

## Werk

**Titel:** Thermodynamik und Kohärenz

**Autor:** Laue , M. v.

**Ort:** Berlin

**Jahr:** 1918

**PURL:** [https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?34557155X\\_0006](https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?34557155X_0006) | LOG\_0152

## Kontakt/Contact

[Digizeitschriften e.V.](#)  
SUB Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen

✉ [info@digizeitschriften.de](mailto:info@digizeitschriften.de)

kinetische Theorie steht und fällt hier bekanntlich mit der Zustandsgleichung idealer Gase

$$p v = R T \dots \dots \dots (1)$$

( $p$  Druck,  $v$  Volumen,  $R$  Gaskonstante,  $T$  absolute Temperatur). Betrachten wir die Ausdehnung eines Gases vom Volumen  $v_1$  auf das Volumen  $v_2$ , so ist die damit verbundene maximale Arbeit

$$A = R T \ln \frac{v_2}{v_1} \dots \dots \dots (2)$$

Der zweite Wärmesatz liefert bekanntlich für die maximale Arbeit  $A$  die Beziehung ( $U$  Änderung der gesamten Energie)

$$A - U = T \frac{dA}{dT}, \dots \dots \dots (3)$$

während der neue Wärmesatz ergänzend die Grenzbedingung

$$\lim \frac{dA}{dT} = 0 \text{ (für } T=0) \dots \dots \dots (4)$$

hinzufügt. Nach Gleichung (1) ist nun aber in diesem Falle

$$\lim \frac{dA}{dT} = R \ln \frac{v_2}{v_1} \text{ (für } T=0) \dots \dots \dots (5)$$

also mit dem neuen Wärmesatze unvereinbar.

Wir können also konstatieren, daß die klassische kinetische Theorie nicht nur nicht den neuen Wärmesatz abzuleiten, sondern ihn sogar, wenigstens in seiner allgemeinsten Fassung (Anwendung nicht nur auf kondensierte Systeme, sondern auf alle Substanzen) zu widerlegen vermag.

Aber die klassische kinetische Theorie ist ja eben durch Planck's Quantentheorie wenn nicht durchbrochen, so doch eingeschränkt, und zwar macht sich diese Einschränkung gerade bei tiefen Temperaturen immer stärker bemerkbar; in der Nachbarschaft des absoluten Nullpunkts führt sie sogar zu einer vollständigen Negierung der bisherigen kinetischen Anschauungen.

Der Grundgedanke der Quantentheorie führt in seiner Anwendung auf Atomschwingungen in festen Körpern, die man bekanntlich Einstein verdankt, und ferner in seiner Anwendung auf rotierende und überhaupt sich freibewegende Gasmoleküle, mit der ich mich in mehreren Arbeiten beschäftigt habe, zu folgender Auffassung:

Jedes materielle System muß sich durch Abkühlung schließlich in einen Zustand überführen lassen, bei welchem eine weitere Abkühlung keinen weiteren Einfluß mehr auszuüben vermag. Dies bedeutet aber nichts anderes, als daß alle materiellen Veränderungen bei hinreichend tiefen Temperaturen dem Einflusse der Temperatur entzückt werden, eine Vorstellung, die allerdings mit der klassischen kinetischen Theorie der Wärme unvereinbar ist. Aber diese neue Vorstellung ist es auch zugleich, die uns die Gleichung (4) in einfachster Weise anschaulich macht und somit auch das kinetische Verständnis des neuen Wärmesatzes ermöglicht. —

Auf keinem anderen Gebiete hat die Anwendung der Quantentheorie unsere kinetischen Auf-

fassungen so tiefgreifend verändert, wie gerade auf dem Gebiete des Verhaltens idealer Gase bei sehr tiefen Temperaturen. Die Anwendung der Quantentheorie hat hier im Verfolg einer von mir aufgestellten Vermutung eine Anzahl hervorragender Theoretiker übereinstimmend zu der Auffassung geführt, daß ein ideales Gas bei sehr tiefen Temperaturen, zu denen man es sich unter Vermeidung von Kondensation abgekühlt zu denken hat, in das Gebiet einer Zustandsgleichung gelangt, die von Formel (1) völlig verschieden ist. Um nur einen Punkt herauszugreifen, so sind sich sämtliche, unter sich allerdings nicht völlig übereinstimmende Theorien der sogenannten Gasentartung darüber einig, daß bei hinreichend tiefer Temperatur der Druck eines idealen Gases (bei konstantem Volum) von der Temperatur unabhängig sein muß. Zur gleichen Schlußfolgerung führt aber Gleichung (4) in ihrer Anwendung auf diesen Fall.

Ich konnte daher wohl mit Recht bereits 1911 in meiner in der Kgl. Akademie d. Wiss. gehaltenen Festrede betonen, „daß die ganz verschiedenartigen Erwägungen und scheinbar gänzlich getrennten Gebiete, auf denen Planck arbeitete, als er die Theorie der Strahlung aufdeckte, und ich, als ich die Beziehungen zwischen chemischer Energie und Wärme und enträtseln mich bemühte, schließlich in das gleiche Endresultat eingemündet sind.“ Und die weitere Erfahrung hat gelehrt, daß Quantentheorie und neuer Wärmesatz dort, wo sie sich berühren, auch zu identischen Schlüssen führen.

### Thermodynamik und Kohärenz.

Von Prof. Dr. M. v. Laue, Frankfurt a. M.

Der besondere Reiz, welchen die Strahlungstheorie wohl stets auf die Physiker ausgeübt hat, beruht zum großen Teil darauf, daß in ihr zwei Forschungsgebiete, Optik und Thermodynamik, mit bestem Erfolge zusammentreffen, von denen sich jedes für sich zu hoher Vollendung entwickelt hat. Es liegt hier ein geradezu klassisches Beispiel für das schon jetzt erreichte Maß an Einheit in unserem physikalischen Weltbild vor, auf der vor allem, wie Planck besonders in seinem Leidener Vortrag 1908 betont hat, die Überzeugungskraft dieses Weltbildes beruht. Allerdings reicht die eigentliche Thermodynamik nicht aus, um im Verein mit der Optik alle Aufgaben der Strahlungstheorie zu lösen. Gerade bei deren letzten und wichtigsten Aufgabe, dem Strahlungsgesetz, muß sie sich durch die Statistik ergänzen lassen, die ja auch sonst die Thermodynamik erst vollendet und gewissermaßen über sich selbst erhebt. Eins von Plancks unvergänglichen Verdiensten besteht gerade darin, daß er den Schritt von der reinen Thermodynamik zur Statistik in der Strahlungstheorie getan hat. Kaum weniger deutlich als in Plancks folgen-

schweren Arbeiten zeigt sich die Notwendigkeit dieses Schrittes bei einer weit bescheideneren Untersuchung, welche der Verfasser dieses Aufsatzes in der schönen Zeit, da er Assistent am Institut für theoretische Physik an der Berliner Universität war, über die Entropie kohärenter Strahlenbündel veröffentlicht hat. Aus der entscheidenden Förderung, welche dieser Arbeit aus Plancks lebhafter Anteilnahme erwuchs, erklärt sich wohl die Aufforderung der Schriftleitung, diesen bisher schrittweis in verschiedenen Veröffentlichungen behandelten Gegenstand in diesem Planckheft zusammenfassend darzustellen.

Unter einem Strahlenbündel verstehen wir — um uns zunächst der Sprechweise der geometrischen Optik zu bedienen — die vierfach unendliche Gesamtheit von Strahlen, die von allen Punkten einer bestimmten Fläche ausgehen, und deren Richtungen einen kleinen räumlichen Winkel erfüllen. Wir wollen in diesen Begriff aber sogleich noch zwei weitere Beschränkungen aufnehmen, nämlich die auf einen schmalen Spektralbereich (das Bündel soll nicht in streng mathematischem, wohl aber in physikalischem Sinn einfarbig sein) und auf geradlinig polarisierte Schwingungen. Außerdem wollen wir ihm eine bestimmte Länge zuschreiben, die natürlich aufs Engste mit der Zeit zusammenhängt, während der das Bündel von der Strahlungsquelle entsandt wurde. Unwesentlich, aber bequem ist es, hier die Richtung des Strahlenbündels stets als senkrecht zu jener Fläche anzunehmen. Die Energie des Bündels ist proportional zu der genannten Fläche, zu seinem Öffnungswinkel und zu seiner zeitlichen Dauer; den Faktor, welchen man dann noch hinzuzufügen hat, bezeichnet man als die *spezifische Intensität*; die Temperatur des Bündels hängt allein von ihr ab und steigt und fällt zugleich mit ihr.

Ein Strahlenbündel pflanzt sich ohne wesentliche Veränderung beliebig lange Zeiten im leeren Raum fort, es läßt auch regelmäßige Spiegelung und Brechung ohne Veränderung über sich ergehen (sofern man dabei von Absorption und Abspaltung anderer Bündel absehen darf), es ist also, rein optisch betrachtet, ein recht stabiles Gebilde und deswegen auch dem Versuch leicht zugänglich. Thermodynamisch ist es freilich von einem Gleichgewicht weit entfernt. Lassen wir es in einen von vollkommen, aber diffus spiegelnden Wänden umgebenen Hohlraum eintreten und schließen wir hinter ihm die Eintrittsöffnung, so zerfließt es allmählich zu einer alle Fortpflanzungsrichtungen gleichmäßig enthaltenden Strahlung, und befindet sich im Raume noch das kleinste Kohlestäubchen, so zerfließt es auch in spektraler Beziehung, indem sich seine Energie auf das ganze Wärmespektrum ausbreitet; es ist dann auf durchaus unumkehrbare Weise in die thermodynamisch stabile Hohlraumstrahlung verwandelt.

Für dies Elementargebilde der Strahlungstheorie, das einfarbige, geradlinig polarisierte Strahlenbündel bestimmter Länge, hat Planck zuerst die Entropie berechnet; er bedurfte dazu (hauptsächlich wegen der Beschränkung auf einen Spektralbereich) des Boltzmannschen Prinzips  $S = k \cdot \log W$ . Der Ausdruck für diese Entropie (vgl. weiter unten) steht mit dem Strahlungsgesetz in so enger Beziehung, daß beide sich gegenseitig bedingen.

Bekanntlich können nun mehrere Strahlenbündel zu einander vollständig kohärent, teilweise kohärent oder inkohärent sein; reine Interferenzerscheinungen erhält man nur zwischen ganz kohärenten Strahlen, während bei Zusammentreffen inkohärenter Strahlen sich die Intensitäten einfach addieren. Die Entwicklung der Strahlungstheorie hat es mit sich gebracht, daß man in ihr zunächst nur an inkohärente Strahlenbündel dachte. Man berechnete — und das ist durchaus einwandfrei — die Entropie eines Systems inkohärenter Strahlen, nach dem von körperlichen Systemen her gewohnten Additionstheorem der Entropie, d. h. als Summe aus den Entropien der einzelnen Strahlenbündel und konnte auf dieser Grundlage den Satz beweisen: *Zwei inkohärente, in den geometrischen Bestimmungsstücken (Ausgangsfläche, Öffnungswinkel, Länge) und im Spektralbereich übereinstimmende Strahlenbündel haben bei gegebener Gesamtenergie dann die größte Entropie, wenn ihre spezifischen Intensitäten einander gleich sind; jeder, auch unvollständige Ausgleich anfangs verschiedener Intensitäten bewirkt Entropievermehrung, ist also unumkehrbar.* Bedenkt man, daß die Temperatur der Strahlung mit der spezifischen Intensität steigt und fällt, so erkennt man in diesem Satz die Übertragung des Carnot-Clausius'schen Prinzips auf Strahlenbündel; der schon erwähnte Beweis läßt sich in der Tat genau wie für Körper von unveränderlichem Volumen aus dem Additionstheorem und der Eigenschaft der Entropie führen, daß sie als Funktion der Energie durch eine mit wachsender Energie ansteigende, aber nach unten konkave, d. h. immer langsamer ansteigende Kurve dargestellt wird<sup>1)</sup>. Daneben läßt sich leicht ein Gedankenversuch ersinnen, bei dem in

1) M. Laue, Verh. d. D. Phys. Ges. 9, 606, 1907; Anhang. Für einen Körper ist

$$\left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_V = \frac{1}{T} > 0, \quad \left(\frac{\partial^2 S}{\partial U^2}\right)_V = -\frac{1}{T^2 c_v} < 0.$$

Für ein Strahlenbündel ist entsprechend, wenn  $\mathfrak{R}$  die spezifische Intensität bedeutet:

$$\frac{\partial S}{\partial \mathfrak{R}} > 0, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial \mathfrak{R}^2} < 0.$$

Wählen wir nun zwei Wertepaare  $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2$  und  $\mathfrak{R}'_1, \mathfrak{R}'_2$ , so aus, daß  $\mathfrak{R}'_1 + \mathfrak{R}'_2 = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2$ , daß aber  $|\mathfrak{R}'_1 - \mathfrak{R}'_2| > |\mathfrak{R}_1 - \mathfrak{R}_2|$  ist, und setzen wir darüber hinaus (was unwesentlich ist) noch fest:  $\mathfrak{R}'_2 < \mathfrak{R}_2 < \mathfrak{R}'_1$ , so sieht man aus der geschilderten Form der Kurve, daß  $S(\mathfrak{R}_2) - S(\mathfrak{R}'_2) > S(\mathfrak{R}'_1) - S(\mathfrak{R}_1)$  oder auch  $S(\mathfrak{R}'_1) + S(\mathfrak{R}'_2) < S(\mathfrak{R}_1) + S(\mathfrak{R}_2)$  ist. Darin liegt der Beweis.

offensichtlich unumkehrbarer Weise der Intensitätsausgleich erfolgt<sup>1)</sup>.

Für kohärente Strahlen — wir meinen zunächst vollständig kohärente — gilt dies „Carnot-Clausiusche Prinzip“ nicht. Erzeugen wir z. B. zwei kohärente Strahlen, indem wir ein Strahlenbündel von der spezifischen Intensität  $\mathfrak{R}$  an der dünnen planparallelen Platte  $P$  in Fig. 1 spiegeln lassen; es spaltet sich dabei in ein gespiegeltes Bündel von der Intensität  $\mathfrak{R}_1 = r\mathfrak{R}$  und ein hindurchgelassenes von der Intensität  $\mathfrak{R}_2 = (1-r)\mathfrak{R}$ , und diese beiden sind kohärent. Durch die zur Platte  $P$  genau symmetrisch stehenden, vollständig reflektierenden Spiegel  $S_1$  und  $S_2$  werfen wir diese Strahlen auf eine andere Stelle der Platte  $P$  zurück, wo sie unter anderem Einfallswinkel ankommen und deswegen auch mit anderem Reflexionsvermögen  $r'$  gespiegelt werden. Dabei entstehen jetzt 4 Strahlen, die aber paarweise zu-

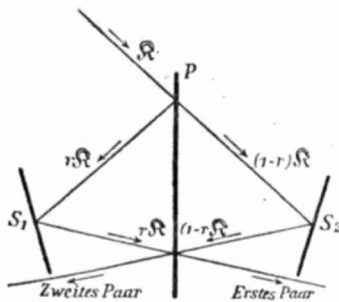


Fig. 1.

sammenfallen und sich vollständig decken. Im ersten Paar interferieren zwei Bündel von den Intensitäten  $r(1-r')\mathfrak{R}$  und  $r'(1-r)\mathfrak{R}$ ; im zweiten sind diese Intensitäten  $rr'\mathfrak{R}$  und  $(1-r)(1-r')\mathfrak{R}$ . Der Phasenunterschied für das erste Paar ist 0, für das zweite  $\pi$ ; das ist unmittelbar einleuchtend, wenn bei beiden Spiegelungen der gleiche Einfallswinkel herrscht, gilt aber auch unabhängig von dieser Bedingung und unabhängig von der Wellenlänge<sup>2)</sup>. Im ersten Paar ergibt sich so-

<sup>1)</sup> Im Mittelpunkt einer vollständig und regelmäßig spiegelnden Kugel liegt eine schwarze Kugel; alle von dieser ausgehenden Strahlen gelangen nach einmaliger Spiegelung an der äußeren Kugel zu ihr zurück. Nun öffnen wir an dieser Hülle zwei Klappen, bedecken sie aber sogleich mit einer Substanz, welche zwar Strahlen des gewünschten Spektralbereiches vollständig hindurchläßt, aber alle anderen vollständig spiegelt. Durch diese Öffnungen treten die ursprünglichen Strahlenbündel von verschiedener Intensität ein; sie werden von der schwarzen Kugel absorbiert. Gleichzeitig treten aber zwei Strahlenbündel aus, die sich von den ersteren nur dadurch unterscheiden, daß sie gleiche Intensitäten haben. Wählt man die Temperatur der schwarzen Kugel so, daß die Gesamtenergie des alten und des neuen Strahlenpaares die gleiche ist, so bewirkt der Vorgang nur, daß zwischen zwei inkohärenten Strahlenbündeln die Intensitäten bei konstanter Gesamtenergie vollständig ausgeglichen sind. Die Umkehrung dieses Vorganges gelingt nicht.  
<sup>2)</sup> M. Laue, An. d. Phys. 20, 365, 1906. Nach § 2 dort; gilt für die Phasensprünge  $\delta_r$  und  $\delta_d$  bei Spiegelung und dem Hindurchgehen unabhängig von Ein-

mit die Intensität  $\mathfrak{R}_1' = (\sqrt{r(1-r')} + \sqrt{r'(1-r)})^2 \mathfrak{R}$ , im zweiten  $\mathfrak{R}_2' = (\sqrt{rr'} - \sqrt{(1-r)(1-r')})^2 \mathfrak{R}$ . Man überzeugt sich leicht, daß die Differenz  $\mathfrak{R}_1' - \mathfrak{R}_2'$  absolut genommen größer sein kann als  $\mathfrak{R}_1 - \mathfrak{R}_2$ . Wird das Reflexionsvermögen  $r$  und  $r'$  so gewählt, daß  $r + r' = 1$  ist, so wird sogar  $\mathfrak{R}_1' = \mathfrak{R}_1$ ,  $\mathfrak{R}_2' = 0$ ; die ganze Energie wandert dann in das eine Strahlenbündel, das dem ursprünglichen in jeder Beziehung gleich wäre. Die erste Spiegelung und Brechung ist damit vollständig rückgängig gemacht, d. h. so, daß keinerlei davon herrührende Veränderung zurückgeblieben ist. Die Spiegelung und Brechung ist somit, sofern sie nicht mit Absorption verknüpft ist, ein im Sinne der Thermodynamik umkehrbarer Vorgang. Sie ermöglicht, bei zwei kohärenten Strahlen von konstanter Gesamtenergie den Intensitätsunterschied auf umkehrbare Weise nach Belieben zu vergrößern oder zu verkleinern. Dasselbe beweisen übrigens auch viele andere Versuchsanordnungen; wir wollen hier nur an das Michelsonsche Interferometer erinnern, wengleich bei dessen tatsächlicher Ausführung die planparallele Platte, welche die Spiegelungen hervorruft, meist leicht versilbert ist, also einen Teil der Strahlung absorbiert; wesentlich für die Wirksamkeit des Apparates ist das nicht. Zwischen dem Verhalten kohärenter und inkohärenter Strahlenbündel besteht also auch thermodynamisch ein schroffer Gegensatz.

Was folgt daraus für die Entropie eines Systems von zwei kohärenten Strahlenbündeln? Die Entropie eines Strahlenbündels muß sich nach wie vor aus den geometrischen Bestimmungsstücken, Lage und Größe seines Spektralbereichs und seiner spezifischen Intensität berechnen lassen; man kann dabei nicht darauf Rücksicht nehmen, ob irgendwo im Weltall noch ein dazu kohärentes Strahlenbündel vorhanden ist. Denn die Aufgabe, danach zu suchen, ist selbst für die idealen Hilfsmittel, welche die theoretische Überlegung als zur Verfügung stehend annehmen darf, in keiner endlichen Zeit zu lösen. Berechnet man aber die Entropie des Systems als Summe der Entropien der beiden Bündel, wie wir es bei inkohärenten Bündeln getan haben, so bedeutet nach dem oben Gesagten jede Vergrößerung des Intensitätsunterschiedes eine Entropieverminderung. Der in Fig. 1 geschilderte Spiegelungsversuch stellt uns also vor die Wahl: Für kohärente Strahlenbündel geben wir entweder das Additionstheorem der Entropie oder den Satz von der Zunahme der Entropie auf.

Wir wollen zunächst versuchen, die Entscheidung herbeizuführen, indem wir den auf der Unmöglichkeit des Perpetuum mobile zweiter Art fußenden Beweis des Entropieprinzips auf die

fallswinkel und Wellenlänge die Gleichung  $\delta_r - \delta_d = \pm \frac{1}{2}\pi$ . Daraus folgt, daß der Phasenunterschied für das zweite Paar  $\mp 2(\delta_r - \delta_d) = \pi$  ist; und daraus wiederum durch Berechnung der Intensitäten, daß er fürs erste Paar 0 beträgt.

fraglichen Interferenzerscheinungen übertragen. Der Satz, daß es kein Perpetuum mobile zweiter Art geben kann, ist identisch mit der Behauptung, daß in einem System wägbare Körper die Entropie nie abnimmt. Nehmen wir einmal an, wir könnten in einem System zweier kohärenter Strahlenbündel die Entropie verkleinern, so könnten wir ein Perpetuum mobile zweiter Art bauen, sowie es uns gelingt, diese Entropieverminderung auf Körper zu übertragen. Wir wir dies nun versuchen mögen, jedenfalls müssen wir dazu einmal die Strahlen, welche hinterher interferieren sollen, das andere Mal die durch Interferenz entstandenen Strahlen geringerer Entropie mit ihnen in Energieaustausch treten lassen. Das erstere ist aber notwendig mit dem Verlust der Kohärenz verbunden. An der Unmöglichkeit, nicht kohärente Strahlen zur Interferenz zu bringen, scheidet also der Versuch, das Entropieprinzip auf rein thermodynamischem Wege für Interferenzerscheinungen zu beweisen und so die verlangte Entscheidung zu treffen.

Nur die Unmöglichkeit der Interferenz inkohärenter Strahlen selbst läßt sich auf die Unmöglichkeit des Perpetuum mobile zweiter Art

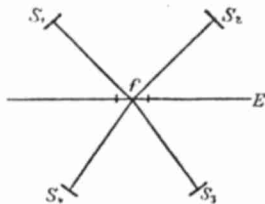


Fig. 2.

zurückführen. Wir betrachten dazu die Spiegelung und Brechung an der ebenen Grenzfläche  $E$  zweier durchsichtigen Medien (Fig. 2).  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  und  $S_4$  sollen Stücke von Oberflächen schwarzer Körper sein; ihre Lage und Größe sei derart, daß das von  $S_1$  nach dem Flächenstück  $f$  der Grenzfläche  $E$  entsandte Strahlenbündel, soweit es gespiegelt wird, von  $S_2$ , soweit es Brechung erleidet, von  $S_3$  absorbiert wird. Ebenso soll das von  $S_4$  nach  $f$  gehende Strahlenbündel von  $S_3$  und  $S_2$  absorbiert werden. Das ganze System sei von vollkommen spiegelnden Wänden umgeben, und anfangs im Temperaturgleichgewicht. Schon Clausius hat gezeigt, daß eine bestimmte Beziehung zwischen den spezifischen Intensitäten der von  $S_1$  und  $S_2$  einerseits, von  $S_3$  und  $S_4$  andererseits entsandten Strahlen zu den Brechungsindizes der beiden in  $E$  aneinandergrenzenden Körper die notwendige und hinreichende Bedingung dafür bildet, daß jede dieser vier Flächen  $S$  aus der Richtung  $f$  her ebensoviel Energie erhält, wie sie dorthin entsendet, daß also das anfängliche Temperaturgleichgewicht nicht gestört wird. In veränderter Form findet sich diese Betrachtung auch bei Planck in seinen Vorlesungen über die Theorie

der Wärmestrahlung<sup>1)</sup>. Aber dabei spielt die Inkohärenz der von den Flächen  $S$  entsandten Strahlen die Rolle einer durchaus wesentlichen Voraussetzung. Könnten hingegen die von  $S_1$  und  $S_2$  nach  $f$  gehenden Strahlen interferieren, so erhielte entweder  $S_2$  aus der Richtung von  $f$  mehr Energie, als es dorthin entsendet, und  $S_3$  dementsprechend weniger, oder umgekehrt; welcher dieser Fälle einträte, und wie groß diese Unterschiede wären, hinge von der offenbar rein zufälligen Phasendifferenz ab, die bei der Interferenz herrschte, so daß eine bestimmte Aussage überhaupt unmöglich wäre. Auf jeden Fall aber würde das Temperaturgleichgewicht zwischen den schwarzen Körpern, zu deren Oberflächen  $S_2$  und  $S_3$  gehören, ohne sonstige Veränderung gestört — und damit wäre das Perpetuum mobile zweiter Art fertig.

Die eigentliche Thermodynamik läßt uns also bei der Entscheidung zwischen Additionstheorem und Entropieprinzip im Stich, und so müssen wir die Statistik zu Hilfe holen. Fragen wir, in welcher Form wir sie auf Strahlenbündel anzuwenden haben.

Der erste Schritt zur Beantwortung dieser Frage besteht in der Abzählung der Freiheitsgrade eines Strahlenbündels. Wir haben dies oben als eine vierfach unendliche Mannigfaltigkeit von Strahlen definiert, indem wir uns der Ausdrucksweise der geometrischen Optik bedienen. Die Wellenoptik lehrt aber bekanntlich, daß benachbarte Strahlen nicht unabhängig voneinander bestehen. So bedeutet es denn auch keinen inneren Widerspruch, wenn wir dieser unendlichen Mannigfaltigkeit nur eine endliche Zahl von Freiheitsgraden zuschreiben.

Im Unterschiede zu dem einen schmalen, aber endlichen Spektralbereich ausfüllenden Strahlenbündel wollen wir jetzt für den Augenblick eine Schwingung betrachten, die sich in jedem Punkte als reine Sinusschwingung von der Schwingungszahl  $\nu$  darstellt; ihre Wellenlänge ist dann  $\lambda = \frac{c}{\nu}$ . Eine derartige Strahlung denken wir uns etwa von einer kreisförmig begrenzten Linse zur Konvergenz auf dem Flächenstück  $f$  in der Brennebene der Linse gebracht. Bekanntlich kann man dabei nicht beliebig kleine Strecken in der Brennebene abbilden, sondern der kleinste Abstand zweier Bildpunkte, die wahrnehmbar verschieden beleuchtet sind, ist, wenn  $\theta$  der Winkel ist, unter welchem der Durchmesser der Linse von einem Punkte auf  $f$  gesehen wird, von der Größenordnung  $\frac{\lambda}{\theta}$ . Die kleinste, unabhängig von ihrer Umgebung beleuchtete Fläche ist somit von der Größenordnung  $\frac{\lambda^2}{\theta^2}$ , oder, da  $\Omega = \pi \theta^2$  der räumliche

1) § 36 und 37.



Winkel des Konvergenzkegels ist, gleich  $\frac{1}{\delta} \frac{\lambda^2}{\Omega}$  wobei  $\delta$  eine von der Wellenlänge unabhängige, der Größenordnung nach von 1 jedenfalls nicht verschiedene, reine Zahl bedeutet. Die im ganzen bestrahlte Fläche  $f$  setzt sich mithin aus

$$f = \frac{1}{\delta} \frac{\lambda^2}{\Omega} = \frac{\delta \nu^2 f \Omega}{c^2}$$

unabhängig von einander bestrahlten „Elementarflächen“ zusammen. Diese Zahl gibt offenbar an, wieviel Freiheitsgrade man bei der Beleuchtung der Fläche  $f$  mit einer aus dem räumlichen Winkel  $\Omega$  senkrecht auf sie fallenden streng einfarbigen Strahlung hat.

Nun kehren wir zu dem endlichen Spektralbereich zurück, dem wir in der Skala der Schwingungszahlen die Breite  $d\nu$  zuschreiben. Wäre nur eine Elementarfläche beleuchtet, so könnte man den Schwingungszustand auf ihr für die Zeit  $T$ , welche das Strahlenbündel dauert, durch eine Fouriersche Reihe

$$\varphi(t) = \sum C_n \cos\left(2\pi \frac{n}{T} t - \theta_n\right)$$

( $n$  durchläuft die Reihe der positiven ganzen Zahlen) darstellen, wobei aber nur die Schwingungszahlen  $\frac{n}{T}$  auftreten dürfen, die den Ungleichungen  $\nu < \frac{n}{T} < \nu + d\nu$  genügen. Deren

Anzahl beträgt  $Td\nu = \frac{l\nu}{c} d\nu$ , wenn  $l = cT$  die Länge des Strahlenbündels bedeutet. Für die jetzt in Rede stehende Schwingung wäre also dies die Zahl der Freiheitsgrade.

Nehmen wir schließlich eine spektrale Breite und eine Mehrzahl von „Elementarflächen“ an, so haben wir offenbar die beiden bisher für Freiheitsgrade abgeleiteten Zahlen zu multiplizieren, um die Zahl der Freiheitsgrade für ein Strahlenbündel von der spektralen Breite  $d\nu$  und der Länge  $l$  zu finden, das die Fläche  $f$  aus dem körperlichen Winkel  $\Omega$  senkrecht bestrahlt; sie beträgt, wenn wir sogleich das Ergebnis einer eingehenderen mathematischen Untersuchung, daß  $\delta = 1$  ist<sup>1)</sup>, hinzunehmen

$$\frac{\nu^2 f l \Omega d\nu}{c^3}$$

Der Leser wird wohl schon selbst bemerkt haben, daß diese drei Abzählungen nicht vollkommen genau sind. Sie sind nur dann gute Näherungen, wenn die hingeschriebenen Zahlen so groß sind, daß eine Vermehrung oder Verminderung um ein paar Einheiten nichts ausmacht.

Jeder dieser Freiheitsgrade kann Sinusschwingungen von der Schwingungszahl  $\nu$  ausführen; die geringen, von der spektralen Breite  $d\nu$  herrührenden Unterschiede spielen für die Statistik weiterhin keine Rolle. Wie man die Statistik auf sie anzuwenden hat, mag noch

nicht endgültig entschieden sein; jedenfalls gelangt man zum Planckschen Strahlungsgesetz, wenn man voraussetzt, daß jeder Freiheitsgrad an Energie nur ganz Vielfache des Quantums  $h\nu$  aufnehmen kann<sup>1)</sup>. Die statistische Betrachtung, auf die man dann geführt wird, findet sich z. B. in der ersten Auflage von Plancks Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung, § 148, vorgebildet. Geht man von der so berechneten Wahrscheinlichkeit  $W$  des Strahlenbündels mittels des Boltzmannschen Prinzips  $S = k \cdot \log W$  sogleich zu seiner Entropie über, so findet man in Übereinstimmung mit Planck<sup>2)</sup> für sie:

$$S = \frac{k \nu^2 f l \Omega}{c^3} \left\{ \left( l + \frac{c^2 \mathfrak{I}}{h\nu^2} \right) \log \left( l + \frac{c^2 \mathfrak{I}}{h\nu^2} \right) - \frac{c^2 \mathfrak{I}}{h\nu^2} \log \frac{c^2 \mathfrak{I}}{h\nu^2} \right\} d\nu$$

wobei  $\mathfrak{I}$ , wie früher, die spezifische Intensität bedeutet.

Doch diese Formel und ihre Ableitung ist für uns hier nicht die Hauptsache; es kam uns nur darauf an, anschaulich zu machen, daß man statistische Betrachtungen unmittelbar auf Strahlenbündel anwenden kann. Jetzt wenden wir uns zu der Frage, wie sich für diese Statistik kohärente und inkohärente Strahlenbündel unterscheiden.

Haben wir zwei in den geometrischen Bestimmungsstücken und im Spektralbereich völlig übereinstimmende Strahlenbündel, so werden, falls sie inkohärent sind, in entsprechenden Elementarstücken ihrer Brennflächen noch ganz verschiedene, voneinander unabhängige Schwingungen herrschen. Infolgedessen ist die Zahl von Möglichkeiten, die für das erste Bündel verfügbare Energie über dessen Freiheitsgrade zu verteilen, unabhängig von dem im zweiten herrschenden Verteilungszustand, ja unabhängig von dessen Vorhandensein; diese Zahl aber ist die Wahrscheinlichkeit  $W_1$ . Ebenso berechnet sich die Wahrscheinlichkeit  $W_2$  ohne Rücksicht auf das erste Bündel. Die Zahl der verschiedenen möglichen Energieverteilungen über beide Bündel, bei denen aber jedes Bündel im Ganzen gerade seine vorgegebene Energie erhält, ist demnach das Produkt  $W_1 \cdot W_2$ . Nach der Beziehung  $S = k \cdot \log W$  folgt hieraus  $S = S_1 + S_2$ , d. h. das Additionstheorem der Entropie, das wir schon oben für inkohärente Strahlenbündel angenommen haben. Und zwar bleibt diese Überlegung auch dann noch richtig, wenn die oben angedeutete Form der Statistik, die auf dem Energieelement  $h\nu$  fußt, durch eine andere ersetzt wird.

Sind die beiden Strahlenbündel aber vollständig kohärent, so vollführen entsprechende Freiheitsgrade in ihnen genau die gleichen Schwingungen, die sich nur noch durch einen vom In-

<sup>1)</sup> Eine neuere Untersuchung von Rubinowicz führt diese Annahme auf die Sommerfeld-Epsteinsche Quantenbedingungen zurück (Phys. Z., S. 18, 96, 1917).

<sup>2)</sup> Plancks Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung, Formel 278 der zweiten Auflage.

<sup>1)</sup> M. Laue, Ann. d. Phys. 44, 1197, 1914.

tensitätsverhältnis der beiden Bündel abhängigen Amplitudenfaktor voneinander unterscheiden. Wie man in diesem Fall statistisch zu rechnen hat, scheint mir noch eine offene Frage; jedenfalls läßt sich die Statistik des Systems aus beiden nicht so ansetzen, daß man dabei beide als unabhängig betrachtet; hier gilt nicht  $W = W_1 \cdot W_2$ . Das Additionstheorem der Entropie gilt also nicht für kohärente Strahlenbündel. Damit ist die oben gestellte Frage zu Ungunsten des Additionstheorems gelöst; nichts hindert mehr, das Prinzip der Zunahme der Entropie auch für Interferenzerscheinungen gelten zu lassen. Da es sonst sich als ausnahmslos gültig erwiesen hat, werden wir jetzt selbstverständlich diese Übertragung unbedingt vollziehen.

Auf Grund dieses Prinzips aber müssen wir schließen, daß die in Fig. 1 geschilderte umkehrbare Verwandlung eines Strahlenbündels in zwei kohärente wie jeder umkehrbare Vorgang die Entropie unverändert läßt, daß also die Entropie zweier kohärenten Bündel einfach gleich der Entropie des einen Bündels ist, aus dem sie entstanden sind. Die Intensität  $\mathfrak{R}$  des letzteren ist die Summe aus den Intensitäten  $\mathfrak{R}_1$  und  $\mathfrak{R}_2$  der ersteren. Bezeichnet man daher die Entropie eines Bündels, um die Abhängigkeit von der spez. Intensität  $\mathfrak{R}$  zu kennzeichnen, mit  $S(\mathfrak{R})$ , so ist die Entropie von zwei vollständig kohärenten Bündeln gleich  $S(\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2)$  und die von drei, vier, usw. vollständig kohärenten Bündeln gleich  $S(\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_3 + \dots)$ . Das letztere beweist man, indem man nacheinander je zwei durch Spiegelung und Brechung wie in Fig. 1 vereinigt, bis nur ein Bündel übrig ist. Verlieren zwei Strahlenbündel ihre Kohärenz, so ist das demnach ein unumkehrbarer Vorgang; denn nach der schon auf Seite 208 erwähnten Eigenschaft der Funktion  $S(\mathfrak{R})$ , mit wachsendem  $\mathfrak{R}$  immer zu wachsen, aber in immer geringerem Maße, folgt die Ungleichung  $S(\mathfrak{R}_1) + S(\mathfrak{R}_2) > S(\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2)$ , auf deren rechten Seite die Entropie der ursprünglichen kohärenten Bündel, auf deren linken Seite aber die Entropie derselben, nun inkohärent gewordenen Bündel auftritt.<sup>1)</sup>

Zum Schluß seien noch ein paar Andeutungen über teilweise kohärente Strahlenbündel gestattet. Da sie den Übergang zwischen Kohärenz und Inkohärenz stetig vermitteln, so kann schon bei ihnen das Additionstheorem der Entropie nicht mehr gelten. Dennoch läßt sich auch bei ihnen die Gesamtentropie angeben. Man braucht dazu zunächst eine meßbare, die Kohärenz bestimmende Größe, die zusammen mit den Intensitäten erst ein System aus zwei solchen Bündeln vollständig bestimmt. Es läßt sich ein solches in der Tat aus Interferenzversuchen zwischen den Bündeln ableiten. Die Entropie ist eine Funktion der Intensitäten und dieses Kohärenzmaßes.

<sup>1)</sup> Diese Ungleichung ergibt sich unmittelbar aus Anm. 1 zu Seite 208, wenn man dort  $\mathfrak{R}'_2 = 0$  setzt.

Wie diese Abhängigkeit ist, das lehrt der Satz: *Man kann jedes System von zwei teilweise kohärenten Strahlen durch Spiegelung und Brechung auf umkehrbare Weise in zwei inkohärente Strahlen verwandeln<sup>1)</sup>*. Die Entropie jenes Systems ist also gleich der Summe der Entropien der beiden letzteren Bündel, und da deren Intensitäten abhängig sind von den Intensitäten und dem Kohärenzmaß der ursprünglichen Strahlen, erhält man somit die gesuchte Entropie auch als Funktion des Kohärenzmaßes. Dieser Satz bleibt richtig, wenn die Kohärenz eine vollständige ist; nur wird dann die Intensität des einen der inkohärenten Bündel gleich Null, und damit kommen wir auf das obige zurück. Ein entsprechender Satz gilt für drei und vermutlich auch für mehr teilweise kohärente Strahlenbündel. Die weitere Ausführung dieser Betrachtungen würde aber den Raum dieses Aufsatzes überschreiten.

Zusammenfassend können wir sagen: Die Entropie des einzelnen Strahlenbündels ist unabhängig davon, ob ein zu ihm kohärentes vorhanden ist oder nicht. Die Entropie eines Systems von inkohärenten Strahlenbündeln setzt sich additiv aus den Entropien der einzelnen Bündel zusammen. Bei einem System vollständig kohärenter Strahlenbündel ist sie hingegen so zu berechnen, daß man die spezifischen Intensitäten addiert und die Summe in die Entropiefunktion einsetzt.

In der Thermodynamik der Körper wird das Additionstheorem allgemein anerkannt und es ist dort aufs Engste mit der Definition der Entropie verflochten: Für verschiedene Körper wird es als besondere Definition eingeführt (Vergleiche z. B. Planck's Vorlesungen über Thermodynamik § 131: „Endlich bezeichnen wir die Summe der Entropien mehrerer Körper kurz als die Entropie des Systems aller Körper.“); nur so läßt sich der Satz der Summe der Entropien zum Satz von der Zunahme der Entropie umformen. Für die Teile eines homogenen Körpers aber liegt es schon in der Definitionsgleichung der Entropie  $dS = (dU + pdV)/T$ , da sich die Energien und die Volumina der Teile additiv zur Gesamtenergie  $U$  und zum Gesamtvolumen  $V$  zusammenfügen. Im Sinne der Statistik liegt die Berechtigung des Additionstheorems einzig und allein darin, daß es bei den Körpern nichts der Kohärenz entsprechendes gibt. Es gibt eben keinen Naturvorgang, der zwischen den molekularen Bewegungen in zwei nicht zu kleinen Körpern einen einigermaßen innigen Zusammenhang herstellt. Aber diese Beschränkung auf nicht zu kleine Körper ist durchaus notwendig. In zwei benachbarten Körperstücken, die nur wenige Atome umfassen, wird im Allgemeinen ein solcher Zusammenhang herrschen; in diesem Fall das Additionstheorem anzuwenden, wäre sicher nicht zulässig. Das ist natürlich kein Einwand gegen

<sup>1)</sup> M. Laue, Ann. d. Phys. 23, 1, 1917.