DIE NATURWISSENSCHAFTEN

Herausgegeben von

Dr. Arnold Berliner und Prof. Dr. August Pütter

Fünfter Jahrgang. 25. Mai 1917. Heft 21.

Die Fiktion in der Mathematik und der Physik.

Von Dr. Aloys Müller, Röttgen bei Bonn.

Vaihinger hat in seinem bekannten Buche[1]) dem Begriff der Fiktion einen solchen Geltungsbereich gegeben, daß man sich unwillkürlich fragt, ob denn nicht dieser Bereich selber eine Fiktion sei, die *Vaihinger* macht, um bei Problemen, die er nicht lösen kann, so zu tun, als ob er sie gelöst habe. Wie manche *einfache* kühne Ideen (man denke an *Mach),* ist seine Auffassung auch in naturwissenschaftliche Kreise weiter vorgedrungen, als es der logische Sinn und Instinkt der Mathematiker und Naturwissenschaftler hätte zulassen dürfen. Die Gründe für diese Erscheinung wollen wir nicht weiter untersuchen. Aber eine eingehende sachliche Prüfung der Auffassung *Vaihingers* scheint endlich einmal gerade hier am Platze zu sein. Ich will deshalb im folgenden einige und wohl die hauptsächlichsten *Gesichtspunkte* angeben, die für die Prüfung der Geltung des Fiktionsbegriffs in der *Mathematik* und der *Physik* in Frage kommen.

Die breitere Grundlegung des Vaihingerschen Fiktionsbegriffes und seine Einstellung in die philosophischen Strömungen der Jetztzeit kann ich mir nach den sorgfältigen Ausführungen *Kronenbergs* in *dieser* Zeitschrift[2]) ersparen. Einige Bemerkungen über den Begriff selbst scheinen mir aber nicht nur der Vollständigkeit wegen nötig, sondern auch um zu zeigen, wie die Unklarheit bei *Vaihinger* schon in seinem Zentralgedanken wohnt; das wichtigste dieser Bedenken hat auch *Kronenberg* energisch betont[3]). Aber bei unserem eigentlichen Problem, das er übrigens am Schlusse nur streift, ist *Kronenberg* zu sehr von *Vaihinger* abhängig. Die Mathematik sieht er ganz mit dessen Augen an. Ich werde zeigen, wie falsch das ist, und werde in eingehender Darlegung die kurze Ablehnung *Studys* — *Vaihinger* müsse aus sehr trüben Quellen geschöpft haben, ganze Kapitel seines Buches seien mit Mißverständnissen angefüllt[4]) — begründen. *Vaihingers* Anwendung des Fiktionsbegriffes auf die Physik hält auch *Kronenberg* nicht für einwandfrei. Aber er kommt zu keiner klaren Scheidung. Die folgenden Überlegungen bieten eine solche an. Ob sie eines weiteren Ausbaues wert ist, muß die Erfahrung lehren.

1) *H. Vaihinger*, Die Philosophie des Als Ob [2]. Berlin 1913. Einige Unterstreichungen im Text der benutzten Zitate rühren von mir her.

2) *Diese* Zeitschrift 1915 S. 285 ff.

3) A. a. O. S. 305 f.

4) *E. Study*, Die realistische Weltansicht und die Lehre vom Raume, Braunschweig 1914, S. 53.

1. *Der Begriff der Fiktion bei Vaihinger.*

Nach *Vaihinger* ist die Fiktion ein bewußt falsches Gebilde, das, ohne theoretischen Wert zu haben, seine Rechtfertigung ausschließlich seiner Unentbehrlichkeit für die praktische Berechnung der Wirklichkeit verdankt. Er sagt zwar ausdrücklich[1]), daß die Fiktionen „*logische* Gebilde" seien. Das hindert ihn nicht, anderswo zu erklären[2]), sie seien „*psychische* Gebilde"; in der Tat rechnet er auch „die ganze Vorstellungswelt" zu den Fiktionen[3]), und Vorstellungen sind bekanntlich psychische Gebilde. Man könnte nun begründete Bedenken dagegen erheben, daß psychische Gebilde wahr oder falsch genannt werden. Doch würde das nur eine rein definitorische Änderung nötig machen. Wir müssen diese und andere Unbestimmtheiten der Vaihingerschen Auffassung, die durch dieses Zusammenfassen heterogener Dinge unter *einen* Begriff entstehen, vorläufig als eine Tatsache hinnehmen. Wir werden später sehen, daß die Auffassung in Wirklichkeit selber eine „Fiktion" ist, d. h. ein Mittel, um so zu tun, als ob so ziemlich alles Fiktion sei.

Noch zwei Begriffe der Definition bedürfen der Aufklärung.

Zunächst der Begriff „falsch". Was *Vaihinger* damit meint, ist nicht gerade klar. Im ganzen treten drei verschiedene Ansichten auf. Selten[4]) klingt der alte Wahrheitsbegriff des Abbildens der Wirklichkeit an („dieses Urteil gibt nicht eine Wirklichkeit wieder"). An anderen und zwar den meisten Stellen[5]) wird diejenige Vorstellung als wahr bezeichnet, die uns erlaubt, „am besten die Objektivität zu berechnen und in ihr zu handeln". Fürs dritte ist ihm Falschheit identisch mit „Undenkbarkeit", „Widerspruch"[6]). Im Sinne des zweiten Wahrheitsbegriffes kann nun das Wort „falsch" der Definition nicht gemeint sein; denn die Fiktionen sind ja charakterisiert durch ihre praktische Unentbehrlichkeit. Es kann sich also nur um die beiden anderen Bedeutungen handeln. Auf Grund dieser Bedeutungen unterscheidet nun *Vaihinger* zwei Hauptklassen von Fiktionen: 1. die *Semifiktionen,* die „nur der gegebenen Wirklichkeit widersprechen,

1) A. a. O. S. 94.

2) A. a. O. S. 174.

3) A. a. O. S. 216.

4) A. a. O. S. 608.

5) Z. B. S. 193.

6) A. a. O. S. 607.

resp. von ihr abweichen, ohne schon in sich selbst widerspruchsvoll zu sein", 2. die eigentlichen, *echten Fiktionen*, die „nicht nur der Wirklichkeit widersprechen, sondern auch in sich selbst widerspruchsvoll sind"[1]). Danach und nach gelegentlichen Äußerungen[2]) kennt *Vaihinger* eine doppelte Art von Wahrheit, die theoretische und die praktische Wahrheit, und sieht in ihnen voneinander unabhängige Eigenschaften: die Fiktionen sind theoretisch falsch und praktisch wahr. Wie er diese eigenartige Behandlung des Wortes und Begriffes „Wahrheit" mit seinem logischen Gewissen vereinigen kann, ist ein Rätsel, geht uns aber weiter nichts an.

Fürs zweite muß der Begriff „Wirklichkeit" erläutert werden. Auch hier sucht man vergebens nach einer klaren und eindeutigen Formulierung. Als „unmittelbare Wirklichkeit" wird[3]) das „Gegebene" bezeichnet, d. h. das der Psyche „dargebotene Material der Empfindungen". Aber durch unsere Empfindungen werden „reale Verhältnisse" „erfaßt". Was diese realen Verhältnisse sind, geht aus den Bemerkungen hervor: „Wirklich ist und bleibt nur die beobachtbare Unabänderlichkeit der Phänomene, ihrer Verhältnisse usw."[4]); *„real ist nur das beobachtete Unabänderliche"*[5]). Gelegentlich wird die Wirklichkeit auch mit der „Außenwelt" gleichgesetzt[6]). Wir werden also meistens nicht sehr fehlgreifen, wenn wir nach *Vaihinger* das als wirklich bezeichnen, was man nach dem mehr populären Sprachgebrauch reale Dinge und Verhältnisse nennt. Wollen wir die psychischen Vorgänge einbeziehen, so würde das Wirkliche in Vaihingerschem Sinne das Erfahrbare sein. Tatsächlich nennt er an verschiedenen Stellen[7]) als Charakteristikum der Semifiktion den „Widerspruch mit der *Erfahrung*". Allerdings sagt er an einer anderen Stelle[8]) wieder, das „wahre, nackte Sein", die „reine Erfahrung", sei jene Unabänderlichkeit der Phänomene, die „freilich die ganze Erfahrung in sich schließt". Im letzten Grunde könnte man also als das Wirkliche in seinem Sinne das Objektive ansprechen, das den Naturgesetzen zugrunde liegt, unter Natur den ganzen Bereich des Erfahrbaren verstanden. Wieder an einer anderen Stelle[9]) bringt er eine Art von genetischem oder relativem Gesichtspunkt hinein: „In bezug auf eine für Wirklichkeit angenommene Vorstellungsweise ist eine *andere* Vorstellungsweise fiktiv, während jene selbst dann in bezug auf eine andere auch wiederum für fiktiv erklärt werden muß. Es ist eben eine ***stetig*** und ***allmählich ansteigende Verfälschung der Wirklichkeit*** durch das Denken zu konstatieren, so, daß auf *einem* Punkte das Vorhergehende als *Wirklichkeit* gilt, während es doch selbst schon schließlich in Fiktionen wurzelt."

Man kann es nicht verstehen, daß *Vaihinger* einen für seine Fiktionstheorie so grundlegenden Begriff wie den der Wirklichkeit nicht schärfer umrissen hat. Glücklicherweise sind unsere folgenden Ausführungen davon unabhängig. Denn aus den für uns in Betracht kommenden Stellen läßt sich deutlich ersehen, was *Vaihinger* dort unter Wirklichkeit versteht.

2. *Die mathematischen Begriffe und die „Wirklichkeit".*

Die Mathematik ist nach *Vaihinger* ein Idealgebiet der Fiktionen, vor allem der *echten Fiktionen.* Wir fassen zunächst ihr Verhältnis zur „Wirklichkeit" ins Auge. Stereometrische und geometrische Gebilde, wie Kugel, Zylinder, Prisma, Fläche, Linie, Punkt usw., sollen mit der „Wirklichkeit" in Widerspruch stehen. Das wird z. B. bezüglich der Fläche so ausgeführt[1]): „Geschichtlich und psychogenetisch kommen natürlich nur wirkliche „Flächen", d. h. flache Umgrenzungen, in Betracht: Der Begriff der krummen Fläche entsteht erst später. Flache, also wirklich ebene Gebilde gibt es in der Natur, sowie schon durch primitives Eingreifen des Menschen sehr viele: Aber hier wird nun abstrahiert von demjenigen Material, das die Fläche bildet, die formale Beschaffenheit wird allein für sich genommen und von der Imagination verselbständigt. Auch hier ist es an sich ein Widerspruch, von einer Fläche als solcher zu sprechen." Oder auf folgende Weise[2]): „In Wirklichkeit kennen wir nur materielle körperliche Dinge, aus deren ausgedehnter Eigenart wir die drei Dimensionen abstrahiert haben. Das zwei-dimensionale Gebilde der Fläche und das ein-dimensionale Gebilde der Linie, das wir an diesen Körpern gelegentlich zu beobachten glauben, sind nur Abstraktionen, durch die Imagination verselbständigt, also Fiktionen, mit denen wir rechnen, *als ob* ihnen Wirklichkeiten entsprächen, notwendige Verstellungshilfen und Hilfsvorstellungen, die uns wohl im Denken unterstützen, die uns aber keinen realen Aufschluß gewähren können. Wir rechnen hier mit Undingen, statt mit Dingen, aber es sind nützliche und unentbehrliche Undinge. Wir aber halten diese Undinge für Dinge."

Der Geometer wird diese Auffassung seiner Wissenschaft für sehr primitiv halten. Er weiß zwar, daß die geometrischen Gebilde an der beobachteten Wirklichkeit, der sinnlichen Anschauung *entstanden* sind; sicherlich hätten sie ohne diese überhaupt nicht entstehen können, wenn sie auch vermutlich nicht ganz einer Art Abstraktion ihr Dasein verdanken. Aber das ist ein psychologisch-genetisches Problem, das den Mathematiker zwar

[1]) A. a. O. S. 24.
[2]) A. a. O. S. XI, 327.
[3]) A. a. O. S. 287.
[4]) A. a. O. S. 216.
[5]) A. a. O. S. 192.
[6]) A. a. O. S. 296.
[7]) Z. B. S. 152, 172.
[8]) A. a. O. S. 216.
[9]) A. a. O. S. 175 f.

[1]) A. a. O. S. 507.
[2]) A. a. O. S. 508.

interessiert, das aber nicht *sein* Problem ist. Vom logisch-mathematischen Standpunkte aus sind die geometrischen Gebilde von der Wirklichkeit im Vaihingerschen Sinne *gänzlich unabhängig.* Die *Grundgebilde* unter ihnen — Punkt, Gerade, Ebene — sind *gegeben,* und zwar dem Mathematiker in genau demselben Sinne gegeben, wie dem Physiker die Körper gegeben sind, mit denen er arbeitet. *Hilbert* hätte sein grundlegendes Buch[1]) nicht so zu beginnen brauchen: „Wir *denken* drei verschiedene Systeme von Dingen: Die Dinge des ersten Systems nennen wir Punkte ... ; die Dinge des zweiten Systems nennen wir Gerade ..., die Dinge des dritten Systems nennen wir Ebenen." Er konnte einfach sagen: Es *gibt* Punkte, Gerade. Ebenen. Die geometrischen Gebilde sind eindeutige, originelle Gebilde, die eine *Eigenwirklichkeit* besitzen. Man kann sie (und die Zahlen) mit *Külpe*[2]) zu der Klasse der *idealen Gegenstände* rechnen. Vom logisch-mathematischen Standpunkte aus haben sie gar keine Beziehung zur Wirklichkeit im populären Sinne. Sie können also auch *dieser* Wirklichkeit nicht widersprechen. Ob es eine Fläche in *dieser* Wirklichkeit gibt oder nicht, ist dem Mathematiker höchst gleichgültig; denn er befaßt sich mit *ihr* überhaupt nicht, sondern er arbeitet in dem eigenartigen, selbständigen Wirklichkeitsbereich der mathematischen Objekte. Wie unabhängig die Geometrie von der sinnlichen Anschauung, von der Vaihingerschen Wirklichkeit ist, ergibt sich indirekt daraus, daß sie sich aus beliebigen Gebilden als Grundgebilden aufbauen läßt, die nur dieselben gegenseitigen Beziehungen haben müssen wie Punkt, Gerade und Ebene der gewöhnlichen Geometrie. Nun ist die *Zahl* das einzige Gebilde, das am radikalsten von allen sinnlichen Eigenschaften abstrahiert. Für den Arithmetiker bin ich eine 1, so gut wie *Vaihinger* eine 1 und sein Buch eine 1 ist. So weist die erwähnte Tatsache auf die moderne analytische Grundlegung der Geometrie, die Arithmetisierung der Geometrie hin. Für sie *ist* der Punkt ein System von n geordneten Zahlen $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Die Ebene *ist* der Inbegriff aller Punkte, die der Gleichung

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_n x_n + a_{n+1} = 0$$

genügen, wo die $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ numerische Koeffizienten sind, die nicht alle gleichzeitig Null werden dürfen. Der Raum *ist* ein n-dimensionales Zahlenkontinuum usw. In der Möglichkeit einer solchen Geometrie liegt die gründlichste Abwehr der Vaihingerschen Auffassung.

Auch die *Zahlen* enthalten nach *Vaihinger* einen Widerspruch gegen die „Wirklichkeit". „Wenn ich einen Haufen Steine zusammenfasse und zähle und diese Summe als Einheit betrachte und ihr etwa den Namen zehn gebe, so habe ich dazu im Äußeren eigentlich keine direkte Veranlassung. Und es ist eine Willkür, diese getrennte Steinmenge so zu betrachten, *als ob* sie Eines wäre, und diese Einheit sogar noch durch einen Namen zu hypostasieren. Auch das Zählen beruht also, wie wir sehen, auf einer Fiktion, wenn auch auf einer sehr unschuldigen: auf der Fiktion, das Getrennte so zu betrachten, *als ob* es Eins wäre. Darum sind auch alle *Zahlen* als Produkt dieses fiktiven Prozesses etwas *rein Fiktives*"[1]).

Dazu ist vielerlei zu bemerken. *Erstens* kann man es mit Recht bestreiten, daß der Steinhaufen keine Einheit[2]) sei. Sogar wenn die Steine nicht in einem Haufen, sondern regellos unter anderen zerstreut lägen, würde der Zweck, weshalb man sie zählt, sie zu einer Einheit *machen.* Wie sie physikalisch als eine Einheit *wirken* können, wenn sie z. B. zusammen in ein Gefäß getan und abgewogen werden, so kann auch mit ihnen als mit einer Einheit *gerechnet* werden. Die Einheit braucht nichts zu sein, was in der sinnlichen Anschauung gegeben ist. Ist denn die Einheit *überhaupt* etwas, was man mit den Augen sehen und mit den Händen greifen kann? Wenn *zweitens* die Zahlen Produkte des von *Vaihinger* genannten Prozesses sind, dann folgt daraus nicht, daß sie *rein* fiktiv sind, d. h. einen Widerspruch gegen die Wirklichkeit *und* einen Selbstwiderspruch einschließen; denn der Prozeß spricht nur von einem Widerspruch gegen die Wirklichkeit. Man könnte *drittens* mit dem gleichen Rechte bemerken, daß der Prozeß die Zahlen schon voraussetzt. *Viertens und hauptsächlich* hält die Vaihingersche Darstellung die Zahlen noch für Symbole wirklicher Dinge. Hier wie vorhin vermag *Vaihinger* zwischen der psychologischen und der logischen Frage nicht zu scheiden. An der Wirklichkeit in seinem Sinne wird sich der Zahlbegriff mitgebildet haben, aber logisch ist er davon unabhängig. Die Zahlen bilden ein Reich für sich, mit eigenem Wirklichkeitscharakter und eigenen Gesetzen.

Wir sprachen bis jetzt nur von den echten Fiktionen. *Vaihinger* kennt auch *Semifiktionen* in der Mathematik. Einiges davon wollen wir noch zur Erläuterung heranziehen.

Eine Semifiktion liegt nach ihm z. B. vor bei der *Lösung der Gleichungen 2. Grades.* Die Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

wird dadurch gelöst, daß auf beiden Seiten $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ addiert wird, dadurch wird die linke Seite das vollständige Quadrat einer Summe. Hier haben wir nach *Vaihinger* „ein deutliches Bild der Semifiktion: hier wird die Wirklichkeit *verändert*"[3]).

Wir fragen: Was für eine „Wirklichkeit" ist

---

[1]) *D. Hilbert,* Grundlagen der Geometrie [2], Leipzig 1903, S. 2.

[2]) *O. Külpe,* Die Realisierung, I. Bd., Leipzig 1912, S. 13.

[1]) A. a. O. S. 569 f.

[2]) Einheit ist hier offensichtlich nicht im mathematischen Sinne verstanden.

[3]) A. a. O. S. 203.

es, die hier verändert wird? Offenbar die Form der Gleichung. Wir bemerken nun zunächst, daß *Vaihinger,* vermutlich auf Grund der früher angeführten Skala relativer Wirklichkeiten, den Begriff der Wirklichkeit hier in einem anderen Sinne nimmt als im allgemeinen sonst bei der Betrachtung der Mathematik. Trotzdem hilft ihm das nicht. Der Begriff der Semifiktion drückt, wie er an anderen Stellen deutlicher sagt, ein *Abweichen* von der „Wirklichkeit" aus. Liegt der Fall hier vor? Sicherlich nicht. Denn eine Gleichung als Identitätsurteil hat keine bestimmte Form als ihre wirkliche Form; sie kann unendlich viele verschiedene Formen annehmen, die *gleichwirklich* sind. Es liegt also gar keine Wirklichkeit vor, von der ein Abweichen möglich wäre, — mit Ausnahme natürlich *der* Wirklichkeit, die durch den Sinn der Gleichung gegeben ist. Würde man z. B. die Größe $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ nur auf *einer* Seite addieren, dann würde man von der mathematischen Wirklichkeit abweichen und ihr widersprechen. Transformiert man aber richtig — und das setzt *Vaihinger* gewiß auch voraus —, dann geschieht nichts, was man als ein Abweichen von einer Wirklichkeit ansprechen könnte.

Alle *Hilfslinien* sind in *Vaihingers* Augen Fiktionen[1]). Besonders das „Cartesianische Koordinatensystem" hat es ihm angetan, das er eine „Hinzudichtung" nennt[2]) und von dem er sagt: „Und doch ist die Cartesianische Neuerung nur eine neue, auf der Ziehung von Hilfslinien beruhende Methode, um Inhalt, Umfang usw. der gesetzmäßigen, krummlinigen Figuren zu finden. Es zeigt sich das darin, daß am Schlusse beim *wirklichen Resultat* jene Hilfsgrößen herausfallen." Der Mathematiker wird sich einigermaßen über den Zweck der Koordinaten verwundern, über den *Vaihinger* ihn belehrt. Doch lassen wir das hier beiseite. Was man vielleicht in der Aussage *Vaihingers* über den Charakter der Koordinaten an Zutreffendem finden könnte, ist nach einem Ausdruck *Salmons*[3]) dies, daß die Koordinaten „dem Wesen der geometrischen Untersuchung ganz fremd" sind. Im übrigen sind, wie *Vaihinger* von Mathematikern hätte hören können[4]), die Hilfslinien keine Abweichung von *der* Wirklichkeit, in der der Mathematiker arbeitet. Nur in der sinnlich wahrnehmbaren Zeichnung bedeutet eine Hilfslinie ein *Hinzufügen* zu der Figur. In der mathematischen Wirklichkeit aber *existieren* die Hilfslinien in unendlicher Anzahl und besagt dieses Hinzufügen nur eine Auswahl der für den augenblicklichen Zweck passenden Linie.

Das *Messen* beruht nach *Vaihinger* auf einer Semifiktion: „Das Stetige wird ganz willkürlich so betrachtet, *als ob* es aus Teilen zusammengesetzt wäre[1]). Hier rührt *Vaihinger* an ein tiefes Problem der Mathematik, das aber schon vor mehr als 50 Jahren einen Ansatz zur Lösung gefunden hat. *Dedekind* entdeckte damals die stetige Zahlenmannigfaltigkeit. Von hier aus kann man nun auf zweifache Weise zu den stetigen Größen der Geometrie gelangen. *Entweder* zeigt die Dedekindsche Entdeckung, daß Stetiges und Diskretes keine Gegensätze sein *müssen.* Dann *wird* die stetige Größe beim Messen nicht geteilt, sondern sie *ist stets* auf unendlich vielfache Weise geteilt, und das Messen bedeutet lediglich das von der Maßeinheit bestimmte Aufsuchen von Teilen. Diese Auffassung scheint innerhalb des analytischen Aufbaues der Geometrie notwendig zu sein. *Oder* man legt der stetigen Zahlenmannigfaltigkeit ausschließlich einen arithmetischen Sinn bei und muß dann die eineindeutige Zuordnung der reellen Zahlen zu den Punkten der stetigen Größe aufstellen, wobei man *annimmt,* daß jeder irrationalen Zahl eine bestimmte Strecke entspricht. In keiner dieser beiden Auffassungen liegt etwas von der Vaihingerschen Konstruktion. Man kann sich nicht genug darüber wundern, daß *Vaihinger* diese Resultate der Mathematik gar nicht berücksichtigt hat.

Derjenige Fall, der äußerlich am deutlichsten eine Fiktion einzuschließen scheint, ist die oft benutzte Überlegung: Angenommen, der Satz sei unrichtig; dann ist dieses oder jenes der Fall, was der Voraussetzung widerspricht; also ist der Satz richtig. Aber wie so oft trügt auch hier der Schein. Bei dem *Forscher,* der die Richtigkeit des Satzes *noch nicht weiß* und auf diese Weise darüber zu entscheiden sucht, liegt keine Fiktion vor, sondern eine Art von mathematischem Gegenstück zur Verifikation einer Hypothese, wobei die Widerspruchslosigkeit die Rolle des Kriteriums übernimmt. Aber auch in der *Mitteilung* einer solchen Überlegung liegt keine Fiktion, sondern die Mitteilung (oder Darstellung in einem Lehrbuche) ist als Wiedergabe eines historischen Verlaufs anzusehen, als ein Nacherlebenlassen dessen, was der Forscher zuerst erlebt hat.

Aus unseren Darlegungen ergibt sich, daß der Grundfehler *Vaihingers,* der ihn zu seiner falschen Ansicht über die Beziehung der mathematischen Begriffe zur „Wirklichkeit" verleitet hat, in seiner primitiven und einseitigen Auffassung der Mathematik liegt. Für ihn ist die Mathematik *nur* ein Mittel zur Berechnung der „Wirklichkeit". „Die Mathematik ist die eigentlich genialste Methode selbst, um das Wirkliche zu berechnen"[2]). Nun ist gewiß die Mathematik aus dem praktischen Leben geboren. Sie bleibt für immer eines der gewaltigen Mittel, durch die der

[1]) A. a. O. S. 203, 568.
[2]) A. a. O. S. 567.
[3]) *Salmon-Fiedler,* Analytische Geometrie der Kegelschnitte 7. I. Bd., Leipzig 1907, S. 33.
[4]) Zum Beispiel von *O. Hölder,* Anschauung und Denken in der Geometrie. Leipzig 1900, S. 10.

[1]) A. a. O. S. 570.
[2]) A. a. O. S. 107.

Naturwissenschaft die Erkenntnis, der Technik die Beherrschung des Wirklichen möglich wird. Sie erhält auch, wie Antäus von der Mutter Erde, immer wieder neues Leben, neue Anregungen und Reize von der Praxis. Aber über die Stufe der Entwicklung, wo sie nur ein Rechenmittel war, ist sie eigentlich schon im Altertum hinausgewachsen. Jedenfalls hat sie in der neueren Zeit die Eigenwirklichkeit ihrer Gegenstände erkannt und dadurch die bewußte Selbständigkeit und Unabhängigkeit als Wissenschaft gewonnen. *Vaihinger kennt nur ihren Wirkungswert und übersieht ihren Eigenwert.* Daß übrigens dieser Fehler *Vaihingers* nur ein Ausläufer, ein Produkt, ein spezieller Fall einer allgemeineren Anschauung ist, hat schon *Study* an der früher zitierten Stelle bemerkt. *Vaihinger* ist Vertreter des kritischen Positivismus, der nichts als das Sinnlich-Wahrnehmbare kennt; „für ihn existieren nur die beobachteten Successionen und Koexistenzen der Phänomene"[1]). Alles übrige ist Fiktion. Der Positivist bemerkt nicht, wie er sich mit jedem Satze, den er aufstellt, sozusagen ins Gesicht schlägt. Denn es „existiert" doch wohl auch ein *Sinn* des Satzes (oder ist das vielleicht bei den Sätzen der Positivisten nicht der Fall?). Indes hat es keinen Zweck, tiefer auf das Philosophische einzugehen. Es geht uns ja nicht um die Philosophie und Metaphysik, sondern um die Wissenschaftstheorie der Mathematik und Physik.

Noch eine letzte Bemerkung. Auf dem Boden der richtigen Auffassung der Mathematik erhebt sich naturgemäß die Frage: Wie treten denn nun die mathematischen Begriffe zur beobachteten Wirklichkeit in Beziehung? wie ist ihre Anwendung auf diese Wirklichkeit möglich? Für *Vaihinger* folgt die Lösung dieses Problems aus dem Begriff der Fiktion; die logische Theorie, so meint er[2]), fordere, daß die Fiktion nur provisorisch sei, daß im Verlaufe des Denkens eine Korrektur eintreten müsse. Für den Mathematiker bedarf das Problem einer selbständigen Lösung, die hier nur des Abschlusses wegen für einige elementare Begriffe angedeutet sein mag. Gewisse mathematische Begriffe können auf die beobachtete Wirklichkeit Anwendung finden, weil ihre Gegenstände darin mit mehr oder weniger großer Annäherung realisiert sind oder realisiert werden können und weil die Mathematik die Möglichkeit bietet, den Grad dieser Annäherung zu bestimmen. Das damit das ganze Problem nicht einmal aufgerollt, noch weniger gelöst ist, ist dem Einsichtigen klar. Darauf tiefer einzugehen, gehört aber nicht mehr zu unserer Aufgabe.

3. *Die „Selbstwidersprüche" in den mathematischen Begriffen.*

Die Widerspruchslosigkeit der benutzten Begriffe festzustellen, ist die erste und notwendigste

[1]) A. a. O. S. 115.
[2]) A. a. O. S. 173.

Aufgabe jeder wissenschaftlichen Betätigung. Gerade die Mathematik hat darauf besonders geachtet, weil sie es bei dem eigenartigen formalen Charakter ihrer Gegenstände am besten tun konnte und am meisten nötig hatte. Und daß sie dadurch in der Schärfe ihrer Begriffsbildungen vorbildlich geworden ist, hat noch kein Verständiger geleugnet. *Vaihinger* ist anderer Ansicht. Die Mathematik besteht nach ihm hauptsächlich in echten Fiktionen, also nicht nur in Abweichungen von der Erfahrung, sondern auch (worauf es uns jetzt ankommt) in Selbstwidersprüchen.

Sehen wir zu, wie er diese Behauptung beweist. Von den *mathematischen Körpern* sagt er[1]): „Solche Formen ohne Inhalte sind an sich nichts, ja schlimmer als nichts, denn sie sind widerspruchsvolle Gebilde, ein Nichts, das doch noch als ein Etwas vorgestellt wird, ein Etwas, das schon in ein Nichts übergeht." Wir wollen nicht fragen, wie etwas „an sich nichts" sein kann, auch nicht, wie etwas „schlimmer als nichts" sein kann (als ob „nichts" *schlimm* sei!). Wir achten bloß auf die Art, wie *Vaihinger psychologische Metaphysik* treibt, wo es sich um *logische Inhalte* handelt.

Ähnlich ist der *Punkt* „eine in sich haltlose und widerspruchsvolle Idee, ein trotz seines Minimums monströser Begriff eines Etwas, das schon ein Nichts ist, eines Nichts, das doch noch ein Etwas sein soll"[2]). Es ist unverständlich, wie die „Monströsität" eines Begriffes von der Größe eines Vorstellungsgegenstandes abhängen kann. Wir notieren nur dieselbe Verwechselung wie vorhin.

Ich bin nicht ganz klar, ob *Vaihinger* in dem Begriffe des *n-dimensionalen Raumes*[3]) auch einen logischen Widerspruch oder nur einen Widerspruch mit dem 3-dimensionalen Raum, „den man vor sich hat", finden will. Dagegen scheint er[4]) den *Determinantenbegriff* als echte Fiktion anzusehen. Worin die ev. logischen Widersprüche liegen sollen, wird in beiden Fällen verschwiegen.

Die Begriffe der *negativen Zahlen, der Brüche, der irrationalen und der imaginären Zahlen* sollen „klaffende Widersprüche" enthalten[5]). „Das Grundprinzip ist eben auch hier eine unberechtigte Anwendung und Übertragung einer logischen Methode auf Fälle, die streng genommen nicht darunter zu subsummieren sind, oder die Betrachtung solcher Gebilde als Zahlen, welche gar keine rechten Zahlen sind. *Negative* Zahlen sind ein Selbstwiderspruch, wie alle Mathematiker zugeben; es ist eine Ausdehnung der *Subtraktion* über das Maß der *logischen* Anwendungsmöglichkeit derselben hinaus: die *Bruchzahlen* sind das Produkt derselben Methode bei der Division und die irra-

[1]) A. a. O. S. 506.
[2]) A. a. O. S. 507.
[3]) A. a. O. S. 76 f.
[4]) A. a. O. S. 261.
[5]) A. a. O. S. 81.

tionalen Zahlen bei der Radizierung; das monströseste Zahlgebilde dagegen sind die *imaginären* Zahlen, denen die Konstruktion durch *Gauß, Drobisch* u. a. nichts von ihrer fiktiven und widerspruchsvollen Natur genommen hat."

Das Geheimnis dieser Kritik *Vaihingers* liegt in dem Ausdruck „Zahlen, welche gar keine *rechten* Zahlen sind". „Rechte Zahlen" sind ihm nur die positiven Zahlen als Symbole für *Dinge* seiner „Wirklichkeit". Er sieht nicht, daß diese Auffassung innerhalb des Bereiches der positiven Zahlen schon undurchführbar ist. Wie kann er z. B. $2 \times 3 = 6$ oder $2 - 2 = 0$ rechnen, wenn die Zahlen immer Dinge symbolisieren? Ist also das Prinzip der Dingsymbolisierung schon tatsächlich durchbrochen, so wird es in sich hinfällig, wenn man sich überlegt, daß es doch nur auf einer Verwechselung der empirisch-psychologischen Entstehung mit dem logischen Inhalt des Zahlbegriffes beruht. Sieht man das ein, so ist damit die Möglichkeit einer beliebigen rechtmäßigen Erweiterung des Zahlbegriffes gegeben. Wie die moderne Mathematik den Zahlbegriff grundgelegt, wie sie die Erweiterung mit Hilfe des Permanenzprinzips, der Schnitte, des Grenzwertes usw. vorgenommen hat, kümmert *Vaihinger* gar nicht. Er benützt den primitiven Zahlbegriff der Volksschule, findet dann selbstverständlich Widersprüche und scheut sich auch nicht, gelegentlich die Fiktion zu machen, „wie alle Mathematiker zugeben". Man kann immer wieder dasselbe wiederholen: Es ist unbegreiflich, wie jemand heute über den Zahlbegriff etwas veröffentlichen kann, ohne die Riesenarbeit zu kennen oder zu würdigen, die die Mathematik ihm gewidmet hat.

Die meisten Schmerzen macht *Vaihinger* das Problem des *Unendlichen*, vor allem das des *Unendlich-Kleinen*. Den Sinn des *Differentialquotienten* glaubt er durch die folgende Überlegung[1]) darzustellen. Läßt man in

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = p\,\Delta x + n\,\Delta x^2 + \ldots$$

Δx und Δy verschwinden, so erhält man „eigentlich" den Wert $\frac{0}{0} = p$. „Allein $\frac{0}{0}$ ist ein vollständig sinnloser Ausdruck; $\frac{0}{0}$ *kann jede beliebige Zahl sein, jeder Wert* ist $\frac{0}{0}$ d. h. kann unter Umständen herauskommen. Streng genommen müßte einfach gesagt werden, wenn Δx und Δy zu 0 abnehmen, so bleibt eben auch nichts. Zunächst gelten Δx und Δy als wirkliche Werte. Sobald gesagt wird, sie sind gleich Null, so hat die ganze Rechnung absolut keinen Sinn mehr, da 0 ja eben kein Wert ist."

„Auf der anderen Seite: Läßt man Δx und Δy nicht bis zu 0 abnehmen, so hat man kein Recht, die anderen Glieder verschwinden zu lassen. Haben Δx und Δy also noch einen endlichen Wert, so bleiben diese Glieder."

„Aus diesem schlimmen Dilemma hilft nun die noch verzweifeltere Annahme heraus, Δx und Δy seien — *Grenzen* oder *unendlich kleine Werte*. In diesem Fall haben wir *einerseits* das Recht, den Wert p beizubehalten, und *andererseits* die übrigen Glieder wegfallen zu lassen."

Was soll der Mathematiker *dazu* sagen?

Wenn Δx und Δy verschwinden, so darf man durchaus nicht $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{0}$ setzen. Denn es handelt sich nicht um das Verhältnis des Grenzwertes von Δy zu dem Grenzwert von Δx, sondern um den Grenzwert des Verhältnisses $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ und der ist ganz bestimmt, nämlich $= p$. Die Rechnung hat also einen guten Sinn, denn $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ist die Richtung der Kurve. Aber selbst wenn wir die Bildung $\frac{0}{0}$ zuließen, dann wäre ihr Wert eben in *diesem* Falle bestimmt. Eine kaum glaubliche Verwirrung steckt in der Aussage, „Δx und Δy seien Grenzen oder unendlich kleine Werte". Etwas vernünftiger wird sie, wenn man annimmt, daß sie sich nicht auf Δx und Δy, sondern auf $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$ bezieht. Aber die größte Unvernunft des „oder" bleibt bestehen. Es ist nun unmöglich, hier in ihrem ganzen Umfang die strenge Ableitung zu wiederholen, die die Mathematik heute dem Differentialquotienten geben kann. Daß der Grenzbegriff dazu gehört, weiß *Vaihinger* auch[1]). Was er damit meint, kann man vielleicht nach dem Vorstehenden ahnen. Er lehnt seine Benutzung ab, weil „die Vorstellung der *Grenze* genau dieselben Widersprüche in sich birgt, wie die Vorstellung des Unendlich-Kleinen, nur versteckter und weniger konkret. Der abstrakte, reine Begriff des Unendlich-Kleinen zeigt jene Widersprüche offen und unmittelbar, welche auch schon im Begriff der Grenze enthalten sind, wie unsere oben S. 506 ff. gegebene Analyse zeigt"[2]). Schon diese Ausführung weist die Verwechselung von Vorstellung und Begriff auf. Schlägt man die vermerkte Analyse nach, so findet man nichts als die immer sich wiederholende Behauptung, die Grenzgebilde seien „ein Nichts, das doch noch als ein Etwas vorgestellt wird, ein Etwas, das schon in ein Nichts übergeht", — also dieselbe Verwechselung. *Vaihinger* kennt in seinem Buche den Grenzbegriff der Mathematik überhaupt nicht, ebensowenig den heutigen Stand der Einsicht in das Problem des Unendlich-Kleinen. So kehren denn in seiner Kritik alle die alten irrtümlichen Auffassungen und Einwände wieder, die man bei früheren Generationen verstehen und entschuldigen kann, heute aber nicht mehr.

An einer anderen Stelle ringt er äußerlich

[1]) A. a. O. S. 550 f.

[1]) A. a. O. S. 553.
[2]) A. a. O. S. 553.