# DIE NATURWISSENSCHAFTEN

Herausgegeben von

**Dr. Arnold Berliner** und **Prof. Dr. August Pütter**

**Sechster Jahrgang.** **26. Juli 1918.** **Heft 30.**


## Baron Roland v. Eötvös zum 70. Geburtstage.

## Seine Untersuchungen über die Gravitation.

*Von Prof. Dr. Karl Tangl, Budapest.*

Baron *R. von Eötvös'* Untersuchungen über Proportionalität der trägen und der schweren Masse sind in *Einsteins* allgemeiner Relativitätstheorie von grundlegender Bedeutung geworden. Da *Eötvös'* Forschungen über Gravitation wenig bekannt zu sein scheinen, so dürfte ein kurzer orientierender Bericht über diese Arbeiten das Interesse der Physiker finden. Eine willkommene Veranlassung dazu bildet der Umstand, daß Baron *R. v. Eötvös* am 27. Juli seinen 70. Geburtstag feiert. Der Gruß der Physiker sei dem unermüdlichen Forscher entboten, der in stiller Arbeit Bedeutendes schuf.

*Eötvös'* Name wurde zuerst durch seine Arbeiten über Kapillarität bekannt[1]). Die Frucht dieser Untersuchungen war das Eötvössche Gesetz über die molekulare Oberflächenenergie der Flüssigkeiten, das seitdem Gemeingut der Wissenschaft geworden ist. Seit dem Jahre 1887 ist Professor *v. Eötvös* fast ausschließlich mit der Erforschung der Schwere und Gravitation beschäftigt. Es soll ganz kurz der hauptsächliche Gegenstand und Methode dieser Untersuchungen behandelt werden.

Bei diesen Experimenten handelt es sich in erster Reihe um *die Bestimmung der räumlichen Variationen der Schwerkraft.* Das Pendel läßt dieselben nur bei Beobachtungen an Orten, die weit von einander getrennt sind, erkennen; die Wage, obwohl empfindlicher, gibt nach *v. Jolly* nur die Änderung der Schwere in der Vertikalen. Mittels der Eötvösschen Instrumente lassen sich die Variationen an Punkten von einigen Dezimetern gegenseitigem Abstand, d. h. durch Beobachtungen an einem einzigen Orte bestimmen[2]).

Bekanntlich läßt die Schwere ein Potential zu, dessen Differentialquotienten nach den Koordinaten die entsprechenden Schwerekomponenten darstellen. Die räumlichen *Variationen* der Schwerkraft sind durch *deren* Differentialquotienten nach den Koordinaten charakterisiert, d. h. durch die *zweiten* Differentialquotienten des Potentials. Es gibt deren 5 unabhängige, wovon 4 nach *Eötvös* meßbar sind. Legt man durch einen Punkt *A* des Schwerefeldes ein Koordinatensystem, dessen $z$-Achse die Richtung der Schwerkraft hat, dessen $x$- und $y$-Achse also horizontal sind, so ist die Beschleunigung $g = \frac{\partial U}{\partial z}$, wenn $U$ das Potential ist. Die Eötvössche Methode liefert

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = \frac{\partial g}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = \frac{\partial g}{\partial y}.$$

Diese Quotienten hängen eng mit den Krümmungsverhältnissen der Niveaufläche und der Kraftlinie zusammen, die man durch $A$ legen kann. Die $z$-Achse ist die Normale im Punkte $A$ der Niveaufläche. Legt man die $x$- und $y$-Achse in je einen Hauptabschnitt der Niveaufläche und sind $\varrho_1$ und $\varrho_2$ die Krümmungshalbmesser der Schnittkurven mit der $x_2$- bzw. $y_2$-Ebene, die Hauptkrümmungsradien der Niveaufläche, so wird

$$\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2} = \frac{1}{g}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right); \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = o.$$

($g$ = Beschleunigung in $A$.) Die übrigen zwei Quotienten $\frac{\partial g}{\partial x}$ und $\frac{\partial g}{\partial y}$ haben eine anschauliche Bedeutung: sie geben die Änderung der Größe der Schwerkraft, wenn man in Richtung der $x$- bzw. $y$-Achse um 1 cm fortschreitet ($dx = 1$, $dy = 1$). Sie sind außerdem mit der Gestalt der Kraftlinie in $A$ verknüpft. Die Kraftlinie steht senkrecht zur Niveaufläche, ist aber natürlich gekrümmt. Schreitet man auf ihr mit 1 cm nach unten, nach $B$ (Fig. 1), so hat die Schwerkraft dort eine andere Richtung als in $A$, denn die Kraftlinie ist gekrümmt und ihre Tangente zeigt die Richtung der Schwerkraft an. Nun kann man denken, daß diese Richtungsänderung dadurch zustande kommt, daß in $B$ zu der in $A$ wirkenden Schwerkraft eine horizontale Kraftkomponente hinzutritt, die eben die Richtungsänderung bewirkt, und die mit der $x$-Achse einen Winkel $\alpha$ einschließt. Diese horizontale Kraft sei $H$, ihre Komponente nach der $x$- und $y$-Achse also $H \cos \alpha$ bzw. $H \sin \alpha$. Es ist leicht einzusehen, daß $H \cos \alpha = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = \frac{\partial g}{\partial x}$, und ebenso $H \sin \alpha = \frac{\partial g}{\partial y}$ ist, und der Winkel, den die Schwerkraft in $B$ mit jener in $A$ einschließt,

$$= \frac{1}{g}\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} \text{ ist.}$$

Zur Bestimmung dieser Quotienten bediente sich Professor *Eötvös* der *Coulombschen Drehwage*, und zwar in zwei verschiedenen Formen. Die *erste Form* ist ein horizontaler hohler Balken, an seinen beiden Enden mit Massen beschwert. Der Balken hängt an einem dünnen Platindraht und ist mit einem kleinen Spiegel versehen (Fig. 2).

[1]) Wied. Ann. 27, 448, 1886.

[2]) Wied. Ann. 59, 354, 1896 und Rapport au Congr. Intern. de Phys. *III.* 371, 1900.

Mit dieser Wage wird die Richtung der Hauptkrümmungen sowie $\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}$ bestimmt, also die Werte von $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$, und zwar auf Grund folgender Überlegung: Wir denken uns durch den Mittelpunkt $A$ des Balkens die Niveaufläche gelegt; da diese gekrümmt ist, ändert sich die Richtung der Schwerkraft längs des Balkens. Die Schwere $G_1$ und $G_2$ der Massen an den Enden haben also verschiedene Richtungen. Liegt der Balken in einem der Hauptschnitte, so bleiben $G_1$ und $G_2$ in jener Ebene, die man durch den Balken und die Normale von $A$ (Platindraht) legen kann, das heißt, in der Normalebene durch den Balken. Bei jeder anderen Richtung des Balkens, wo er mit der Richtung der kleinsten Krümmung $\frac{1}{\varrho_1}$ den Winkel $\vartheta$ einschließt, tritt aber die Kraft $G_1$ und $G_2$ aus der durch den Bal-

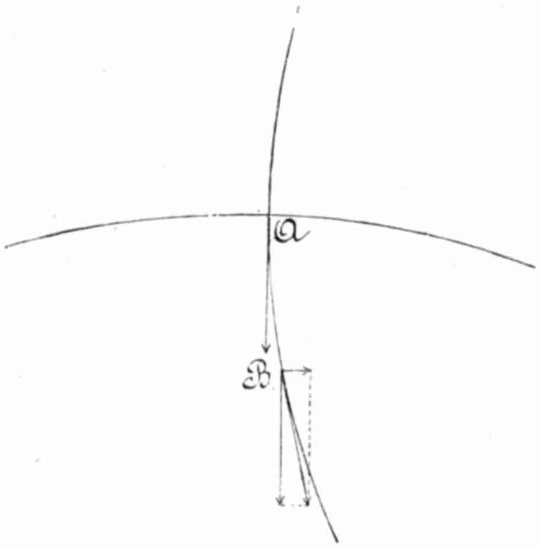


Fig. 1.

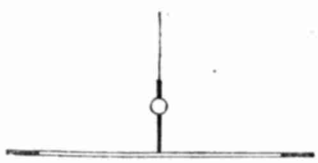

Fig. 2.

ken gelegten normalen Ebene heraus, hat also eine Komponente senkrecht zu dieser Ebene. $G_1$ und $G_2$ geben also ein Drehmoment in bezug auf den Aufhängedraht, das den Balken in die Richtung von $\varrho_1$ zu drehen, den Winkel $\vartheta$ zu verkleinern strebt. Dieses Drehmoment ist gleich $\frac{K}{2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\sin 2\vartheta$, wo $K$ mit großer Annäherung das Trägheitsmoment des Balkens in bezug auf den Aufhängedraht bedeutet. Dadurch wird der Draht um einen Winkel $\varphi$ gedrillt und $\tau\varphi = \frac{K}{2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right) \sin 2\vartheta$.

In einer einzigen Stellung läßt sich nun zwar der Winkel $\varphi$ nicht messen; dreht man aber den ganzen Wagekasten samt Torsionskopf um eine vertikale Achse, so daß der Balken mit $\varrho_1$ nunmehr den Winkel $\vartheta^1$ einschließt, so verändert sich auch die Drillung des Drahtes, sie wird nun $\varphi^1$; und $\varphi^1 - \varphi$ kann mit Hilfe der am Balken und Gehäuse befestigten Spiegel durch Skalenablesung gemessen werden.

Die räumlichen Variationen der Schwerkraft, namentlich die Verschiedenheit der Hauptkrümmungen der Niveaufläche haben also zur Folge, daß die relative Stellung des Balkens zum Gehäuse eine andere wird, wenn man das Gehäuse samt Torsionskopf um eine vertikale Achse dreht. Dreht man z. B. den ganzen Apparat um 90°, so dreht sich der Balken nicht auch um 90°; diese Differenz wird mit Skala und Fernrohr gemessen. Schon drei Stellungen des Balkens genügen, um $\vartheta$, also die Richtung der Hauptkrümmungen, sowie $\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}$ zu bestimmen.

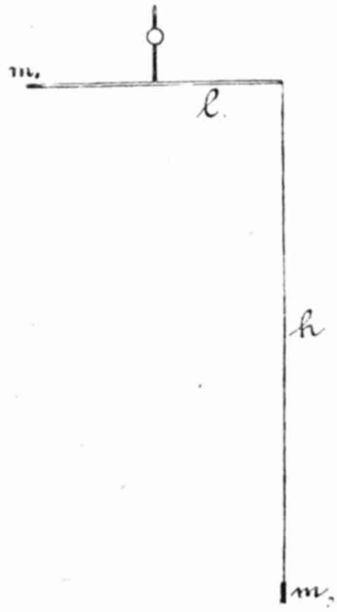


Fig. 3.

*Die zweite Form der Coulombschen Wage,*[1]) mit der $\frac{\partial g}{\partial x}$ und $\frac{\partial g}{\partial y}$ bestimmt werden, ist von der früheren nur dadurch verschieden, daß eine der Massen am Ende des Balkens unterhalb dieses angebracht ist (Fig. 3): sie hängt an einem Faden, der am Ende des Balkens befestigt ist.

Wir haben gesehen, daß infolge der Krümmung der Kraftlinie die Schwerkraft auf die untere Masse $m_2$ eine andere Richtung als die auf die obere $m_1$ annimmt; dies kann so gedeutet werden,

[1]) s. Heft 14 dieses Jahrganges, S. 166.

daß die Kraft auf $m_2$ von jener auf $m_1$ in einer horizontalen Komponente verschieden ist. Diese horizontale Komponente gibt wieder eine Drillung des Aufhängedrahtes (des oberen natürlich), die in einer einzigen Stellung wieder nicht meßbar ist; dreht man aber den ganzen Apparat mit 180° um eine vertikale Achse, so wird jetzt der Draht in entgegengesetzter Richtung um ebensoviel gedrillt, das heißt: dreht man den Kasten um 180°, so dreht sich der Balken nicht auch um 180°. Die Differenz der Einstellung des Balkens relativ zum Kasten kann ebenso wie früher gemessen werden. Lag der Balken in Richtung der $x$-Achse, so ist obige Differenz proportional zu $\frac{\partial g}{\partial y} l h$ (Fig. 3). Ebenso verfährt man, wenn man von der zur früheren senkrechten Stellung des Balkens ausgeht, wo er also in Richtung der $y$-Achse lag; durch eine Drehung um 180° bekommt man $\frac{\partial g}{\partial x} l h$.

Nach der kurz geschilderten Eötvösschen Methode können also die räumlichen Variationen der Schwere durch Beobachtungen an einer einzigen Stelle bestimmt werden, mit Ausnahme von $\frac{\partial g}{\partial z}$, der Veränderung der Größe der Schwere mit der Tiefe; in bezug auf diese Größe ist man auch weiterhin auf die Wage nach *v. Jollys* Methode angewiesen. Über die Einrichtung der Instrumente, sowie über die unter Professor *Eötvös'* Leitung in den verschiedensten Teilen Ungarns ausgeführten zahlreichen Messungen soll in dieser Zeitschrift in einem ausführlichen Aufsatz später berichtet werden.

In das Jahr 1890 fallen die klassischen Experimente *Eötvös'* über die *Proportionalität der trägen und der schweren Masse*[1]). Die Frage drängte sich in der Form auf, ob die Anziehung der Erde auf irdische Körper verschiedener materieller Konstitution verschieden sei. Gestützt auf Messungen mit der Coulombschen Wage erster Form konnte Prof. *Eötvös* die Frage mit viel größerer Genauigkeit beantworten, als vor ihm *Newton* und *Bessel*. Die Schwerkraft ist die Resultante zweier Kräfte: der Anziehungskraft der Erde und der Zentrifugalkraft, einer Trägheitskraft. Diese zwei Kräfte sind im allgemeinen von verschiedener Richtung. Der Winkel ist nahezu gleich 180°—$\varphi$ ($\varphi$ = geographische Breite). Ist also die Anziehungskraft auf verschiedene Substanzen verschieden, das heißt, ist die schwere Masse mit der trägen Masse *nicht* proportional, so müßte auch die *Richtung* der Schwerkraft als Resultante der beiden genannten Kräfte auf verschiedene Stoffe verschieden ausfallen. Würde die Anziehung auf 1 g träger Masse aus verschiedenem Stoffe um $^1/_{20\,000\,000}$ verschieden sein, so würde die Schwere auf beide Stoffe eine Richtungsdifferenz von $^1/_{60\,000}$ Sekunde zeigen. Das Pendel ist viel zu unempfindlich, um Richtungsänderungen solcher Größenordnung anzuzeigen; mit der Eötvösschen Wage erster Form sind sie aber nachweisbar. Professor *Eötvös* befestigte an den Enden des horizontalen Balkens der Coulombschen Wage zwei Körper aus verschiedenem Stoffe, z. B. eine Messingkugel an einem, ein Stück Glas, Kork usw. am anderen Ende. Der Balken wurde auf den Meridian senkrecht gestellt. Wäre die Richtung der Schwerkraft auf die beiden Stoffe verschieden, so würde daraus ein Drehungsmoment in bezug auf den Aufhängedraht entstehen, und der Faden müßte dadurch gedrillt werden. Wird nun das Gehäuse samt Torsionskopf um 180° gedreht, so würde der Draht um ebensoviel in entgegengesetzter Richtung gedrillt werden, das heißt, der Balken würde um mehr oder weniger als 180° gedreht werden (in seiner Ruhelage natürlich). *Eötvös* benutzte im Jahre 1890 eine Coulombsche Wage, die bei obiger Behandlung eine Differenz von 1 Bogenminute im Einstellen des Balkens gegeben hätte, wenn die Anziehung der Erde auf die beiden Stoffe um $^1/_{20\,000\,000}$ verschieden gewesen wäre. Der Balken zeigte aber keine nachweisbare Differenz der Einstellung. Auf Grund dieser Experimente ist also die Proportionalität zwischen träger und schwerer Masse bis auf $^1/_{20\,000\,000}$ gesichert.

Seitdem hat Professor *Eötvös* diese Untersuchungen mit empfindlicheren Wagen wiederholt die Gleichheit der Anziehungskraft bis auf $^1/_{200\,000\,000}$ bewiesen. Diese letzteren Messungen bilden den Gegenstand der Göttinger Preisschrift aus dem Jahre 1909, die mit dem Benecke-Preis gekrönt wurde. Diese Schrift ist leider nicht publiziert; über ihren Inhalt soll der demnächst erscheinende Aufsatz in dieser Zeitschrift ausführlicher berichten.

Im Laufe seiner Untersuchungen beschäftigte sich Prof. *Eötvös* auch mit der *Bestimmung der Gravitationskonstante* nach einer dynamischen Methode, bei welcher die Veränderung der Schwingungsdauer der Coulombschen Wage unter der Wirkung von anziehenden Bleimassen verwertet wurde. Die Methode ist sehr empfindlich, was daraus ersichtlich ist, daß die Schwingungsdauer, je nach der Lage der Wage, den anziehenden Massen gegenüber 641 bzw. 860 Sek. betrug. Diese Versuche sind noch nicht abgeschlossen, daher nur die Bemerkung, daß die bisherigen Beobachtungen den Wert dieser Konstante zu $f = 0{,}66510^{-7}$ um kaum $^1/_{500}$ des Betrages abweichend festsetzen.

Endlich sei noch bemerkt, daß Prof. *Eötvös* die Empfindlichkeit seiner Instrumente soweit steigern konnte, daß die Anziehung einer in 5 m Entfernung angebrachten Masse von 300 Kilogramm sicher nachweisbar war. Die Steigerung der Empfindlichkeit geschah ähnlich wie bei Galvanometrie durch Kompensation, wobei als kompensierende Kraft die Massenanziehung selbst diente.

---

[1]) Math. und Naturw. Ber. aus Ungarn 8, 65, 1891. Beibl. XV, 688, 1891.