Revista Colombiana de Matemáticas
Vol. VII, 1973, págs. 101 - 107

LA DESIGUALDAD DE CAUCHY - SCHWARZ

por
Alonso TAKAHASHI

RESUMEN

Se obtiene una generalización de la desigualdad de Cauchy-Schwarz para una forma hermítica positiva con valores en una C*-álgebra no necesariamente conmutativa. La demostración de este resultado se usa luego para dar una nueva demostración de la mencionada desigualdad cuando la C*-álgebra en cuestión es conmutativa.

1. *C^*-álgebras.* Una C^*-álgebra es un álgebra normada e involutiva A tal que $||a||^2 = ||a^* a||$ para todo $a \in A$. Si A es una C^*-algebra y $\tilde{A}$ es el álgebra involutiva obtenida a partir de A añadiendo un elemento unidad, entonces la norma de A puede extenderse a $\tilde{A}$ de manera única, bajo la condición de hacer de $\tilde{A}$ una C^*-álgebra ([1], 1.3.8). Esto permite reducir casi siempre el estudio de las C^*-álgebras al caso en el cual hay un elemento unidad; haremos esta hipótesis de ahora en adelante.

Para cada elemento a de una C^*-álgebra (con unidad 1_A), el *espectro* de a es el conjunto $Sp\ a$ de todos los números complejos λ tales que $a - \lambda \cdot 1_A$ no tiene inverso; en consecuencia, a es invertible si, y sólo si, $0 \notin Sp\, a$. Para todo a de A existe el límite $\rho(a) = \lim_{n \to \infty} \|a^n\|^{1/n}$; éste es el *radio espectral* de a ([2], Theorem (1.4.1)) y se tiene que $\rho(a) = \sup(Sp\, a)$ ([2], Theorem (1.6.4)). Si c es un elemento invertible entonces $Sp(c^{-1}) = (Sp\, c)^{-1} (= \{\lambda : \lambda^{-1} \in Sp\, c\})$.

Sea A una C^*-álgebra y sea b un elemento de A; se dice que b es *auto-adjunto* si $b^* = b$. En este caso, todo elemento $Sp\, b$ es real. Se dice que un elemento c es *positivo*, y se escribe $c \geq 0$, si c es auto-adjunto y puede escribirse en la forma aa^* para algún a de A; esto ocurre si, y sólo si, todos los elementos de $Sp\, c$ son números reales no negativos. El conjunto de todos los c de A tales que $c \geq 0$ se denota A^+; éste es un subconjunto de A cerrado con respecto a la topología inducida por la norma ([1], 1.6.1). Si $c \geq 0$ y $c' \geq 0$ entonces $c + c' \geq 0$ y también $tc \geq 0$ para todo real t no negativo; si a y b son elementos de A tales que $a \leq b$ entonces $c^* a c \leq c^* b c$, para todo c de A ([1], 1.6.8).

Nótese que, para todo número t y todo elemento a de A, $Sp(a + t \cdot 1_A) = Sp\, a + t\ (= \{\lambda + t : \lambda \in Sp\, a\})$; entonces, si $a > 0$ y tomamos $t = \varepsilon > 0$, $0 \notin Sp(a + \varepsilon \cdot 1_A)$; luego $a + \varepsilon \cdot 1_A$ es invertible.

Si a es un elemento auto-adjunto y t es un real tal que $t \leq \lambda$, para todo $\lambda \in Sp\, a$, entonces $Sp(a - t \cdot 1_A) = \{\lambda - t : \lambda \in Sp\, a\}$, luego $Sp(x - t \cdot 1_A)$ está constituido por números reales no negativos, es decir, $a \geq t \cdot 1_A$.

Si a es auto-adjunto (en particular, si $a \geq 0$) entonces $\|a^2\| = \|a^* a\| = \|a\|^2$ y entonces $\|a^{2n}\|^{1/2n} = \|a\|$, para todo n natural. Tomando el límite cuando $n \to \infty$ se concluye que $\rho(a) = \|a\|$ y entonces $Sup\,(Sp\, a) = \|a\|$.

2. *Formas hermíticas positivas.* Sea A una C^*-álgebra con unidad y sea H un módulo unitario sobre A; diremos que A es la C^*-álgebra de *escalares* de H. Como $1_A \epsilon A$ puede identificarse cada número complejo λ con el elemento $\lambda \cdot 1_A$ de A y entonces H puede considerarse como un espacio vectorial complejo.

DEFINICIÓN. Una *forma hermítica* sobre H con valores en A es una aplicación

$$< | > : H \times H \rightarrow A$$

tal que, para todo $x, x', y \epsilon H$ y todo $a \epsilon A$ las siguientes condiciones se verifican :

(i) $< x + x' \mid y > = < x \mid y > + < x' \mid y >$;

(ii) $< ax \mid y > = a < x \mid y >$;

(iii) $< x \mid y > = < y \mid x >^*$.

Fácilmente se comprueba que en este caso :

(i') $< y \mid x + x' > = < y \mid x > + < y \mid x' >$;

(ii') $< x \mid ay > = < x \mid y > a^*$;

(iii') $< x \mid x >$ es auto-adjunto.

Una forma hermítica $< | >$ se dice *positiva* si, para todo $x \epsilon H$ se tiene que

(iv) $< x \mid x > \geq 0$.

3. *La desigualdad de Cauchy-Schwarz.* La conocida desigualdad de Cauchy-Schwarz para formas hermíticas positivas con valores complejos admite la siguiente generalización :

TEOREMA. Si H es un módulo unitario sobre una C^*-álgebra A y $< | >$

es una forma hermítica positiva sobre H *con valores en* A *, entonces*

$$<x\,|\,y> \; <x\,|\,y>^* \;\leq\; \|<y\,|\,y>\|\,<x\,|\,x>,$$

para todo par de elementos x, y *de* H .

Demostración . Sean a un elemento cualquiera de A y ε un número real mayor que cero . Entonces :

$$0 \leq \; <x - ay \,|\, x - ay> \;=\; <x\,|\,x> - <x\,|\,y>a^* - a<y\,|\,x> + a<y\,|\,y>a^* \;.$$

Como $aa^* \geq 0$ entonces también $\varepsilon \cdot aa^* \geq 0$; luego

$$0 \leq \; <x\,|\,x> - <x\,|\,y>a^* - a<y\,|\,x> + a<y\,|\,y>a^* + \varepsilon \cdot aa^* \;,$$

es decir ,

$$0 \leq \; <x\,|\,y> - <x\,|\,y>a^* - a<y\,|\,x> + a(<y\,|\,y> + \varepsilon \cdot 1)\,a^* \;. \quad (\alpha)$$

Denotando por M el $sup\,[Sp <y\,|\,y>]$ y como $<y\,|\,y> \;\geq 0$, se tiene que $M = \|<y\,|\,y>\| \geq 0$.

Tomemos $z = \;<y\,|\,y> + \varepsilon \cdot 1$. Como $\varepsilon > 0$ entonces existe z^{-1} . Ahora bien, $inf\,[Sp\; z^{-1}] = inf\,\{\lambda : \lambda^{-1} \in Sp\; z\} = 1\,/\,sup\,(Sp\; z)$. Pero $Sp\; z = Sp\,(<y\,|\,y> + \varepsilon \cdot 1) = \{\lambda + \varepsilon : \lambda \in Sp <y\,|\,y>\}$, luego $sup\,(Sp\; z) = M + \varepsilon$, es decir, $inf\,[Sp\; z^{-1}] = 1/M + \varepsilon$ y entonces $z^{-1} \geq [\,1/(M+\varepsilon)\,] \cdot 1_A$.

Sea ahora $a = \;<x\,|\,y>\, z^{-1}$. Como $z \geq 0$, en particular es auto-adjunto y entonces z^{-1} también lo es ; luego $a^* = z^{-1} <x\,|\,y>^*$. Reemplazando a y a^* en la desigualdad (α) se obtiene

$$0 \leq \; <x\,|\,x> - <x\,|\,y>\, z^{-1} <x\,|\,y>^* - <x\,|\,y>\, z^{-1} <x\,|\,y>^* + <x\,|\,y>\, z^{-1} z\, z^{-1} <x\,|\,y>^*,$$

esto es

$$0 \;\leq\; <x\,|\,x> - <x\,|\,y>\, z^{-1} <x\,|\,y>^* \,.$$

Luego
$$<x|y>z^{-1}<x|y>^* \leq <x|x> \quad .$$

Pero, de la desigualdad $[1/(M+\varepsilon)]\cdot 1 \leq z^{-1}$ anteriormente obtenida se desprende que

$$0 \leq <x|y> \left(\frac{1}{M+\varepsilon} 1_A\right) <x|y>^* \leq <x|y> z^{-1} <x|y>^* \; .$$

Luego
$$0 \leq \frac{1}{M+\varepsilon} <x|y><x|y>^* \leq <x|x> \; ,$$

esto es
$$0 \leq <x|y><x|y>^* \leq (M+\varepsilon)<x|x> \; .$$

Como A^+ es cerrado, se concluye que

$$0 \leq <x|y><x|y>^* \leq M<x|x> \; ,$$

que es la desigualdad propuesta. ■

4. *El caso conmutativo.* Cuando A es conmutativa puede obtenerse un resultado más ajustado :

Corolario 1. Si en el teorema anterior A es conmutativa, entonces

$$<x|y><x|y>^* \leq <x|x><y|y> \; .$$

Demostración . Como en la demostración del teorema, obtenemos

$$<x|y> z^{-1} <x|y>^* \leq <x|x>$$

Como en este caso el producto de elementos positivos es positivo se tiene, multiplicando por z :

$$<x|y><x|y>^* \leq <x|x><y|y>+\varepsilon<x|x> \; .$$

Esta relación implica el corolario . ■

5. *Desigualdad numérica.* Teniendo en cuenta que en una C^*-álgebra, si $a,b \in A^+$ y $a \leq b$ entonces $\|a\| \leq \|b\|$ ([1] , 1.6.9) , la desigualdad obtenida en 3 implica, bajo las mismas hipótesis, el resultado siguiente :

Corolario 2. Para todo x y todo y en H,

$$\|<x|y>\| \leq \|<x|x>\|^{1/2} \|<y|y>\|^{1/2} .$$

6. *Notas . (1)* Si $A = C$, la desigualdad obtenida en el caso conmutativo es el resultado clásico .

(2) El resultado obtenido para el caso conmutativo no es cierto, en general, en el caso no-conmutativo. En efecto, si se toma $H = A$ = el espacio de las matrices 2×2 con elementos complejos y se define $<x|y> = xy^*$, donde y^* es la conjugada de la traspuesta de y, se obtiene una forma hermítica positiva sobre H con valores en A . Tomando

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

se tiene

$$<x|x> <y|y> - <x|y> <x|y>^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

y este elemento no es positivo .

BIBLIOGRAFÍA

1. *DIXMIER, J. " Les C^*- algèbres et leur représentations* , 2^{eme} éd. Gauthier-Villar, Paris, 1969.
2. *RICKART, C. E. General Theory of Banach Algebras,* D. van Nostrand, New York, 1960 .

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, Colombia, S. A.

(Recibido en septiembre de 1971) .