Revista Colombiana de Matemáticas
Vol. XII (1978) 13 - 58

CIERTAS PROPIEDADES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES COMPLEJAS CON COEFICIENTES POLINOMICOS *

por

Lucimar NOVA G.

Introducción.

El objeto de este artículo es estudiar algunas propiedades de los operadores diferenciales definidos sobre diversos espacios de funciones por un polinomio diferencial de la forma

---

* Este artículo contiene la primera parte del trabajo presentado por el autor como requisito parcial para obtener el grado de M.S. en Matemáticas en la Universidad Nacional de Colombia, y fué efectuado bajo la dirección del Profesor Jairo A. Charris. Algunas aplicaciones de los resultados aquí contenidos y que constituyen la segunda parte del trabajo aparecerán posteriormente en el "Boletín de Matemáticas".

$$P(z, \partial/\partial z) = \sum_{k=o}^{n} p_k(z)\, \partial^k/\partial z^k, \qquad (0.1)$$

donde los p_k son polinomios de coeficientes complejos. En lo que sigue, denotaremos con $\mathbb{C}[z]$ al anillo y al $\mathbb{C}$-espacio de los plinomios en z de coeficientes en $\mathbb{C}$, y con $\mathbb{C}(z)$ a su cuerpo de fracciones; o sea, al $\mathbb{C}$-espacio de las funciones racionales en z de coeficientes en $\mathbb{C}$. Si Ω es un abierto de $\mathbb{C}$, denotaremos con $\mathcal{O}(\Omega)$ al $\mathbb{C}$-espacio de las funciones holomorfas en Ω y con $\Omega[z]$ al conjunto de las restricciones de Ω de los polinomios en $\mathbb{C}[z]$. Es claro que $\Omega[z] \subsetneq \mathcal{O}(\Omega)$ y que la aplicación de restricción $\mathbb{C}[z] \to \Omega[z]$ es biyectiva. El símbolo $\partial/\partial z$ representará al operador diferencial

$$\partial/\partial z = \frac{1}{2}\,(\partial/\partial x - i\partial/\partial y)\ ,$$

el cual está definido sobre cualquier clase de funciones complejas parcialmente derivables y definidas en cualquier abierto Ω de $\mathbb{C}$; $\partial^k/\partial z^k$ representará a su iteración k-veces. Recordemos que si f_1 y f_2 son, respectivamente, la parte real y la parte imaginaria de f, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + i\,\frac{\partial f_2}{\partial x}\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f_1}{\partial y} + i\,\frac{\partial f_2}{\partial y}\ .$$

Si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ y $a \in \Omega$, es claro que

$$\frac{\partial^k f}{\partial z^k}\,(a) = f^{(k)}\,(a)\ ,$$

en donde $f^{(k)}(a)$ representa a la k-ésima derivada compleja de f en a. Debe entenderse, sin embargo, que $\partial^k/\partial z^k$ opera, en general, sobre una clase más amplia de funciones que la $\mathcal{O}(\Omega)$.

Si $P(z, \partial/\partial z)$ esta dado por (0.1), denotaremos sistemáticamente con n_k al grado del polinomio p_k, cuando $p_k \neq 0$; y si Ω es un abierto de $\mathbb{C}$, $\eta(p_k, \Omega)$ denotará el número de raíces de p_k en Ω, contadas las multiplicidades. Simbolizaremos con P al operador diferencial de $\mathcal{O}(\Omega)$ en sí mismo definido por $P(z,\partial/\partial z)$. Es decir,

$$Pf(z) = \sum_{k=o}^{n} p_k(z) \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(z) \qquad (0.2)$$

para toda $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ y toda $z \in \mathbb{C}$. Un resultado que supondremos conocido es el siguiente: Si Ω es un abierto conexo de $\mathbb{C}$ tal que $\dim H^1(\Omega,\mathbb{C}) = b_1 < \infty$ en donde $H^1(\Omega, \mathbb{C})$ es el primer grupo de cohomología de Ω de coeficientes en $\mathbb{C}$, entonces P es un operador de Fredholm, en el sentido de que satisface

$$\dim_{\mathbb{C}} \ker P < \infty, \ \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{coker} P < \infty \ , \quad y,$$

además, de que es contínuo con imagen, ImP, cerrada en $\mathcal{O}(\Omega)$ para la topología de la convergencia compacta (v. [4]). Además, el índice de P: Ind $P =$ = dim ker P - dim coker P, está dado por

$$\operatorname{Ind} P = n(1-b_1) - \eta(p_n, \Omega). \qquad (0.3)$$

Para una demostración de este resultado, veánse [1] o [3] . Nótese que si Ω es simplemente conexo, se cumple que

$$\text{Ind } P = n - \eta(p_n,\Omega); \qquad (0.4)$$

si además todas las raíces de p_n estan en Ω, (0.4) toma la forma

$$\text{Ind } P = n - n_n \, . \qquad (0.5)$$

A lo largo del texto introduciremos otras notaciones, a medida que surja la necesidad de ellas.

§ 1. Operadores sobre los polinomios.

En esta sección consideraremos un polinomio diferencial

$$P(z, \partial/\partial z) = \sum_{k=o}^{n} p_k(z)\, \partial^k/\partial z^k \; ,$$

donde cada p_k es el polinomio nulo o un polinomio en $\mathbb{C}[z]$ con grado n_k. Supondremos $p_n \neq 0$. Denotaremos con $\mathbb{C}_m[z]$ al subespacio de $\mathbb{C}[z]$ formado por los polinomios de grado a lo sumo m.
Sea p el máximo de las diferencias $n_k - k$, $k = 0,1,2,\ldots,n$, $p_k \neq 0$, y sea

$$\dot{P}_m : \mathbb{C}_m[z] \to \mathbb{C}_{m+p}[z] \qquad (1.1)$$

el operador diferencial definido por $P(z,\partial/\partial z)$.
Claramente $\dot{P}_m$ es un operador con índice(*) y es

(*) Si E y F son de dimensión finita y L : E → F es lineal, Ind L = dim E - dim F.

te índice es

$$\mathrm{Ind}\ \dot{P}_m = m + 1 - (m+p+1) = -p \qquad (1.2)$$

Puesto que $\dot{P}_m = \dot{P}_{m+1} \,|\, \mathbb{C}_m[z]$, entonces $\ker \dot{P}_m \subseteq \ker \dot{P}_{m+1}$ para todo m. Por lo tanto,

$$\overrightarrow{\lim_{m\to\infty}} \ker \dot{P}_m = \bigcup_{m=o}^{\infty} \ker \dot{P}_m . \qquad (1.3)$$

Por otra parte:

<u>Lema</u> 1.1. Si $\dot{P}_m : \mathbb{C}_m[z] \to \mathbb{C}_{m+p}[z]$ esta dado como antes, existe m_o tal que, para todo $m \geqslant m_o$, $\operatorname{coker} \dot{P}_m \subseteq \operatorname{coker} \dot{P}_{m+1}$ y, por lo tanto,

$$\lim_{m\to\infty} \operatorname{coker} \dot{P}_m = \bigcup_{m=m_o}^{\infty} \operatorname{coker} \dot{P}_m . \qquad (1.4)$$

<u>Demostración</u>: Para todo $m \geqslant 0$ consideremos la a plicación lineal

$$\psi_m : \mathbb{C}_{m+p}[z]/\mathrm{Im}\ \dot{P}_m \to \mathbb{C}_{m+1+p}[z]\ /\mathrm{Im}\ \dot{P}_{m+1}$$

obtenida de la inclusión por paso a los cocientes. Que ψ_m está definida es claro, puesto que $\mathrm{Im}\ \dot{P}_m \subseteq \mathrm{Im}\ \dot{P}_{m+1}$. Verificar la afirmación equivale a verificar que ψ_m es inyectiva para todo m suficientemente grande, o, lo que es lo mismo, que para m lo suficiente grande,

$$\mathrm{Im}\ \dot{P}_m = \mathbb{C}_{m+p}[z] \cap \mathrm{Im}\ \dot{P}_{m+1} . \qquad (1.5)$$

En tal caso, $\operatorname{coker} \dot{P}_m$ puede considerarse como un subespacio de coker $\dot{P}_{m+1}$. Como evidentemente $\operatorname{Im}\dot{P}_m \subseteq \mathbb{C}_{m+p}[z] \cap \operatorname{Im}\dot{P}_{m+1}$, basta demostrar que $\mathbb{C}_{m+p}[z] \cap \operatorname{Im}\dot{P}_{m+1} \subseteq \operatorname{Im}\dot{P}_m$. Sean $f(z) \in \mathbb{C}_{m+1}[z]$ y $g(z) = \dot{P}_{m+1}(f(z)) \in \mathbb{C}_{m+p}[z]$. Escribamos $f(z) = r(z) + b_{m+1} z^{m+1}$, donde $r(z) \in \mathbb{C}_m[z]$. Entonces

$$\dot{P}_{m+1}(b_{m+1} z^{m+1}) =$$

$$= b_{m+1} \{ \sum_{n_k - k = p} a_k \frac{(m+1)!}{(m+1-k)!} z^{m+1+p} \} + q(z) ,$$

donde $q(z)$ tiene grado a lo más $m+p$ y donde los a_k están en $\mathbb{C}$, con a_k independiente de m. La condición de que $g(z) \in \mathbb{C}_{m+p}[z]$ implica que

$$b_{m+1} (\sum_{n_k - k = p} a_k \frac{(m+1)!}{(m+1-k)!} z^{m+1+p}) = 0 .$$

Sea ℓ el máximo de los k tales que $a_k \neq 0$ y $n_k - k = p$. Si $\ell = 0$, es claro que $b_{m+1} = 0$. Supongamos entonces que $\ell \geq 1$ y veamos que

$$\lim_{m\to\infty} \left| \sum_{n_k - k = p} a_k \frac{(m+1)!}{(m+1-k)!} \right| = + \infty .$$

En efecto

$$\left| \sum_{n_k - k = p} a_k \frac{(m+1)!}{(m+1-k)!} \right| \geq |a_\ell| \frac{(m+1)!}{(m+1-\ell)!} -$$

$$- \sum_{\substack{n_k - k = p \\ k < \ell}} |a_k| \frac{(m+1)!}{(m+1-k)!} = \frac{(m+1)!}{(m+1-\ell)} \{ \, |a_\ell| -$$

$$- \sum_{\substack{n_k - k = p \\ k < \ell}} |a_k| \frac{(m+1-\ell)!}{(m+1-k)!} \} .$$

Como evidentemente

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{\substack{n_k - k = p \\ k < \ell}} |a_k| \frac{(m+1-\ell)!}{(m+1-k)!} = 0 \quad ,$$

el término de la derecha tiende a $+\infty$ cuando $m \to \infty$. Se deduce que si m es lo suficientemente grande, $b_{m+1} = 0$, de lo cual, $f \in \mathbb{C}_m[z]$. De esto $g(z) \subset \operatorname{Im} \dot{P}_m$, y el lema queda demostrado.

__Teorema__ 1.1. Sea $\overset{\circ}{P} : \mathbb{C}[z] \to \mathbb{C}[z]$ el operador definido por $P(z, \partial/\partial z)$. Entonces $\dot{P}$ es un operador con índice y éste índice es

$$\operatorname{Ind} \overset{\circ}{P} = - \max_{o \leqslant k \leqslant n} (n_k - k) \tag{1.6}$$

__Demostración__. Sea $p = \max\limits_{o \leqslant k \leqslant n} (n_k - k)$ y para cada $m \geqslant 0$ sea $\dot{P}_m : \mathbb{C}_m[z] \to \mathbb{C}_{m+p}[z]$ el operador (1.1) La sucesión exacta

$$0 \to \ker \dot{P} \to \mathbb{C}[z] \xrightarrow{\dot{P}} \mathbb{C}[z] \to \operatorname{coker} \dot{P} \to 0$$

es evidentemente la sucesión límite inductivo de las sucesiones exactas

$$0 \to \ker \dot{P}_m \to \mathbb{C}_m[z] \xrightarrow{P_m} \mathbb{C}_{m+p}[z] \to \operatorname{coker} \dot{P}_m \to 0,$$

pues es claro que $\dot{P} = \varinjlim \dot{P}_m$. Ahora, si

$\dot{P}: \mathcal{O}(\mathbb{C}) \to \mathcal{O}(\mathbb{C})$ es el operador sobre $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ definido por $P(z,\partial/\partial z)$, $\dot{P}$ es un operador con índice. Como $\ker \dot{P}_m \subseteq \ker \dot{P}_{m+1} \subseteq \ker \dot{P}$, existen p_o y m_o tales que

$$\dim \ker \dot{P}_m = p_o$$

para todo $m \geqslant m_o$. Además,

$$\ker \dot{P} = \varinjlim_{m\to\infty} \ker \dot{P}_m = \bigcup_{m=o}^{\infty} \ker \mathring{P}_m$$

Por lo tanto

$$\dim \ker \dot{P} = p_o$$

Es claro también que

$$\dim \operatorname{coker} \dot{P}_m = p_o + p$$

para $m \geqslant m_o$. Tomemos m_o lo suficientemente grande de de modo que

$$\operatorname{coker} \dot{P} = \lim_{m\to\infty} \operatorname{coker} \dot{P}_m = \bigcup_{m=m_o}^{\infty} \operatorname{coker} \mathring{P}_m .$$

Se deduce que

$$\dim \operatorname{coker} \dot{P} = p_o + p \quad ,$$

de lo cual $\dot{P}$ es un operador con índice y este índice es

$$\operatorname{Ind} \dot{P} = p_o - (p_o + p) = - p .$$

El teorema está demostrado.

<u>Nota</u>: Bajo la hipótesis del teorema, es claro que si Ω es un abierto conexo, no vacío de $\mathbb{C}$ y $\Omega[z]$ es el conjunto de las restricciones a Ω de los po-

linomios en $\mathbb{C}[z]$, $\dot{P}$, considerado como un operador de $\Omega[z]$ en sí mismo, es un operador con índice y este índice es aún $-\max_{o\leq k\leq n}(n_k - k)$.

<u>Definición</u>: Sean Ω un abierto conexo de $\mathbb{C}$ y

$$P(z, \partial/\partial z) = \sum_{k=o}^{n} p_k(z)\, \partial^k/\partial z^k$$

Un polinomio diferencial. Diremos que $P(z,\partial/\partial z)$ es normal sobre Ω, si todas las raíces de $p_n(z)$ en $\mathbb{C}$ están contenidas en Ω y si, además $\max_{o\leq k\leq n}(n_k-k)=n_n-n$. En tal caso diremos también que el operador $P:\mathcal{O}(\Omega)\to \mathcal{O}(\Omega)$ definido por $P(z,\partial/\partial z)$ es normal.

<u>Teorema</u> 1.2. Sea Ω un abierto conexo de $\mathbb{C}$ con $b_1 = \dim(H^1(\Omega,\mathbb{C}))<\infty$. Sea $\bar{P}:\mathcal{O}(\Omega)/\Omega[z] \to \mathcal{O}(\Omega)/\Omega[z]$ el operador obtenido de $P(z,\partial/\partial z)$ por paso a los cocientes. Entonces $\bar{P}$ es un operador con índice y este índice es

$$\operatorname{Ind} \bar{P} = n(1-b_1)-\eta(P_n,\Omega)+\max_{o\leq k\leq n}(n_k-k) \qquad (1.7)$$

Aquí, $\eta(P_n,\Omega)$es, contadas las multiplicidades, el número de ceros de p_n en Ω.

<u>Demostración</u>. Es claro que $\bar{P}$ esta bien definido, pues $P(\Omega[z])\subseteq\Omega[z]$. Sean $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, respectivamente, los complejos de cocadenas $0 \to \Omega[z] \xrightarrow{\dot{P}} \Omega[z] \to 0$, $0 \to \mathcal{O}(\Omega) \xrightarrow{P} \mathcal{O}(\Omega) \to 0$ y $0 \to \mathcal{O}(\Omega)/\Omega[z] \xrightarrow{\bar{P}} \mathcal{O}(\Omega)/\Omega[z] \to 0$.

La conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \Omega[z] & \to & \mathcal{O}(\Omega) & \to & \mathcal{O}(\Omega)/\Omega[z] & \to & 0 \\
 & & \downarrow\dot{P} & & \downarrow P & & \downarrow\overline{P} & & \\
0 & \to & \Omega[z] & \to & \mathcal{O}(\Omega) & \to & \mathcal{O}(\Omega)/\Omega[z] & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array},$$

en el cual las aplicaciones no nombradas son las naturales, indica que se tiene una sucesión exacta de complejos de cocadenas

$$0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to 0 .$$

La sucesión exacta de cohomología correspondiente es evidentemente (v. [5]),

$$0\to\ker \dot{P}\to\ker P\to\ker \overline{P}\to\operatorname{coker} \dot{P}\to\operatorname{coker} P\to\operatorname{coker} \overline{P}\to 0.$$

Se deduce inmediatamente que $\ker \overline{P}$ y $\operatorname{coker} \overline{P}$ son de dimensión finita, y que $\operatorname{Ind} \dot{P} - \operatorname{Ind} P + \operatorname{Ind} \overline{P} = 0$. Como $\operatorname{Ind} \dot{P} = -\max (n_k-k)$ e $\operatorname{Ind} P = n(1-b_1) - \eta(P_n,\Omega)$, el teorema está demostrado.

Corolario. Si el operador $\dot{P}$ es normal, entonces

$$\operatorname{Ind} \overline{P} = - nb_1 \tag{1.8}$$

Si además Ω es simplemente conexo, entonces,

$$\operatorname{Ind} \overline{P} = 0.$$

Si Ω es simplemente conexo, se puede decir más. Necesitaremos antes del siguiente Lema:

Lema 1.2. Bajo las hipótesis del teorema 1.2, si Ω es simplemente conexo, $\overline{P}:\mathcal{O}(\Omega)/\Omega[z] \to \mathcal{O}(\Omega)/\Omega[z]$

es sobreyectivo. Es decir, $\operatorname{coker} \overline{P} = 0$.

<u>Demostración</u>. Claramente

$$\operatorname{Im} \overline{P} = \frac{\operatorname{Im} P + \Omega[z]}{\Omega[z]} .$$

Por otra parte, $\mathring{P}$ es un operador con índice. Por lo tanto, $\Omega[z] = \operatorname{Im} \mathring{P} + N$, donde $\dim N < \infty$. Se deduce que

$$\operatorname{Im} \overline{P} = \frac{\operatorname{Im} P + N}{\Omega[z]} .$$

Pero P es un operador de Fredholm. Por lo tanto, Im P e Im P + N son cerrados en $\mathcal{O}(\Omega)$. Pero $\operatorname{Im} P + N \supseteq \Omega[z]$ y Ω es simplemente conexo. Del teorema de Runge (v. [2], Cap. I) se deduce entonces que $\operatorname{Im} P + N = \mathcal{O}(\Omega)$, y, de esto, la afirmación.

<u>Teorema</u> 1.3. Sea Ω un abierto simplemente conexo de $\mathbb{C}$. Las proposiciones siguientes son equivalentes:

(1) P es normal.

(2) $\ker \overline{P} = 0$.

(3) La cohomología del complejo

$$0 \to \mathcal{O}(\Omega)/\Omega[z] \xrightarrow{\overline{P}} \mathcal{O}(\Omega)/\Omega[z] \to 0$$

es nula.

(4) Si $g \in \mathbb{C}[z]$, toda solución holomorfa en Ω de la ecuación $Pf = g$ es un polinomio.

<u>Demostración</u>: (1) implica (2): Debido a que P es

normal y a que Ω es simplemente conexo, se sigue que $\operatorname{Ind} \overline{P} = 0$ y que $\operatorname{coker} \overline{P} = 0$. Por lo tanto $\ker \overline{P} = 0$.

(2) implica (3): Como $\ker \overline{P} = 0$ y Ω es simplemente conexo, $\operatorname{coker} \overline{P} = 0$, así que la cohomología del complejo

$$0 \to \mathcal{O}(\Omega)/\Omega[z] \xrightarrow{\overline{P}} \mathcal{O}(\Omega)/\Omega[z] \to 0$$

es nula

(3) implica (4): Sean $Pf = g$ y $g \in \mathbb{C}[z]$. Entonces $\overline{Pf} = 0$, de lo cual $\overline{f} \in \ker \overline{P}$. Pero la cohomología del complejo

$$0 \to \mathcal{O}(\Omega)/\Omega[z] \xrightarrow{\overline{P}} \mathcal{O}(\Omega)/\Omega[z] \to 0$$

es nula. Por lo tanto $\overline{f} = 0$; es decir, $f \in \mathbb{C}[z]$.

(4) implica (1): La condición (4) implica que $\ker \overline{P} = 0$. Teniendo en cuenta que Ω es simplemente conexo, se deduce que $\operatorname{Ind} \overline{P} = 0$. Por lo tanto, $\max (n_k - k) = \eta(P_n, \Omega) - n$. Si fuera $n_n \neq \eta(P_n, \Omega)$, necesariamente $\eta(P_n, \Omega) - n < n_n - n \leq \max (n_k - k)$, lo cual es absurdo. Por lo tanto, $n_n = \eta(P_n, \Omega)$.

Corolario. Si Ω es simplemente conexo y P es normal, toda solución holomorfa en Ω de la ecuación homogénea $Pf = 0$ es un polinomio.

§ 2. Operadores sobre las funciones racionales.

En este capítulo consideraremos nuevamente un polinomio diferencial

$$P(z,\partial/\partial z) = \sum_{k=o}^{n} p_k(z)\partial^k/\partial z^k ,$$

donde cada p_k es el polinomio nulo o un polinomio en $\mathbb{C}[z]$ con grado n_k. Supondremos además que $p_n \neq 0$. Si A es un subconjunto finito de $\mathbb{C}$, denotaremos con $\mathcal{R}(A)$ al subespacio de $\mathbb{C}(z)$ de las funciones racionales con polos a lo más en A. Escribiremos también $\mathcal{R}(a) = \mathcal{R}(\{a\})$. Estudiaremos primero el caso de los operadores diferenciales $\tilde{P} : \mathcal{R}(a) \to \mathcal{R}(a)$ definidos por $P(z,\partial/\partial z)$. Es obviamente suficiente estudiar el caso $a = 0$. Si $m,\ m' \geqslant 0$, denotaremos con $\mathcal{R}(-m,\ m')\ (0)$ al subespacio de $\mathcal{R}(0)$ generado por las funciones z^k, $-m \leqslant k \leqslant m'$. Sean $p = \max\ \{(n_k-k)\,|\,p_k \neq 0\}$ y $q = \min\ \{\eta(p_k,0)-k\,|\,p_k \neq 0\}$. Aquí $\eta(p_k,0)$ es el orden del cero que p_k tiene en 0, para $k = 0,1,\ldots,n$ y $p_k \neq 0$. Sea

$$\tilde{P}_m : \mathcal{R}_{(-m,m)}(0) \to \mathcal{R}_{(-m+q,m+p)}(0) \tag{2.1}$$

el operador diferencial definido por $P(z,\partial/\partial z)$. Claramente $\tilde{P}_m$ es un operador con índice, dado por

$$\operatorname{Ind} \tilde{P}_m = m+(m+1) - (m-q+m+p+1) = -(p-q). \tag{2.2}$$

Además, puesto que $\tilde{P}_m = \tilde{P}_{m+1}|R_{(-m,m)}(0)$, entonces $\ker \tilde{P}_m \subseteq \ker \tilde{P}_{m+1}$. Por lo tanto,

$$\varinjlim_{m\to\infty} \ker \tilde{P}_m = \bigcup_{m=0}^{\infty} \ker \tilde{P}_m . \tag{2.3}$$

por otra parte:

<u>Lema</u> 2.1 Con los $\tilde{P}_m$ dados como antes, existe m_0 tal que si $m \geq m_0$ entonces $\operatorname{coker} \tilde{P}_m \subseteq \operatorname{coker} \tilde{P}_{m+1}$. Por lo tanto

$$\varinjlim_{m\to\infty} \operatorname{coker} \tilde{P}_m = \bigcup_{m=m_0}^{\infty} \operatorname{coker} \tilde{P}_m . \tag{2.4}$$

<u>Demostración</u>: Comenzaremos por demostrar que para todo m lo suficientemente grande,

$$\operatorname{Im} \tilde{P}_m = \operatorname{Im} \tilde{P}_{m+1} \cap R_{(-m+q,m+p)}(0) . \tag{2.5}$$

Como la otra inclusión es evidente, basta demostrar que : $\operatorname{Im} \tilde{P}_{m+1} \cap R_{(-m+q,m+p)}(0) \subseteq \operatorname{Im} \tilde{P}_m$.

Sean entonces $f \in R_{(-m-1,m+1)}(0)$ y $g = \tilde{P}_{m+1} f \in R_{(-m+q,m+p)}(0)$. Escribamos $f(z) = s(z) + r(z)$, donde $s(z)$ y $r(z)$ son, respectivamente, la parte singular y la parte regular de f. La demostración del Lema 1.1 asegura que, para m suficientemente grande, $r(z)$ es un polinomio de grado a lo sumo m. Supongamos que

$$s(z) = \sum_{k=1}^{m+1} b_k z^{-k} .$$

Entonces

$$\tilde{P}_{m+1}(s(z)) = b_{m+1}\Big\{ \sum_{\eta(p_k,0)-k=q} (-1)^k \cdot \frac{(m+k)!}{m!} a_k\, z(m+1-q) \Big\} + \hat{s}(z)$$

donde los $a_k \in \mathbb{C}$ y $\hat{s}(\frac{1}{z})$ tiene grado a lo sumo $m-q$. Sea ℓ el máximo de los k tales que $a_k \neq 0$ y $\eta(p_k,0)-k = q$. Si $\ell = 0$, es claro que $b_{m+1} = 0$. Supongamos $\ell \geqslant 1$. Veamos que

$$\lim_{m\to\infty} \Big| \sum_{\eta(p_k,0)-k=q} (-1)^k \frac{(m+k)!}{m!} a_k \Big| = +\infty.$$

Pero

$$\Big| \sum_{\eta(p_k,0)-k=q} (-1)^k \frac{(m+k)!}{m!} a_k \Big| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{(m+\ell)!}{m!} \Big\{ |a_\ell| - \sum_{\substack{\eta(p_k,0)-k=q \\ k<\ell}} |a_k| \frac{(m+k)!}{(m+\ell)!} \Big\}$$

Como evidentemente

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{\substack{\eta(p_k,0)-k=q \\ k<\ell}} |a_k| \frac{(m+k)!}{(m+\ell)!} = 0 ,$$

el término de la derecha tiende a $+\infty$ cuando $m\to\infty$. Se deduce que si m es lo suficientemente grande entonces $b_{m+1} = 0$ de lo cual $f \in R_{(-m,m)}(0)$; de esto, $g \in \operatorname{Im} \tilde{P}_m$. Esto demuestra la igualdad (2.5). La aplicación φ_m : coker $\tilde{P}_m \to$ Coker $\tilde{P}_{m+1}$, obtenida de la inclusión

$$R_{(-m+q,m+p)}(0) \to R_{(-m-1+q,m+p+1)}(0)$$

por paso a los cocientes, es entonces inyectiva. El lema queda demostrado.

Teorema 2.1. Sea $\tilde{P} : R(0) \to R(0)$ el operador definido por $P(z,\partial/\partial z)$ sobre las funciones racionales complejas con polos a lo sumo en 0. Entonces $\tilde{P}$ es un operador con índice y este índice es

$$\operatorname{Ind} \tilde{P} = -(\max_{0\leqslant k\leqslant n} (n_k-k) - \min_{0\leqslant k\leqslant n} (\eta(p_k,0)-k)), \qquad (2.6)$$

donde el máximo y el mínimo se toman sobre los $p_k \neq 0$.

Demostración. Como antes, sean $p=\max\{(n_k-k)|p_k\neq 0\}$, $q = \min\{(\eta(p_k,0)-k)|p_k\neq 0\}$, y para cada $m \geqslant 0$ sea $\tilde{P}_m : R_{(-m,m)}(0) \to R_{(-m+q,n+p)}(0)$ el operador (2.1). Es claro que $\tilde{P} = \varinjlim \tilde{P}_m$ y que la sucesión exacta

$$0 \to \ker \tilde{P} \to R(0) \xrightarrow{\tilde{P}} R(0) \to \operatorname{coker} \tilde{P} \to 0$$

es la sucesión límite inductiva de las sucesiones exactas

$$0 \to \ker \tilde{P}_m \to R_{(-m,m)}(0) \xrightarrow{\tilde{P}_m} R_{(-m+q,m+p)}(0) \to$$
$$\to \operatorname{coker} \tilde{P}_m \to 0.$$

Si $P:\mathcal{O}(\mathbb{C} -\{0\}) \to \mathcal{O}(\mathbb{C} -\{0\})$ es el operador sobre $\mathcal{O}(\mathbb{C} -\{0\})$ definido por $P(z,\partial/\partial z)$, P es un operador con índice. Como $\ker \tilde{P}_m \subset \ker \tilde{P}_{m+1} \subset \dots \ker P$, existen p_o y m_o tales que

$$\dim \ker \tilde{P}_m = p_o$$

para todo $m \geq m_o$. Además

$$\ker \tilde{P} = \varinjlim_{m\to\infty} \ker \tilde{P}_m = \bigcup_{m=o}^{\infty} \ker \tilde{P}_m \quad ,$$

y, por lo tanto,

$$\dim \ker \tilde{P} = p_o \; .$$

Es claro también que

$$\dim \operatorname{coker} \tilde{P}_m = p_o + (p-q)$$

para $m \geq m_o$. Como además

$$\operatorname{coker} \tilde{P} = \varinjlim_{m\to\infty} \operatorname{coker} \tilde{P}_m = \bigcup_{m=m_o}^{\infty} \operatorname{coker} \tilde{P}_m$$

se deduce que

$$\dim \operatorname{coker} \tilde{P} = p_o + (p-q)$$

de lo cual $\tilde{P}$ es un operador con índice y este índice es

$$\operatorname{Ind} \tilde{P} = p_o - (p_o + (p-q)) = -(p-q).$$

El teorema está demostrado.

<u>Nota 1</u>. La afirmación del teorema es válida con $R(a)$ en lugar de $R(0)$, cualquiera sea $a \in \mathbb{C}$.

<u>Nota 2</u>. De la misma manera que antes, si Ω es un abierto conexo de $\mathbb{C}$, $0 \in \Omega$, y $R_o(\Omega)$ es el conjunto de las restricciones a Ω de las funciones

racionales con polos a lo más en 0, $\tilde{P}$, considerado como un operador de $R_o(\Omega)$ en $R_o(\Omega)$, es un operador con índice y este índice vale $-(\max\limits_{o\leq k\leq n}(n_k-k) - \min\limits_{o\leq k\leq n}(\eta(p_k,0)-k))$. Lo mismo es cierto con $R_a(\Omega)$, conjunto de las restricciones a Ω de las funciones racionales con polos a lo sumo en $a\in\Omega$, en lugar de $R_o(\Omega)$.

En lo que sigue, usaremos el siguiente lema bien conocido.

<u>Lema</u> 2.2. Sea $f\in M_A(\Omega)$, donde $M_A(\Omega)$ es el espacio de las funciones meromorfas en Ω con polos a lo sumo en A, $A = \{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$. Entonces $f(z)$ se escribe, de manera única, en la forma

$$f(z) = g(z) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j>o} \frac{a_{jk}}{(z-a_k)^j}, \quad z\in\Omega \qquad (2.7)$$

donde $g\in \mathcal{O}(\Omega)$, $a_{jk}\in\mathbb{C}$ y $a_{jk} = 0$ salvo para un número finito de índices j. Si además f es racional, entonces $g(z)$ es un polinomio.

<u>Corolario</u> 1.: La aplicación

$$\psi : \bigoplus_{k=1}^{n} M_{a_k}(\Omega) \to M_A(\Omega),$$

dada por

$$\psi(f_1,f_2,\ldots,f_n) = f_1+f_2+\ldots+f_n$$

y la

$$\varphi : \bigoplus_{k=1}^{n} R_{a_k}(\Omega) \to R_A(\Omega),$$

dada por

$$\psi(f_1, f_2, \ldots, f_n) = f_1 + \ldots + f_n,$$

son ambas sobreyectivas.

<u>Demostración</u>: Dada $f \in M_A(\Omega)$ tenemos, de acuerdo con el lema 2.2, que

$$f(z) = g(z) + \sum_{j=1}^{n(a_1)} \frac{a_{j1}}{(z-a_1)^j} + \ldots + \sum_{j=1}^{n(a_n)} \frac{a_{jn}}{(z-a_n)^j}$$

con $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ y los $a_{jk} \subset \mathbb{C}$. Basta entonces tomar

$$f_1(z) = g(z) + \sum_{j=1}^{n(a_1)} \frac{a_{j1}}{(z-a_1)^j}$$

y

$$f_k(z) = \sum_{j=1}^{n(a_k)} \frac{a_{jk}}{(z-a_k)^j} \qquad \text{para} \quad k \geqslant 2,$$

para tener que $\psi(f_1, \ldots, f_n) = f$. Igualmente se demuestra que φ es sobreyectiva.

<u>Corolario 2</u>. $M_A(\Omega)/R_A(\Omega)$ es isomorfo a $\mathcal{O}(\Omega)/\mathbb{C}[z]$

<u>Demostración</u>: Sea

$$\psi : \mathcal{O}(\Omega)/\mathbb{C}[z] \to M_A(\Omega)/R_A(\Omega)$$

la aplicación obtenida de la inclusión por paso a los cocientes. Es claro que ψ es inyectiva, pues si $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$ y $f-g \in R_A(\Omega)$, entonces $f-g \in \mathbb{C}[z]$; es decir, $f+\mathbb{C}[z] = g+\mathbb{C}[z]$; y ψ es sobreyectiva, pues si, $f \in M_A(\Omega)$ tenemos, de acuerdo con el lema 2.2, que

$$f(z) = g(z) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n(a_k)} \frac{a_{jk}}{(z-a_k)^j}$$

con $g \in \mathcal{O}(\Omega)$, de lo cual $f(z) + R_A(\Omega) = g(z) + R_A(\Omega)$. Por lo tanto, $\psi(g(z) + \mathbb{C}[z]) = f(z) + R_A(\Omega)$.

<u>Teorema</u> 2.2. Sean $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ y $\tilde{P} : R_A(\Omega) \to R_A(\Omega)$ el operador definido por $P(z, \partial/\partial z)$ sobre las funciones racionales en Ω con polos a lo sumo en A. Entonces $\tilde{P}$ es un operador con índice y este índice es

$$\operatorname{Ind} \tilde{P} = -\text{máx}(n_k - k) + \sum_{j=1}^{n} \text{mín}(\eta(p_k, a_j) - k), \qquad (2.8)$$

donde el máximo y el mínimo se toman sobre los $p_k \neq 0$.

<u>Demostración</u>: Procederemos por inducción sobre n. Para $n = 1$, es el teorema 2.1. Supongamos el teorema válido para $A' = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$. Consideremos los complejos $\mathcal{Y} : 0 \to \mathbb{C}[z] \xrightarrow{P} \mathbb{C}[z] \to 0$,

$$\mathcal{Y}' : 0 \to R_{A'}(\Omega) \oplus R_{a_n}(\Omega) \xrightarrow{Q} R_{A'}(\Omega) \oplus R_{a_n}(\Omega) \to 0 \quad \text{y}$$

$$\mathcal{Y}'' : 0 \to R_A(\Omega) \xrightarrow{\tilde{P}} R_A(\Omega) \to 0 ,$$

donde $Q = \tilde{P}_o \oplus \tilde{P}_n$, $\tilde{P}_o$ y $\tilde{P}_n$ dados de la manera obvia.

De la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathbb{C}[z] & \xrightarrow{\tau} & R_{A'}(\Omega) \oplus R_{a_n}(\Omega) & \xrightarrow{\varphi} & R_A(\Omega) & \to & 0 \\
 & & \downarrow \dot{P} & & \downarrow Q & & \downarrow \tilde{P} & & \\
0 & \to & \mathbb{C}[z] & \xrightarrow{\tau} & R_{A'}(\Omega) \oplus R_{a_n}(\Omega) & \xrightarrow{\varphi} & R_A(\Omega) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array},$$

en el cual $\tau(p(z)) = (p(z)), - p(z))$, se deduce la exactitud de la sucesión de complejos de cocadenas

$$0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{F}' \to \mathcal{G}' \to 0$$

La correspondiente sucesión exacta de cohomología es

$$0 \to \ker \dot{P} \to \ker Q \to \ker \tilde{P} \to \operatorname{coker} \dot{P} \to \operatorname{coker} Q \to \operatorname{coker} \tilde{P} \to 0$$

de la cual se deduce que $\ker \tilde{P}$ y $\operatorname{coker} \tilde{P}$ son de dimensión finita y que $\operatorname{Ind} \dot{P} - \operatorname{Ind} Q + \operatorname{Ind} \tilde{P} = 0$. Por la hipótesis de inducción y por el teorema 2.1, $\operatorname{Ind} Q = -\max(n_k-k) + \sum_{j=1}^{n-1} \min(\eta(p_k,a_j)-k) - \max(n_k-k) + \min((p_k,a_n)-k)$. Como $\operatorname{Ind} \dot{P} = -$ $- \max(n_k-k)$, el teorema está demostrado.

§3 Operadores sobre las Funciones Meromorfas.

En esta sección consideraremos los operadores definidos por el polinomio diferencial $P(z,\partial/\partial z)$ sobre las funciones meromorfas en un abierto conexo Ω de $\mathbb{C}$, con polos en a lo más un subconjunto finito A de Ω. Si $0\in\Omega$, denotaremos con $R_o(\Omega)$ al espacio de las restricciones a Ω de las funciones racionales con polos a lo más en 0, con $M_o(\Omega)$ al de las funciones meromorfas en Ω con polos a lo más en 0 y con $M_A(\Omega)$ a las funciones meromorfas en Ω con polos a lo más en A. Además $M_a(\Omega) = M_{\{a\}}(\Omega)$.

Teorema 3.1. Sean $A = \{a_1,a_2,\ldots,a_r\}$ y $\hat{P} : M_A(\Omega) \to M_A(\Omega)$ el operador obtenido de $P(z,\partial/\partial z)$ sobre las funciones meromorfas en Ω con polos a lo sumo en A. Entonces $\hat{P}$ es un operador con índice y este índice es

$$\operatorname{Ind}\hat{P} = n(1-b_1)-\eta(p_n,\Omega) + \sum_{j=1}^{r} \text{mín}\ (\eta(p_k,a_j)-k).$$

El mínimo se ha tomado sobre los $p_k \neq 0$.

Demostración. Si $\bar{\hat{P}} : M_A(\Omega)/R_A(\Omega) \to M_A(\Omega)/R_A(\Omega)$ es el operador obtenido de $\hat{P}$ por paso a los cocientes, del corolario 2 del lema 2.2. tenemos que $M_A(\Omega)/R_A(\Omega)$ es isomorfo a $\mathcal{O}(\Omega)/\mathbb{C}[z]$. Por lo tanto, $\bar{\hat{P}}$ es un operador con índice y este índice es $\operatorname{Ind}\hat{P} = \operatorname{Ind}\overline{P} = n(1-b_1) - \eta(p_n,\Omega)+ \max\limits_{o\leq k\leq n} (n_k-k)$

(Teorema 1.2). Sean $\mathcal{S}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, respectivamente, los complejos $0 \to R_A(\Omega) \xrightarrow{\tilde{P}} R_A(\Omega) \to 0$,
$0 \to M_A(\Omega) \xrightarrow{\hat{P}} M_A(\Omega) \to 0$ y $0 \to \mathcal{O}(\Omega)/\mathbb{C}[z] \xrightarrow{\overline{P}} \mathcal{O}(\Omega)/\mathbb{C}[z] \to 0$

La conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & R_A(\Omega) & \to & M_A(\Omega) & \to & \mathcal{O}(\Omega)/\mathbb{C}[z] & \to & 0 \\
 & & \downarrow \tilde{P} & & \downarrow \hat{P} & & \downarrow \overline{P} & & \\
0 & \to & R_A(\Omega) & \to & M_A(\Omega) & \to & \mathcal{O}(\Omega)/\mathbb{C}[z] & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

asegura que la sucesión de complejos

$$0 \to \mathcal{S} \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to 0$$

es exacta. La sucesión exacta de cohomología correspondiente es

$0 \to \ker \tilde{P} \to \ker \hat{P} \to \ker \overline{P} \to \operatorname{coker} \tilde{P} \to \operatorname{coker} \hat{P} \to \operatorname{coker} \overline{P} \to 0$

Se concluye que $\ker \hat{P}$ y $\operatorname{coker} \hat{P}$ son de dimensión finita y que $\operatorname{Ind} \tilde{P} - \operatorname{Ind} \hat{P} + \operatorname{Ind} \overline{P} = 0$.
Como $\operatorname{Ind} \tilde{P} = -\max\limits_{0<k<n} (n_k - k) + \sum\limits_{j=1}^{r} \min\,(\eta(p_k,a_j)-k)$
e $\operatorname{Ind} \overline{P} = n(1-b_1) - \eta(p_n,\Omega) + \max\,(n_k-k)$, el teorema queda demostrado.

<u>Teorema</u> 3.2. **Sean Ω un abierto simplemente conexo de $\mathbb{C}$, A un subconjunto finito de Ω y $\overline{P}:\mathcal{O}(\Omega-A)/R_A(\Omega) \to \mathcal{O}(\Omega-A)/R_A(\Omega)$ el operador obtenido de $P(z,\partial/\partial z)=$**

$= \sum_{k=o}^{m} p_k(z)\partial^k/\partial z^k$ por paso a los cocientes. Entonces $\bar{P}$ es sobreyectivo.

<u>Demostración</u>. Claramente $\operatorname{Im} \bar{P} = \dfrac{\operatorname{Im} P + R_A(\Omega)}{R_A(\Omega)}$

Como $\tilde{P} : R_A(\Omega) \to R_A(\Omega)$ es un operador con índice, entonces $R_A(\Omega) = \operatorname{Im} \tilde{P} + N$, donde $\dim N < \infty$. Se deduce que

$$\operatorname{Im} \bar{P} = \frac{\operatorname{Im} P + N}{R_A(\Omega)}$$

Pero P es un operador de Fredholm. Por lo tanto, Im P e Im P + N son cerrados en $\mathcal{O}(\Omega-A)$. Pero $\operatorname{Im} P + N \supseteq R_A(\Omega)$. Por el Teorema de Runge (0 [2], Cap I), y dado que Ω es simplemente conexo, se deduce entonces que $\operatorname{Im} P + N = \mathcal{O}(\Omega-A)$. Esto demuestra la afirmación.

<u>Teorema</u> 3.3. Sean Ω un abierto simplemente conexo de $\mathbb{C}$, A un subconjunto finito de Ω y $\bar{P}:\mathcal{O}(\Omega-A)/M_A(\Omega) \to \mathcal{O}(\Omega-A)/M_A(\Omega)$ el operador obtenido de $P(z,\partial/\partial z) = \sum_{k=o}^{m} p_k(z)\partial^k/\partial z^k$ por paso a los cocientes. Entonces $\bar{P}$ es sobreyectivo.

<u>Demostración</u>. Claramente $\operatorname{Im} \bar{P} = \dfrac{\operatorname{Im} P + M_A(\Omega)}{M_A(\Omega)}$

Como $\hat{P} : M_A(\Omega) \to M_A(\Omega)$ es un operador con índice, entonces $M_A(\Omega) = \operatorname{Im} \hat{P} + S$, donde $\dim S < \infty$. Se deduce que

$$\operatorname{Im} \bar{P} \quad \frac{\operatorname{Im} P + S}{M_A(\Omega)}$$

Pero P es un operador de Fredholm. Por lo tanto, Im P e Im P + S son cerrados en $\mathcal{O}(\Omega-A)$. Pero $\operatorname{Im} P+S \supseteq M_A(\Omega) \supseteq R_A(\Omega)$. Por el Teorema de Runge, y dado que Ω es simplemente conexo, se concluye que

Im P+S = $\mathcal{O}(\Omega-A)$. Esto demuestra la afirmación.

Definición. Sea $P = \sum_{k=o}^{m} p_k(z) \frac{\partial^k}{\partial z^k}$ un operador diferencial con coeficientes en $\mathbb{C}[z]$, con $p_m \neq 0$ y definido en el abierto simplemente conexo Ω de $\mathbb{C}$. Se dice que un punto a de Ω es un punto singular regular de P si

$$m - \eta(p_m, a) + \min\ (\eta(p_k, a) - k) = 0$$

Teorema 3.4. Sean Ω un abierto simplemente conexo de $\mathbb{C}$, $a \in \Omega$, y $P(z,\partial/\partial z) = \sum_{k=o}^{m} p_k(z)\partial^k/\partial z^k$ un polinomio diferencial. Entonces $a \in \Omega$ es un punto singular regular de P sí, y solo si, dada $g \in M_a(\Omega)$, toda solución en $\mathcal{O}(\Omega-\{a\})$ de la ecuación $Pf = g$ es una función meromorfa con polos a lo sumo en a.

Demostración. (1) Supongamos que a es un punto singular regular de P, es decir, que $m-\eta(p_m,a) + \min\ (\eta(p_k,a) - k) = 0$. Podemos suponer $a = 0$. De la conmutatividad del diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & M_o(\Omega) & \xrightarrow{i} & \mathcal{O}(\Omega-\{0\}) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{O}(\Omega-\{0\})/M_o(\Omega) & \to & 0 \\
 & & \downarrow \hat{P} & & \downarrow P & & \downarrow \overline{P} & & \\
0 & \to & M_o(\Omega) & \xrightarrow{i} & \mathcal{O}(\Omega-\{0\}) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{O}(\Omega-\{0\})/M_o(\Omega) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

en el cual i es la inyección canónica y φ la sobreyección canónica, se deduce que la sucesión de complejos

$$0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to 0$$

donde $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ son, respectivamente $0 \to M_o(\Omega) \xrightarrow{\hat{P}} M_o(\Omega) \to 0$, $0 \to \mathcal{O}(\Omega-\{0\}) \xrightarrow{P} \mathcal{O}(\Omega-\{0\}) \to 0$ y $0 \to \mathcal{O}(\Omega-\{0\})/M_o(\Omega) \xrightarrow{\overline{P}} \mathcal{O}(\Omega-\{0\})/M_o(\Omega) \to 0$, es exacta. La correspondiente sucesión exacta de cohomología es

$0 \to \ker\hat{P} \to \ker\dot{P} \to \ker\overline{P} \to \operatorname{coker}\hat{P} \to \operatorname{coker}\dot{P} \to \operatorname{coker}\overline{P} \to 0$

Por lo tanto, ker $\overline{P}$ y coker $\overline{P}$ son de dimensión finita y, además, Ind $\hat{P}$ - Ind P + Ind $\overline{P}$ = 0. Como Ind $\hat{P} = m-\eta(p_m,\Omega)+\min(\eta(p_k,0)-k)$ e Ind P = $-\eta(p_m,\Omega-\{0\})$, entonces Ind $\overline{P} = -\eta(p_m,\Omega-\{0\}) + \eta(p_m,\Omega-\{0\})+\eta(p_m,0)-m-\min(\eta(p_k,0)-k) = -(m-\eta(p_m,0)+\min(\eta(p_k,0)-k) = 0$. Como $\overline{P}$ es sobreyectivo, entonces ker $\overline{P}$ = 0. Por lo tanto, si $f\in\mathcal{O}(\Omega-\{0\})$ es solución de la ecuación Pf = g, con $g\in M_o(\Omega)$, necesariamente $f\in M_o(\Omega)$.

(2) Supongamos ahora que dada $g\in M_o(\Omega)$, si $f\in\mathcal{O}(\Omega-\{0\})$ es solución de la ecuación Pf = g entonces $f\in M_o(\Omega)$. Es decir que ker $\overline{P}$ = 0. Como $\overline{P}$ es sobre, esto implica que Ind $\overline{P}$ = 0, o sea, que

$$0 = \text{Ind } \overline{P} = -(m-\eta(p_m,0) + \min(\eta(p_k,0)-k)),$$

Por lo tanto, 0 es un punto singular regular de P. El teorema está demostrado.

<u>Corolario</u> 1. Sea $P(z,\partial/\partial z) = \sum_{k=0}^{m} a_k z^k\partial^k/\partial z^k$, $a_k\in\mathbb{C}$. Entonces, si $g\in M_o(\Omega)$ y $f\in\mathcal{O}(\Omega-\{0\})$ es solución de la ecuación Pf = g, también $f\in M_o(\Omega)$.

<u>Demostración</u>. Basta ver que 0 es un punto singular regular de P. Pero esto es claro, pues

$$m - \eta(p_m,0) + \min(\eta(p_k,0)-k) = 0$$

<u>Corolario</u>.2. Si Ω es simplemente conexo y $a\in\Omega$ es un punto singular regular de $P(z,\partial/\partial z)$, toda solución holomorfa en $\Omega-\{a\}$ de la ecuación homo

genea $Pf = 0$ es meromorfa en Ω con todos sus polos en a.

Teorema 3.5. Sean Ω un abierto simplemente conexo de $\mathbb{C}$, $a \in \Omega$, $P(z,\partial/\partial z) = \sum_{k=0}^{m} p_k(z)\partial^k/\partial z^k$, P normal. Entonces $a \in \Omega$ es un punto singular regular de P si y sólo si, dada $g \in R_a(\Omega)$, toda solución holomorfa en $\Omega-\{a\}$ de la ecuación $Pf = g$ es una función racional con polos a lo sumo en a.

Demostración. Podemos considerar únicamente el caso $a = 0$.

(1) Supongamos que 0 es un punto singular regular de P. De la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & R_o(\Omega) & \xrightarrow{i} & \mathcal{O}(\Omega-\{0\}) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{O}(\Omega-\{0\})/R_o(\Omega) & \to & 0 \\
 & & \downarrow \tilde{P} & & \downarrow P & & \downarrow \overline{P} & & \\
0 & \to & R_o(\Omega) & \xrightarrow{i} & \mathcal{O}(\Omega-\{0\}) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{O}(\Omega-\{0\})/R_o(\Omega) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

se deduce que la sucesión de complejos

$$0 \to \mathcal{E}' \to \mathcal{F}' \to \mathcal{G}' \to 0$$

donde $\mathcal{E}'$, $\mathcal{F}'$, $\mathcal{G}'$ son, respectivamente, $0 \to R_o(\Omega) \xrightarrow{\tilde{P}} R_o(\Omega) \to 0$, $0 \to \mathcal{O}(\Omega-\{0\}) \xrightarrow{P} \mathcal{O}(\Omega-\{0\}) \to 0$ y $0 \to \mathcal{O}(\Omega-\{0\})/R_o(\Omega) \xrightarrow{\overline{P}} \mathcal{O}(\Omega-\{0\})/R_o(\Omega) \to 0$, es exacta. La sucesión exacta de cohomología correspondiente es

$$0 \to \ker\tilde{P} \to \ker P \to \ker\overline{P} \to \operatorname{coker}\tilde{P} \to \operatorname{coker} P \to \operatorname{coker}\overline{P} \to 0,$$

de donde obtenemos que $\ker\overline{P}$ y $\operatorname{coker}\overline{P}$ son de dimensión finita y que $\operatorname{Ind}\tilde{P} - \operatorname{Ind} P + \operatorname{Ind}\overline{P} = 0$. Como P es normal, $\operatorname{Ind}\tilde{P} = m-\eta(p_m,\Omega) + \min(\eta(p_k,0)-k)$, $\operatorname{Ind} P = -\eta(p_m,\Omega-\{0\})$ y 0 es un punto singular regular de P, tenemos que $\operatorname{Ind}\overline{P} = 0$. Pero $\overline{P}$ es sobreyectivo; por lo tanto, $\ker\overline{P} = 0$, así que si $f \in \mathcal{O}(\Omega-\{0\})$ es solución de $Pf = g$, con $g \in \mathcal{R}_o(\Omega)$, necesariamente $f \in \mathcal{R}_o(\Omega)$.

(2) Supongamos que toda solución en $\mathcal{O}(\Omega-\{0\})$ de la ecuación $Pf = g$, con $g \in \mathcal{R}_o(\Omega)$, es racional con polos a lo más en 0. Es decir que $\ker\overline{P} = 0$. Como $\overline{P}$ es sobreyectivo y P es normal, esto implica que

$$\operatorname{Ind}\overline{P} = 0 = -\eta(p_m,\Omega-\{0\}) - m+\eta(p_m,\Omega) -$$
$$- \min(\eta(p_k,0)-k) = -(m-\eta(p_m,0)+\min(\eta(p_k,0)-k)),$$

o sea, que 0 es un punto singular regular de P. El teorema está demostrado.

<u>Corolario</u>. Sea $P(z,\partial/\partial z) = \sum_{k=o}^{m} a_k\, z^k\partial^k/\partial z^k$, Entonces, si $g \in \mathcal{R}_o(\Omega)$. toda solución en $\mathcal{O}(\Omega-\{0\})$ de $Pf = g$ es una función racional, con polos a lo sumo en 0.

<u>Demostración</u>. Basta ver que 0 es un punto singular regular de P. Pero, dado que P es normal, $m-\eta(p_m, 0) + \min(\eta(p_k,0)-k) = 0$. El corolario esta demostrado.

Teorema 3.6. Sean Ω un abierto simplemente conexo de $\mathbb{C}$, $a\in\Omega$, $P(z,\partial/\partial z) = \sum_{k=o}^{m} p_k(z)\partial^k/\partial z^k$. si a es un punto singular regular de P y toda solución en $\mathcal{O}(\Omega-\{a\})$ de $Pf = g$ con $g\in \mathcal{R}_a(\Omega)$, es racional en Ω con polos a lo sumo en a, entonces P es normal.

Demostración. Supongamos que $a = 0$. De la conmutatividad del diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathcal{R}_o(\Omega) & \xrightarrow{i} & \mathcal{O}(\Omega-\{0\}) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{O}(\Omega-\{0\})/\mathcal{R}_o(\Omega) & \to & 0 \\
 & & \downarrow\tilde{P} & & \downarrow P & & \downarrow\overline{P} & & \\
0 & \to & \mathcal{R}_o(\Omega) & \xrightarrow{i} & \mathcal{O}(\Omega-\{0\}) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{O}(\Omega-\{0\})/\mathcal{R}_o(\Omega) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

se deduce que la sucesión de complejos

$$0 \to \mathcal{E}' \to \mathcal{F}' \to \mathcal{G}' \to 0$$

donde $\mathcal{E}'$, $\mathcal{F}'$, $\mathcal{G}'$ son, respectivamente $0 \to \mathcal{R}_o(\Omega) \xrightarrow{\tilde{P}} \mathcal{R}_o(\Omega) \to 0$, $0 \to \mathcal{O}(\Omega-\{0\}) \xrightarrow{P} \mathcal{O}(\Omega-\{0\}) \to 0$ y $0 \to \mathcal{O}(\Omega-\{0\})/\mathcal{R}_o(\Omega) \xrightarrow{\overline{P}} \mathcal{O}(\Omega-\{0\})/\mathcal{R}_o(\Omega) \to 0$, es exacta. La correspondiente sucesión exacta de cohomología es

$$0 \to \ker\tilde{P} \to \ker P \to \ker\overline{P} \to \operatorname{coker}\tilde{P} \to \operatorname{coker}P \to \operatorname{coker}\overline{P} \to 0\,,$$

de la cual se deduce que $\operatorname{Ind}\tilde{P} - \operatorname{Ind} P + \operatorname{Ind}\overline{P} = 0$. Como $\operatorname{Ind}\overline{P} = 0$, $\operatorname{Ind}\tilde{P} = -\max(n_k-k) + \min(\eta(p_k,$

0)-k) y Ind P = $-\eta(p_m,\Omega-\{0\})$, tenemos que

$$-\text{máx}(n_k-k)+\text{mín}(\eta(p_k,0)-k)+\eta(p_m,\Omega-\{0\}) = 0 .$$

Como 0 es un punto singular regular de P,

$$\text{mín } (\eta(p_k,0)-k) = \eta(p_m,0)-m ,$$

así que

$$-\text{máx}(n_k-k)+\eta(p_m,0)- m+\eta(p_m,\Omega-\{0\}) = 0,$$

o sea que

$$- \text{máx } (n_k-k) + \eta(p_m,\Omega)-m = 0$$

Si fuera $n_m > \eta(p_m,\Omega)$, se tendría que

$$-\text{máx}(n_k-k)+ \eta(p_m,\Omega)-m < -\text{máx}(n_k-k) +$$
$$n_m-m \leqslant -n_m+m+n_m - m = 0 ,$$

lo cual es absurdo. Por lo tanto, $n_m = \eta(p_m,\Omega)$ y $\text{máx}(n_k-k) = n_m-m$, en consecuencia, P es normal.

<u>Teorema</u> 3.7. Sean Ω un abierto simplemente conexo de $\mathbb{C}$ y A un subconjunto de Ω con n elementos, formado por puntos singulares regulares de $P(z,\partial/\partial z) = \sum_{k=o}^{m} p_k(z)\partial^k/\partial z^k$. Si P es normal, tenemos:

(1) Si $Pf = g$, $f\in \mathcal{O}(\Omega- A)$ y $g\in M_A(\Omega)$, entonces $f\in M_A(\Omega)$.

(2) Si $Pf = g$, $f\in \mathcal{O}(\Omega- A)$ y $g\in R_A(\Omega)$, entonces $f\in R_A(\Omega)$.

(3) Si $Pf = 0$ y $f\in \mathcal{O}(\Omega- A)$, entonces $f\in R_A(\Omega)$.

Demostración. (1) De la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & M_A(\Omega) & \xrightarrow{i} & \mathcal{O}(\Omega-A) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{O}(\Omega-A)/M_A(\Omega) & \to & 0 \\
 & & \downarrow \hat{P} & & \downarrow P & & \downarrow \overline{P} & & \\
0 & \to & M_A(\Omega) & \xrightarrow{i} & \mathcal{O}(\Omega-A) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{O}(\Omega-A)/M_A(\Omega) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

se sigue la exactitud de la sucesión de complejos

$$0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to 0$$

donde $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ son, respectivamente, $0 \to M_A(\Omega) \xrightarrow{\hat{P}} M_A(\Omega) \to 0$, $0 \to \mathcal{O}(\Omega-A) \xrightarrow{P} \mathcal{O}(\Omega-A) \to 0$, $0 \to \mathcal{O}(\Omega-A)/M_A(\Omega) \xrightarrow{\overline{P}} \mathcal{O}(\Omega-A)/M_A(\Omega) \to 0$.

La sucesión exacta de cohomología correspondiente es:

$$0 \to \ker\hat{P} \to \ker P \to \ker\overline{P} \to \operatorname{coker}\hat{P} \to \operatorname{coker}P \to \operatorname{coker}\overline{P} \to 0$$

de donde se deduce que $\ker \overline{P}$ y $\operatorname{coker} \overline{P}$ son de dimensión finita y que $\operatorname{Ind} \hat{P} - \operatorname{Ind} P + \operatorname{Ind} \overline{P} = 0$.
Como $\operatorname{Ind} \hat{P} = m-\eta(p_m,\Omega)+\sum_{j=1}^{n} \min(\eta(p_k,a_j)-k)$ y $\operatorname{Ind} P = -\eta(p_m,\Omega-A)+m(1-n)$, y como cada $a_j \in A$ es un punto singular regular de P, entonces, para cada $1 \leqslant j \leqslant n$, $m-\eta(p_m,a_j)+\min(\eta(p_k,a_j)-k) = 0$. Luego $\sum_{j=1}^{n} \left[m-\eta(p_m,a_j)+\min(\eta(p_k,a_j)-k)\right] = 0$, o sea $mn-\eta(p_m,A) + \sum_{j=1}^{n} \min(\eta(p_k,a_j)-k) = 0$. Por lo tanto $\operatorname{Ind} \overline{P} = 0$ y, como $\overline{P}$ es sobreyectivo, $\ker \overline{P} = 0$.

La primera parte del teorema está demostrada.

(2) De la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathcal{R}_A(\Omega) & \overset{i}{\to} & \mathcal{O}(\Omega-A) & \overset{\varphi}{\to} & \mathcal{O}(\Omega-A)/\mathcal{R}_A(\Omega) & \to & 0 \\
 & & \downarrow \tilde{P} & & \downarrow P & & \downarrow \overline{P} & & \\
0 & \to & \mathcal{R}_A(\Omega) & \overset{i}{\to} & \mathcal{O}(\Omega-A) & \overset{\varphi}{\to} & \mathcal{O}(\Omega-A)/\mathcal{R}_A(\Omega) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

se sigue la exactitud de la sucesión de complejos

$$0 \to \mathcal{E}' \to \mathcal{F}' \to \mathcal{G}' \to 0$$

donde $\mathcal{E}'$, $\mathcal{F}'$, $\mathcal{G}'$ son, respectivamente, $0 \to \mathcal{R}_A(\Omega) \overset{\tilde{P}}{\to} \mathcal{R}_A(\Omega) \to 0$, $0 \to \mathcal{O}(\Omega-A) \overset{P}{\to} \mathcal{O}(\Omega-A) \to 0$, y $0 \to \mathcal{O}(\Omega-A)/\mathcal{R}_A(\Omega) \overset{\overline{P}}{\to} \mathcal{O}(\Omega-A)/\mathcal{R}_A(\Omega) \to 0$.

La sucesión exacta de cohomología correspondiente es

$$0 \to \ker\tilde{P} \to \ker P \to \ker\overline{P} \to \operatorname{coker}\tilde{P} \to \operatorname{coker}P \to \operatorname{coker}\overline{P} \to 0,$$

la cual implica que $\ker \overline{P}$ y $\operatorname{coker} \overline{P}$ son de dimensión finita e $\operatorname{Ind} \tilde{P} - \operatorname{Ind} P + \operatorname{Ind} \overline{p} = 0$. Como P es normal, $\operatorname{Ind} \tilde{P} = m-\eta(p_m,\Omega)+ \sum_{j=1}^{n} \min(\eta(p_k,a_j)-k)$ e $\operatorname{Ind} P = m(1-n)-\eta(p_m,\Omega-A)$. Como para cada j,

$m-\eta(p_m,a_j)+\min(\eta(p_k,a_j)-k) = 0$, entonces

$\sum_{j=1}^{n} [m-\eta(p_m,a_j) + \min(\eta(p_k,a_j)-k)] = 0$, o sea,

$nm-\eta(p_m,A) + \sum_{j=1}^{n} \min(\eta(p_k,a_j)-k) = 0$. En consecuencia, $\operatorname{Ind} \overline{P} = 0$ y, como $\overline{P}$ es sobreyectivo, entonces $\ker \overline{P} = 0$. La segunda parte del teorema esta demostrada.

(3) Es un caso particular de (2), considerando $g = 0$.

§ 4 Algunas consideraciones sobre la Ecuación de Euler:

En este capítulo consideraremos un polinomio diferencial de la forma $P(z,\partial/\partial z) = \sum_{k=o}^{m} q_k(z)z^k\partial^k/\partial z^k$, donde los $q_k(z)$ son polinomios complejos. Denotaremos con $c(k,j)$ a la expresión $(-1)^k \frac{(j+k-1)!}{(j-1)!}$, $k = 0,1,2,\ldots,m$ y $j \geqslant 1$. Sea $x \geqslant 1$ un número natural fijo. Con $p_j(z)$ denotaremos al polinomio $\sum_{k=o}^{m} q_k(z)\, c(k,j)\, z^{r-j}$, $1 \leqslant j \leqslant r$, y con $\overline{p_j(z)}$ a la clase de $p_j(z)$ en $\mathbb{C}[z]/(z^r)$. Llamaremos a_{nk} al término constante del polinomio $q_k(z)$. En el análisis del polinomio diferencial $P(z,\partial/\partial z) = \sum_{k=o}^{m} a_k\, z^k\partial^k/\partial z^k$, denotaremos con c_j a la expresión $\sum_{k=o}^{m} a_k\, c(k,j)$, $j \geqslant 1$.

Teorema 4.1. Sea $P(z,\partial/\partial z) = \sum_{k=o}^{m} q_k(z)\, z^k\partial^k/\partial z^k$. Entonces, las proposiciones siguientes son equivalentes:

(1) Para todo $r \geqslant 1$, el sistema $\{\overline{p_1(z)},\ldots,\overline{p_r(z)}\}$ de $\mathbb{C}[z]/(z^r)$ es linealmente independiente sobre $\mathbb{C}$.

(2) Cualquiera que sea g, holomorfa en Ω, toda solución meromorfa en Ω de la ecuación $Pf = g$, con polos a lo sumo en 0, es holomorfa en Ω.

<u>Demostración</u>. (1) Supongamos que los $\overline{p_j(z)}$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{C}$. Consideremos $f \in M_0(\Omega)$ y $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ tales que $Pf = g$. Como

$$f(z) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j / z^j + h(z)$$

donde $h \in \mathcal{O}(\Omega)$, y

$$P\left(\sum_{j=1}^{r} \alpha_j / z^j\right) = \frac{1}{z^r} \sum_{j=1}^{r} p_j(z)\, \alpha_j ,$$

teniendo en cuenta que $Pf = g$ con $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ se deduce que debe existir $q \in \mathbb{C}[z]$ tal que

$$\sum_{j=1}^{r} p_j(z)\, \alpha_j = z^r q(z).$$

Como los $\overline{p_j(z)}$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{C}$, entonces $\alpha_j = 0$ para $j = 1,2,\ldots,r$. Por lo tanto, f es holomorfa en Ω.

(2) Supongamos ahora que dada $g \in \mathcal{O}(\Omega)$, toda solución de la ecuación $Pf = g$, meromorfa en Ω y con polos a lo sumo en 0, es holomorfa en Ω, y supongamos que

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha_j\, p_j(z) \in (z^r)$$

Sea $f(z) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j / z^j$. Entonces

$$Pf = \frac{1}{z^r} \sum_{j=1}^{r} p_j(z)\, \alpha_j .$$

Como $\sum_{j=1}^{r} \alpha_j p_j(z) \in (z^r)$, entonces $Pf = g$ con $g \in \mathcal{O}(\Omega)$. Por lo tanto, f es holomorfa en Ω; es decir, $\alpha_j = 0$ para cada $j = 1,2,\ldots,r$. Los $\overline{p_j(z)}$ son entonces linealmente independientes sobre $\mathbb{C}$. El teorema está demostrado

Observación. Si $c_j = \sum_{k=o}^{m} a_{nk}\, c(k,j) \neq 0$ para cada $j \geq 1$, entonces los $\overline{p_j(z)}$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{C}$. En efecto, supongamos que

$$\sum_{j=1}^{r} p_j(z)\, \alpha_j = z^r\, q(z)$$

para algún $q \in \mathbb{C}[z]$, o sea que

$$\sum_{j=1}^{r} \sum_{k=o}^{m} q_k(z)\; c(k,j)\alpha_j\; z^{r-j} = z^r\; q(z).$$

Se deduce que el término independiente del miembro de la izquierda es nulo, o sea que

$$\sum_{k=o}^{m} a_{nk}\; c(k,r)\alpha_r = 0.$$

Como $c_r \neq 0$ entonces $\alpha_r = 0$ y así

$$\sum_{j=1}^{r-1} p_j(z)\; \alpha_j = z^r\; q(z).$$

El mismo argumento anterior muestra que el término en z del miembro de la izquierda es nulo, o lo que es lo mismo, que

$$\sum_{k=o}^{m} a_{nk}\; c(k,r-1)\; \alpha_{r-1} = 0$$

Como $c_{r-1} \neq 0$ entonces $\alpha_{r-1} = 0$, y continuando de esta manera, concluímos que $\alpha_j = 0$ para todo $j = 1,2,\ldots,r$. Por lo tanto, los $\overline{p_j(z)}$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{C}$.

<u>Corolario</u> 1. Sean Ω un abierto conexo de $\mathbb{C}$ tal que $0 \in \Omega$, y $P(z,\partial/\partial z) = \sum_{k=0}^{m} a_k \; z^k \partial^k/\partial z^k$,

$c_p \neq 0$ para todo $p \geq 1$. Si g es holomorfa en Ω , toda solución de la ecuacion $Pf = g$, holomorfa en $\Omega - \{0\}$, es holomorfa en Ω.

<u>Demostración</u>. Sea Ω_o un subconjunto abierto simplemente conexo de Ω tal que $0 \in \Omega_o$. Debido a que Ω_o es simplemente conexo, a que 0 es un punto singular regular de P y al hecho de que $g \in M_o(\Omega_o)$, tenemos, por el corolario al Teorema 3.4, que f es meromorfa en Ω_o, con polos a lo sumo en 0. Como $c_p \neq 0$, $p \geq 1$, se deduce, del Teorema anterior y de la observación subsecuente, que f es holomorfa en Ω_o. Por lo tanto, f es holomorfa en Ω.

<u>Corolario</u> 2. Sean Ω un abierto conexo de $\mathbb{C}$ tal que $0 \in \Omega$, y $P(z,\partial/\partial z) = \sum_{k=0}^{m} a_k \; z^k \partial^k/\partial z^k$, donde los a_k son linealmente independientes sobre $\mathbb{Z}$. Si g es holomorfa en Ω, toda solución de la ecuación $Pf = g$, holomorfa en $\Omega-\{0\}$ es holomorfa en Ω .

<u>Demostración</u>. Al igual que en corolario 1, podemos concluír que $f \in M_o(\Omega_o)$ para Ω_o un abierto

simplemente conexo de Ω tal que $0 \in \Omega_o$. Como $c_j \neq 0$ para todo $j \geq 1$, entonces por la observación y el Teorema anterior, f es holomorfa en Ω_o. Por lo tanto, f es holomorfa en Ω.

Corolario 3. Sean Ω un abierto conexo de $\mathbb{C}$ tal que $0 \in \Omega$, y $P(z, \partial/\partial z) = \sum_{k=o}^{m} a_k z^k \partial^k/\partial z^k$, donde $|a_k| \leq |a_{k+1}|$ para todo $k = 0,1,2,\ldots,m-1$, $m \neq 1,2$. Si g es holomorfa en Ω, toda solución de la ecuación $Pf = g$, holomorfa en $\Omega-\{0\}$, es holomorfa en Ω.

Demostración. Procediendo de la misma manera que en los corolarios anteriores, basta ver que $c_j \neq 0$ para todo $j \geq 1$. Si suponemos que existe $j \geq 1$ tal que $c_j = 0$, entonces

$$|a_m| \frac{(j+m-1)!}{(j-1)!} \leq |a_m| \sum_{k=o}^{m-1} \frac{(j+k-1)!}{(j-1)!}$$

Como $a_m \neq 0$,

$$(j+m-1)! \leq \sum_{k=o}^{m-1} (j+k-1)!$$

Si $n = j+m-2$, entonces

$$(n+1)! \leq \sum_{k=j-1}^{n} k! \qquad (4.1)$$

De otra parte,

$$(n+1)! > \sum_{k=j-1}^{n} k! \,, \qquad (4.2)$$

ya que $\sum_{k=o}^{n} k! \leq (n+1)!$ (en efecto, para $n = 0$,

)! = 1! ; para $n = 1$, $0! + 1! = 2!$; para $n = 2$,
)! + 1! + 2! < 3! . Si suponemos cierto que
$\prime! \geq \sum_{k=0}^{m'-1} k!$ para $n = m' - 1$, con $m' \geq 2$,
ntonces $\sum_{k=0}^{m'} k! \leq 2m'! < (m'+1)!$. Como $m \neq 1,2$,
ntonces $n \geq 2$ (Nótese que si $m = 1$ y $P(z,\partial/\partial z)$
$a(1+z\partial/\partial z)$, entonces $f(z) = 1/z$, aunque holo-
orfa en $\Omega-\{0\}$ y no en Ω, es tal que $Pf = 0$.
si $m = 2$ y $P(z,\partial/\partial z) = a_o+a_1 z\partial/\partial z + \frac{a_1-a_o}{2}$.
$^2\partial^2/\partial z^2$, también, con $f(z) = 1/z$, se tiene
ue $Pf = 0$). Por lo tanto, $\sum_{k=j-1}^{n} k! < (n+1)!$.
omo las desigualdades (4.1) y (4.2) no pueden te
erse simultáneamente, entonces $c_j \neq 0$ para todo
≥ 1.

eorema 4.2. Sean $P(z,\partial/\partial z) = \sum_{k=o}^{m} q_k(z)\, z^k\partial^k/\partial z^k$ y
un abierto conexo de $\mathbb{C}$ tal que $0 \in \Omega$. Los vecto
es $\overline{p_j(z)}$ son linealmente independientes sobre
si, y sólo si, dada $g \in \mathbb{C}[z]$, toda solución ra
ional de la ecuación $Pf = g$, con polos a lo sumo
n 0, es un polinomio.

emostración. Tomando $h \in \mathbb{C}[z]$, la demostración es
sencialmente la misma que para el Teorema 4.1.

orolario 1. Sean Ω un abierto conexo de $\mathbb{C}$ tal que
$\in \Omega$, y $P(z,\partial/\partial z) = \sum_{k=o}^{m} a_k\, z^k\partial^k/\partial z^k$ tal que $c_p \neq 0$
ara todo $p \geq 1$. Entonces, si $g \in \mathbb{C}[z]$, toda so
ución de la ecuación $Pf = g$, holomorfa en $\Omega-\{0\}$
s un polinomio.

Demostración. Sea Ω_o un subconjunto abierto simplemente conexo de Ω tal que $0 \in \Omega_o$. Debido a que Ω_o es simplemente conexo, a que P es normal y a que $g \in R_o(\Omega_o)$ tenemos, por el corolario al Teorema 3.5, que f es una función racional en Ω_o con polos a lo sumo en 0. Como $c_p \neq 0$ para $p \geqslant 1$, entonces, por el Teorema 4.2 y por la observación siguiente al Teorema 4.1, se deduce que f es un polinomio en Ω_o. En consecuencia, un polinomio en Ω.

Corolario 2. Sean Ω un abierto conexo de $\mathbb{C}$ tal que $0 \in \Omega$, y $P(z,\partial/\partial z) = \sum_{k=o}^{m} a_k \, z^k \partial^k/\partial z^k$, donde los a_k son linealmente independientes sobre $\mathbb{Z}$. Entonces, si $g \in \mathbb{C}[z]$, toda la solución de la ecuación $Pf = g$, holomorfa en $\Omega - \{0\}$, es un polinomio.

Demostración. Al igual que en la demostración del corolario 1 se deduce que f es una función racional en Ω_o con polos a lo sumo en 0, donde Ω_o es cualquier subconjunto abierto simplemente conexo de Ω tal que $0 \in \Omega_o$. Como $c_p \neq 0$ para todo $p \geqslant 1$, entonces, por el Teorema 4.2 y por la observación siguiente al Teorema 4.1, se deduce que f es un polinomio.

Corolario 3. Sea Ω un abierto conexo de $\mathbb{C}$ tal que $0 \in \Omega$, $P(z,\partial/\partial z) = \sum_{k=o}^{m} a_k \, z^k \partial^k/\partial z^k$, donde $|a_k| \leqslant |a_{k+1}|$ para todo $k = 0,1,2,\ldots,m-1$, $m \neq 1,2$. Si $g \in \mathbb{C}[z]$, toda solución holomorfa en $\Omega-\{0\}$ de la ecuación $Pf = g$ es un polinomio.

Demostración. De la misma manera que en los corolarios anteriores, podemos observar que f es una función racional en Ω_o con polos a lo sumo en 0 (siendo Ω_o un abierto simplemente conexo de Ω tal que $0 \in \Omega_o$). Como $c_p \neq 0$ para todo $p \geqslant 1$, por el Teorema 4.2, y por la observación siguiente al Teorema 4.1, se deduce que f es un polinomio.

Los resultados anteriores de este capítulo admiten algunas generalizaciones.

Sea $A = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ y consideremos un polinomio diferencial $P(z, \partial/\partial z) = \sum_{k=o}^{m} p_k(z)\partial^k/\partial z^k$ tal que cada $(z - \alpha_s)^k$ divida a $p_k(z)$ para todo $k = 0, 1, 2, \ldots, m$. Para todo $r \geqslant 1$, y para todo $j \leqslant r$, denotemos con $p_j^s(z)$ al polinomio $\sum_{k=o}^{m} p_k(z)c(k,j) \cdot$ $\cdot\ (z-\alpha_s)^{r-k-j}$.

En el análisis del polinomio diferencial

$$P(z, \partial/\partial z) = \sum_{k=o}^{m} a_k(z-\alpha_1)^k \ldots (z-\alpha_n)^k \partial^k/\partial z^k$$

denotaremos con $q_j^s(z)$ a la expresión

$$\sum_{k=o}^{m} a_k(z-\alpha_1)^k \ldots (z-\alpha_{s-1})^k (z-\alpha_{s+1})^k \ldots$$

$$\ldots (z-\alpha_n)^k c(k,j) ,$$

donde $n \geqslant 1$ y $j \leqslant r$.

Teorema 4.3. Sean Ω un abierto conexo de $\mathbb{C}$. $A = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ un sobconjunto finito de Ω y

$P(z,\partial/\partial z) = \sum_{k=o}^{m} p_k(z)\partial^k/\partial z^k$ un polinomio diferencial tal que $(z-\alpha_s)^k$ divide a $p_k(z)$ para todo $k = 0,1,2,\ldots,m$ y todo $s = 1,2,\ldots,n$. Entonces, las proposiciones siguientes son equivalentes:

(1) Para todo $r \geqslant 1$ y todo $\ell = 1,2,\ldots,n$, el sistema $\{p_1^\ell(z),\ldots,p_r^\ell(z)\}$ de $\mathbb{C}[z]/((z-\alpha_\ell)^r)$, es linealmente independiente sobre $\mathbb{C}$.

(2) Cualquiera que sea g, holomorfa en Ω, toda solución meromorfa en Ω de la ecuación $Pf = g$, con polos a lo sumo en A, es holomorfa en Ω.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Sean $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ y $f \in M_A(\Omega)$ tales que $Pf = g$. Como $f \in M_A(\Omega)$, en una vecindad abierta V_j de α_j en Ω, f se escribe

$$f(z) = \sum_{i=1}^{r} b_i/(z-\alpha_j)^i + h(z), \qquad h \in \mathcal{O}(V_j)$$

Como $P(\sum_{i=1}^{r} b_i/(z-\alpha_j)^i) = \frac{1}{(z-\alpha_j)^r} \sum_{i=1}^{r} b_i\, p_i^j\,(z)$

y $Pf = g$ en Ω, entonces

$$\sum_{j=1}^{r} b_i\, p_i^j\,(z) = (z-\alpha_j)^r\, q(z)$$

donde $q(z) \in \mathbb{C}[z]$. Como los $\overline{p_i^j\,(z)}$ son linealmente independientes en $\mathbb{C}[z]/((z-\alpha_j)^r)$ sobre $\mathbb{C}$, entonces $b_i = 0$ en V_j, y esto, para cada $i = 1, 2,\ldots,r$. Por consiguiente, f es holomorfa en V_j para todo $j = 1,2,\ldots,n$. Se deduce que f es holomorfa en Ω.

(2) $\Rightarrow$ (1) Supongamos ahora que dada g, holomorfa

en Ω, toda solución de la ecuación $Pf = g$, meroforma en Ω y con polos a lo más en A, es holomorfa en Ω, y supongamos que

$$\sum_{j=1}^{r} b_j\, p_j^s(z) = (z-\alpha_s)^r\, q(z)$$

donde $q \in \mathbb{C}[z]$. Sea

$$f(z) = \sum_{j=1}^{r} b_j/(z-\alpha_s)^j$$

Entonces,

$$Pf = \frac{1}{(z-\alpha_s)^r} \sum_{j=1}^{r} b_j\, p_j^s(z) = q(z).$$

Por lo tanto, f es holomorfa en Ω, es decir, $b_j = 0$ para $j = 1,2,\ldots,r$. Se deduce que los $p_j^s(z)$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{C}$. El Teorema está demostrado.

<u>Observación</u>. Sea $P(z,\partial/\partial z) = \sum_{k=o}^{m} a_k(z-\alpha_1)^k \ldots (z-\alpha_n)^k \partial^k/\partial z^k$ tal que para $j \geq 1$ y $s = 1,2,\ldots, n$, $(z-\alpha_s)$ no divide a $q_j^s(z)$. <u>Entonces</u>, para $r \geq 1$ y $j \leq r$, los vectores $p_j^s(z)$ de $\mathbb{C}[z]/((z-\alpha_s)^r)$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{C}$. En efecto, sea

$$\sum_{j=1}^{r} p_j^s(z)\, b_j = (z-\alpha_s)^r\, q(z)$$

donde $q \in \mathbb{C}[z]$. Como para cada $j \leq r-1$, $(z-\alpha_s)$ divide a cada $p_j^s(z)\, b_j$ y al término de la derecha, entonces $z-\alpha_s$ divide a $p_r^s(z)\, b_r$. Es decir, $z-\alpha_s$ divide a $q_r^s(z)\, b_r$. Por lo tanto,

$q_r^s(z)\, b_r = 0$, y en consecuencia, $b_r = 0$. Tenemos entonces que

$$\sum_{j=1}^{r-1} p_j^s(z)\, b_j = (z-\alpha_s)^r\, q(z),$$

es decir, que

$$\sum_{j=1}^{r-1} q_j^s(z)\,(z-\alpha_s)^{r-j}\, b_j = (z-\alpha_s)^r\, q(z)$$

Dividiendo por $z-\alpha_s$ tenemos que

$$\sum_{j=1}^{r-1} q_j^s(z)\,(z-\alpha_s)^{r-j-1} b_j = (z-\alpha_s)^{r-1} q(z)$$

así que $z-\alpha_s$ debe dividir a $q_{r-1}^s(z)\, b_{r-1}$. Se deduce que $q_{r-1}^s(z)\, b_{r-1} = 0$, y por lo tanto, que $b_{r-1} = 0$. Procediendo de esta manera podemos concluir que $b_j = 0$ para $j = 1,2,\ldots,r$. Por lo tanto, para todo $s = 1,2,\ldots,n$ los $p_j^s(z)$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{C}$.

Corolario. Sean Ω abierto conexo de $\mathbb{C}$, $A=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ un subconjunto finito de Ω y $P(z,\partial/\partial z) = \sum_{k=0}^{m} a_k (z-\alpha_1)^k \cdots (z-\alpha_n)^k \partial^k/\partial z^k$, donde $z-\alpha_s$ no divide a $q_j^s(z)$ para $j \geq 1$ y $s = 1,2,\ldots,n$. Entonces, si g es holomorfa en Ω, toda solución de la ecuación $Pf = g$, holomorfa en $\Omega - A$ es holomorfa en Ω.

Demostración. Sea Ω_j un subconjunto abierto simplemente conexo de Ω tal que $\{\alpha_j\} = \Omega_j \cap A$. Debido a que Ω_j es un abierto simplemente conexo, a que α_j es un punto singular regular de P y al hecho de ser $g \in M_{\alpha_j}(\Omega_j)$, tenemos, por el Teorema 3.7, que f es meromorfa en Ω_j, con polos a lo sumo en α_j. Como $(z-\alpha_j) \nmid q_p^j(z)$ para $p \geqslant 1$, se deduce, del Teorema 4.3 y de la observación subsecuente, que f es holomorfa en Ω_j. Como esto sucede para cada $j = 1,2,..,n$, entonces f es holomorfa en Ω. El corolario está demostrado.

Teorema 4.4. Sean $P(z,\partial/\partial z) = \sum_{k=o}^{m} p_k(z)\partial^k/\partial z^k$, Ω un abierto conexo de $\mathbb{C}$ y $A = \{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$ un subconjunto de Ω tal que $(z-\alpha_j)^k$ divide a $p_k(z)$ para todo $k = 0,1,\ldots,m$. Los vectores $p_j^s(z)$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}[z]/((z-\alpha_s)^r)$, para $r \geqslant 1$ y $s = 1,2,\ldots,n$, si, y solo si, dada $g \in \mathbb{C}[z]$, toda solución racional de la ecuación $Pf = g$, con polos a lo sumo en A, es un polinomio.

Demostración. Tomando $h \in \mathbb{C}[z]$, la demostración es esencialmente la misma que para el Teorema anterior.

Corolario. Sean Ω un abierto conexo de $\mathbb{C}$, $A = \{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$ un subconjunto finito de Ω, y $P(z,\partial/\partial z) = \sum_{k=o}^{m} a_k\,(z-\alpha_1)^k \ldots (z-\alpha_n)^k\partial^k/\partial z^k$ donde para $j \geqslant 1$ y $s = 1,2,\ldots,n$, $z-\alpha_s$ no es un divisor de $q_j^s(z)$. Entonces, si $g \in \mathbb{C}[z]$, toda solución de la ecuación $Pf = g$, holomorfa en Ω-A es un polinomio.

Demostración. Sea Ω_j un sobconjunto abierto simplemente conexo de Ω tal que $\{\alpha_j\} = \Omega_j \cap A$. Debido a que Ω_j es un abierto simplemente conexo, a que P es normal, a que α_j es un punto singular regular de P y al hecho de ser $g \in R_{\alpha_j}(\Omega_j)$, tenemos, por el Teorema 3.7 que f es una función racional en Ω_j con polos a lo sumo en α_j. Como $(z,\alpha_j) \nmid q_p^j(z)$ para $p \geqslant 1$, se deduce, del Teorema anterior y de la observación siguiente al Teorema 4.3, que f es un polinomio. El corolario está demostrado.

***

Agradecimiento. La autora agradece profundamente los múltiples consejos, la paciencia y el apoyo que recibió del Profesor J.A. Charris durante la elaboración de este trabajo. También agradece el interés de todas aquellas personas que siguieron de cerca el surgimiento de estos resultados, en particular, el de los Profesores Víctor Albis y Carlos Ruiz.

Bibliografía.

[1] Charris, J. "Sobre ciertos espacios de Funciones Holomorfas y sus aplicaciones. II". Aparecerá: Boletín de Matemáticas.

[2] Hormander, L. Introduction to Complex Analysis in Several Variables, Van Nostrand Princeton N.J., 1967.

[3] Malgrange, B. "Remarques sur les points singuliers des équations differentielles". C.R. Acad. Sc. París, t. 283 (8 de diciembre 1971) 1136-1137.

[4] Palais, R. Seminar on the Atiyah-Singer Index Theorem. Annals of Mathematics Studies, Number 57, Princeton University Press, Princeton N.J., 1966.

[5] Rotman, J.J. Notes on Homological Algebra, Van Nostrand, Princeton N.J., 1970.

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia.
Bogotá, D.E., Colombia, S.A.

(Recibido en enero de 1977).