aber mehrere Geometrien gibt, so folgt, daß nicht gerade „der Raum, wie sich ihn der (Euklidsche) Geometer denkt, ganz genau die Form der inneren sinnlichen Anschauung ist, die wir a priori in uns finden". (*Kant,* Prolegomena.) Wenn von philosophischer Seite die mathematischen Möglichkeiten der nichteuklidschen Geometrie nicht mehr bestritten werden, ihre Unanschaulichbeit aber betont wird, so ist darauf zunächst zu sagen, daß Anschauung zum größten Teil Übungssache ist, vor allem aber an die Arbeiten *Helmholtz'* zu erinnern, in denen er zeigt, „wie man aus den bekannten Gesetzen unserer sinnlichen Wahrnehmungen die Reihe der sinnlichen Eindrücke herleiten kann, welche eine sphärische oder pseudosphärische Welt uns geben würde, wenn sie existierte; auch dabei treffen wir nirgends auf eine Unfolgerichtigkeit oder Unmöglichkeit, ebensowenig wie in der rechnenden Behandlung der Maßverhältnisse". Und „wenn wir es zu irgend einem Zwecke nützlich fänden, so könnten wir in vollkommen folgerichtiger Weise den Raum, in welchem wir leben, als den scheinbaren Raum hinter einem Konvexspiegel mit verkürztem und zusammengezogenem Hintergrunde betrachten; oder wir könnten eine abgegrenzte Kugel unseres Raumes, jenseits deren Grenzen wir nichts mehr wahrnehmen, als den unendlichen pseudosphärischen Raum betrachten". Auf verschiedene von philosophischer Seite gebrachte Einwände geht *Voß* („Das Wesen der Mathematik" pag. 90 ff.) ein.

Nichteuklidsche Geometrie und Physik.

Wir haben am Schluß des Abschnittes II wieder an das früher verlassene Fundamentalproblem der Beziehungen von Geometrie und Physik gestreift, welches wir nun nach Kenntnis der nichteuklidschen Gedankengänge wieder aufnehmen wollen.

Ist der Raum, in dem wir leben, euklidisch oder nichteuklidisch? In dieser groben Form läßt sich die Frage nicht beantworten. Wir müssen uns da an das eingangs (S. 634) Gesagte erinnern, daß unsere ganze Naturwissenschaft, speziell unsere Lehre vom Raum, ein Bild der Wirklichkeit liefert, im Spiegel unserer physiologischen Konstitution und ausgesprochen in unseren logischen Begriffsbildungen. Sind wir uns aber einmal über diese Voraussetzungen klar geworden, so wird bis zu einem gewissen Grad wenigstens prinzipiell eine Antwort auf unsere Frage gegeben werden können.

Poincaré hat wiederholt darauf hingewiesen, daß selbst die Eigenschaft des Raumes, die uns als die fundamentalste scheint, nämlich die Dreidimensionalität wesentlich mit unserer physiologischen Konstitution zusammenhängt. Er führt unter anderem das Beispiel *de Cyons* an von den japanischen Feldmäusen, die nur zwei Paare von halbkreisförmigen Nervenkanälen im Ohre haben, und die somit den Raum möglicherweise für zweidimensional halten müßten und fragt sich nun, wie die von einem solchen denkenden Wesen ausgebaute Geometrie und Physik wohl aussehen würde. Freilich läßt er es dahingestellt, ob solche Wesen mit einem zweidimensionalen oder vierdimensionalen Bilde der Verteilung bestehen und sich gegen die hundert Gefahren, denen sie ausgesetzt wären, verteidigen könnten. Dies führt uns zu der weiteren Tatsache, daß nicht nur unsere physiologische Konstitution, sondern auch praktische Zwecke unsere instinktive Raumvorstellung formen; bekannt ist ja das Beispiel von den Brillenträgern, die eigentlich ganz andere Entfernungen usw. sehen, sich aber bald zugleich mit der neuen Brille an die neue Interpretation gewöhnen und trotz der falschen Bilder die Entfernungen richtig beurteilen. Und *Poincaré* erzählt von Jägern, die es verstehen, Fische unter Wasser zu fangen, „obgleich das Bild des Fisches infolge der Strahlenbrechung höher erscheint, als der Fisch sich in Wirklichkeit befindet, die es also gelernt haben, ihren ererbten Richtungsinstinkt instinktiv abzuändern". Gehen wir weiter zu der von *Mach* und *Poincaré* wiederholt gebrachten Vorstellung eines mehr oder minder der Bewegungsfreiheit beraubten, an den Boden geketteten Wesens; *wir* besitzen die Fähigkeit, unseren „erweiterten" Raum bald auf die Position A, als Anfangslage gedacht, bald auf die Position B, die er einige Minuten später einnimmt, zu beziehen, nehmen also unbewußt in jedem Augenblick eine Koordinatentransformation vor. „Jenem Wesen fehlt aber diese Fähigkeit, in jedem Augenblick ist ihm sein Achsensystem aufgezwungen und es hält den Raum für absolut, weil es nicht auf die Reise gehen kann." Und *Mach*: „Könnte der Mensch wie ein festsitzendes Seetier seinen Ort nicht verlassen und seine Orientierung nicht wesentlich ändern, so würde er schwerlich jemals zur Vorstellung des euklidschen Raumes gelangen. Sein Raum würde sich zum euklidschen ungefähr so verhalten wie ein triklines zu einem tesseralen Medium, derselbe würde immer anisotrop und begrenzt bleiben."

Haben wir uns an diesen Beispielen klar gemacht, daß es keinen Sinn hat, zu fragen, wie der Raum „wirklich" ist, sondern höchstens wie er für eine gewisse physiologische Konstitution und gewisse Lebensverhältnisse sich *darstellt*, so müssen wir noch auf die zweite ebenso fundamentale Abhängigkeit unseres Raumbildes von unseren logischen Begriffen und Definitionen kommen. „Nur über Begriffe, deren Inhalt wir selbst bestimmt haben, erstreckt sich unsere logische Herrschaft." Und so stehen wir nun vor der Aufgabe der „Inhaltsbestimmung". Wir können gewisse Gebilde „Gerade" nennen und die Euklidsche Geometrie verwenden, wir können andere Gebilde „Gerade" nennen und die nichteuklidsche Geometrie verwenden. Es ist eben dem Raume weder euklidsche noch nichteuklidsche Struktur eigentümlich, „ebensowenig wie es einer Strecke eigentümlich ist, nach Kilometern gemessen zu werden, nicht aber nach Meilen"[1]). Oder wie es ihr eigentümlich ist, *A B* und nicht *C D* genannt zu werden[2]). Nun aber kommt ein Gesichtspunkt in Betracht, der diese auf die Nomenklatur bezügliche Willkür scheinbar einschränkt, freilich nur um einer anderen Willkür Platz zu machen. Wir können nämlich einwenden, daß die Euklidsche „Gerade" *wichtiger* ist als die nichteuklidsche, weil sie von gewissen natürlichen Gegenständen, z. B. einem Lichtstrahl, einem gespannten Seil weniger abweicht. Wir können also aus solchen Gründen übereinkommen, der Euklidschen Geraden einen gewissen Vorzug einzuräumen und die gleiche Tatsache lieber euklidisch mit Euklidschen Geraden, als nichteuklidisch mit nichteuklidschen Geraden zu beschreiben, oder schließlich als in irgend welcher logisch einwandfreien, aber praktisch ungemein komplizierten Geometrie. Nun tritt aber noch die neue Frage an uns heran, die nach der näherungsweisen Identifizierung der physikalischen Objekte mit den logischen Objekten unseres Systems. Ein Lichtstrahl „ist" natürlich weder eine Gerade noch ein Kreisbogen, sondern es handelt sich darum, ob er so reagiert, daß er besser mit dem einen oder anderen Begriff identifiziert werden kann (innerhalb der Fehlergrenzen). Wüßten wir etwa, daß bei einem aus drei Lichtstrahlen gebildeten Dreieck die Winkelsumme stets 180° ergibt, so würden wir ohne Bedenken den Lichtstrahl Gerade nennen und die Euklidsche Geometrie anwenden; wenn wir aber an die Möglichkeit einer von 180° verschiedenen Winkelsumme denken, so können wir entweder die Lichtstrahlen Gerade nennen und die nichteuklidsche Geometrie anwenden, oder unter Anwendung der Euklidschen Geometrie die Lichtstrahlen Bögen nennen. Wir können eben die Identifizierung zwischen den physikalischen und geometrischen Begriffen bis zu einem gewissen Grade willkürlich vornehmen, und wenn wir uns früher klar ge-

[1]) *Schlick.*

[2]) *Poincaré.*

macht haben, daß die Frage nach der Struktur des „mathematischen“ Raumes an sich sinnlos ist, indem dieser prinzipiell auf jede beliebige Art ausgemessen werden kann, so ist uns jetzt klar, daß die Frage nach der Struktur des physikalischen Raumes durch gewisse Definitionen präzisiert werden muß. Haben wir aber z. B. einen Lichtstrahl als physikalische Gerade definiert, so können wir nun allerdings fragen, ob diese physikalischen Geraden ein Euklidsches oder nichteuklidsches Dreieck bilden.

Waren diese beiden Gesichtspunkte von prinzipieller Bedeutung selbst für die idealsten Meßwerkzeuge giltig, so ist schließlich der Tatsache zu gedenken, daß unsere Beobachtungen eben keinen Anspruch auf absolute Genauigkeit machen können. Nun sind aber die zu konstatierenden Variationen des Krümmungsmaßes auf jeden Fall innerhalb des zugänglichen Beobachtungsfeldes sehr klein. Die Beobachtung ist ungenau, die Formulierung zwingt zur Präzision und zu einer der Anschauung fremden Präzision. Was für die Anschauung hier fast zusammenfällt, trennt begrifflich zwei Welten voneinander, und die verhältnismäßig beobachtungsfremde Entscheidung trägt in unsere komplizierte Frage ein neues Moment der Willkür.

Nachdem wir uns also die Voraussetzungen unserer naiven Frage klar gemacht haben, nämlich, daß sie nur gestellt werden kann unter Voraussetzung einer gewissen, verhältnismäßig konstanten, physiologischen Konstitution und entsprechenden Lebensverhältnissen, daß sie abhängig ist von unserer mathematischen Nomenklatur, von unserer physikalischen Nomenklatur, von der verhältnismäßig willkürlichen Identifikation beider, endlich von der Genauigkeit unserer Meßwerkzeuge, die mit der Genauigkeit unserer Begriffe nicht immer Schritt hält, können wir schließlich uns klar machen, daß unsere so eingeschränkte Frage prinzipiell beantwortbar ist.

Nach *Riemann* sind zur Bestimmung der Maßverhältnisse einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit $\frac{n(n-1)}{2}$ Funktionen des Ortes nötig. Daraus folgt für den Raum, daß es zur Euklidizität hinreichend und notwendig ist, „daß das Krümmungsmaß in jedem Punkte in drei Flächenrichtungen gleich Null ist, und es sind daher die Maßverhältnisse des Raumes bestimmt, wenn die Winkelsumme im Dreieck allenthalben gleich 2 R ist“. Darauf beruht die berühmte, schon von *Gauß* versuchte Ausmessung der Winkelsumme großer Dreiecke, wobei es für uns selbstverständlich ist, daß eine so gelieferte Aussage nur etwas aussagt für die Struktur des Raumes im Verhältnis zu Lichtstrahlen = Geraden. Allgemeiner können wir sagen, daß es im Prinzip möglich sein muß, in ähnlicher Weise wie man die Erdoberfläche mittels kleiner als starr gedachter Maßstäbe geodätisch ausgemessen hat, so den Raum geodätisch auszumessen. Es könnte sich da prinzipiell ergeben, daß unser Raum kein Euklidscher, ja nicht einmal ein Raum konstanter Krümmung ist. Freilich haben bisher durchgeführte astronomische und terrestrische Messungen keine merkliche Abweichung des Krümmungsmaßes von Null ergeben.

Was aber messen wir eigentlich auf alle diese Arten? Die Euklidsche oder nichteuklidsche Struktur des Raumes? Die gibt es nicht, denn es gibt gar keinen Raum, abgesehen von der erfüllenden Materie. Der Raum an sich ist gewiß nichts anderes als eine völlig formlose (dreidimensionale?) Mannigfaltigkeit, die erst durch das erfüllende Material gestaltet wird. Diese Erkenntnis ist nicht etwa erst durch die Relativitätstheorie entdeckt worden, sondern es waren schon *Gauß, Riemann, Helmholtz*, später *Mach* und *Poincaré* jedenfalls dieser Meinung, nur ist die vage philosophische Anschauung erst durch *Einstein* präzisiert und in einer bestimmten Richtung ausgebaut worden. Hier halten wir fest, daß ein leerer Raum, abgesehen vom erfüllenden materialen Gehalt überhaupt keine Struktur hat. Wir können ihn ausmessen, wie wir wollen, ein erfüllter Raum aber hat keine Struktur, abgesehen von dem Erfüllenden, oder auch „es gibt keine Raumgeometrie losgelöst von der Physik“. (Über die Rolle der physikalischen und mathematischen Nomenklatur für diese Union haben wir schon gesprochen.) Dieser erfüllte Raum aber muß von Anfang an jedenfalls als ganz allgemeiner Riemannscher Raum mit variablem Krümmungsmaß angenommen werden. „Entscheidende Experimente sind aber erst dann möglich, wenn nicht nur die Geometrie, sondern auch die Physik im Euklidschen und im allgemeinen Riemannschen Raum entwickelt ist.“[1]) Wir leugnen also, „daß die Metrik des Raumes von vornherein unabhängig von den physikalischen Vorgängen, deren Schauplatz er abgibt, festgelegt ist, und daß das Reale in diesem metrischen Raum wie in eine fertige Mietskaserne einziehe, sondern wir behaupten, daß der Raum an sich nichts weiter ist als eine völlig formlose dreidimensionale Mannigfaltigkeit, und erst der erfüllende, materiale Gehalt ihn gestaltet und seine Maßverhältnisse bestimmt. Es bleibt die Aufgabe zu ermitteln, nach welchen Gesetzen dies geschicht.“[1]) Denn da der erfüllende Gehalt sich mit der Zeit ändert, so wird auch die metrische Fundamentalform sich im Laufe der Zeiten ändern. Die Gesetze aber, nach denen das raumerfüllende Material die Metrik bestimmt, sind nach *Einstein* die Gravitationsgesetze, und die Koeffizienten g_{ik} der metrischen Fundamentalform lassen sich geradezu als „Gravitationspotentiale“ auffassen. Wir wollen zum Abschluß unserer Ausführungen auf diese Einsteinsche Lösung des Raumproblems etwas näher eingehen.

---

[1]) Vgl. *Weyl* „Raum, Zeit, Materie“, Vorlesungen über allgemeine Relativitätstheorie, Springer, Berlin 1918.

Verallgemeinerte Relativitätstheorie[1]).

In der Einsteinschen Relativitätstheorie gibt es bekanntlich keine Lösung des Raumproblems losgelöst vom Zeitproblem. In der „vierdimensionalen Welt" nun folgert *Einstein* in der speziellen Relativitätstheorie in bekannter Weise die Relativität der Gleichzeitigkeit und somit die erste tiefgehende Modifikation unserer Ideen von Raum und Zeit. Aber noch in der *speziellen* Relativitätstheorie sind die Sätze der Geometrie unmittelbar als die Gesetze über die möglichen relativen Lagen fester Körper deutbar, allgemeiner die Sätze der Kinematik als Sätze, welche das Verhalten von Meßkörpern und Uhren beschreiben. Hier ist das nicht mehr möglich, hier wird gefordert, daß eine beliebige Transformation der Raum- und Zeitmannigfaltigkeit der vierdimensionalen Welt keine Änderungen an den Gesetzen der Erscheinungen bewirken darf. Dann aber sind die Koordinaten und die Zeit jeder physikalischen Gegenständlichkeit beraubt, denn jetzt sollen die Gesetze der Physik in allen, nicht nur in beliebigen ausgezeichneten Bezugssystemen gelten. Die inneren Gesetzmäßigkeiten der Natur können nur dann wirklich innere sein, wenn sie vom Koordinatensysteme im weitesten Sinne unabhängig sind. Hier haben wir mathematisch ganz dasselbe, wie in unserer Gaußschen Flächentheorie, auch dort konnten wir Flächentheorie unabhängig von Bezugssystem studieren und „es waren alle Gaußschen Koordinatensysteme für die Formulierung der allgemeinen Geometrie auf der Fläche prinzipiell gleichwertig". Eben das aber fordert *Einstein* für die allgemeine Formulierung der Naturgesetze. Sollen diese unabhängig vom Koordinatensystem sein, so wie die Gesetze der Fläche es waren, so muß sich für jedes Gebiet der Raum-Zeitwelt, in dem eine gewisse Gesetzmäßigkeit herrscht, ein charakteristisches ds angeben lassen, das eben für die „Weltmetrik" in diesem Gebiete charakteristisch ist. Selbstverständlich muß es keine größeren zusammenhängenden Gebiete konstanter Weltmetrik geben, sondern im allgemeinen wird jeder „Punkt" seine spezifische Metrik, sein bestimmtes ds, das für die Maßverhältnisse (in einer geeigneten Umgebung) charakteristisch ist, haben. Dieses vom „Punkt" zu „Punkt" variierende ds kann im speziellen z. B. das Euklidsche = parabolische sein, oder ein sphärisches oder ein hyperbolisches oder ein ovales oder ein noch viel komplizierteres. Jedenfalls wird es bestimmt durch die innere Gesetzmäßigkeit der Welt in diesem Punkte, so wie das Linienelement auf der Fläche durch die innere Gesetzmäßigkeit der Fläche, und nur durch diese bestimmt wird. Im speziellen kommt *Einstein* bekanntlich durch die fundamentale Forderung, daß jede durch Bewegung des Beobachters (Änderung des Bezugssystems) entstehende Änderung der Erscheinungen als Wirkung eines Gravitationsfeldes aufgefaßt werden könne, dazu, als charakteristisch für die Weltmetrik in einem bestimmten Punkt die dort herrschenden Gravitationskräfte anzusehen, oder, wie *Weyl* sich ausdrückt, wir können uns denken, daß in jedem Punkte (Bereich) ein bestimmtes „metrisches Feld" herrscht, welches erzeugt wird durch das Materielle, welches die Welt erfüllt. (In der speziellen Relativitätstheorie wird bezüglich der Weltmetrik bekanntlich die Annahme gemacht, daß es spezielle Koordinatensysteme gibt, in welchen die metrische Fundamentsform $ds^2 = \Sigma g_{ik} dx_i dx_k$ konstante Koeffizienten hat.) Wir werden also die g_{ik} in dem für jeden Punkt charakteristischen ds als etwas Reales betrachten. Bei der praktischen Messung können wir aber doch nur daran denken, daß sich das ds tatsächlich physikalisch ermitteln läßt; da wir es aber nicht anders bestimmen, als mit Lichtstrahlen und Maßstäben, so müssen wir annehmen, daß sich der Einfluß des jeweiligen metrischen Feldes auf diese unsere Meßinstrumente äußert, daß also dieses metrische Feld ein jeweils ganz bestimmtes Verhalten von Lichtstrahlen und „starren" Körpern bewirkt, welches außer durch die eigene Beschaffenheit von Lichtstrahlen und Maßstäben bestimmt wird durch das metrische Feld, „ebenso wie das Verhalten einer elektrischen Ladung nicht nur von ihr selbst, sondern auch von dem elektrischen Feld abhängt"[1]).

Wir haben als Grundgesetze ungemein umfassende und allgemeine (die die Trägheits- und Gravitationserscheinungen in gleicher Weise umfassen und gegen beliebige Gaußsche Koordinatentransformationen invariant sind); alle Unregelmäßigkeiten, alles, was mit der spezifischen Natur des betreffenden Weltpunktes zusammenhängt, haben wir eben dorthin gewiesen, wo die physikalisch gegenständliche Interpretation ohnehin fehlte, in unseren Raumbegriff, so daß die Maßverhältnisse jetzt nicht mehr auf Rechnung eines „Raumes als Form der Erscheinungen" kommen, sondern eben in ihnen, die von Punkt zu Punkt variieren, ganz andere Dinge, nämlich die jeweilige Verteilung der Materie in der Welt sich spiegeln, so daß gerade der Raum, früher das Festeste, jede Eigenbedeutung verloren hat.

Wie sich bei jeder noch so seltsam gekrümmten Kurve ein unendlich kleines Stück derselben annähernd als Gerade auffassen läßt (Identifikation mit der Tangente), so auch bei einer Fläche, Raum usw., dem entspricht die von anderer Seite her durch physikalische Tatsachen nahegelegte Hypothese, daß die vierdimensionale Entfernung zweier unendlich naher Punkte eine meßbare Größe sei, das bedeutet aber physikalisch die

[1]) Dieser Teil setzt einige Kenntnis der verallgemeinerten Relativitätstheorie voraus und bildet die Brücke zwischen populären Darstellungen dieses Gebiets und den vorhergehenden mathematischen Erörterungen; diese ermöglichen es uns, die Einsteinsche Lösung des Raumproblems nun auch vom mathematischen Gesichtspunkte aus, der sonst naturgemäß in populären Darstellungen zurücktritt, zu verstehen.

[1]) *Weyl* p. 175.

Existenz starrer Maßstäbe und vergleichbarer Uhren im unendlich Kleinen. Dem entspricht aber wieder die Voraussetzung, daß bei passender Koordinatenwahl für unendlich kleine vierdimensionale Gebiete die spezielle Relativitätstheorie gilt, wobei der Beschleunigungszustand des kleinen (lokalen) Koordinatensystems so zu wählen ist, daß ein Gravitationsfeld nicht auftritt. X_1, X_2, X_3 seien die räumlichen Koordinaten, X_4 die zugehörige Zeitkoordinate. Diese Koordinaten haben unmittelbar physikalische Bedeutung, der Ausdruck $ds^2 = -dX_1^2 - dX_2^2 - dX_3^2 + dX_4^2$ (1) hat dann nach der speziellen Relativitätstheorie einen von der Orientierung des lokalen Koordinatensystems unabhängigen, durch Raum-Zeitmessung ermittelbaren Wert. Die Koordinatendifferentiale dx_i eines beliebig gewählten Bezugssystems werden nun mit denen des lokalen in der Beziehung stehen

$$dX_1 = a_{11}\,dx_1 + \ldots + a_{14}\,dx_4 \cdots,$$
$$dX_4 = a_{41}\,dx_1 + \ldots + a_{44}\,dx_4.$$

Setzt man diese Ausdrücke in (1) ein, so kommt man wieder auf unser allgemeines $ds^2 = \Sigma g_{ik}\,dx_k\,dx_i$. Dabei sind die g_{ik} Funktionen der x, die nicht mehr von der Orientierung und dem Bewegungszustande des lokalen Koordinatensystemes abhängen können, denn ds^2 war ja unabhängig von jedem besonderen Koordinatensystem definiert. Der Spezialfall der gewöhnlichen Relativitätstheorie (Analogon: der Euklidschen Ebene) geht hervor, falls es möglich ist, in einem *endlichen* Gebiete das Bezugssystem so zu wählen, daß $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -g_{44} = +1$ und alle anderen verschwinden. Nehmen wir nun an, das wäre in einem endlichen Gebiete möglich, dann bewegt sich ein freier materieller Punkt bezüglich eines so gewählten Systems geradlinig und gleichförmig. Führt man nun durch eine beliebige Substitution neue Raum-Zeitkoordinaten $x_1 \ldots x_4$ ein, so werden in diesem neuen System die g_{ik} nicht mehr Konstante, sondern Raum-Zeitfunktionen sein, und die Bewegung des freien Massenpunkts wird sich in den neuen Koordinaten als eine krummlinige, nicht gleichförmige darstellen. Nach dem allgemeinen Äquivalenzpostulat wird diese Bewegung als eine solche unter dem Einflusse eines Schwerefeldes aufgefaßt werden können, und *sehen wir das Auftreten eines Gravitationsfeldes geknüpft an die raum-zeitliche Veränderlichkeit der g_{ik}*. Diese das Gravitationsfeld bestimmenden zehn Funktionen beschreiben also zugleich das metrische Verhalten des Maßraumes. (Auch in dem allgemeinen Falle, wo es nicht möglich ist, in einem endlichen Gebiete die Gültigkeit der speziellen Relativitätstheorie herbeizuführen, wollen wir an dieser Auffassung festhalten.)

Sind wir im vorhergehenden von der logisch mathematischen Seite her auf die Ungültigkeit der Euklidschen Geometrie in Gravitationsfeldern resp. in ungleichförmig bewegten Systemen geführt worden, so wird uns dies durch folgende Einsteinsche Überlegung bestätigt. Versetzen wir eine Scheibe in gleichförmige Rotation und betrachten einen auf dieser Scheibe um das Rotationszentrum gezogenen Kreis, so hat sein Radius den gleichen Wert, ob ich ihn mittels ruhender oder mitbewegter Maßstäbe ausmesse, denn die Bewegungsrichtung ist stets normal zu der Meßrichtung. Hingegen ergibt sich für die Kreisperipherie, mittels der mitbewegten Maßstäbe ausgemessen, vom ruhenden System aus beurteilt ein größerer Wert, da der jeweilige Einheitsmaßstab infolge der Lorentz-Kontraktion „weniger ausgibt", ich ihn daher öfter anlegen muß. Da aber der Radius unabhängig vom Bewegungszustand gleich r war, so ist $p \neq 2r\pi$. Wir sehen hier zugleich eine einfache Illustration der Variabilität der Weltmetrik, denn wenn wir das Rad in stärkere oder schwächere Rotation versetzen, so wird die Geometrie auf ihm bald mehr bald minder von der Euklidschen abweichen.

In diesen Erscheinungen haben wir aber nach dem Einsteinschen Äquivalenzprinzip von beschleunigter Bewegung und Gravitationswirkung nicht die Wirkung einer absoluten Rotation zu erblicken, die es nicht gibt, sondern des durch seine Komponenten g_{ik} charakterisierten, von der Gravitation abhängigen metrischen Feldes.

Wollen wir eine ähnliche Überlegung nicht indirekt für das der Rotation äquivalente Gravitationsfeld, sondern direkt für dieses anstellen, so werden wir unsere schon oben angestellte Vermutung über den Einfluß des Gravitationsfeldes auf unsere Uhren und Maßstäbe bestätigt finden. Es würde sich eine Verkürzung des Einheitsmaßstabes in bezug auf das Koordinatensystem im Schwerefeld bei radialer Anlegung gegenüber der tangentiellen ergeben. Prinzipiell müßte diesen Verhältnissen auch bei den oft besprochenen „geodätischen" Messungen Rechnung getragen werden.

Es kann hier nicht unsere Sache sein, auch nur in den gröbsten Zügen auf die allgemeine Relativitätstheorie einzugehen. Wir hatten nur die spezifische Lösung des Raum-Zeitproblems anzudeuten, die darin gipfelt, daß in jedem Punkte der Welt eine durch das metrische Feld bestimmte, im allgemeinen nichteuklidsche Geometrie herrscht. Sagt nun diese Theorie etwas über den Zusammenhang der Geometrien im großen? Denken wir an das uns geläufigste zweidimensionale Gebiet unserer Erde. Auch sie ist im großen und ganzen eine Kugel (Ellipsoid), aber auf ihr erheben sich Berge und Hügel und finden sich die verschiedensten Unebenheiten. Eine genaue geodätische Ausmessung in jedem Punkte würde uns nur den jeweiligen Hügel, Tal oder noch weniger erkennen lassen. Wir müßten erst eine Vermessung im großen vornehmen, um zur Gesamtkonzeption des „kugelartigen Zusammenhanges im großen" zu kommen (sofern wir den nicht aus anderen Quellen kennen). So auch hier: Die Kenntnis des metrischen Feldes in jedem einzelnen Weltpunkt, wie es durch die Gravitationskräfte erzeugt wird, sagt uns noch nichts