DIE NATURWISSENSCHAFTEN

Herausgegeben von

Dr. Arnold Berliner und Prof. Dr. August Pütter

Sechster Jahrgang. 8. Februar 1918. Heft 6.

Die neueren Ergebnisse der theoretischen Physik und ihre Beziehungen zur Mathematik.

Von Dr. P. Riebesell, Hamburg.

1. *Die Physik als vierdimensionale Geometrie.*

Während von altersher Mathematik und Physik in engster Beziehung zueinander gestanden haben, ist neuerdings durch die Ergebnisse der Relativitätstheorie geradezu eine Vereinigung beider herbeigeführt. Bereits nach dem ersten Ausbau der speziellen Relativitätstheorie behauptete *Minkowski*, daß Raum und Zeit keine selbständige Existenz mehr besäßen und nur eine Union beider Selbständigkeit bewahre, und jetzt ist *Einstein* zu dem Schluß gekommen, daß dem Raum und der Zeit jede physikalische Gegenständlichkeit zu nehmen sei[1]).

Zu einer widerspruchslosen Darstellung der Physik gelangt man nach den neueren Anschauungen nur, wenn man im Anschluß an *Riemann* die Welt als eine vierdimensionale Mannigfaltigkeit ansieht. Von jedem Ereignis werden unsern Sinnen vier Zahlen übermittelt durch die quantitativ verschiedenen Eindrücke unserer Sinnesorgane. Die Vierzahl erklärt sich vermutlich durch die Dreizahl der Bogengänge, die die räumliche Richtung übermitteln, und durch die eindimensionalen Empfindungen der Schnecke, die vielleicht als Zeitorgan anzusprechen ist. Wie dem auch sei, jedenfalls ist die Verschiedenheit der Raum- und Zeitkoordinaten lediglich durch die Sinneswahrnehmung veranlaßt; in der Physik erscheint die Zeit, wenn sie richtig aufgefaßt wird, als völlig gleichberechtigt neben den Raumkoordinaten. Daß der Raum selbst dann wieder als dreidimensional und euklidisch aufgefaßt wird, ist ebenfalls lediglich Sache der Gewöhnung und der Einfachheit. Einen absoluten Raum gibt es nicht, ebensowenig eine absolute Zeit. Eigenschaften besitzt der Raum auch nicht, allein die Dinge in ihm verleihen ihm eine Struktur. Erst die Befreiung von den althergebrachten Einschränkungen macht die Physik widerspruchsfrei.

Auf diese Weise erscheint die spezielle Relativitätstheorie als der Ausdruck für die Relativität jeder zeitlichen Richtung. Ebenso wie ein geometrisches Gebilde unverändert bleibt, wenn ich es von den verschiedensten räumlichen Richtungen aus betrachte, so wird ein physikalisches Gebilde, d. h. ein Naturvorgang, dadurch nicht beeinflußt, daß der Beobachter eine beliebige geradlinige Translation ausführt. In der vierdimensionalen Geometrie, d. h. in der Physik, ist der Übergang von einer Geschwindigkeit auf eine andere dem Übergang von einer räumlichen Richtung auf eine andere vollkommen äquivalent.

Wie aber die geometrische Welt nicht nur verschiedenen Richtungen gegenüber invariant ist, sondern auch bei abwickelbaren Deformationen ihre Eigenschaften bewahrt, vorausgesetzt, daß ich für die Betrachtung die jeder Deformation angepaßten Gaußschen Koordinaten für die Beschreibung der Eigenschaften benutze, so bleibt auch die physikalische Welt beliebigen Deformationen in zeitlicher Richtung gegenüber invariant, d. h. bei ganz beliebigen Bewegungen ändern sich die Naturgesetze nicht, vorausgesetzt, daß ich vierdimensionale Gaußsche Koordinaten benutze und für das Linienelement die allgemeine Riemannsche Gleichung anwende. Dabei ändert sich der Abstand zweier Ereignisse, wie in der Raumgeometrie der Abstand zweier Punkte, je nach dem Raumzeitkrümmungsmaß des betreffenden Weltelementes, ebenso wie in der dreidimensionalen Geometrie nach dem Krümmungsmaß des Raumes. Das Raumzeitkrümmungsmaß ist von Ort zu Ort und von Zeit zu Zeit, d. h. von Weltpunkt zu Weltpunkt, veränderlich und wird durch die Massen oder besser Energien bestimmt, die die Welt erfüllen.

Dabei wird die Welt als kontinuierliche Mannigfaltigkeit aufgefaßt. Bereits *Riemann* hat hervorgehoben, daß bei einer solchen das Prinzip der Maßverhältnisse nicht durch den Raum selbst, sondern von außen her gegeben sein müsse. *Einstein* hat diese äußere Beeinflussung durch seine Vereinigung von Mathematik und Physik geklärt. Allerdings verläßt seine Physik den bisher als real angesehenen Boden der euklidischen Geometrie und der absoluten Zeit, aber, wer der Sache auf den Grund geht, erkennt, daß die bisherigen Grundlagen mit einer voraussetzungslosen Naturerkenntnis wenig zu tun haben. Starre Bezugskörper gibt es jetzt nicht mehr, ebensowenig feste Maßverhältnisse oder bestimmte Uhrenregulierung. Die durch die Gaußschen Koordinaten gebildeten nichtstarren Bezugskörper ändern sich mit Ort und Zeit, sie werden von *Einstein* jetzt als „Bezugsmollusken" bezeichnet. Alle sind für die Darstellung der Naturgesetze gleichwertig.

Als einzige Konstante bleibt die Lichtgeschwindigkeit, die aber auch wieder von den Gravitationsfeldern abhängig ist. Inwiefern diese

[1]) Wegen der näheren Begründung muß auf das am Schluß gegebene Literaturverzeichnis, insbesondere auf die in dieser Zeitschrift bereits erschienenen Arbeiten, verwiesen werden.

universelle Konstante mit den Grundlagen unserer Zeit- und Raummessung zusammenhängt, ist noch ungeklärt. Wahrscheinlich ist, daß sie in einer Beziehung steht zu dem Gesamtkrümmungsmaß des Raumes, der nach einer neueren Untersuchung *Einsteins*, abgesehen von den zeitlichen und örtlichen Veränderungen, die die Verteilung der Massen hervorrufen, sich als sphärischer Raum darstellen läßt. Von den Astronomen ist bereits vor längerer Zeit *Harzer* für diese Auffassung eingetreten, und die Beziehungen, die früher von *Varičak* und von dem Verfasser dieser Arbeit zwischen der speziellen Relativitätstheorie und der nichteuklidischen Geometrie aufgestellt sind, lassen eine derartige Auslegung zu. Ist allerdings, wie die Quantentheorie glauben machen will, der Raum diskontinuierlich, so verlieren die Einsteinschen Untersuchungen ihre Gültigkeit. Dann müßte das Wesen der Maßbestimmung aus der Lichtgeschwindigkeit und der Planckschen Konstanten hergeleitet werden können.

2. *Vererbungserscheinungen.*

Zu einer weiteren Verallgemeinerung kommt man, wenn man die *Zeitkoordinate* näher betrachtet.

Wirken auf einen Körper im Laufe der Zeit mehrere Kräfte ein, so nimmt man im allgemeinen an, daß für den Endzustand nur der vorhergehende Zustand und die zuletzt wirkende Ursache maßgebend ist. Eine Wirkung der Ursachen in zeitlicher Ferne hält man wie die körperliche Fernwirkung für ausgeschlossen. *Laplace* hat ja bekanntlich diese Auffassung dahin definiert, daß ein Geist, dem alle Kräfte in der Welt bekannt wären, aus einem gegebenen Zustand die gegenwärtigen und vergangenen Zustände der Welt ableiten könnte. Diesem Ideal entspricht denn auch die klassische Mechanik. Mathematisch ausgedrückt heißt das: *alle Naturgesetze müssen durch Differentialgleichungen ausdrückbar sein*, und zwar zunächst durch Differentialgleichungen zweiter Ordnung, da die Kräfte durch die ersten und zweiten Differentialquotienten dargestellt werden.

Diesen Anschauungen scheint auch die Funktionentheorie angepaßt zu sein. Ist $y = f(x)$ als eine Funktion einer unabhängigen Veränderlichen gegeben, so ist nach dem Taylorschen Satz:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x) \cdot h + f''(x) \cdot \frac{h^2}{2!} + \cdots$$

Das heißt, die Funktion an der Stelle $x + h$ ist, abgesehen von den Stetigkeits- und Konvergenzverhältnissen, bestimmt durch die Funktion an der Stelle x und die sämtlichen Differentialquotienten an eben dieser Stelle. Wenn wir bedenken, daß $f(x)$ eine ganz beliebige Funktion darstellt, so ergibt sich das scheinbar widerspruchsvolle Resultat, daß der fernere Verlauf bis zur endlichen Entfernung h durch die gewissermaßen mikroskopische Struktur der Differentialquotienten an einer andern Stelle bestimmt ist. Wir werden im letzten Teil dieser Arbeit auf diese Eigentümlichkeit zurückkommen.

Ein Zweifel daran, daß diese Betrachtungen zutreffend sind, ist in der klassischen Mechanik niemals aufgetreten. Alle Naturgesetze galten als Differentialgleichungen, und zwar traten meist die Raumkoordinaten als abhängig von der Zeitkoordinate auf. Ist nun aber der Zustand eines Systems nicht nur von den äußeren Kräften und dem gegenwärtigen Zustand abhängig, sondern auch von früheren Lagen des Systems, so habe ich die Zeit selbst wieder als ein Kontinuum aufzufassen, und wir erhalten Funktionen, die von unendlich vielen Unbekannten abhängen. Analytisch läßt sich eine solche Funktion folgendermaßen definieren:

Bei einem einfachen Integral $\int_a^x f(t)\, dt$ ist dieses eine Funktion der Grenze x. Die Grenze selbst wird durch Punkte dargestellt. Bei dem Doppelintegral $\int_a^x \int_b^y f(t, t')\, dt\, dt'$ ist die Grenze eine Linie, beim dreifachen Integral wäre sie durch eine Fläche dargestellt usw. Bei mehrfachen Integralen treten also mehrdimensionale Räume als Grenzen auf. Das Integral erscheint somit als eine Funktion, die von allen Werten einer andern Funktion abhängt. Im speziellen Fall der zweiten Dimension ergeben sich auf diese Weise die *Funktionen einer Linie*, die *Volterra* in die Mathematik eingeführt hat. Als geometrisches Beispiel sei die Größe einer Fläche genannt, die von der sie umgebenden Kurve abhängt. Physikalisch wäre beispielsweise die Kraft zu nennen, die eine vom Strom durchflossene Drahtkurve auf einen Magneten ausübt. Aber auch bei allen Nachwirkungs- oder Vererbungsproblemen (elastische Nachwirkung, Hysteresis) spielen diese Funktionen eine Rolle.

Betrachten wir z. B. die elastischen Erscheinungen, so gilt für sie das Hookesche Gesetz, nach dem die Deformationen δ den Spannungen s proportional sind, nicht exakt. Entlaste ich beispielsweise einen gespannten Draht, so kehrt er erst langsam in die Ruhelage zurück. Ebenso läßt das Gewicht, welches erforderlich ist, einen Faden bis zu einer bestimmten Länge zu dehnen, mit der Zeit an Größe nach, und drittens ist bei wiederholten Dehnungen die anzuwendende Kraft von den bereits vorher dem System aufgeprägt gewesenen Zuständen abhängig. Wir haben es hier mit den sogenannten *Vererbungserscheinungen* zu tun, die durchaus im Widerstreit mit der Laplaceschen Auffassung stehen. Der zukünftige Zustand des Systems hängt bei ihnen nicht nur von dem gegenwärtigen Zustand und den äußeren Kräften ab, sondern die gesamte Vorgeschichte des Systems ist für den Verlauf maßgebend. Es ist klar, daß *diese Naturerscheinungen nicht durch Differentialgleichungen darstellbar* sind. Es läßt sich auf sie auch nicht der Taylorsche Satz mit einer endlichen Anzahl von Veränderlichen anwenden. Es versagen alle Methoden, die gewöhnlich für die Ermittlung physikalischer Gesetze angewandt werden; denn wenn ich etwa, wie dies sonst geschieht, die Deformation als Potenzreihe mit unbestimmten Koeffizienten der Potenzen der Spannung ansetze und durch Experimente die Konstanten zu bestimmen suche, so lasse ich dabei die Vererbungserscheinungen außer Acht.

Eine analytische Formulierung dieser Gesetze wird nun aber auf folgende Weise erhalten: Ist δ die Deformation und s die Spannung, so müßte unter Berücksichtigung der Nachwirkung $\delta = a \cdot s + v$ sein, wo v von allen früheren Werten von s abhängt. Fasse ich s als Funktion der Zeit auf, so ist v von allen Werten dieser Funktion abhängig. Um dann eine Darstellung von v zu erhalten, teile ich die Wirkungszeit t in die n Teile $t_1, t_2, \ldots t_n$. Ich kann dann die Funktionen $t_1 \cdot s_1,\ t_2 \cdot s_2, \ldots$ nach dem Taylorschen Satz entwickeln und erhalte so den Ausdruck

$$\sum_i t_i s_i D_i + \frac{1}{2!} \sum_i t_i s_i \sum_k t_k s_k D_{ik} + \cdots,$$

wo mit D die betreffenden Differentialausdrücke der Taylorentwicklung bezeichnet sind. Gehe ich zur Grenze über, indem ich die Intervalle t unendlich klein und die Anzahl der Intervalle unendlich groß nehme, so liefern die Summen Integrale von immer höherer Ordnungszahl. So wird schließlich

$$v = \int_{t_0}^{t} s(\alpha)\, v(t, \alpha)\, d\alpha + \frac{1}{2!} \int_{t_0}^{t} d\alpha_1 \int_{t_0}^{t} d\alpha_2\, s(\alpha_1)\, s(\alpha_2)\, v(t, \alpha_1, \alpha_2) + \cdots$$

die als eine verallgemeinerte Taylorsche Entwicklung bezeichnet werden kann. Damit verwandelt sich das Hookesche Gesetz in eine Integralgleichung. Berücksichtige ich nur die Glieder erster Ordnung, so wird

$$\delta(t) = a \cdot s(t) + \int_{t_0}^{t} s(\alpha)\, v(t, \alpha)\, d\alpha.$$

Die durch diese Gleichung wiedergegebene Art der Vererbung wird als lineare Vererbung bezeichnet. Dabei ist die Vererbung von $-\infty$ bis t_0 außer Acht gelassen. $v(t, \alpha)$ ist der Vererbungskoeffizient, er stellt die Deformation dar, die zur Zeit t durch die Einheit der Spannung während des Zeitintervalls $d\alpha$ verursacht wird. Die Lösung der Integralgleichungen, um $s(t)$ oder $v(t)$ zu bestimmen, ist von *Volterra* auf die Lösung eines Systems von unendlich vielen Gleichungen ersten Grades mit unendlich vielen Unbekannten zurückgeführt.

Im Prinzip scheinen nun, wie man sieht, die reinen Integralgleichungen der Form der Naturgesetze keine neue Art hinzuzufügen, da auch die Differentialgleichungen in der Form von Integralgleichungen geschrieben werden können. Anders wird dies aber in unserem Beispiel der Elastizitätslehre, wenn man von statischen Fragen zu dynamischen übergeht. Ich muß dann die Spannung s ersetzen durch $s - \frac{\partial^2 \delta(t)}{\partial t^2}$ und erhalte die Integraldifferentialgleichung

$$\delta(t) = a\left[s(t) - \frac{\partial^2 \delta(t)}{\partial t^2}\right] + \int_{t_0}^{t} \left[s(\alpha) - \frac{\partial^2 \delta(\alpha)}{\partial \alpha^2}\right] v(t, \alpha)\, d\alpha.$$

Bei den meisten dieser Integraldifferentialgleichungen lassen sich die Ableitungen nicht mehr durch Integration wegschaffen, wir haben also einen neuen Typus von Naturgesetzen vor uns. Auch ihre Lösung vollzieht sich, wie die der reinen Integralgleichungen, durch den Übergang von einer endlichen Anzahl diskreter Veränderlicher zum Kontinuum und stellt somit eine neue Art dieses bereits den Anfangsgründen der Infinitesimalrechnung eigentümlichen Übergangs dar. *Die Bedeutung der Gleichungen für die Naturwissenschaft liegt darin, daß sie bei allen Vorgängen Anwendung finden müssen, wo neben den äußeren Kräften innere am Werke sind.* Betrachte ich z. B. die organische Natur als erzwungene Entwicklung, etwa nach der Anschauung *Lamarcks*, indem die Entwicklung lediglich durch äußere Kräfte bedingt ist, so würde der Laplacesche Geist die Entwicklung mit Hilfe seiner Differentialgleichungen übersehen können. Sind aber noch andere Kräfte ausschlaggebend — und das biogenetische Grundgesetz sowie die Vererbungsgesetze lassen diese Vermutung als sicher erscheinen —, so sind Integraldifferentialgleichungen nötig und mit ihnen der Übergang zu einer unendlichen Anzahl von Veränderlichen oder zum Kontinuum, über dessen Berechtigung der letzte Abschnitt handeln soll.

3. *Das Kontinuum.*

Ein eigenartiger Zwiespalt besteht zwischen den Physikern und Mathematikern, wenn man auf das Wesen der Mannigfaltigkeit, die beide als Welt bezeichnen, eingeht. Erstere nehmen eine diskrete Mannigfaltigkeit, letztere eine kontinuierliche an. Schon lange hatte die theoretische Physik mit Molekülen, Atomen, Elektronen gearbeitet, bis neuerdings auch die experimentelle Physik die Existenz dieser Gebilde zweifelsfrei nachwies. Die zahlreichen Bestimmungen der Loschmidtschen Zahl aus den verschiedensten Gebieten der Physik (Gastheorie, Brownsche Bewegung, Strahlungsgesetze, Röntgenstrahlen, Radioaktivität) und ihr übereinstimmendes Ergebnis haben die Lehre von den Atomen aus dem Stadium der Theorie in das der Tatsachen hinübergeleitet. Und die Beziehungen, die zwischen Masse und Energie gefunden sind, haben dazu geführt, die Korpuskulartheorie auch auf die Energie zu übertragen und so zur Quantentheorie Veranlassung gegeben.

Untersuchen wir nun einmal, welche Folgerungen diese physikalischen Theorien für den Mathematiker mit sich bringen, der bisher gewohnt war, die Stetigkeit und Differenzierbarkeit seiner Funktionen und Kurven vorauszusetzen, ja der den Übergang vom Diskontinuierlichen zum Kontinuierlichen der ganzen höheren Mathematik zugrunde legte.

Sei es, daß man den Begriff des Differentialquotienten arithmetisch oder geometrisch oder physikalisch einführt, immer nimmt man an, daß der Übergang zur Grenze von einem kleinen, aber endlichen Stück zum unendlich kleinen möglich ist. Daß sich hier schon bei der geometrischen Methode Schwierigkeiten bieten, sehen wir sofort, wenn wir mit Kreide eine Kurve zeichnen und nun mit immer stärkeren Vergrößerungen an sie herangehen, um in jedem Punkt die Tangente zu bestimmen. Daß die Stetigkeit nicht immer die Differenzierbarkeit der Kurven zur Folge hat, wissen die Mathematiker seit langem, und daß auch die Stetigkeit der Kurven eine unzulässige Beschränkung ist, zeigen die Kurven, die in der Praxis vorkommen. Im allgemeinen kann man sagen: Die Kurven, die keine Tangente besitzen, bilden die Regel, die bisher als normal betrachteten die Ausnahme.

Die mathematischen Betrachtungen, die sich an diese Frage anschlossen, schienen zunächst rein theoretische Bedeutung zu haben, während ihnen nach der Korpuskulartheorie ein eminent praktischer Wert beizumessen ist. Betrachten wir z. B. die Kurven, die bei der Brownschen Bewegung von den kleinen Teilchen beschrieben werden. Sobald die gleichmäßige Energieverteilung hergestellt ist, muß die kinetische Energie eines Teilchens gleich der eines Moleküls sein, es ist also

$$\frac{M \cdot V^2}{2} = \frac{m \cdot v^2}{2},$$

d. h. die Geschwindigkeit eines Teilchens

$$V = v \cdot \sqrt{\frac{m}{M}}.$$

Ist das Verhältnis der Massen nun etwa 10^{10}, so wäre

$$V = 10^{-5} \cdot v,$$

beim Wasserstoff als v etwa 2 cm in der Sekunde. Diese große Geschwindigkeit ist unter dem kleinen Gesichtsfeld des Mikroskops natürlich nicht zu beobachten, in Wirklichkeit finden ja auch in der Sekunde etwa 10^9 Zusammenstöße der Moleküle untereinander statt, und, da das Teilchen bedeutend größer ist als ein Molekül, werden zwischen diesem und den Molekülen noch viel mehr Stöße vorkommen. Es ist also unmöglich, die wahre Bahn des Teilchens aufzuzeichnen, sie ist eine Zickzacklinie, deren geradlinige Teilstrecken viel kleiner sind als der Durchmesser des Teilchens. Es sind dies Kurven ohne Tangenten und Differentialquotienten. Gehe ich zu unendlich vielen Stößen über, so erhalte ich Kurven, bei denen gleichsam die Diskontinuität kontinuierlich wird. Natürlich hört die Anwendbarkeit des Taylorschen Satzes auf, aber solange die Anzahl der Unstetigkeitspunkte eine abzählbare Menge darstellt, sind sie nach *Borel* als „quasianalytische" Funktionen einer analytischen Darstellung fähig.

Dieselben Betrachtungen lassen sich auch auf solche Eigenschaften der Körper übertragen, von denen man im allgemeinen annimmt, daß sie einen stetigen Verlauf haben. Betrachten wir z. B. die Dichte der Luft in einem bestimmten Punkte. Nehmen wir eine Kugel von der Masse m und dem Volumen v, so ist die Dichte als $m : v$ definiert. Diese Dichte kann ich nur als die *mittlere* Dichte bezeichnen; denn wenn sich unsere Kugel zwischen zwei Molekülen befindet, so ist die Dichte Null, und in den Fällen, in denen die Kugel ganz oder teilweise mit einem Molekül zusammenfällt, nimmt die Dichte Werte an, die von dem Radius der gedachten Kugel abhängen. Lasse ich die Kugel immer kleiner und kleiner werden, so ist im allgemeinen die Dichte Null, und nur in den seltenen Fällen, in denen der Punkt mit dem Kern eines Moleküles zusammenfällt, nimmt die Dichte den Wert Unendlich an. Von einer Stetigkeit kann also keine Rede sein, im Gegenteil, es sind unendlich viele singuläre Punkte bei der Funktion vorhanden, sie schwankt zwischen den Werten Null und Unendlich. Somit würde das Universum als eine diskontinuierliche Mannigfaltigkeit erscheinen, ob von unendlicher oder endlicher Größe, sei dahingestellt. Die Maßverhältnisse müßten durch die Größe der Energieatome bestimmt sein, und die universellen Konstanten: Plancksche Konstante, Loschmidtsche Zahl, Lichtgeschwindigkeit, Krümmungsmaß des Raumes müßten auf eine zurückgeführt werden können. Bis dahin ist aber noch ein weiter Weg, nicht nur in der Physik, sondern auch in der Mathematik, da letztere erst anfängt, ihre Methoden den diskontinuierlichen Vorgängen anzupassen. Mit der üblichen Infinitesimalrechnung kommt man nicht aus. Vorläufig müssen wir uns daher begnügen, die Naturgesetze als Gesetze des durchschnittlichen Verhaltens, als statistische Gesetze, anzusehen, wofür die statistische Mechanik mit der Heranziehung der Wahrscheinlichkeitsrechnung das Vorbild gegeben hat.

Läßt man die Diskontinuität gelten, so wird man es in der Mathematik mit einer großen Zahl von Funktionen einer Veränderlichen zu tun haben, die der Zahl der Moleküle entspricht. Der Übergang zu einer unendlichen Anzahl solcher und damit zu den Funktionen von Funktionen, wie wir ihn im 2. Abschnitt bei den Integraldifferentialgleichungen ausgeführt haben, ist nicht mehr zulässig. Die Zahl der Moleküle darf nicht als unendlich groß betrachtet werden, und somit, wie das bisher geschah, die Molekulartheorie nicht vollständig aus der Mathematik ausgeschaltet werden.

Eine andere Frage ist die, *ob es überhaupt einen Zweck für den Menschen hat, die statistischen Gesetze in exakte zu verwandeln.* Die Probleme, um die es sich hierbei handelt, hat *Borel* an einem Beispiel erläutert: Der Begriff des Ellipsoids soll auf mehrdimensionale Räume erweitert und eine analytische Gleichung eines solchen Ellipsoids hingeschrieben werden. Die Zahl der Achsen soll durch die Loschmidtsche Zahl gegeben sein. Natürlich ist es für einen Menschen unmöglich, die Gleichung überhaupt hinzuschreiben, geschweige denn sie zu untersuchen. Der Mensch wird sich eine Vorstellung von den Gesetzen, die über derartige Ellipsoide gelten, nur machen können, wenn von den Achsen selbst wieder bestimmte Bedingungen ausgesagt werden können, etwa daß sie sich nicht wesentlich voneinander unterscheiden oder in bestimmter Gesetzmäßigkeit aufeinanderfolgen. D. h. der Mensch wird bemüht sein, die zahlreichen Veränderlichen auf eine geringere Anzahl zurückzuführen oder eine Formel abzuleiten, die den wahrscheinlichsten Zustand oder Mittelzustand sämtlicher Ellipsoide wiedergibt.

Eine derartige Betrachtung läßt sich z. B. bei den Gasgesetzen anstellen. Die Zahl der Zusammenstöße eines Moleküls in der Sekunde ist von der Größenordnung 10^9, die der Gesamtzahl der Moleküle im Kubikzentimeter von der Größenordnung 10^{18}. Die Funktion, welche die Geschwindigkeitsverteilung in dem betreffenden Raum wiedergibt, wird also eine unstetige Funktion sein, die, wenn sie als Funktion der Zeit aufgetragen wird, eine Treppenkurve ist, bei der in dem Abszissenraum von 1 Sekunde 10^{27} Stufen aufeinander folgen. Die Physiker untersuchen nun aber nur den Gesamtverlauf dieser Kurve, von dem das Gesetz gilt, daß der Logarithmus der Geschwindigkeitsverteilung der Entropie proportional ist.

Diese Fragen hängen unmittelbar mit den neueren Untersuchungen der Psychophysik zusammen: *Vermag der Mensch mit seinen Sinnen überhaupt eine kontinuierliche Mannigfaltigkeit wahrzunehmen oder sind auch unsere Empfindungsreihen sprunghaft?* Das Webersche Gesetz scheint für letztere Auffassung zu sprechen. Zwei Empfindungen können als gleich erscheinen, wenn auch die Reize voneinander verschieden sind. Kann ich eine Belastung meiner Hand mit 10 g und eine solche mit 11 g nicht voneinander unterscheiden, ebenso nicht 11 g und 12 g, so würde bei der Anwendung der gewöhnlichen Schlußweise der Analysis die Folgerung gezogen werden müssen, daß überhaupt alle Empfindungen einander gleich sind, was ja offenbar widersinnig ist. Die einfachste Erklärung ist die, daß einer stetigen Reihe von Reizen eine unstetige Reihe von Empfindungen entspricht. Dabei sind aber die Stellen, an denen Sprünge stattfinden, nicht festen Stellen der Reizskala zugeordnet, sondern Funktionen des Ausgangspunkts und der übrigen Teile der Vorgeschichte. Wir haben es also hier mit Funktionen zu tun, die die Eigenschaften der im 2. und in diesem Kapitel besprochenen vereinigen. Einem Einzelreiz entspricht nicht jedesmal dieselbe Einzelempfindung, die Empfindungskurve darf nicht als gewöhnliche Treppenkurve mit aufeinanderfolgenden Stufen gelten, sondern sie besteht aus lauter geradlinigen Stufen, die aber übereinandergreifen, so daß gleichen Reizen mehrere Empfindungen entsprechen und umgekehrt gleichen Empfindungen verschiedene Reize entsprechen können, je nach dem Ausgangspunkt der Kurve. Es können daher auch diskontinuierliche Reizreihen kontinuierlich wirken, wie ja das kinematographische Sehen zur Genüge zeigt. Die Sprünge in der Kurve sind dabei nicht nur von den absoluten Werten der vorhergehenden Reize abhängig, sondern auch von der Richtung und der Geschwindigkeit, mit der die Änderung vor sich geht, wir werden also zu recht komplizierten Integraldifferentialgleichungen geführt. Hierbei gilt wie in der Physik der Satz, daß ein System nur einer endlichen Anzahl von untereinander verschiedenen Zuständen fähig ist. Es geht sprungweise aus dem einen dieser Zustände in einen anderen über, ohne durch eine stetige Reihe von Zwischenzuständen hindurchzugehen.

Das alte Wort „natura non facit saltus“ scheint in der organischen wie in der anorganischen Natur gründlich widerlegt. Aufgabe der Mathematik ist es, ihr Rüstzeug den neuen Forderungen der Naturwissenschaft in praktischer Form zur Verfügung zu stellen.

Literatur.

1. *E. Borel*, Introduction géométrique à quelques théories physiques. Paris 1914.

2. *A. Einstein* und *M. Großmann*, Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie, Leipzig 1913.

3. *A. Einstein*, Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie. Braunschweig 1917.

4. *A. Einstein*, Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie. (Akademie der Wissenschaften, Berlin 1917.)

5. *E. Freundlich*, Die Grundlagen der Einsteinschen Gravitationstheorie. Berlin 1916, oder „Naturwissenschaften“ 1916.

6. *Th. v. Karman*, Das Gedächtnis der Materie. („Naturwissenschaften“ 1916.)

7. *K. Koffka*, Probleme der experimentellen Psychologie. („Naturwissenschaften“ 1917.)

8. *J. Perrin*, Die Atome. Dresden 1914.

9. *P. Riebesell*, Über die geometrischen Deutungen der Relativitätstheorie. (Mitteilungen der Math. Gesellschaft in Hamburg, 1914.)

10. *P. Riebesell*, Die Beweise für die Relativitätstheorie. („Naturwissenschaften“ 1916.)

11. *M. Schlick*, Raum und Zeit in der gegenwärtigen Physik. Berlin 1917, oder „Naturwissenschaften“ 1917.

12. *V. Varičak*, Bemerkungen zur Relativtheorie. (Akademie der Wissenschaften, Agram 1914.)

13. *V. Volterra*, Drei Vorlesungen über neuere Fortschritte der mathematischen Physik. (Archiv der Mathematik und Physik, 1914.)