Revista Colombiana de Matemáticas
Vol. XI (1977), págs 1 - 17

SOLUCION DE ECUACIONES INTEGRALES DOBLES ASOCIADAS CON LA FUNCION H, POR MEDIO DE LOS OPERADORES L y L^{-1}

por

A.M.M. de GOMEZ LOPEZ y S.L. KALLA .

RESUMEN

En este trabajo consideraremos la solución de ecuaciones integrales dobles que involucran a la función H de Fox [4] , por medio de los operadores L y L^{-1}. Las ecuaciones integrales dadas, deben ser transformadas en otras dos con núcleo común, con lo cual el problema se reduce a la solución de ecuaciones integrales simples. Al ser el núcleo común un núcleo simétrico de Fourier la solución se obtiene fácilmente.

ABSTRACT

In the present paper, we obtain the solution of a pair of dual integral equations involving Fox's H-function. The solution has been obtained by an appeal to the Laplace transform and their inverses. By applications of L and L^{-1} operators, we reduce the dual integral equations to the other pair with the same kernel, which happens to be a Fourier symmetrical kernel, and can be easily inverted.

§ 1 Introducción. Por la definición de la función H introducida por Fox [4], tenemos:

$$H^{m,n}_{p,q}\left(x \;\middle|\; \begin{matrix}\{(a_i,\ \alpha_i)\}\\ \{(b_i,\ \beta_i)\}\end{matrix}\right) =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\prod_{i=1}^{m}\Gamma(b_i+\beta_i s)\prod_{i=1}^{n}\Gamma(1-a_i-\alpha_i s)}{\prod_{m+1}^{q}\Gamma(1-b_i-\beta_i s)\prod_{n+1}^{p}\Gamma(a_i+\alpha_i s)}\, x^{-s}\, ds, \tag{1}$$

Donde la notación $\{(a_i,\alpha_i)\}$, significa $(a_1,\ \alpha_1),\ (a_2,\ \alpha_2),\ldots,(a_p,\ \alpha_p)$. Además, el producto vacío es considerado como unidad; x no es igual a cero y $m,\ n,\ p,\ q$ son enteros positivos que satisfacen la relación:

$$0 \leqslant m \leqslant q, \qquad 0 \leqslant n \leqslant q\ ;$$ finalmente:

α_i(i = 1,2,...,p) , β_j(j = 1,2,...,q) ,

son números positivos, y

a_i(i=1,...,p) , b_j(j = 1,...,q) , son números complejos.

Todos los polos del integrando en (1) son simples. El contorno L es una recta paralela al eje imaginario en el plano complejo $s = \sigma + it$, σ y t reales, tal que todos los polos de $\Gamma(b_i + \beta_i s)$, para $i = 1,...,m$, están a la izquierda de L y aquellos de $\Gamma(1 - a_i - \alpha_i s)$, para $i = 1,...,n$, estan a la derecha de L.

Para la definición, la continuación analítica y el desarrollo asintótico se puede consultar el trabajo de Braaksma [1] .

Fox [4] ha demostrado que la función

$$H^{m+n,p+q}_{2(p+q),2(m+n)}(x) + \frac{1}{2\pi i}\int_L M_{m,n,p,q}(s)\, x^{-s}\, ds \quad , \tag{2}$$

donde

$$M_{m,n,p,q}(s) = \prod_{j=1}^{m}\Gamma(c_j - \frac{\gamma_j}{2} + \gamma_j s)\prod_{j=1}^{p}\Gamma(a_j + \frac{\alpha_j}{2} - \alpha_j s)\,\cdot$$

$$\cdot\prod_{j=1}^{n}\Gamma(d_j - \frac{\delta_j}{2} + \delta_j s)\prod_{j=1}^{q}\Gamma(b_j + \frac{\beta_j}{2} - \beta_j s).$$

$$.\{\prod_{j=1}^{n} \Gamma(d_j + \frac{\delta_j}{2} - \delta_j s) \prod_{j=1}^{q} \Gamma(b_j - \frac{\beta_j}{2} + \beta_j s)\}^{-1} .$$

$$.\{\prod_{j=1}^{m} \Gamma (c_j + \frac{\gamma_j}{2} - \gamma_j s) \prod_{j=1}^{p} \Gamma(a_j - \frac{\alpha_j}{2} + \alpha_j \ s)\}^{-1}$$

tiene núcleo simétrico de Fourier.

De (2) se sigue que la transformada de Mellin de

$$H^{m+n,p+q}_{2(p+q),2(m+n)}(x) \quad \text{es} \quad M_{m,n,p,q}(s) \quad ,$$

en donde

$$M \left\{ H^{m+n,p+q}_{2(p+q),2(m,n)}(x) \right\} = M_{m,n,p,q}(s) \ . \qquad (3)$$

La transformada de Laplace de $\varphi(x)$ se indica con $L\{\varphi(x)\}$ y se define por:

$$L\{ \varphi(x)\} = \int_0^\infty e^{-xt} \varphi(x)\, dx = \psi(t); \qquad (4)$$

con $\varphi(x)$ y $\psi(t)$ relacionadas por (4), la transformada inversa de Laplace de $\psi(t)$ es:

$$L^{-1} \{ \psi(t) \} = \varphi(x) \ . \qquad (5)$$

Simbólicamente podemos escribir:

$$L^{-1} L = L L^{-1} = 1 \ . \qquad (6)$$

La transformada de Mellin de f(u) la indicamos por $M\{f(u)\} = F(s)$ y podemos escribir que $f(u) = M^{-1}\{F(s)\}$. Es decir:

$$M\{f(u)\} = F(s) = \int_0^\infty u^{s-1} f(u)\, du\,, \qquad (7)$$

y

$$M^{-1}\{F(s)\} = f(u) = \frac{1}{2\pi i}\int_L F(s)\, u^{-s}\, ds. \qquad (8)$$

Las condiciones para la validez de (7) y (8) pueden encontrarse por ejemplo, en Titchmarsh [14].

El teorema de Mellin-Parseval [14, p.94] dice que:

Si: $M\{h(u)\} = H(s)$

y

$$M\{f(xu)\} = x^{-s}\, F(s)$$

entonces

$$\int_0^\infty h(xu)\, f(u)\, du = \frac{1}{2\pi i}\int_L X^{-s}\, H(s)\, F(1-s)ds \qquad (9)$$

El siguiente teorema de Fox [5, p.200], también será utilizado en este trabajo.

Si:

(i) $\alpha > 0$, $\frac{1}{2}\alpha + \beta > 0$, $t > 0$;

(ii) $s = \sigma + i\mu$, σ y μ reales;

(iii) $F(s) \varepsilon L(\frac{1}{2} - i\infty\ ,\ \frac{1}{2} + i\infty)$,

entonces:

$$L^{-1}\{\frac{1}{2\pi i}\int_C \Gamma(\alpha s+\beta)\, F(s) t^{-\alpha s-\beta} ds\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_C f(s) x^{\alpha s+\beta-1}\, ds\,, \qquad (10)$$

en donde para ambas integrales el contorno C, puede ser la línea $\sigma = \frac{1}{2}$, paralela al eje imaginario en el plano complejo s. Además:

$$L\{\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{H(s)}{\Gamma(\alpha s+\beta)} x^{\alpha s+\beta-1} ds\} = \frac{1}{2\pi i} \int_C H(s)\ t^{-\alpha s-\beta} ds. \tag{11}$$

Encontramos ecuaciones integrales dobles en varios problemas de Física Matemática ([12] y [15]).

Los operadores L y L^{-1} son muy útiles para resolver ecuaciones integrales; existen además tablas de estos operadores ([2] y [11]). Estos operadores fueron utilizados por Fox [5] , Verma [16] y Gómez López [8] en la solución de ciertas ecuaciones integrales. Otro método elegante de resolver ecuaciones integrales es mediante operadores de integración fraccional [3], [6] , [7], [9], [13].

En este trabajo estudiaremos un par de ecuaciones integrales dobles con la función H como núcleo. Por medio de los operadores L y L^{-1} transformaremos las ecuaciones en otras dos con un núcleo común, reduciéndose el problema a la solución de ecuaciones integrales simples.

Siendo el núcleo común un núcleo simétrico de Fourier, la solución se obtendrá fácilmente.

§ 2 <u>Las ecuaciones integrales dobles</u>. Queremos encontrar la solución de las siguientes ecuaciones integrales:

$$\int_0^\infty H^{m+n+1,p+q}_{2p+2q+1,2m+2n+1}(xu)\, f(u)\, du = \emptyset(x),$$

$$0<x\leqslant 1 \quad , \qquad (12)$$

y

$$\int_0^\infty H^{m+n+1,p+q}_{2p+2q+2,2m+2n+1}(xu)\, f(u)\, du = \psi(x),$$

$$x>1 \quad , \qquad (13)$$

donde $\emptyset(x)$ y $\psi(x)$ están dadas y $f(x)$ debe determinarse. Las funciones H que aparecen en (12) y (13) se definen de la siguiente manera:

$$H^{m+n+1,p+q}_{2p+2q+1,2m+2n+1}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_L M_{m,n,p,q}(s) \;.$$

$$\cdot \; \frac{\Gamma(\lambda+s)}{\Gamma(\mu+s)}\, x^{-s}\, ds \quad , \qquad (14)$$

en donde

$$M_{m,n,p,q}(s)= \prod_1^m \Gamma(c_j-\frac{\gamma_j}{2}+\gamma_j s)\prod_1^p \Gamma(a_j+\frac{\alpha_j}{2}-\alpha_j\, s)$$

$$\prod_1^n \Gamma(d_j-\frac{\delta_j}{2}+\delta_j s)\prod_1^q \Gamma(b_j+\frac{\beta_j}{2}-\beta_j\, s)$$

$$\{\prod_1^n \Gamma(d_j+\frac{\delta_j}{2}-\delta_j s)\prod_1^q \Gamma(b_j-\frac{\beta_j}{2}+\beta_j s)\}^{-1}$$

$$\{\prod_1^m \Gamma(c_j+\frac{\gamma_j}{2}-\gamma_j s)\prod_1^p \Gamma(a_j-\frac{\alpha_j}{2}+\alpha_j s)\}^{-1};$$

(15)

de (14) síguese que:

$$M\{H^{m+n+1,p+q}_{2p+2q+1,2m+2n+1}(x)\} = M_{m,n,p,q}(s).\frac{\Gamma(\lambda+s)}{\Gamma(\mu+s)}, \tag{16}$$

en donde M denota la transformada de Mellin.

Suponemos ahora que las siguientes condiciones están satisfechas:

(i) $s = \sigma + it$, donde σ y t son reales. C es la recta paralera al eje imaginario en el plano complejo s de ecuación $\sigma = \frac{1}{2}$.

(ii) Todos los polos del integrando en (14) son simples. El contorno L es tal que todos los polos de

$$\Gamma(c_j - \frac{\gamma_j}{2} + \gamma_j s),\ \Gamma(d_j - \frac{\delta_j}{2} + \delta_j s),\ \Gamma(\lambda+s)$$

están a la izquierda, y aquellos de

$$\Gamma(a_j + \frac{\alpha_j}{2} - \alpha_j s),\quad \Gamma(b_j + \frac{\beta_j}{2} - \beta_j s)$$

están a la derecha.

(iii) $D = 2\left(\sum_1^m \gamma_j - \sum_1^p \alpha_j + \sum_1^n \delta_j - \sum_1^q \beta_j\right) > 0$.

(iv) $\frac{1}{D}(\lambda-\mu) < 0$ en virtud de (14).

Además:

$$H^{m+n+1,p+q}_{2p+2q+2,2m+2n+1}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_L M_{m,n,p,q}(s)\ ..$$

$$\cdot \frac{\Gamma(\varepsilon + s)}{\Gamma(\eta+s)\Gamma(\rho+s)} \; x^{-s} \; ds \, , \tag{17}$$

donde $M_{m,n,p,q}(s)$ está dado por (15).

De (17) síguese que:

$$M \{ H^{m+n+1,p+q}_{2p+2q+2,2m+2n+1} (x)\} = M_{m,n,p,q}(s) .$$

$$\cdot \frac{\Gamma(\varepsilon + s)}{\Gamma(\eta+s)\Gamma(\rho+s)} \, , \tag{18}$$

donde M indica la transformada de Mellin.

Las condiciones para la validez para (17) son similares a las obtenidas en (14).

§ 3 Solución de las ecuaciones integrales (12) y (13) . Vamos ahora a transformar las ecuaciones integrales (12) y (13) en otras dos con el mismo núcleo, haciendo uso de los operadores L y L^{-1}.

Teniendo en cuenta (16) y (18) y siendo

$$M \{f(u)\} = F(s),$$

aplicamos (9) a (12) y (13), obteniendo:

$$\phi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_L M_{m,n,p,q}(s) \frac{\Gamma(\lambda+s)}{\Gamma(\mu+s)} \, x^{-s} \, F(1-s) \, ds,$$

$$0 < x < 1 \, , \tag{19}$$

y

$$\psi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_L M_{m,n,p,q}(s)\,\frac{\Gamma(\varepsilon+s)}{\Gamma(\eta+s)\Gamma(\rho+s)}\,X^{-s}F(1-s)\,ds,$$

$$x > 1 \,. \qquad (20)$$

Pasamos ahora a transformar la ecuación (19), en la que:

$$M_{m,n,p,q}(s).\frac{\Gamma(\lambda+s)}{\Gamma(\mu+s)}\,.\,X^{-s}=M\{H^{m+n+1,p+q}_{2p+2q+1,2m+2n+1}(xu)\},$$

$$(21)$$

$$F(s) = M\{f(u)\}\,.$$

Para ello debemos eliminar las dos funciones gamma que aparecen en el integrando de (19), utilizando (10) y (11). Eliminaremos primero $\Gamma(\lambda+s)$, y luego $\Gamma(\mu+s)$.

Escribiendo (19) en la forma:

$$x^{-\lambda}\phi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_L M_{m,n,p,q}(s)\;F(1-s)\frac{\Gamma(\lambda+s)}{\Gamma(\mu+s)}\;x^{-\lambda-s}\;ds\;, \qquad (22)$$

y aplicando L^{-1} tenemos:

$$L^{-1}\{x^{-\lambda}\phi(x)\} = \frac{1}{2\pi i}\int_L M_{m,n,p,q}(s)\;F(1-s)\frac{1}{\Gamma(\mu+s)}t^{\lambda+s-1}ds; \qquad (23)$$

(23) puede escribirse ahora en la forma:

$$t^{\mu-\lambda}.L^{-1}\{x^{-\lambda}\phi(x)\}=\frac{1}{2\pi i}\int_L M_{m,n,p,q}(s)F(1-s)\frac{t^{\mu+s-1}}{\Gamma(\mu+s)}\;ds. \qquad (24)$$

Aplicando L a (24) obtenemos:

$$L\,\{t^{\mu-\lambda}\,.\,L^{-1}\{x^{-\lambda}\phi(x)\}\}=\frac{1}{2\pi i}\int_L M_{m,n,p,q}(s)F(1-s)x^{-\mu-s}ds \tag{25}$$

de donde:

$$x^{\mu}\,.L\,\{t^{\mu-\lambda}.\ L^{-1}\{\,x^{-\lambda}\phi(x)\}\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_L M_{m,n,p,q}(s)\ F(1-s)x^{-s}\ ds. \tag{26}$$

Haciendo

$$t_1(x) = x^{\mu}.\ L\{\ t^{\mu-\lambda}\ .L^{-1}\{\ x^{-\lambda}\phi(x)\}\}, \tag{27}$$

(26) puede escribirse en la forma:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L M_{m,n,p,q}(s)\ x^{-s}F(1-s)ds = t_1(x)\ ,$$

$$0 < x < 1 \tag{28}$$

Procederemos ahora a transformar la ecuación (20), en la que:

$$M_{m,n,p,q}(s).\ \frac{\Gamma(\varepsilon+s)}{\Gamma(\eta+s)\Gamma(\rho+s)}\ x^{-s} =$$

$$= M\left\{ H^{m+n+1,p+q}_{2p+2q+2,2m+2n+1}(xu)\right\}, \tag{29}$$

y

$$F(s) = M\{\ f(u)\ \}.$$

En (20) debemos eliminar las tres funciones gamma que aparecen en el integrando; esto lo hacemos siguiendo un procedimiento similar al utilizado para transformar la ecuación (20), utilizando (10) y (11). Eliminando las funciones en el siguiente orden, $\Gamma(\varepsilon+s)$, $\Gamma(\eta+s)$, $\Gamma(\rho+s)$, obtenemos sucesivamente:

$$L\{t^{\rho-\eta-1}.\left[L\{t^{\eta-\varepsilon}L^{-1}\{x^{-\varepsilon}\psi(x)\}\}\right]_{x=t^{-1}}\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_L M_{m,n,p,q}(s)\; F(1-s)x^{-\rho-s}ds, \qquad (30)$$

y

$$x^{\rho}.\; L\{t^{\rho-\eta-1}\; \left[L\{t^{\eta-\varepsilon}.\; L^{-1}\{x^{-\varepsilon}\psi(x)\}\}\right]_{x=t^{-1}}\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_L M_{m,n,p,q}(s)F(1-s)x^{-s}\; ds\;, \qquad (31)$$

Haciendo

$$t_2(x)=\{x^{\rho}.L\; \{t^{\rho-\eta-1}[L\{t^{\eta-\varepsilon}L^{-1}\{x^{-\varepsilon}\psi(x)\}\}]_{x=t^{-1}}\},$$

la (31) puede escribirse:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L M_{m,n,p,q}(s)\; F(1-s)x^{-s}\; ds = t_2(x)\;,$$

$$x > 1\;. \qquad (32)$$

De (28) y (32) podemos escribir:

$$\frac{1}{2\pi i}\; _L\; M_{m,n,p,q}(s)\; F(1-s)\; x^{-s} = t(x)\;, \qquad (33)$$

en donde

$$t(x) = \begin{cases} t_1(x)=\{x^{\mu}.L\{t^{\mu-\lambda}L^{-1}[x^{-\lambda}\phi(x)]\}\}\;; & 0<x<1 \\ t_2(x)=\{x^{\rho}.L\{t^{\rho-\eta-1}[L\{t^{\eta-\varepsilon}L^{-1}\{x^{-\varepsilon}\psi(x)\}\}]_{x=t^{-1}}\}. & \end{cases}$$

$$x>1\;. \qquad (34)$$

Ahora bien, la (33), en virtud de (3), es:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L M\{H^{m+n,p+q}_{2(p+q),2(m+n)}(u)\}x^{-s}\,F(1-s)\,ds = t(x)\ . \tag{35}$$

En virtud de (9), la (35) puede escribirse:

$$\int_0^\infty H^{m+n,p+q}_{2p+2q,2m+2n}(xu)\,f(u)\,du = t(x)\ , \tag{36}$$

en donde $H(xu)$ se define como en (2).

Siendo $H(xu)$ un núcleo simétrico de Fourier, la solución es:

$$f(x) = \int_0^\infty t(u).\,H^{m+n,p+q}_{2(p+q),2m+2n}(xu)\,du$$

$$f(x) = \int_0^1 t_1(u)\,H^{m+n,p+q}_{2(p+q),2(m+n)}(xu)\,du + $$

$$+ \int_1^\infty t_2(u)\,H^{m+n,p+q}_{2(p+q),2(m+n)}(xu)\,du\ , \tag{37}$$

o sea:

$$f(x) = \int_0^1\{u^\lambda.L\{t^{\mu-\lambda}L^{-1}\{u^{-\lambda}\phi(u)\}\}\ .$$

$$.\,H^{m+n,p+q}_{2(p+q),2(m+n)}(xu)\,du + \int_1^\infty\{u^\rho\ .$$

$$.L\{t^{\rho-\eta-1}[L\{t^{\eta-\varepsilon}\,L^{-1}\{u^{-\varepsilon}\psi(u)\}\}]_{u=t^{-1}}\}\ .$$

$$.\,H^{m+n,p+q}_{2(p+q),2(m+n)}(xu)\,du.$$

§ 4 Casos Especiales. Tomando $p = 0$, $q = 0$, $n = 0$, $m = 1$, $\lambda = 0$, $\mu = \frac{1}{2}$, $\gamma = 1$, $j = 1$, $c_1 - \frac{1}{2} = a$, $\rho = \varepsilon$, $\eta = \frac{1}{2}$, obtenemos en (2), usando [2, p.374] :

$$H^{m+n,p+q}_{2(p+q),2(m+n)}(x) = J_{2a}(2\sqrt{x}) \ . \qquad (39)$$

En (14), usando [2, p.337] obtenemos:

$$H^{m+n+1,p+q}_{2p+2q+1,2m+2n+1}(x) = -\Pi^{1/2} J_a(\sqrt{x}) Y_a(\sqrt{x}), \qquad (40)$$

En (17);

$$H^{m+n+1,p+q}_{2p+2q+2,2m+2n+1}(x) = G^{10}_{12}\left(x\middle|{}^{1/2}_{a;\ -a}\right)$$

Por Mathai y Saxena [10, p.61]

$$G^{10}_{12}\left(x\middle|{}^{1/2}_{a;\ -a}\right) = \Pi^{-1/2} \cos(a\Pi)\ e^{x/2}\ I_a(x/2) \ ; \qquad (41)$$

en donde $J_\gamma(x)$, $Y_\gamma(x)$ son funciones de Bessel y G es la bien conocida función de Meijer [4] .

Entonces para (12) y (13) por (40) y (41) tendremos:

$$\int_0^\infty -\Pi^{1/2}\ J_a(\sqrt{xu})\ Y_a(\sqrt{xu})\ f(u)\ du = \emptyset(x), \quad 0<x<1$$

y

$$\int_0^\infty \Pi^{-1/2} \cos(a\Pi)\ e^{xu/2} I_a(xu/2) f(u) du = \psi(x), \quad x>1 \ ,$$

Por lo tanto, para (37) obtendremos:

$$f(x) = \int_0^1 t_1(u)\, J_{2a}(2\sqrt{xu})du + \int_1^\infty t_2(u)\, J_{2a}(2\sqrt{xu})\, du,$$

donde $t_1(u)$ y $t_2(u)$ están dados en (34).

Tomando $n = 0$ y $q = 0$ en (12) y (13), tendremos:

$$\int_0^\infty H^{m+1,p}_{2p,2m+1}(xu)\, f(u)du = \phi(x), \qquad 0<x<1 ,$$

y

$$\int_0^\infty H^{m+1,p}_{2p+2,2m+1}(xu)\, f(u)du = \psi(x), \qquad x>1 .$$

Su solución por (37) será:

$$f(x) = \int_0^1 t_1(u)\, H^{m,p}_{2p,2m}(xu)du + \int_1^\infty t_2(u) H^{m,p}_{2p,2m}(xu)du$$

en donde $H^{m,p}_{2p,2m}(x)$, es un núcleo simétrico de Fourier [4] .

REFERENCIAS.

[1] Braaksma, B.L.J.: Asymptotic expansions and analytic continuations for a class of Barnes-integrals. Compos. Math. 15, 259-341 (1963).

[2] Erdélyi, A.: et al: Tables of integral Transforms, Vol. 1, Mc Graw-Hill, New York, (1954).

[3] Erdélyi, A.: An integral equation involving Legendre functions. SIAM J. Appl. Math., 12 (1964), 15-30.

[4] Fox, C.: The G and H-functions as symmetrical Fourier kernels. Tras.Amer. Math, Soc. 98, 395-429 (1961).

[5] Fox, C.: Solving integral equations by L and L^{-1} operators, Proc. Amer.Math. Soc. 29 (1971) Nº 2, (p.299-306).

[6] Fox, C.: Applications of Laplace transforms and their inverses. Proc. Amer. Math. Soc. 35 (1972), (p. 193-200).

[7] Fox, C.: A formal solution of certain dual integral equations. Trans. Amer. Math. Soc., 119 (1965), 389-398.

[8] Gómez-López, A.M.M.: The inversion formulae for some hipergeometrie transforms. Tohoku Mathematical Journal. Vol. 26. Nº 2 (p. 315-323), (1974).

[9] Kumbhat, R.K. and Saxena, R.K.: A formal solution of certain triple integral equations involving H-functions. Proc. Nat. Acad. Sc. India (1974).

[10] Mathai, A.M. and Saxena, R.K.: Generalized Hipergeometric Functions, with Applications in Statistics and Physical Sciencies. Springer Vestae, (1973).

[11] Oberhettinger, F. and Baddi, L.: Tables of Laplace Transforms. Springer Ves ,
New York-Heidelberg, (1973).

[12] Sneddon, J.N.: Mixed Boundary value Problems in Potential Theory North Holland Publishing Co, (1966).

[13] Saxena, R.K. and Kumbhat.: Dual Integral equations associated with Functions. Proc.Nat. Acad. Sci., India (1974).

[14] Titchmarsh, E.C.: And introduction to the theory of Fourier integrals Oxford (1939).

[15] Tranter, C.J.: Integral Transform in Mathematical Physic. 2nd. Ed. Meuthem and Co, London, Jhon Wiley, New York (1956).

[16] Verma, R.U.: Solution of an integral equation by L and L^{-1} operators. Analele Stiintifice universcitatii, Al. I. Cuza. Din Iasi, Sem. Matematic. Tomul XX (1974).

***

Facultad de Bioquímica, Química y Farmacia y
Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología.
Universidad Nacional de Tucumán.
Tucumán, Argentina, S. A.

(Recibido en julio de 1976).