...kungen an Weilscher Krankheit mit ihrem oft ...artigen Verlauf und ihrer ziemlich erheblichen ...ortalität, dürfte es sich empfehlen, von der Anwendung des spezifischen Serums umfangreichen ...brauch zu machen, zumal wir ja sonst der doch ...merhin nicht gutartigen Erkrankung therapeutisch machtlos gegenüberstehen. Die sehr ...stigen Resultate im Tierversuch und die mit ...m Rekonvaleszentenserum gemachten Erfahrun...n zwingen geradezu dazu, das Serum beim Men...hen zu versuchen. Notwendig ist eine *möglichst frühzeitige Anwendung* ganz im Beginn der Erkrankung, wenn möglich, noch bevor der Ikterus ...ch ausgebildet hat, und die *Einspritzung nicht ...kleiner Dosen* (50 ccm und mehr) intramusku... (resp. intravenös).

Dann steht zu erwarten, daß das Serum den ...hweren Krankheitsverlauf günstig beeinflussen ...ird.

Prophylaktisch angewandt, würde das Serum ...hen hervorragenden Schutz gewähren, doch liegt ...i dem immerhin nur zerstreuten Auftreten der ...eilschen Krankheit eine strenge Indikation zur ...ophylaktischen Anwendung wohl kaum vor. Je...och wäre bei gehäuftem Auftreten der Krankheit ... Hinblick auf die Ausstreuung des Virus ...rch *Ratten* und eine eventuelle Übertragung ...rch *Insekten* in gewissen stark verseuchten Ge...nden auch daran zu denken. Jedenfalls würde ...e Anwendung bei den leider schon mehrfach ...bachteten Laboratoriumsinfektionen — unmit...bar nach der Infektion — zweifellos indiziert ... von großem Nutzen sein.

Das Serum gegen die Weilsche Krankheit[1]) wird ... dem Pharmazeutischen Institut *L. W. Gans*, ...*ursel*, in den Handel gebracht.

...e nichteuklidischen Geometrien und das Raumproblem.

Von Dr. Hilda Geiringer, z. Zt. Berlin.

I.

Das Raumproblem.

„Die Raumanschauung des Menschen wurzelt ... dessen *physiologischer* Konstitution. Die geo...trischen Begriffe entwickeln sich durch Idea...sierung *physikalischer* Raumerfahrungen. Das ...metrische System endlich wird durch die *lo...sche* Ordnung des gewonnenen begrifflichen ...offes geschaffen"[2]).

Mit diesen Worten ist die Raumlehre in ... Naturwissenschaften eingereiht. Denn das ...rakteristische einer Naturwissenschaft, einer ...issenschaft von der Außenwelt, kann nur darin ...stehen, daß sie uns die Tatsachen von der ...ßenwelt bietet, angesehen und angeordnet durch ...n Spiegel unseres sinnlichen und geistigen We...ns. Der spezifische Charakter des geometrischen ...hrgebäudes, die Ableitung aller Sätze auf de...duktivem Wege aus wenigen an die Spitze gestellten Axiomen, ist eine freie Schöpfung unseres Geistes und entspringt aus dem erkenntnistheoretischen Wunsche, das Gebiet von „Naturwissenschaft" und „Philosophie" möglichst zu scheiden, d. h. einerseits (vom Standpunkt der Philosophie) aus unserem Lehrgebäude auszuscheiden, was den Einwirkungen der Körperwelt angehört, um rein darzustellen, was der eigenen Tätigkeit des Geistes zu verdanken ist, anderseits (vom Standpunkt der Naturwissenschaft) alles auszuscheiden, „was Definition, Schluß — kurz: Logik ist, um möglichst rein übrig zu behalten, was der Welt der Wirklichkeit angehört". In keiner Wissenschaft nun läßt sich diese Scheidung so weitgehend durchführen wie in der Geometrie. Es wäre prinzipiell bei jeder Wissenschaft — auch bei solchen, die wie Soziologie (Nationalökonomie) diesem Verfahren scheinbar so fernstehen — möglich, ein gewisses System von Grundtatsachen durch gehörige Idealisierung aus der Erfahrung abzuleiten und aus diesem System logische Schlüsse zu ziehen. Es fragt sich aber, ob das irgend einen Sinn hätte. (In Wirklichkeit hängt in jeder Wissenschaft jede Tatsache von unendlich vielen anderen veränderlichen Größen ab, es fragt sich aber, einen wie großen Fehler wir bei der Vernachlässigung so und so vieler dieser „Variabeln" machen; und wir können es uns so denken, daß wir in der Geometrie zum Beispiel ohne viel Fehler mit ganz wenigen Variabeln arbeiten können, während uns etwa in der Nationalökonomie oder Biologie sehr sehr viele praktisch „unendlich viele" Variabeln verwirrend entgegentreten, so daß sich die dort bewährte Behandlungsmethode hier nicht von vornherein mit Vorteil übertragen wird.)

Immer müssen wir das rohe Material begrifflich idealisieren, d. h. willkürliche Abstraktionen machen, denn sonst können wir damit nichts anfangen. Es könnte uns aber passieren, daß wir diese Idealisierung unglücklich vornehmen, daß wir Unwesentliches hervorheben und Wesentliches vernachlässigen, so daß wir, wenn wir nun rein logische Schlüsse an unsere Prämissen knüpfen, uns, wenn wir nach einigen Schritten die erneute Kontrolle an der Wirklichkeit suchen, von dieser ein gutes Stück weiter entfernt haben als am Ausgangspunkt. Ich denke da an ganz bestimmte soziologische Systeme, die, in den Voraussetzungen unanfechtbar (d. h. ihre Abstraktionen zeigen keine größere Willkür als zugestanden werden muß), sich durch lauter streng logische Deduktionen doch plötzlich meilenweit von der Wirklichkeit entfernt haben, und zum Schlusse steht der so erreichte Punkt der Wirklichkeit nicht nur so fern wie es im Wesen einer *idealisierten* wissenschaftlichen Tatsache liegt, sondern so fern wie dies nur bei einer sehr *unglücklichen* Idealisierung hätte geschehen können. Die Ausgangstatsache mußte gar nicht „falsch" sein, sie war nur zu wenig unbedingt zwingend und glücklich idealisiert, als daß sie eine ganze Last von logischen Deduktionen hätte ertragen können; für sich allein

[1]) Deutsche m. Wochenschr. 1918, Nr. 26.
[2]) *Mach* „Erkenntnis und Irrtum".

mochte sie ihren Platz immerhin ausfüllen, nur durfte man von ihr nicht allzuviel verlangen, durfte nicht im Laufe der Deduktionen all ihre verborgenen Fehler ans Licht zerren, sorgfältig verfolgen, und auf ihnen weiter bauen, sonst mußte mit einem Male ein Unding resultieren. In einem solchen Falle muß dann die „Korrektur an der Wirklichkeit" in ungemein hohem Maße eingreifen.

In der Geometrie befinden wir uns in der glücklichsten Lage. In jedem Punkte der Wirklichkeit werden uns auf verhältnismäßig eindeutige Weise die notwendigen Idealisierungen nahegelegt. Wir werden sowohl durch das Bild des unvollkommenen rechtwinkligen Dreieckes auf die Idee des vollkommenen gelenkt, wie durch die gebuckelte Linie auf die Gerade, wie durch die unvollkommenen Kreise und Kugeln auf ihre vollkommenen Ideale. Wenn wir an einem bestimmten Punkt nach schematischer Idealisierung nun mit der deduktiven Arbeit beginnen wollten, so würden wir nach längeren Deduktionen und erneuter „Kontrolle an der Wirklichkeit" mit Vergnügen sehen, gerade dorthin gekommen zu sein, wohin uns die Idealisierung und Reinigung der Realität, wenn sie von Anfang an in jenem Punkte eingesetzt hätte, auch geführt hätte. Wir sehen also, daß, wo immer wir einsetzen, stets ein gewisser konstanter sich nicht vergrößernder Abstand zwischen unseren begrifflichen Zeichen und der Wirklichkeit bleibt, denn die Idealisierungen sind verhältnismäßig eindeutige und wesentliche (für unsere Zwecke wesentliche), und neue Naturdaten kommen nicht hinzu. Ja, wir können annehmen, daß wir prinzipiell ohne jede Deduktion nur durch die unaufhörliche Idealisierung von Erfahrungstatsachen zu ganz ähnlichen Lehrsätzen gekommen wären (nur wäre der Aufbau ein ganz anderer gewesen), denn wäre das nicht der Fall, so hätte die „Kontrolle an der Wirklichkeit" uns auf eine verfehlte (unwesentliche, nicht notwendig falsche) Richtung der Deduktion oder auf eine unglückliche Idealisierung einer Tatsache oder auf plötzlich wesentlich gewordene neue Naturtatsachen hinweisen müssen. Tat sie das nicht, so war es uns möglich, nun an einen logischen *Aufbau* unseres Gebäudes zu gehen, einige Tatsachen, aus denen sich dann alles logisch ableiten läßt, an die Spitze zu stellen und das übrige im Vertrauen auf die bewährte Konstanz des Abstandes zwischen Bild und Wirklichkeit der Deduktion zu überlassen.

Allerdings ist es *nachträglich* möglich, jede Erfahrungstatsache (besonders jede stark idealisierte) nicht als solche, sondern als „Definition" zu bezeichnen und ist ein solcher rein axiomatischer Aufbau eines Systems von ebenso hohem logischen wie rein mathematischen Interesse; nur darf man nicht vergessen, welchen Tatsachen eben die vorliegende Auswahl der Definitionen ihr Bestehen und unser Interesse an ihnen dankt. Denn prinzipiell sind unendlich viele höchst uninteressante Gruppen von Definitionen mit ebenso folgerichtigen wie uninteressanten daran anschließenden Lehrgebäuden möglich.

Wir werden also nicht erwarten, in der Geometrie ein Lehrgebäude zu finden, in dem alles mit eindeutiger innerer Notwendigkeit abläuft, sondern werden die Worte *Riemanns* in seiner berühmten Habilitationsschrift verstehen, „daß die Sätze der Geometrie sich nicht aus allgemeinen Größenbegriffen ableiten lassen, sondern daß diejenigen Eigenschaften, durch welche sich der Raum von anderen denkbaren dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten unterscheidet, nur aus der Erfahrung entnommen werden können ... Diese Tatsachen (der Erfahrung) aber sind wie alle Tatsachen nicht notwendig, sondern nur von empirischer Gewißheit, sie sind Hypothesen".

Was nun die Relativität des Raumes anbetrifft, so können wir sagen, daß sie für ihn in eben dem Maße nicht mehr und nicht minder besteht wie für unsere übrigen Wahrnehmungen von der Natur, d. h. also in zwei Beziehungen:

Die erste bezieht sich auf die bekannten Überlegungen, durch die *Delboeuf* und *Poincaré*[1]) und nach ihnen noch viele uns begreiflich machen, daß, wenn eines Nachts (ich deute hier nur grob an), *alle* Dimensionen des Universums sich vertausendfachten, wir von alledem nichts merken würden, da, analoge Transformationen unserer Instrumente und unserer Sinne vorausgesetzt, wir kein Mittel hätten, diese Vergrößerung zu konstatieren; ja daß sich noch viel einschneidendere in gleicher Weise unkonstatierbare Veränderungen vollziehen könnten. — Bei all diesen weit ausgesponnenen Überlegungen ist zunächst nicht einzusehen, welche spezifische Eigenschaft gerade der *räumlichen* Wahrnehmung durch sie dargelegt werden sollte. Wenn eines Nachts alle Farben um einige Nuancen dunkler würden oder nach einem bestimmten anderen Gesetz, das noch so kompliziert sein könnte, sich veränderten, so würden wir, vorausgesetzt, daß in unserem Auge und in unseren optischen Instrumenten entsprechende Veränderungen vorgingen, in der Früh auch nichts bemerken. Wenn alle Blumendüfte eines Nachts verschwänden, so würden wir, entsprechende Veränderungen in unserem Riechorgane vorausgesetzt, die hier die wesentlichsten Meßinstrumente sind, auch nichts merken usw. Es ist eben nicht nur für den Raum, sondern für alle Dinge der Mensch das Maß der Dinge, und der Raum hat nicht mehr aber auch nicht weniger „reales", „absolutes" in sich als die übrige Sinnenwelt.

Hat hier die Abhängigkeit der Raumwahrnehmung von unserer *physiologischen* Konstitution zu einer „Relativität" geführt, so ergibt sich die zweite fundamentale Relativität (die aber auch ihr Gegenstück hat) durch die Möglichkeiten der verschiedenen *logischen* Interpretationen unserer

[1]) „Wert der Wissenschaft".

Wahrnehmungen und die daraus folgende Einordnung in verschiedene Schemata.

Doch werden wir diesen Punkt noch (im dritten Teil) ausführlich zu besprechen haben. Hier merken wir lieber noch, was die „physiologische Relativität" betrifft, an, daß „die Fiktion einer durchgehenden Größenänderung der Welt von vorneherein jedes angebbaren Sinnes entbehrt, solange nicht zugleich etwas über das Verhalten der physikalischen Konstanten bei dieser Deformation vorausgesetzt ist" (*Schlick* „Raum und Zeit in der gegenw. Physik"). „Setzen wir etwa nach 100-facher Linearvergrößerung der Welt für die Masse der Erde und der Gegenstände auf ihr dieselben Zahlen wie vorher in die Newtonsche Attraktionsformel ein, so würde sich das Gewicht auf $1/_{10\,000}$ des früheren Wertes reduzieren; die Gewichtsverminderung würde sich etwa durch die Verlangsamung der Schwingung eines Pendels gegen früher feststellen; dazu aber muß man Voraussetzungen über die eventuelle Änderung oder das Gleichbleiben der Rotationsgeschwindigkeit der Erde machen, denn durch Vergleichung mit dieser entsteht erst unser Zeitmaß usw." Man könnte aber noch weiter gehn und käme leicht zu der Folgerung, daß auch entsprechende Veränderungen der physikalischen Konstanten nicht hinreichen, die Veränderung zu einer tatsächlich unkonstatierbaren zu machen, sondern daß im Grunde die ganze Welt sich „entsprechend" verändern müßte. Auch dies trifft in gleicher Weise für unsere Beispiele der Farben, Düfte usw. zu; nur springt diese Notwendigkeit in den verschiedenen Fällen in verschiedenem Maße in die Augen.

Sache des Forschers kann es nur sein, das *Ganze* seiner wissenschaftlichen Arbeit, die Induktion und die Deduktion, die Definitionen und ihre Identifizierung mit den Naturdingen, die Logik und die Empirie in ihrem Ineinandergreifen, die Mathematik und die Naturwissenschaften (im speziellen die Geometrie und Physik) so einzurichten, daß, alles in allem genommen (um in dem früheren Bilde zu bleiben), er sich mit seiner Interpretation der Wirklichkeit immer in einem gewissen konstanten, keinesfalls aber wachsenden Abstand von ihr hält. Die Probe wird darin bestehen, daß seine Zeichen- und Bildersprache, in der er sich die Wirklichkeit malt und deren Zutreffen sich darin bewährt, daß die Wirklichkeit — wunderbar genug — darauf reagiert (sowie ich mich z. B. mit Haustieren im Verkehr und Verständigung gesetzt habe und meine Zeichen bei ihnen verfangen, obgleich unsere „Seelen" im Grunde nichts von einander wissen), daß diese Sprache ihre wunderbaren Fähigkeiten nicht verliere, sondern unserem intellektuellen und praktischen Bedürfnis nach einer Brücke ins Unbekannte immer vollendeter genüge. Diejenigen unter unseren Erkenntnissen, die mit unseren ältesten, tiefsten und primitivsten Instinkten zusammenhängen (wie etwa nach *Poincaré* unsere Auffassung von der Dreidimensionalität des Raumes) wurzeln am festesten, alles aber ist relativ, bedingt durch die Außenwelt und bedingt durch uns als rezipierendes Objekt, speziell unsere Raumauffassung. Auf diese wollen wir (im dritten Teile) wieder zurückkommen, nachdem wir, wozu wir uns nun anschicken wollen, die verschiedenen Systeme der Deduktionen, die sich an verschiedene Axiomgruppen[1]) anschließen und die man euklidsche und nichteuklidsche Geometrien nennt, betrachtet haben werden.

II.

Die nichteuklidschen Geometrien.

Elementargeometrisches.

Haben wir uns im vorhergehenden den Unterschied zwischen solchen Sätzen, die idealisierte Erfahrungstatsachen, „Hypothesen" formulieren — und als solche Sätze mußten wir ja die Axiome der Geometrie auffassen — und reinen Deduktionen klar gemacht, so werden wir nun die Grundfrage der nichteuklidschen Geometrien verstehen, die darin gipfelt, *ob das euklidsche Parallelpostulat bereits eine (mathematische) Folge der übrigen Axiome ist* oder ob in ihm eine selbständige Hypothese formuliert wird. Die einschlägigen Untersuchungen haben definitiv ergeben, daß das *Parallelenpostulat* als *selbständige Hypothese* aufzufassen ist, denn sie haben gezeigt, daß man ein in sich konsequentes Lehrgebäude auf Grund allein der übrigen Axiome aufbauen kann, aus welchem sich sodann je nach den verschiedenen Annahmen bezüglich des Parallelenpostulats von einander verschiedene „euklidsche" oder „nichteuklidsche" Systeme ergeben. Ohne hier auf die schon oft fesselnd dargestellte Geschichte der nichteuklidschen Geometrien einzugehen[2]), die besonders darum so interessant ist, weil diese ganzen Untersuchungen dem Wunsche das Postulat *zu beweisen* ihr Dasein und ihren inneren Ansporn verdankten und eben mit dem Nachweis seiner Unbeweisbarkeit endeten, wollen wir lieber einiges weniges aus dem vollendeten Gebäude hervorheben.

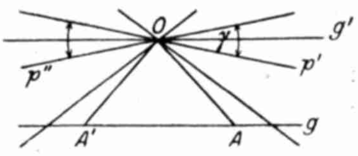

Fig. 1.

Das fragliche Axiom besagt bekanntlich, daß in einer Ebene durch einen Punkt zu einer Geraden nur eine einzige Parallele (nicht schneidende Gerade) existiert (elftes Axiom, fünftes Postu-

[1]) Systemisierte Induktionen, die man, wenn man will, Definitionen nennen kann!

[2]) *Bonola* „Die nichteuklidsche Geometrie", *Mach* „Erkenntnis und Irrtum", *Voß* „Das Wesen der Mathematik" usw.

lat). Denken wir uns eine Gerade g, einen festen Punkt O außerhalb derselben und einen auf g gelegenen beweglichen Punkt A und ziehen wir die jeweilige Verbindung O A, O A' .... Nun wissen wir ja, wenn wir A immer weiter auf g wandern lassen, daß die O A' alle möglichen Lagen zwar augenscheinlich durchwandern werden, uns aber nie die *parallele* Richtung g' liefern werden. Woher aber wissen wir, ob wir nicht vielleicht schon über *andere Grenzlagen*, z. B. p, p', nicht hinauskommen werden? Das ist eben keine anschauliche Selbstverständlichkeit. *Euklid* sagt, daß der Winkel $\gamma = 0$ ist, dafür ist aber kein anschaulicher Grund einzusehen, es könnte also ganz gut in diesem Winkel ein Büschel Gerader geben, die g nicht schneiden.

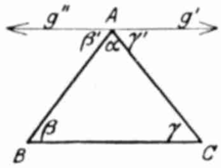

Fig. 2.

Der wichtigste Satz, der ohne das Parallelenaxiom nicht abgeleitet werden kann, ist der von der Winkelsumme des Dreiecks. Sei (Fig. 2) ABC ein Dreieck, mit den Winkeln α, β, γ; machen wir $\gamma' = \gamma$ durch Ziehung von g' und $\beta' = \beta$ durch Ziehung von g''; dann sind g' und g'' sicher Gerade, die die verlängerte Dreieckbasis *nicht* schneiden. Es ist aber die Frage, ob die beiden Richtungen wirklich die *gleichen* sind, ob die Fortsetzung von g'' über A hinaus mit g' zusammenfällt und umgekehrt, und *dazu* brauche ich das Parallelen-Axiom.

Aber auch umgekehrt: wenn wir zeigen könnten, daß die Winkelsumme in jedem Dreieck gleich ist 2R, so wäre das Axiom richtig. In dieser Weise führten alle direkten Versuche, das Parallelen-Axiom zu beweisen, nur darauf, es durch äquivalente Axiome zu ersetzen, und so schlug man den anderen Weg ein, nämlich eine neue Geometrie aufzubauen *ohne* Hilfe des Postulats in der Hoffnung, im Laufe der Untersuchungen auf einen Widerspruch zu stoßen.

Was bedeutet nun der Wegfall unseres Axioms?

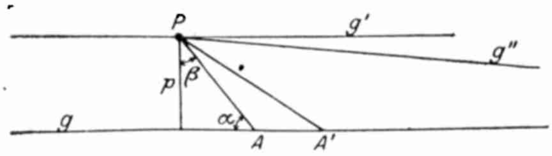

Fig. 3.

Ziehen wir von P aus das Perpendikel p und die verschiedenen Geraden P A, P A' etc. Nach *Euklid* erhalten wir, wenn wir A auf g wandern lassen, alle Geraden bis auf eine: g'. Wenn es aber nicht gilt, dann ist g' nicht die einzige unerhältliche Gerade, sondern es gibt eine Grenzlage g'' und die heißt schon „Parallele zu g durch P". Alle schneidenden Geraden füllen also (wenn wir von symmetrischer Umklappung absehen) den Scheitelraum zwischen p und g'' aus. Wir erhalten so eine Reihe von rechtwinkligen Dreiecken mit p als Kathete, die Winkel α und β ändern sich. Nun sagt die „hyperbolische Geometrie" (so wollen wir eine Geometrie nennen, die an Stelle der *einen* Parallelen ein ganzes Bündel solcher setzt) aus, daß in einem rechtwinkligen Dreieck mit gegebener Kathete der Winkel β *nicht jeder beliebige* spitze Winkel sein kann, sondern daß, wenn der $\sphericalangle$ (p g'') $= \varphi$ ist, $\beta < \varphi$ sein muß. Wenn β größer ist als der „Parallelwinkel" φ, so erhält man kein Dreieck. In der euklidschen Geometrie kann der $\sphericalangle\, \beta$ in einem rechtwinkligen Dreieck beliebig sein, in der hyperbolischen ist $\beta < \varphi$ und der Winkel φ irgendwie von der Kathete p abhängig, und eine wichtige Aufgabe wird die Ermittelung der Art dieser Abhängigkeit sein. Schreiben wir mit *Lobatschewsky* (einem der Begründer der nichteuklidschen Geometrie) $\varphi = \Pi$ (p), so ist in der gewöhnlichen Geometrie immer Π (p) $= 90^0$; hier aber wächst Π (p) bis 90^0, wenn p $\rightarrow$ 0 abnimmt, und nimmt bis 0^0 ab, wenn $\Pi \rightarrow \infty$ wächst.

Die wichtigste Folgerung der hyperbolischen Geometrie ist, daß hier die Winkelsumme im Dreieck immer < 2R ist, und zwar umso mehr kleiner, je größer die Dreiecksfläche ist; dies ergibt sich ebenso wie die bezüglich der Funktion Π aufgestellten Folgerungen aus den übrigen Axiomen bei der erwähnten Abänderung des Parallelenaxioms. Aus dem Winkelsatz des Dreiecks folgt speziell auch die für uns wichtige Tatsache, daß es hier keine „Quadrate" im gewöhnlichen Sinne gibt (Figuren mit 4 gleichen Seiten und 4 rechten Winkeln), denn die Winkelsumme wäre hier < 4R, und zwar umso mehr kleiner, je flächengrößer das Quadrat ist. Wir können uns eine solche Figur bei geradliniger Begrenzung nicht vorstellen, eine näherungsweise Vorstellung gibt Fig. 4. Dasselbe gilt natürlich für Rechtecke, und es ist klar, daß solche Rechtecke, *die mit der Größe ihre Gestalt ändern*, die Anwendung als Koordinaten im gewöhnlichen Sinne verbieten.

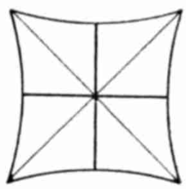

Fig. 4.

Veranschaulichung der nichteuklidschen Geometrie durch die Geometrie auf der Fläche.

Wir haben bisher die beiden Hypothesen betrachtet, daß durch einen Punkt zu einer Geraden nur eine oder unendlich viele Parallelen möglich seien. Auch der dritten möglichen Hypothese, nämlich der, daß gar keine Parallele möglich sei, entspricht eine Geometrie, allerdings nur, wenn man mit *Riemann* die Ansicht fallen läßt, der Raum sei unendlich ausgedehnt, sondern annimmt, er sei nur unbegrenzt (die Gerade z. B. ist unendlich, der Kreis unbegrenzt).

Diese Geometrie kann man anschaulich darstellen, indem man sie als *Geometrie auf der Kugel* interpretiert. Machen wir die bekannte Helmholtzsche Fiktion der „Flächenwesen", die nicht mit *drei-*, sondern mit *zwei*dimensionaler Anschauung, begabt mit Sinnen ähnlich den unsern, die Geometrie ihrer Flächen studierten. Ihre „geradesten Linien" wären die *geodätischen* Linien der Fläche (Linie eines der Fläche entlang, ihr anliegenden gespannten Fadens), die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten wäre für das *Kugel*wesen ein Bogen des größten Kreises, der durch diese zwei Punkte geht; sind die beiden gegebenen Punkte Endpunkte desselben Kugeldurchmessers, so sind unendlich viele, untereinander gleich lange, kürzeste Linien möglich; somit wäre schon das Axiom, das durch zwei Punkte nur *eine* Gerade möglich sei, hier *nicht ausnahmslos* gültig. Parallele (= nicht schneidende „Gerade") existieren nicht, sondern zwei „geradeste" Linien schneiden sich, gehörig verlängert, nicht nur in einem, sondern in zwei Punkten. Die Winkelsumme im Dreieck wäre immer größer als 2R und umso mehr größer, je größer die Dreiecksfläche; da ein größeres Dreieck notwendig andere Winkel hätte als ein kleineres, so fehlt der Begriff der Ähnlichkeit.

Denken wir uns die Flächenwesen eines *eiförmigen* Körpers: Hier fehlt z. B. nicht nur der Begriff der Ähnlichkeit, sondern auch der der Kongruenz, wie man leicht sieht; denn, wenn wir zwei Dreiecke (aus drei geodätischen Linien) auf verschiedenen Stellen der Fläche konstruieren, so würden bei gleich langen Seiten ihre Winkel nicht gleich ausfallen. Kreise mit gleichen Radien hätten am stumpfen Ende eine größere Peripherie als am spitzen etc.

Suchen wir mit *Gauß* eine Bedingung für solche Flächen, auf denen es möglich ist, im Gegensatze zu dem zuletzt dargestellten, Figuren ohne Gestaltsänderung frei zu verschieben. Eine solche Bedingung wird von den „inneren Maßverhältnissen der Fläche" sprechen müssen, d. h. von Beziehungen, die von dem Flächenwesen festgestellt werden könnten, welche sich ja aus ihrer Fläche nicht hinausbewegen können. *Gauß* ging bei seinen flächentheoretischen Untersuchungen von der praktischen Arbeit der hannoveranischen Landesvermessung aus, wobei man durch Vermessung eines Stückes der Erdoberfläche aus der Tatsache der sich nicht lückenlos aneinander schließenden Dreiecke des Triangulationsnetzes einen neuen Beweis dafür erhielt, daß die Erde keine Ebene sei. Nehme ich hingegen ein ebenes Papierblatt, auf das ich Figuren zeichne, und rolle es zusammen (zylinderförmig oder kegelförmig), so finde ich durch Ausmessung der Figuren auf dem zusammengerollten Blatt die gleichen Ausmessungen wie auf dem ebenen. Ganz allgemein gilt auf Flächen, die *durch Verbiegung ohne Verzerrung* auseinander hervorgehen, die gleiche Geometrie.

Charakteristisch für diese inneren Maßverhältnisse der Fläche ist das *Gaußsche Krümmungsmaß*. Er definiert in exakt mathematischer Form die „Krümmung" einer Fläche aus Abmessungen, die man bloß auf der Fläche selbst vorzunehmen hat und zeigt, daß *bei gleichen Krümmungsmaßen k die inneren Maßverhältnisse zweier Flächen die gleichen sind,* und daß, *wenn k in jedem Punkte der Fläche denselben Wert hat, also bei konstantem k — aber nur bei solchem — die oben geforderte Möglichkeit der freien Verschiebung von Figuren ohne Änderung ihrer Maßverhältnisse eintritt.*

Auf der eiförmigen Fläche ist k nicht konstant, auf der Kugel ist k konstant und zwar größer als 0, in der Ebene ist k konstant und gleich 0. Man zeigt nun, daß die Geometrie auf Flächen mit konstantem aber von 0 verschiedenem Krümmungsmaße zusammenfällt mit den Geometrien, in denen man das Euklidsche Postulat fallen gelassen hat. Wollen wir uns die hyperbolische Geometrie, von der wir eingangs sprachen, auf einer Fläche veranschaulichen, so lassen wir etwa eine der folgenden Figuren rotieren und erhalten eine sogenannte Pseudosphäre. (Freilich realisiert jeder Teil der Umdrehungsfläche, z. B. der Traktrix Fig. 5, in die sie durch ihre scharfe Kante zerfällt, nur


Fig. 5.


Fig. 6.


Fig. 7.

einen Teil der nichteuklidschen Ebene. Doch wollen wir auf diesen schwierigen Punkt nicht näher eingehen.)

Zwischen der Geometrie auf einer Fläche konstanter Krümmung und der von einem Teil der Ebene besteht eine Analogie, die wir mit *Bonola* durch folgendes „Lexikon" veranschaulichen:

a) Fläche	a) Teil der Ebene
b) Punkt	b) Punkt
c) geodätische Linie	c) Gerade
d) Bogen einer geodätischen Linie	d) Strecke
e) lineare Eigenschaften der geodätischen Linie	e) Postulate über die Anordnung der Punkte auf einer Geraden
f) zwei Punkte bestimmen eine geodätische Linie etc. etc.	f) zwei Punkte bestimmen eine Gerade etc. etc.

Wenn man die Geometrien auf all diesen Flächen (Sphären, Pseudosphären, Ebene) vergleicht, so sieht man, daß wir als gemeinsame Eigenschaften für die Geometrie all dieser Oberflächen all die Eigenschaften festhalten können, die bei der Euklidschen Anordnung unabhängig vom Parallelen-Postulat sind und bei denen der Beweis nicht von der vollständigen Ebene Gebrauch macht (z. B. von der Unendlichkeit der Geraden).

Allgemeiner Gaußscher Standpunkt.

Betrachten wir Kurven und Flächen im Euklidschen Raume mit den Carthesischen Koordinaten x, y, z;

$$x = x\ (u),\ y = y\ (u),\ z = z\ (u)$$

ist bekanntlich eine „Parameterdarstellung" einer Kurve, wobei der Parameter u noch einer beliebigen stetigen Transformation unterworfen werden kann. Die Punkte einer zweidimensionalen Punktmannigfaltigkeit, einer Fläche, können durch die Werte zweier Parameter u_1, u_2 unterschieden werden.

$$x = x\ (u_1, u_2),\quad y = y\ (u_1, u_2),\quad z = z\ (u_1, u_2). \quad (1)$$

Die Parameter u_1, u_2 bezeichnet man als Gaußsche oder krummlinige Koordinaten auf der Fläche; eine Parameterdarstellung der Kugel liefern z. B. die geographischen Koordinaten Länge und Breite. Wir können die Formeln (1) auch als stetige Abbildungen der dreidimensionalen Mannigfaltigkeit der x, y, z auf die u_1, u_2 Ebene ansehen, wie sie aus den Kartenprojektionen z. B. der stereographischen Projektion oder der Merkator-Projektion jedem geläufig sind. Zieht man in der u_1, u_2 Ebene rechtwinklige Koordinaten, so überträgt sich dieses Netz vermöge der Abbildung auf die krumme Fläche.

Wir haben also hier in diesen krummlinigen Koordinaten einen Ersatz für die Carthesischen Koordinaten in der Ebene. Es ist nun klar, daß, ebenso wie die inneren Eigenschaften der Ebene sich nicht ändern, ob man ihre Geometrie etwa in Carthesischen oder in Polarkoordinaten treibt, ebenso die Gesetzmäßigkeiten der Fläche sich bei konsequenter Durcharbeitung unabhängig von der speziellen Wahl der krummlinigen Koordinaten ergeben müssen. Mathematisch drückt sich das darin aus, daß in (1) die $u_1\ u_2$ noch einer beliebigen eindeutigen stetigen Transformation unterworfen werden können.

Wichtig ist nun der Ausdruck für den Abstand ds zweier unendlich naher Punkte (u_1, u_2) $(u_1 + du_1, u_2 + du_2)$ auf der Fläche, dieser wird sich natürlich nicht in den krummlinigen Koordinaten durch die gewohnte Formel $du_1^2 + du_2^2 = ds^2$ darstellen, sondern wir müssen zu seiner Berechnung zunächst auf die räumlichen (Carthesischen) Koordinaten rekurrieren. Es ist

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

und da

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial x}{\partial u_2} du_2,$$

so ist

$$ds^2 = g_{11}\, du_1^2 + 2 g_{12}\, du_1\, du_2 + g_{22}\, du_2^2, \quad (2)$$

wobei die

$$g_{ik} = \frac{\partial x}{\partial u_i}\frac{\partial x}{\partial u_k} + \frac{\partial y}{\partial u_i}\frac{\partial y}{\partial u_k} + \frac{\partial z}{\partial u_i}\frac{\partial z}{\partial u_k},$$

im allgemeinen keine Konstanten, sondern Funktionen von (u_1, u_2) sind. *Gauß* erkannte, daß diese „metrische Fundamentalform" ds in ähnlicher Weise wie das früher erwähnte Krümmungsmaß bestimmend ist für die Geometrie auf der Fläche, daß die Geometrie auf zwei Flächen dieselbe ist, wenn für sie bei geeigneter Parameterdarstellung die Koeffizienten g_{ik} der metrischen Fundamentalform übereinstimmen. Alle geometrischen Verhältnisse auf der Fläche können wir im Bilde der (u_1, u_2) Ebene verfolgen, wenn wir nur übereinkommen, unter dem Abstand ds zweier unendlich naher Punkte nicht den durch die Pythagoreische Formel $ds^2 = du_1^2 + du_2^2$ gelieferten Wert zu verstehen, sondern (2). Für die Kugel z. B. erhalten wir ein ganz bestimmtes ds, und daß auf der Kugel nicht dieselbe Geometrie wie in der Ebene gilt, besagt analytisch, daß es unmöglich ist, die quadratische Differentialform der Kugel

$$ds^2 = \frac{(1 + u_1^2 + u_2^2)(du_1^2 + du_2^2) - (u_1 du_1 + u_2 du_2)^2}{(1 + u_1^2 + u_2^2)^2}$$

durch irgend eine Transformation

$$u_1 = u_1\ (u_1'\ u_2');\quad u_2 = u_2\ (u_1'\ u_2')$$

auf die Gestalt $du_1'^2 + du_2'^2$ zu bringen. Haben wir so jedem Kontinuum einen bestimmten und charakteristischen „Abstand" zugeordnet, so gilt mit bezug auf *diesen* Abstand im unendlich kleinen die Euklidsche Geometrie.

Allgemeiner Riemannscher Standpunkt.

Riemann überträgt nun die Gaußschen Ideen auf mehrdimensionale Mannigfaltigkeiten. Er meint, daß die Annahme a priori, der Raum sei euklidisch = „eben", und daß ein Abstand durch die Pythagoreische Formel gegeben, nicht notwendig sei; es seien — zunächst mathematisch — auch *gekrümmte* Räume denkbar, die sich vom Euklidschen Raum ebenso unterscheiden wie die gekrümmten *Flächen* von der Euklidschen *Ebene*. Er definiert ein *Krümmungsmaß des Raumes*, dessen *Konstanz* die Möglichkeit charakterisiert, Körper und Figuren in dem Raume *ohne Gestaltsänderung* zu verschieben; wieder ist diese Beziehung notwendig und hinreichend, wieder liefern die drei Fälle eines konstanten $k \gtreqless 0$ die drei früher ausführlich besprochenen Raumgeometrien.

Das Große in dieser Verallgemeinerung liegt weniger in der kunstvollen formalen Verallgemeinerung der Gaußschen Gedanken, sondern vielmehr in der Konzeption des Gedankens eines möglicherweise *„gekrümmten"* Raumes; denn die verschiedenen Formen von Flächen sind unserer Beobachtung zugänglich, für den Raum aber fehlen derartige Beobachtungen. Wir betrachten also ganz allgemein n-dimensionale Mannigfaltigkeiten, auf denen wir n krummlinige Koordinaten einführen. Das Linienelement ds denken wir uns gegeben durch die Wurzel aus $ds^2 = \Sigma g_{ik}\, dx_i\, dx_k$. Als „eben" werden *diese* n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten bezeichnet, in denen die Form $ds^2 = du_1^2 + du_2^2 + \ldots\ du_n^2$ sich durch stetige