Revista Colombiana de Matemáticas
Vol. XII (1978), págs. 91 - 96

SOBRE UM TEOREMA DE LAGRANGE PARA QUASE GRUPOS DE WARD

por

Clóvis Pereira da SILVA

O objetivo desta nota é mostrar que vale para quase grupos de Ward finitos um teorema equivalente ao teorema de Lagrange para grupos finitos, mas que tal teorema não é válido para quase grupos de Cardoso finitos.

Definição 1. Chama-se quase grupo de Cardoso a todo quase grupo $(G,\cdot)$ que contém um elemento i tal que:

(C1) $a.x = b \leftrightarrow x = (i.b).(i.a)$, para todos $a, b \in G$,

(C2) $y.a = b \leftrightarrow y = b.(i.a)$, para todos $a,b \in G$.

Exemplo: Seja $G = \{i, a, b, c, d, e\}$ com a composição definida pela tabela de Cayley:

°	i	a	b	c	d	e
i	i	c	b	a	d	e
a	a	i	e	c	b	d
b	b	e	i	d	a	c
c	c	a	d	i	e	b
d	d	b	c	e	i	a
e	e	d	a	b	c	i

Os axiomas da Definição 1 são independentes. O conjunto dos números inteiros com a composição definida por : $a.b = b-a$ verifica (C2), mas não verifica (C1). Ao passo que o quase grupo definido pela tabela:

•	i	a	b	c
i	a	i	c	b
a	b	a	i	c
b	c	b	a	i
c	i	c	b	a

verifica (C1), mas não verifica (C2).

Definição 2. Chama-se quase grupo de Ward a qualquer quase grupo $(G,\cdot)$ que satisfaz os seguintes axiomas:

(W1) Existe um elemento $i \in G$ tal que $a.a = i$, para todo $a \in G$,

(W2) Para todos a,b,c em G tem-se:
$(a \circ b) \circ c = a \circ (i \circ b)$).

Exemplo: Seja $G = \{i, a, b\}$ com a composição definida pela tabela:

$\circ$	i	a	b
i	i	b	a
a	a	i	b
b	b	a	i

Um quase grupo de Ward é um quase grupo de Cardoso. Em consequência, i é uma unidade à direita.

Os axiomas de Definição 2 são independentes. De fato, o conjunto dos números inteiros com a composição definida por: $a \circ b = b - a$ verifica (W1) mas não verifica (W2). Enquanto que o conjunto dos números inteiros com a adição usual verifica (W2), mas não verifica (W1).

Lema 1. Em um quase grupo de Ward $(G, \cdot)$, para todos $a, h, h' \in G$, tem-se: $a \cdot h = (a \cdot h') \cdot (h \cdot h')$.

Demostração: Com efeito, $(a \cdot h') \cdot (h \cdot h') = a \cdot ((h \cdot h') \cdot (i \cdot h')) = a \cdot (h \cdot ((i \cdot h') \cdot (i \cdot h'))) = a \cdot (h \cdot i) = a \cdot h$ ■

Lema 2. Se $(H, \cdot)$ é um subquase grupo de um quase grupo de Ward finito $(G,\cdot)$ então toda classe lateral à esquerda de H tem o mesmo número de elementos que H .

Demostração: De fato, a aplicação que leva um elemento $h \in H$ ao elemento $a.h \in a.H$ é injectiva. Logo, cada elemento $j = a.h \in a.H$ é a imagem de um único elemento $h = a.j \in H$. ■

Teorema 3. Seja $(H,.)$um subquase grupo de um quase grupo de Ward $(G,\cdot)$, então duas classes laterais à esquerda de H em relação a G ou são distintas ou coincidem.

Demostração: Suponha que as classes laterais $a.H$ e $b.H$ têm um elemento comun: $d = a.h' = b.h''$, onde $h'.h'' \in H$. Então $b.H$ contém todos os elementos da forma:

$$a.h = (a.h').(h.h') = (b.h'').(h.h') =$$
$$= b.((h.h').(i.h'')) ,$$

pertenecentes a $a.H$. De modo semelhante, a classe lateral à esquerda $a.H$ contém todos os elementos de $b.H$. Logo, $a.H = b.H$. ■

Como o elemento i do quase grupo de Ward $(G,.)$ pertenece a todos seus subquase grupos, cada classe lateral à esquerda $a.H$ contém sempre o elemento $a = a.i$. Logo, G se esgota em suas classes laterais à esquerda. Em consequência concluímos

<u>Teorema 4</u>. A ordem de um quase de Ward finito (G,.) é um múltiplo da ordem de qualquer de seus subquase grupos.

O teorema 4, que é o equivalente do teorema de Lagrange para grupo finitos, não vale para os quase grupos de Cardoso finitos (G,.).

Para tal exibiremos um exemplo. Seja G = { 0,1,2, 3,4,5,6,7,8,9 } com a composição definida pela tabela:

.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	0	3	2	7	9	8	4	6	5
2	2	3	0	1	9	8	7	6	5	4
3	3	2	1	0	8	7	9	5	4	6
4	4	7	9	8	0	6	5	1	3	2
5	5	9	8	7	6	0	4	3	2	1
6	6	8	7	9	5	4	0	2	1	3
7	7	4	6	5	1	3	2	0	9	8
8	8	6	5	4	3	2	1	9	0	7
9	9	5	4	6	2	1	3	8	7	0

(G,.) é quase grupo de Cardoso de ordem 10 e tem um subquase grupo de orden 4.

BIBLIOGRAFIA

[1] Cardoso, J.M. & Silva, C.P., On Ward quasigroups, A aparecer.

[2] Sade, A., Quasigroupes de Cardoso et Pseudo-groupes de Zelmer, Anal. St. Univ. A. I. Cuza, 13(1967), 5-15.

***

Departamento de Matemáticas
Universidade Federal do Paraná
Caixa Postal 1963
80.000-Curitiba-PR. BRASIL.

(Recibido en diciembre de 1977).