

## Werk

**Titel:** Ueber die Elastizität der Erde

**Autor:** Schweydar, W.

**Ort:** Berlin

**Jahr:** 1917

**PURL:** [https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?34557155X\\_0005|log466](https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?34557155X_0005|log466)

## Kontakt/Contact

[Digizeitschriften e.V.](#)  
SUB Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen

✉ [info@digizeitschriften.de](mailto:info@digizeitschriften.de)

# DIE NATURWISSENSCHAFTEN

Herausgegeben von

Dr. Arnold Berliner und Prof. Dr. August Pütter

Fünfter Jahrgang.

21. September 1917.

Heft 38.

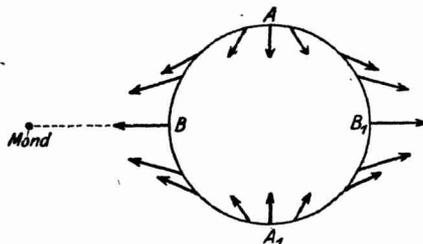
## Über die Elastizität der Erde.

Von Prof. Dr. W. Schweydar, Potsdam.

Der allgemeine physikalische Zustand des Innern der Erde kann auf die Weise exakt erforscht werden, daß man festzustellen versucht, wie sich die Erde als Ganzes nach außen verhält, d. h. wie sie die Körper an verschiedenen Stellen ihrer Oberfläche anzieht, wie sie den Lauf des Mondes beeinflußt und wie gegebene kosmische und innere Kräfte die Oberflächenteile gegeneinander bewegen und die Lage der Drehachse verändern. Diese Kräfte bilden gewissermaßen die Versuchskräfte des Geophysikers. Unter ihnen nimmt die Flutkraft des Mondes eine hervorragende Stellung ein.

### 1. Definition der Flutkraft.

Die Erde als Ganzes betrachtet hat infolge der Anziehungskraft des Mondes das Bestreben, gegen den Mond hin sich zu bewegen, d. h. jeder ihrer Teile erhält gegen den Mond hin eine gleich große und gleich gerichtete Beschleunigung, die der Beschleunigung im Erdschwerpunkt gleich ist. Von der hier herrschenden sogenannten mittleren Anziehung ist jedoch die unmittelbare Anziehung verschieden, die der Mond auf irgendeinen anderen Erdpunkt ausübt. Die Differenz beider Kräfte erteilt dem Erdpunkt eine Beschleunigung relativ zur Erde und erscheint uns daher als eine selbständige Kraft, die wir Flutkraft nennen. Um ihre Größe und Richtung an irgend einem Erdpunkt zu finden, haben wir in ihm die mittlere Anziehung von der unmittelbaren abzuziehen. Wir erhalten auf diese Weise die folgende<sup>1)</sup> Figur,



Die Flutkraft des Mondes.

in der die Pfeile die Richtung und Größe der Kraft andeuten. Die Flutkraft hat eine vertikale und horizontale Komponente und ist im Vergleich zur Schwerkraft der Erde sehr klein. Bezeichnet  $g$  die Beschleunigung

der letzteren, so beträgt die maximale horizontale Komponente rund  $\frac{g}{12 \text{ Millionen}}$ ; sie kehrt etwa alle 6 Stunden ihre Richtung um.

### 2. Einfluß der Flutkraft auf die feste und flüssige Erde.

Das Wasser der Meere vermag der horizontalen Komponente keinen Widerstand zu bieten und kommt ins Fließen, so daß die Erscheinung der Ebbe und Flut entsteht. Lord Kelvin hat zuerst die Frage aufgeworfen, ob auch die feste Erde dieser kleinen Kraft nachgibt, und ob der Betrag zu messen ist. Es ist klar, daß durch eine derartige Messung entschieden werden kann, ob sich das Erdinnere bei Beanspruchung durch Kräfte von der Periode der Gezeitenkraft wie ein starrer oder wie ein flüssiger Körper verhält. Lord Kelvin stellte folgende Überlegung an: Ist das Innere der Erde eine feurige Flüssigkeit, wie die Geologen glaubten, so würde es bedeutenden Fluten unterworfen sein; die dünne Erdrinde müßte dem inneren Gezeitendruck völlig nachgeben, und ihre Oberfläche würde wie die einer Flüssigkeit an der Flutbewegung teilnehmen. Die Gezeiten des Ozeans, die wir an den Küsten beobachten, bestehen in einer relativen Bewegung des Wassers zum Lande. Würde also die Oberfläche der Erdrinde Ebbe und Flut wie eine Flüssigkeit haben, so würden wir kein Steigen und Fallen des Meeresspiegels relativ zur Küste wahrnehmen. Kelvin schloß aus dem tatsächlichen Vorhandensein der Meeresgezeiten, daß das Erdinnere fest ist oder sehr unvollkommen den Gezeitenkräften nachgibt. Bei dieser Schlußfolgerung ist freilich vorausgesetzt, daß die Flutbewegung des Meeres und des flüssigen Erdinnern nach

#### der statischen Theorie

erfolgt, die mit Rücksicht auf das Verständnis der späteren Ausführungen kurz skizziert sei: Die Flutkraft gibt der Flüssigkeit das Streben, von dem größten Kreis der Erde, auf dem alle die Orte liegen, für die der Mond gerade auf- oder untergeht (in der obigen Zeichnung steht dieser Kreis senkrecht auf der Papierebene und geht durch  $A$  und  $A_1$  hindurch), weg nach  $B$  und  $B_1$  zu fließen, wo der Mond gerade im Zenit bzw. im Nadir steht. Sehen wir von der Rotation der Erde und von der Mondbewegung ab oder setzen wir beide als sehr langsam voraus, so wird das Fließen der Flüssigkeit so lange dauern, bis die Wirkung der Flutkraft gleich ist dem Streben der Schwere, die Flüssigkeit in ihre alte Lage zurückzuführen. Ist dies erreicht, so ist die Ober-

<sup>1)</sup> G. H. Darwin, Ebbe und Flut. Leipzig 1902.

fläche im neuen Gleichgewicht und hat die Figur eines Umdrehungselipsoides angenommen, dessen große Achse nach dem Mond gerichtet ist; das Niveau ist in den Punkten  $B$  und  $B_1$  erhöht, in  $A$  und  $A_1$  erniedrigt. Die statische oder Gleichgewichtstheorie der Gezeiten nimmt nun an, daß das Wasser der Meere hinreichend Zeit hat, die Gleichgewichtsform anzunehmen, bevor der Mond seine Stellung am Himmel merklich geändert hat. Dieser Theorie steht gegenüber die

*dynamische Gezeitentheorie,*

die die Trägheit des Wassers berücksichtigt und zeigt, daß die Gezeitenbewegung der relativ flachen Meere der Erde von dem statischen Ergebnis völlig abweicht, d. h. daß bei der tatsächlichen Drehgeschwindigkeit der Erde die Gleichgewichtsform niemals erreicht werden kann. Sie erklärt die Tatsache, daß an bestimmten Stellen Hochwasser eintritt, wo die Gleichgewichtstheorie Niedrigwasser fordert (Umkehrung der Gezeiten). Erst wenn die Tiefe der Meere 22 000 m überschritten, würde überall Hoch- bzw. Niedrigwasser eintreten, wo die Flutkraft solches herzustellen sucht.

*Statische Deformation der Hauptmasse der Erde.*

Wir betrachten jetzt eine kugelförmige Masse von planetarischer Größe, die völlig aus Flüssigkeit oder aus elastisch-festem Material besteht. Denken wir uns auf diese Kugel ein Kraftsystem, das über die Oberfläche ebenso verteilt ist, wie die Flutkraft, momentan wie einen großen Impuls wirken, so wird die Masse in sogenannte freie Schwingungen versetzt derart, daß sie abwechselnd die Gestalt eines abgeplatteten und verlängerten Umdrehungselipsoides, durch die Kugelform als Ruhelage hindurchgehend, annimmt (sphäroidale Schwingungen vom Gezeitentypus). Man kann berechnen, daß die Periode dieser Schwingungen bei einer Kugel von der Größe und Dichte der Erde etwa 1½ Stunden, wenn sie ganz aus Flüssigkeit bestände, und 55 Minuten betragen würde, wenn sie die Widerstandskraft des Stahles gegen Formänderungen hätte. Da nun die Flutkräfte eine Periode von 12 und 24 Stunden haben, so würde die Erde, wenn ihre Hauptmasse flüssig oder fest elastisch wäre, bei der Gezeitendeformation hinreichend Zeit finden, die Gleichgewichtsform anzunehmen, d. h. die Gezeiten eines flüssigen oder fest elastischen Erdinneren würden statisch sein. Da dies bei den flachen Meeren der Erde nicht der Fall ist, so würden wir demnach unter Umständen sogar eine vergrößerte Ebbe und Flut der Ozeane beobachten, wenn das Erdinnere flüssig wäre.

*Zerlegung der Flutkraft.*

Die Größe und Richtung der Flutkraft an einem Orte der Erde hängt von der Stellung des Mondes am Himmelsgewölbe ab. Diese ändert sich wegen der Drehung der Erde um ihre Achse und des Laufs des Mondes in seiner Bahn, deren Lage

ebenfalls Veränderungen unterworfen ist, so daß die Flutkraft einen sehr komplizierten zeitlichen Verlauf haben muß. Der Mathematiker bringt dadurch Klarheit in dieses verwickelte Bild, daß er die Flutkraft durch eine Summe von gleichzeitig wirkenden Partialkräften darstellt, von denen jede eine einfache harmonische Funktion der Zeit (d. h. ein Sinus oder Cosinus eines mit der Zeit sich proportional ändernden Winkels) ist. Zur strengen Darstellung der Flutkraft gehört freilich eine unendlich große Zahl solcher Einzelkräfte; da aber ihre Beträge eine Reihe mit sehr rasch abnehmenden Gliedern bilden, so genügt eine kleine Anzahl, um eine in der Praxis und in der Theorie genügende Annäherung an die Wahrheit zu erlangen, wodurch die Berechnung der Flutkraft sehr vereinfacht wird. Jede Einzelkraft bedingt auf dem Meere eine einfache Flutwelle von der Periode der Kraft, die sich alle zu einer komplizierten Wellenbewegung zusammensetzen. Man kann umgekehrt aus dem tatsächlichen Verlauf der Gezeiten, wie ihn die Aufzeichnungen eines registrierenden Pegels ergeben, nach den Vorschriften der harmonischen Analyse die Höhe der Partialfluten, die bestimmten Partialflutkräften entsprechen, ableiten. Ist die feste Erde elastisch oder ihr Inneres flüssig, so wird auch sie (im ersteren Fall nur ein wenig) der Flutkraft nachgeben, und zwar wird jeder Partialflut des Meeres eine periodische Deformation (elastische Partialflut) von derselben Periode entsprechen.

*3. Bestimmung der Elastizität aus den Gezeiten des Meeres.*

Der Gedanke liegt nahe, die Höhe der Partialfluten des Meeres unter der einfachen Annahme, daß die Erde völlig starr ist, zu berechnen und das theoretische Ergebnis mit den aus den Registrierungen der Pegel abgeleiteten Höhen zu vergleichen. Der Unterschied zwischen der tatsächlichen und der theoretischen Höhe wird einen Rückschluß auf die Anteilnahme der festen Erde an der Flutbewegung und den Grad ihrer Elastizität gestatten.

Die Partialkräfte weisen bezüglich ihrer Perioden drei Typen auf; die Perioden des ersten Typus betragen sehr nahe 12 Stunden, die des zweiten sehr nahe 24 Stunden und die des dritten etwa 14 und 28 Tage. Bestände die Flutkraft nur aus den letzteren, so würden die Gezeiten des Meeres in kleinen Schwankungen des Wasserstandes von 14 und 28 Tagen (in mittleren Breiten würden die Niveaudifferenzen 12 bzw. 6 cm betragen) bestehen.

Für die Beurteilung der Elastizität der Erde können die bedeutend größeren Meeresfluten, die auf die Kräfte des ersten und zweiten Typus zurückzuführen sind, leider nicht verwendet werden. Wegen ihrer kurzen Periode müßte die Berechnung ihrer Höhe nach dynamischen Gesichtspunkten durchgeführt werden, wo-

bei die notwendige Berücksichtigung der Gestalt und wechselnden Tiefe der Meere zu vorläufig noch unüberwindlichen Schwierigkeiten führen würde.

Lord Kelvin schlug vor, die 14-tägige Flut heranzuziehen, in der freilich auch nicht ganz sicheren Annahme, daß diese Partialflut wegen der längeren Periode ihre Gleichgewichtshöhe erreicht und somit leicht für eine völlig starre Erde theoretisch berechnet werden kann. Die Pegelaufzeichnungen werden im Vergleich zu dieser theoretischen Höhe desto geringere Werte ergeben, je größer die entsprechende elastische Flut der Erdrinde und des Erdinnern ist, da die elastischen Gezeiten nach den obigen Bemerkungen mit großer Annäherung statisch aufzufassen sind. Das Verhältnis der tatsächlichen Höhe zur Gleichgewichtshöhe wird ein Maß der Elastizität der Erde sein und ein Mittel geben, die Konstante der Gestaltelastizität oder Starrheit (Widerstand gegen Formänderung) zu finden.

Unter der sehr ungenauen Voraussetzung, daß die Erde homogen ist, berechnete Lord Kelvin in seiner berühmten Abhandlung über die Starrheit der Erde, daß die Meeresfluten nur  $\frac{2}{3}$  ihrer Gleichgewichtshöhe betragen würden, wenn die Erde eine Kugel aus Stahl wäre, und  $\frac{2}{5}$ , wenn sie die Starrheit des Glases hätte.

*Der Wert der Elastizität nach den Meereszeiten.*

G. H. Darwin<sup>1)</sup> hat den Lord Kelvinschen Gedanken praktisch durchgeführt und aus den Wasserstandsmessungen in 33 Häfen die Höhen der 14-tägigen und monatlichen Mondflut abgeleitet. Er fand, daß sie nur etwa  $\frac{2}{3}$  ihrer Gleichgewichtshöhen betragen, und schloß hieraus entsprechend der Kelvinschen Theorie, daß die Erde die Starrheit des Stahles besitzt. Trotz mancherlei Bedenken, die Darwin später selbst geäußert hat, war das Resultat von höchster Bedeutung für die Geophysik; es zeigt, daß die Erde bei Beanspruchung durch Gezeitenkräfte sich wie ein fester, mit geringer Gestaltelastizität ausgestatteter Körper verhält. Das Innere der Erde hat demnach nicht die Eigenschaften, die Flüssigkeiten charakteristisch sind.

Mit Hilfe eines bedeutend umfangreicheren Beobachtungsmaterials, das 194 Jahre umfaßte und auf 47 Häfen verteilt war, hat Schweydar<sup>2)</sup> für den Verkleinerungsfaktor der 14-tägigen Mondflut 0,626 und für den der monatlichen Flut 0,605 gefunden. Aus diesem Ergebnis hat er, indem er die Kelvinsche Theorie durch Berücksichtigung der Dichtezunahme im Erdinnern erweiterte, für die Konstante der Starrheit der Erde  $6,1 \times 10^{11}$  Dynen oder 6200 in

technischen Einheiten (mm, kg), also einen etwas kleineren Wert als Stahl (etwa  $8 \times 10^{11}$  Dynen) hat, berechnet.

*Anwendung der Elastizitätstheorie.*

Dieser Ableitung liegt wie bei Lord Kelvin und den neueren Rechnungen, über die unten berichtet ist, die Annahme zugrunde, daß die Erde einen unendlich großen Widerstand gegen Volumenänderungen besitzt, d. h., daß sie inkompressibel ist. Die Zuhilfenahme der mathematischen Elastizitätstheorie setzt voraus, daß die Anfangsspannung des Körpers klein ist und das Hookesche Gesetz von der Proportionalität der Verzerrung und Spannung gilt. Ein Körper, der unter der gegenseitigen Gravitation seiner Teile im Gleichgewicht ist, befindet sich in einem Zustand der Spannung; diese kann ungeheuer groß sein, wenn der Körper groß ist. Ein solcher Körper ist die Erde; sie muß daher bei der Berechnung ihrer Deformation durch Flutkräfte als im Zustand so hoher Anfangsspannung angesehen werden, daß das Gesetz der Superposition der Spannungen nicht ohne weiteres gilt. Die Annahme liegt nahe, daß sich die Erde trotzdem wie ein elastischer Körper verhält, jedoch mit größerer Starrheit als im gravitationslosen Zustand. Lord Rayleigh schlug vor, die mathematische Rechnung so durchzuführen, daß man zwei Spannungssysteme in der Erde annimmt, einen hydrostatischen Druck, der der Gravitation im ungestörten Zustand das Gleichgewicht hält, und eine kleine Zusatzspannung, die durch die kleine Gezeiten- deformation hervorgerufen wird. Die Zusatzspannung ist dann durch die Verzerrung, gemessen vom gespannten Gleichgewichtszustand aus, nach der gewöhnlichen Elastizitätstheorie zu bestimmen. Die Rechnung gestattet die Berücksichtigung der Inhomogenität und auch eine Variation der Starrheit im Erdinnern, wenn man die Erde als inkompressibel annimmt, wodurch kein großer Fehler in der Bestimmung der Starrheitskonstante begangen wird, wie Love<sup>3)</sup> gezeigt hat. Die Berücksichtigung der Zunahme der Dichte in der Erde ist aber bei weitem wichtiger für die Beurteilung der Starrheit als die der Kompressibilität.

Die Kelvinsche Methode der Bestimmung der Elastizität der Erde ist unsicher, weil es nicht erwiesen ist, ob die benutzten Partialfluten des Meeres statisch sind.

#### 4. Bestimmung der Elastizität aus der Lotbewegung.

Eine andere Methode ist folgende. Wie schon erwähnt, sind die elastischen Fluten der Erde statisch aufzufassen; die feste Erde wird in jedem Augenblick zu einem Umdrehungsellipsoid deformiert, dessen große Achse nach dem Monde gerichtet ist. Die horizontale Komponente der Flutkraft

<sup>1)</sup> In *Treatise on Natural Philosophy* von Thomson und Tait, 2. Aufl.

<sup>2)</sup> W. Schweydar, Ein Beitrag zur Bestimmung des Starrheitskoeffizienten der Erde. Gerlands Beiträge zur Geophysik IX (1907).

<sup>3)</sup> A. E. H. Love, *Some problems of geodynamics*. Cambridge 1911.

beträgt im Maximum  $\frac{1}{11,7 \text{ Mill.}}$  der Schwerkraft. Um denselben Bruchteil der Länge des Aufhängefadens wird die Kugel eines Lotes innerhalb der Dauer der halben Periode der Flutkraft aus ihrer Ruhelage abgelenkt, und zwar wird sie in jedem Augenblick in der Richtung auf den Punkt hingezogen, in dem der Mond im Zenit bzw. im Nadir steht.

Wie die Flutkraft einen komplizierten zeitlichen Verlauf hat, so wird die Lotkugel eine überaus komplizierte Bahn beschreiben, deren Form und Größe mit dem Beobachtungsort wechselt. Ähnlich wie bei den Gezeiten des Meeres kann man diese verwinkelte Kurve zusammensetzen aus vielen — streng genommen unendlich vielen — einfachen Schwingungen des Lotes, deren Perioden sich nach den oben erwähnten drei Typen der Partialkräfte gruppieren und deren Amplituden eine Reihe mit sehr rasch abnehmenden Gliedern bilden. Jede Schwingung hat die Form der Ellipse und ist durch die ihrer Periode entsprechende Partialflutkraft hervorgerufen zu denken.

Bei völliger Starrheit der Erde müßte die Pendelbewegung relativ zu einer mit der Erde fest verbundenen Marke genau die Größe haben, die sich aus der Flutkraft berechnet. Abgesehen von diesem direkten Einfluß der Kraft zeigt das Pendel aber auch dann einen Ausschlag gegen die feste Marke, wenn die Normale der Erdoberfläche infolge einer Deformation der Erde ihre Richtung ändert, d. h. wenn das Pendelgestell sich neigt. Diese scheinbare Bewegung des Pendels ist der unter dem direkten Einfluß der Flutkraft entgegen gerichtet, so daß die Pendelbewegung auf der elastischen Erde kleiner sein muß als auf der absolut starren Erde. Die Oberfläche der nachgiebigen Erde hat das Bestreben, sich senkrecht zu der neuen (gestörten) Richtung der Schwere einzustellen, was wegen der geringen Elastizität zwar unvollkommen gelingen kann, aber die Pendelbewegung verkleinert. Würde die Erde der Kraft wie eine Flüssigkeit vollkommen nachgeben können, d. h., würde die Normale ihrer Oberfläche stets mit der Richtung der Schwere zusammenfallen, so würden wir an dem Pendel überhaupt keine Bewegung wahrnehmen können.

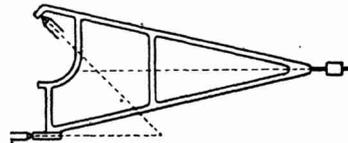
Ist  $A_B$  die gemessene Amplitude der Schwingung unter dem Einfluß einer bestimmten Partialflutkraft, die auf der absolut starren Erde die Amplitude  $A_T$  erzeugen würde, so ist  $\alpha = \frac{A_B}{A_T}$  ein Maß der Elastizität der Erde. Ist die Erde flüssig, so ist  $\alpha = 0$ , während  $\alpha$  den Wert 1 erreicht, wenn die Erde vollkommen starr ist.

#### Messung der Lotbewegung.

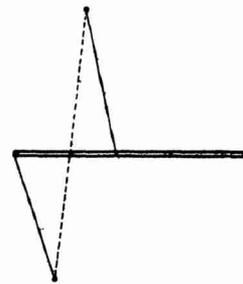
Die Verwendung gewöhnlicher Pendel für diese Messungen hat keine Aussicht auf Erfolg; die Spitze eines z. B. 10 Meter langen Pendels würde schon bei absoluter Starrheit der Erde

in der Zeit von etwa 6 Stunden die sehr kleine Verschiebung von rund 0,001 mm erfahren. Im Winkelmaß beträgt die maximale ganze Amplitude der ganzen Lotschwingung 0,0034, die der halbtägigen Hauptschwingung für unsere Breiten in Ost-West 0,0021 und in Nord-Süd 0,0016.

E. von Rebeur-Paschwitz glückte zuerst die Messung der Lotbewegung mit einem Horizontalpendel. Bei diesem, von Hengler beschriebenen und durch Zöllner bekannt gewordenen Instrument ist die Drehachse nahezu vertikal gestellt, so daß der Pendelkörper wie ein Türflügel in einer gegen die Horizontale wenig geneigten Ebene schwingt. Zum näheren Verständnis denke man sich bei einer Tür den Flügel durch ein leichtes, etwa 80 g wiegendes Metallstück von Dreiecks- oder T-Form und die Angeln durch feine Stahlspitzen ersetzt, auf denen das Metallstück mittels Achatlagern ruht. Die Spitzen sind an kleinen Zylindern angeschliffen, deren Achsen sich unterhalb des Schwerpunkts des Metallstücks schneiden, wodurch eine gleichmäßige Belastung der Spitzen erzielt wird. In neuerer Zeit verwendet man statt dieser von Rebeurschen Form die Zöllnersche Einrichtung, bei der ein leichtes Rohr von etwa 25 cm Länge durch zwei sehr dünne Drähte nahezu horizontal gehalten wird, die an dem Rohr angreifend oberhalb und unterhalb des Rohres an einem festen Gestell befestigt sind. Die Verbindungslinie der Befestigungspunkte ist die Drehachse.



von Rebeursche Aufhängung auf Spitzen.



Zöllnersche Aufhängung auf Drähten.

Der Apparat ist außerordentlich empfindlich gegen Neigungsänderungen seiner Achse. Hat diese z. B. eine Neigung von 2' gegen die Vertikale, so wird sich das Pendel um 17" drehen, wenn sich die Achse um 0,01 senkrecht zu der Vertikalebene, die die Ruhelage des Pendels enthält, neigt. Diese Winkel-drehung wird durch photographische Registrierung noch bedeutend vergrößert. Man bringt an

dem Pendelkörper einen kleinen Spiegel an, der mittels einer Linse das Bild eines beleuchteten Spaltes auf einer z. B.  $3\frac{1}{2}$  Meter entfernten Walze entwirft, um die Bromsilberpapier gespannt ist. Bei jeder Drehung des Pendels verschiebt sich das Bild auf der Walze, die durch ein Uhrwerk gedreht wird, und zeichnet durch Schwärzung der Bromsilberschicht seinen Weg an. Bei dem soeben angeführten Beispiel wird sich das Spaltbild um etwa 0,5 mm verschoben, so daß diese verhältnismäßig einfache Einrichtung ein Vertikalpendel von 10 000 Meter Länge ersetzt. Freilich ist es wegen mannigfacher Fehlerquellen nicht immer möglich, den Apparat so empfindlich zu gestalten. Das Geodätische Institut in Potsdam besitzt einen Apparat mit zwei senkrecht zueinander orientierten Horizontalpendeln Zöllnerscher Konstruktion, der in einem Bergwerk in Freiberg i. S. in 189 Meter Tiefe aufgestellt ist. Bei dieser guten von Störungen nahezu freien Aufstellung konnte Verfasser die Empfindlichkeit so weit steigern, daß bei 3 Meter Registrierabstand einer Neigungsänderung der Drehachse von 0,01 eine Verschiebung des Spaltbildes auf der Walze von 1 mm entspricht und der Einfluß der Flutkraft auf das Pendel mit bloßem Auge auf dem Registrierbogen zu erkennen ist.

Aus den registrierten Kurven der Bewegung zweier senkrecht zu einander stehender Horizontalpendel können ähnlich wie bei den Wasserstandsmessungen die Partialschwingungen des Lotes, die den Partialflutkräften entsprechen, abgeleitet werden. Diese Analyse erstreckte sich bis in die neueste Zeit hinein bezüglich des Mondeinflusses nur auf die nahezu halbtägige Hauptschwingung, die alle übrigen Partialschwingungen an Größe überragt und bei der Art der Aufstellung der Apparate allein Aussicht auf genauere Bestimmung hatte.

#### Der Wert der Elastizität nach der Lotbewegung.

Mit Hilfe dieser Ergebnisse hat Schweydar unter den obigen Gesichtspunkten und unter Berücksichtigung der Dichtezunahme im Erdinnern die Konstante der Starrheit der Erde abgeleitet und übereinstimmend mit dem aus den Meeressfluten folgenden Wert  $8,3 \times 10^{14}$  Dynen gefunden.

Hierbei ist eine Schwierigkeit zu erwähnen. Nach den obigen Ausführungen zeigt uns das Pendel die Neigungsänderungen der deformierten Erdoberfläche relativ zu der sich gleichzeitig ändernden Richtung der Schwere. Diese ändert sich aber nicht nur wegen des direkten Einflusses der Flutkraft, sondern sekundär auch deshalb, weil die Erde eine neue Gestalt angenommen hat. Man müßte also die Größe der Deformation schon kennen, wenn man die Beobachtungen von den Schwankungen der Schwererichtung befreien wollte, um auf die Bewegung der festen Erde zu schließen. Man muß daher theoretisch eine Beziehung zwischen

der Gestaltsänderung und der sekundären Störung der Schwere aufstellen, wozu Voraussetzungen über die Art der Dichte- und Elastizitätsverteilung in der Erde erforderlich sind. Diese Schwierigkeit besteht auch bei der Kelvin'schen Methode, da die sekundäre Störung der Schwererichtung infolge der Deformation der festen Erde die Gleichgewichtshöhe der Fluten des Meeres beeinflußt. Das Pendel allein vermag also nicht die Größe der elastischen Fluten direkt ohne gewisse theoretische Voraussetzungen zu messen.

#### Messung der Höhe der elastischen Gezeiten.

Das ist möglich<sup>1)</sup>, wenn man einen Apparat zu Hilfe nimmt, der die sehr kleinen Änderungen der Intensität der Schwerkraft mißt, welche die vertikale Komponente der Flutkraft zur Folge hat. Für eine absolut starre Erde beträgt die maximale Variation der Schwere 0,000 164 cm oder  $1,7 \times 10^{-7}$  der Schwere selbst; die sekundäre Störung der Schwerkraft infolge der elastischen Deformation vergrößert diesen Betrag ein wenig. Derartige Messungen werden sich auf absolute Änderungen beziehen und die relativen Angaben eines Pendels ergänzen. Das von A. von Schmidt<sup>2)</sup> im Prinzip angegebene Trifilargravimeter kann bei sehr genau konstanter Temperatur empfindlich genug gestaltet werden, um die Schwereänderungen zu registrieren. Schweydar hat mit einem derartigen Instrument, dem er die bifilare Form gab, in einem 25 m tief gelegenen Beobachtungsraum der Observatorien in Potsdam, in dem die tägliche Temperaturschwankung verschwindet und die jährliche nur etwa  $0,2^\circ$  beträgt, Messungen ausgeführt und im Anschluß an die Pendelbeobachtungen gefunden, daß die maximale Hubhöhe der halbtägigen elastischen Mondflut der festen Erde etwa 32 cm (für Potsdam 12 cm) beträgt.

#### Differenz der Deformation in Nord-Süd und Ost-West.

Noch eine besondere Erscheinung ist zu erwähnen. Alle Beobachtungsstationen haben ergeben, daß bei der nahezu halbtägigen Hauptschwingung des Lotes unter dem Einfluß der Flutkraft des Mondes das oben definierte Verhältnis  $\alpha$ , das als ein Maß der Elastizität bezeichnet wurde, nach der nord-südlichen Schwingungsweite kleiner ist als nach der ost-westlichen. Man glaubte anfänglich hieraus schließen zu können, daß die Erde in der nord-südlichen Richtung nachgiebiger ist als in der ost-westlichen. Es hat sich jedoch gezeigt<sup>3)</sup>, daß diese Erscheinung auf die Deformation der Erde durch

<sup>1)</sup> W. Schweydar, Beobachtung der Änderung der Intensität der Schwerkraft durch den Mond. Sitzber. d. Kgl. Preuß. Akad. d. Wiss. 1914.

<sup>2)</sup> A. von Schmidt, Das Trifilargravimeter. Gerlands Beiträge zur Geophysik, IV., 1898.

<sup>3)</sup> W. Schweydar, Theorie der Deformation der Erde durch Flutkräfte. Veröffentl. d. Kgl. Preuß. Geodät. Inst. N. F. Nr. 66, 1916.

den periodischen Druck der entsprechenden Partialflut des Meeres zurückzuführen ist.

##### 5. Bestimmung der Elastizität aus der Bewegung der Rotationsachse.

###### *Die Bewegung der Rotationsachse der starren Erde.*

Zur Bestimmung der Elastizität der Erde führt noch ein dritter Weg. Die Erde ist im wesentlichen mit einem symmetrischen, in seinem Schwerpunkt unterstützten Kreisel zu vergleichen, dessen Drehachse nicht genau mit seiner Figuren-achse zusammenfällt. Wenn bei einem Kreisel zu irgendeiner Zeit die Drehachse die Lage der Figuren-achse verläßt, so wird sie ständig, von Reibungskräften abgesehen, im Kreiselkörper mit konstanter Geschwindigkeit einen Kreiskegel um die Figuren-achse beschreiben. Eine solche Bewegung wird *freie Nutation* genannt, weil ihre Form und die Zeit, in der der Kreiskegel einmal durchlaufen wird, von äußeren Kräften unabhängig ist. Die Umlaufzeit heißt Eulersche Periode. Die Anziehung von Sonne und Mond auf die ellipsoidisch gestaltete Erde bewirkt, daß die Rotationsachse der Erde im Raume ihre Lage langsam ändert (um 50" pro Jahr) und sich innerhalb von etwa 26 000 Jahren einmal um die Senkrechte auf der Ekliptik, mit der sie nahezu konstant den Winkel von 23½° bildet, ganz herumdreht. Über diese, *astronomische Präzession* genannte Bewegung lagert sich eine kurze Schwankung von der Form einer Ellipse, deren Achsen rund 9" bzw. 7" betragen und die in 18½ Jahren durchlaufen wird. Diese Bewegung wird als *astronomische oder erzwingene Nutation* der Drehachse bezeichnet, weil sie von den Anziehungskräften herrührt und die Periode dieser Kräfte annehmen muß. Infolge der Kombination beider Bewegungen beschreiben die Himmelspole eine Schlangenlinie. Aus den Konstanten der Präzession und Nutation, die durch astronomische Messungen sehr genau festgestellt sind, ergibt sich, daß die Periode der freien Nutation der Drehachse der Erde, falls diese überhaupt vorhanden ist, 303,3 mittlere Sonnentage betragen wird, wenn die Erde absolut starr ist (Eulersche Periode).

###### *Bestimmung der freien Nutation.*

Nur Beobachtungen können darüber entscheiden, ob die freie Nutation auftritt. Wenn ihr zufolge die Rotationsachse ihre Lage im Erdkörper verändert, so werden die geographischen Breiten, die mit großer Genauigkeit gemessen werden können, Schwankungen um einen Mittelwert von der Periode der freien Nutation unterworfen sein; denn die geographische Breite ist das Komplement des Winkels zwischen der Rotationsachse und der Lotlinie am Beobachtungsort. Letztere kann praktisch als unveränderlich angesehen werden, da ihre Bewegungen durch die Flutkräfte zu klein sind, um bei astronomischen Messungen in Frage zu kommen. Sehr um-

fangreiche und äußerst präzise astronomische Beobachtungen, unter denen die Arbeiten der Internationalen Erdmessung (ausgeführt durch das Zentralbureau in Potsdam) eine hervorragende Stellung einnehmen, haben tatsächlich in den geographischen Breiten einer Reihe, nach einem bestimmten Plan ausgesuchter Orte periodische Änderungen nachgewiesen. Die nähere Untersuchung ergab, daß die Rotationspole außer mehr oder weniger unregelmäßigen Bewegungen, die hauptsächlich auf die periodische Verschiebung von Luftmassen zurückzuführen sind, kleine Kreise beschreiben, deren Halbmesser etwa 6 m betragen. Die Pole durchlaufen den Kreis aber nicht in der Zeit von 303,3, sondern in 432,8 mittleren Sonnentagen. Man nennt diese Periode nach ihrem Entdecker, dem Astronomen *Chandler*, die *Chandlersche Periode*. Durch die Untersuchungen von *Wanach*<sup>1)</sup> ist der angeführte Wert dieser Periode auf etwa 1/8 % sicher.

###### *Die Bewegung der Rotationsachse der elastischen Erde.*

Diese Verlängerung der Eulerschen Periode rührt von der Elastizität der Erde her. Wenn sich die Erdachse verlagert, so wird an einem beliebigen Ort die Größe und Richtung der Zentrifugalkraft geändert; die Differenz zwischen der alten und neuen Kraft kann als eine deformierende Kraft aufgefaßt werden, die eine ähnliche Verteilung auf der Erdoberfläche hat, wie die Flutkraft des Mondes. Unter ihrem Einfluß wird auf den Ozeanen, die der Kraft leicht nachgeben, eine kleine Flut — Polflut genannt — von etwa 8 mm Höhe und 432,8 Tagen Periode hervorgerufen; sie wird ohne Zweifel wegen der Länge der Periode ihre Gleichgewichtshöhe erreichen.

Aber auch die feste Erde kann vermöge ihrer Elastizität der kleinen deformierenden Kraft nachgeben; sie hat das Bestreben, ihre Massen symmetrisch zu der neuen Lage der Drehachse anzuordnen und die Figuren-achse mit der Rotationsachse zusammenfallen zu lassen. Dies gelingt wegen der geringen Elastizität nur unvollkommen, und die Figuren-achse wird sich nur ein wenig in der Richtung auf die Rotationsachse zu verlagern. Um diese neue Lage der Figuren-achse macht die Drehachse mit der Geschwindigkeit, die der Eulerschen Periode entspricht, eine Drehung; ihre neue Verlagerung hat wieder eine Verlagerung der Figuren-achse zur Folge in der Richtung auf die Rotationsachse usw.; die Figuren-achse wie die Rotationsachse beschreiben um die ursprüngliche Lage der ersteren Kreise, deren Radien im Verhältnis von etwa 3 : 10 stehen<sup>1)</sup>. Die Zeit des Umlaufs der Rotationsachse ist aber größer als bei unveränderlicher Figuren-achse, d. h. bei absolut starrer Erde. Die Bewegung der Rotationsachse im Raume, die astronomische

<sup>1)</sup> B. Wanach, Resultate des Internationalen Breitendienstes Bd. V, 1916.

Präzession und Nutation, wird durch die Elastizität der Erde ganz unbedeutend wenig beeinflusst<sup>1)</sup>.

*Der Wert der Elastizität nach der freien Nutation.*

Aus dem Verhältnis der Chandlerschen zur Eulerschen Periode berechnete Herglotz<sup>2)</sup> unter Berücksichtigung der Dichtezunahme im Erdinnern die Starrheitskonstante zu  $11,7 \times 10^{11}$  Dynen; er fand also einen gegen die oben angeführten Ergebnisse völlig abweichenden Wert. Diesen Widerspruch konnte Schweydar dadurch beseitigen, daß er einer 1500 km dicken Gesteinsrinde die Starrheitskonstante  $0,9 \times 10^{11}$  und einem Metallkern von 4500 km Radius die Starrheitskonstante  $20 \times 10^{11}$  zuschrieb; er fand jedoch, daß die Unstimmigkeit auf den Druck und die Anziehungskraft der bei den Meereszeiten gehobenen und gesenkten Wassermassen zurückzuführen ist<sup>3)</sup>.

#### 6. Einfluß der Meereszeiten auf die feste Erde.

Die Analyse der Beobachtungen an Horizontalpendeln bezog sich, wie erwähnt, nur auf die nahezu halbtägige Hauptschwingung, die durch die größte Partialflutkraft des Mondes hervorgerufen wird. Die ihr entsprechende Partialflut des Meeres ist nach der dynamischen Theorie über große Gebiete der Ozeane umgekehrt, d. h. es tritt Niedrig- bzw. Hochwasser ein, wo die Kraft Hoch- bzw. Niedrigwasser herzustellen sucht. Da nun die elastischen Gezeiten im wesentlichen den statischen Gesetzen folgen, so wird der periodische Gezeiten- druck des Meeres die Deformation der festen Erde vergrößern; das Wasser fließt gerade ab, wenn das Land steigt. Wir beobachten demnach im Vergleich zu der Flutkraft zu große elastische Fluten und berechnen eine zu kleine Starrheitskonstante, d. h. eine zu große Elastizität.

Das Ergebnis aus der Chandlerschen Periode der Polbewegung ist ebenfalls durch die Polflut des Meeres verfälscht. Letztere trägt zu der Verlängerung der Periode der Polbewegung bei, und wir müssen auch hier zu einer zu kleinen Starrheitskonstante kommen, wenn wir ohne Rücksicht auf die Polflut die ganze Differenz zwischen der Eulerschen und Chandlerschen Periode der Deformation der festen Erde allein zuschreiben.

#### 7. Bestimmung der Elastizität mit Rücksicht auf die Meereszeiten.

Führt man unter diesem Gesichtspunkt die Rechnung durch, so ergibt sich  $16,4 \times 10^{11}$  Dynen für die Starrheitskonstante. Wegen der großen Mängel, die der dynamischen Theorie des Meeres

<sup>1)</sup> W. Schweydar, Die Bewegung der Drehachse der elastischen Erde im Erdkörper und im Raume. Astron. Nachr. 203, 1916.

<sup>2)</sup> G. Herglotz, Über die Elastizität der Erde bei Berücksichtigung ihrer variablen Dichte. Zeitschr. f. Mathem. u. Physik Bd. 52.

<sup>3)</sup> W. Schweydar, Untersuchungen über die Gezeiten der festen Erde und die hypothetische Magmaschicht. Veröff. d. Kgl. Preuß. Geodät. Inst. N. F. Nr. 54, 1912.

noch anhaften, läßt sich das Ergebnis aus der Hauptschwingung des Lots nach den Beobachtungen an Horizontalpendeln nicht einwandfrei korrigieren. Eine rohe Überschlagsrechnung läßt auch hier auf den Wert  $12 - 18 \times 10^{11}$  Dynen schließen.

Aus diesem Grunde ist die halbtägige Hauptschwingung des Lotes für die genauere Beurteilung der Elastizität ungeeignet. Besser ist es, die Schwingungen zu verwenden, die von den beiden größten der Partialflutkräfte des zweiten Typus herrühren, weil die entsprechenden Partialwellen in den Gezeiten des Meeres klein sind; letztere würden bei einem die Erde mit gleichmäßiger Tiefe bedeckenden Meere überhaupt nicht auftreten können. Die genauere Ableitung der Lotschwingungen von diesem Typus hat aber nur Aussicht auf Erfolg bei einer besonders guten Aufstellung der Horizontalpendel, wie bei der in dem erwähnten Bergwerk in Freiberg i. Sa. Aus diesen Partialschwingungen folgt die Konstante der Gestaltelastizität zu  $19,8 \times 10^{11}$ .

Beide Methoden führen demnach zu dem nahezu übereinstimmenden Ergebnis, daß die Starrheit der Erde als Ganzes etwa  $\frac{2}{3}$  mal so groß ist als die des Stahles.

Die zuerst genannte Lord Kelvinsche Methode kommt nicht in Betracht, da die benutzten Meeresfluten die Gleichgewichtshöhe nicht erreichen.

#### 8. Die Variation der Elastizität im Innern der Erde.

Bei den obigen Ableitungen ist vorausgesetzt, daß die Starrheit überall in der Erde denselben Wert hat; das Ergebnis ist zu definieren als der Grad der Elastizität, der der Erde als Ganzes zugeschrieben werden muß, um die elastischen Gezeiten und die Verlängerung der Periode der Polbewegung darzustellen. In der unten<sup>1)</sup> angeführten Arbeit wird allgemeiner angenommen, daß die Dichte und Elastizität in der Erde von Schicht zu Schicht gesetzmäßig veränderlich ist, und die Theorie der Deformation der Erde durch die Flutkraft und der Verlängerung der Periode der Polbewegung unter Voraussetzung der Inkompressibilität und unter Berücksichtigung der Bewegung des Meeres gegeben. Der Vergleich mit den Beobachtungen führt zu dem mit den Folgerungen aus der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Erdbebenwellen übereinstimmenden Ergebnis, daß die Starrheit in der Erde mit der Annäherung an das Erdzentrum wächst, und zwar schneller als die Dichte. Die Starrheit der oberflächlichen Teile wird zu  $2,6 \times 10^{11}$ , die der zentralen Teile zu etwa  $30 \times 10^{11}$  Dynen gefunden.

#### 9. Die Elastizität nach den Erdbebenwellen.

Die Erdbebenwellen, die in einem Herde aus-

<sup>1)</sup> W. Schweydar, Theorie der Deformation der Erde durch Flutkräfte. Veröffentl. d. Kgl. Preuß. Geodät. Inst. N. F. Nr. 66, 1916.