Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen VI (1972), págs. 59-68

SUR LES PROBLÈMES DE CLASSIFICATION DE FEUILLETAGES

par
Robert MOUSSU

Les problèmes rencontrés dans l'étude des feuilletages sont essentiellement de 2 types : les problèmes d'existence et les problèmes de classification. Par exemple Poincaré a montré que le tore $T^2 = S^1 \times S^1$ est la seule surface fermée qui possède un feuilletage ; ensuite, les théorèmes de Poincaré-Bendixson et Denjoy [1] permettent de classifier les feuilletages de T^2.

Dans cet exposé nous nous proposons de montrer comment il est possible de généraliser ces résultats de classification à certains feuilletages de codimension 1.

1. *Généralités. (voir [2])*

Définition 1. Un feuilletage F de codimension 1 de classe $r \geq 1$ d'une varieté, M^n de dimension n est la donnée d'une famille de C^r immersions injectives $\{i_L : L \to M^n\}_{L \in F}$ de varietés L connexes de dimension $n-1$ dans M^n qui vérifient les conditions suivantes :

i) Les images des immersions i_L pour $L \in F$ forment une partition de M^n et s'appellent les feuilles de F.

ii) quel que soit $a \in M^n$, il existe un voisinage ouvert U de a et une C^r-submersion $f: U \to \mathbb{R}$ telle que les composantes connexes de l'image réciproque par f d'un point de $\mathbb{R}$ soient contenues dans une feuille de F. Une telle composante connexe est appelée une plaque de la feuille qui la contient.

Le feuilletage F est dit transversalement orientable s'il existe un champ de vecteurs X sur M^n sans zéro dont les trajectoires sont transverses aux feuilles de F.

Dans toute la suite F désignera toujours un feuilletage transversalement orientable de codimension 1, de classe $r \geq 2$ d'une variété compacte M^n. Lorsque M^n a un bord ∂M on supposera en outre que F est tangent au bord, c'est à dire que toute composante connexe de ∂M, est une feuille de F.

Du point ii) de la définition il résulte qu'il existe sur M^n une topologie T_F dont les plaques forment une base. Cette topologie est plus fine que la topologie usuelle T_o de M^n. On l'appelle la topologie des feuilles.

On est ainsi amené à distinguer 3 types de feuilles; une feuille L de F est dite [6] :

1) Propre : si les topologies induites par T_F et T_o sur L sont identiques. Par exemple toute feuille compacte est propre.

2) Localement dense : si l'adhérence de L a un intérieur non vide.

3) Exceptionnelle : si L n'est pas d'un des types 1 ou 2.

Il est facile de montrer que la relation d'equivalence R_F associée à la partition définie par F est ouverte. On en déduit que l'adhérence d'une feuille de F est une réunion de feuilles. Ainsi pour étudier le type topologique (1, 2 ou 3) d'une feuille de F on est amené à étudier son adhérence et plus particulierement les sous ensembles minimaux de F qui sont définis de la façon suivante :

Soit C_F la famille des sous-ensembles compacts de M^n saturés pour la relation R_F. Un sous-ensemble minimal de F est un élément $K \in C_F$ qui est minimal dans C_F pour la relation d'inclusion.

La relation d'équivalence R_F étant ouverte un sous-ensemble minimal K de F peut être :

1. Une feuille compacte.
2. Un ensemble d'intérieur non vide. C'est alors une réunion de feuilles localement denses.
3. Une réunion de feuilles exceptionnelles. On dit alors que K est un ensemble minimal exceptionnel de F. On vérifie facilement alors que K est un ensemble parfait totalement discontinu de M^n.

Par construction, l'adhérence de toute feuille de F contient un ensemble minimal. Si un feuilletage possède un ensemble minimal exceptionnel il est facile d'imaginer que la partition associée à ce feuilletage est très compliquée et qu'il est alors très difficile de l'étudier. Ainsi il est intéressant de connaître des conditions de non existence d'ensemble minimal exceptionnel (voir [3]).

Le critère que nous venons de proposer pour classifier un feuilletage : "étude du type topologique de ses feuilles" n'est pas très précis. Par contre le critère défini par la relation d'équivalence suivante est souvent trop étroit et difficilement utilisable.

DEFINITION 2 : On dit que 2 feuilletages F_1 et F_2 d'une même varieté M^n sont topologiquement conjugués s'il existe un homéomorphisme $h: M^n \to M^n$ qui applique les feuilles de F_1 sur les feuilles de F_2.

Les paragraphes suivants ont pour but de montrer comment ces différents critères peuvent être utilisés.

2. *Classification des feuilletages de* T^2.

Comme nous l'avons déja dit les résultats de Poincaré, Bendixson et Denjoy permettent de caractériser le type topologique des feuilles d'un feuilletage de T^2 - Rappelons ces résultats a l'aide du théorème suivant.

THEOREME 1 : Soit F un feuilletage de T^2 : si F ne possède pas de feuilles compactes, chacune de ses feuilles est dense dans T^2; si F possède au moins une feuille compacte toutes ses feuilles sont propres.

Ainsi tout feuilletage de T^2 (de classe ≥ 2) ne possède pas d'ensemble minimal exceptionnel. Par contre A. Denjoy a donné un exemple de feuilletage de classe $r=1$ de T^2 qui possède un ensemble minimal exceptionnel [3].

En fait les résultats obtenus par Denjoy sont beaucoup plus précis, ils permettent de déterminer les classes de conjugaison des feuilletages de T^2. Pour énoncer cette classification nous devons tout d'abord définir les feuilletages qui seront les représentants des différentes classes de conjugaison.

On appelle feuilletage linéaire F_α de T^2 le feuilletage dont les feuilles sont les images des droites D_t de $\mathbb{R}^2$:

$$\alpha x + y = t \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

par l'application (exp , exp)

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to S^1 \times S^1 = T^2.$$

Il est facile de voir que si α est rationnel les feuilles de F_α sont compactes sinon ce sont des sous-ensembles denses de T^2.

THEOREME 2 : Tout feuilletage F de T^2 (de classe $r \geq 2$) sans feuilles compactes est conjugué à un feuilletage linéaire de T^2.

En fait il est possible de classifier aussi (avec le critère de conjugaison) les feuilletages de T^2 possédant des feuilles compactes en utilisant les feuilletages de la couronne $S^1 \times [0, 1]$ (voir [4]).

3. *Généralisation des résultats de Poincaré Bendixson-Denjoy.*

La première généralisation du théorème de Denjoy a été obtenue par R.

Sacksteder [9] . Elle porte sur les feuilletages sans holonomie. Definissons tout d'abord cette notion avant d'énoncer ce théorème : Soient L une feuille d'un feuilletage F de M^n, a un point de L et $\alpha : S^1 \to L$ une immersion qui représente l'élément $[\alpha]$ de $\Pi_1(L, a)$ $(\alpha(1) = a)$. Désignons par $\varphi_x : \mathbb{R} \to M^n$ la courbe intégrale d'un champ de vecteurs X sur M^n transverse à F telle que $\varphi_x(0) = x$. Pour $\epsilon > 0$ suffisament petit on peut supposer que $\varphi_x/(-\epsilon, \epsilon)$ est injective. Soit alors l'immersion.

$$\bar{\alpha} : S^1 x (-\epsilon, \epsilon) \to M^n$$

définie par

$$\bar{\alpha}(\theta, t) = \varphi_{\alpha(\theta)}(t)$$

L'image réciproque par α de la feuille de F passant par le point $\bar{\alpha}(1, 1) = \varphi_{\alpha(1)}(t)$ est une courbe c_t tracee sur $S^1 \times (-\epsilon, \epsilon)$. On dit que le feuilletage F (transversalement orientable) est sans holonomie si quelque soit la feuille L de F, le point $a \in L$ et quelque soit $\alpha : S^1 \to L$ avec $\alpha(1) = a$ il existe $t_0 > 0$ tel que les courbes c_t pour $t \leq t_0$ sont compactes. Par exemple un feuilletage de T^2 sans feuille compacte est sans holonomie.

THEOREME 3 [9] : *Soit* F *un feuilletage sans holonomie de* M^n. *Alors les feuilles de* F *sont toutes homéomorphes et elles sont simultanément toutes compactes ou toutes partout denses dans* M^n.

En fait R. Sacksteder montre plus précisément qu'il existe une nouvelle structure différentiable et une 1 - forme w sur M^n munie de cette structure qui ne s'annule pas telle que le feuilletage F tangent au champ de $(n-1)$ plans défini par ω possède les mêmes feuilles que F. De plus un raisonnement de D. Tischler [10] permet de montrer que M^n est un fibré sur S^1, et on peut en déduire que les feuilles de F sont des revêtements galoisiens de la fibre de cette fibration [3].

La condition "sans honolomie" est très restrictive, et R. Roussarie et moi-même avons demontré le théorème suivant [4] qui permet de remplacer cette conditions par des conditions topologiques moins restrictives.

THEOREME 4. Soit F *une feuilletage d'une variété* M^n *dont le groupe fondamental est abélien. Alors si pour toute feuille* $L \in F$ *l'immersion* $i_L : L \to M^n$ *induit un monomorphisme* $i_{L\#} : \Pi_1(L) \to \Pi_1(M^n)$, *le feuilletage* F *ne possède pas d'ensemble minimal exceptionnel.*

De ce théorème (et avec les mêmes hypothèses) on peut déduire les corollaires suivants.

COROLLAIRE 1. [4] Si F *ne possède pas de feuilles compactes, c'est un feuilletage sans holonomie.*

COROLLAIRE 2. [3] Si pour toute feuille compacte $L \in F$, *l'immersion* $i_L : L \to M^n$ *induit un épimorphisme* $i_{L*} : H_1(L) \to H_1(M^n)$, F *ne possède pas de feuilles exceptionnelles.*

Ce dernier corollaire peut en particulier être appliqué à des feuilletages de variétés du type $V^{n-1} \times [0,1]$.

4. *Classification des feuilletages de* T^3.

Pour decrire les classes de conjugaison de certains types de feuilletages de T^3 nous allons définir (de la même façon que pour T^2) certains feuilletages qui seront les représentants de ces classes :

On appelle feuilletage linéaire $F_{\alpha,\beta}$ de T^3, le feuilletage dont les feuilles sont les images par l'application

$(exp, exp, exp) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to S^1 \times S^1 \times S^1$ des plans de $\mathbb{R}^3$ d'equations :

$$\alpha x + \beta y + z = t \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

Un théorème de S. P. Novikov [5] permet d'affirmer qu'un feuilletage F de T^3 tel qu'il existe au moins une feuille pour laquelle l'application $i_L\# : \Pi_1(L)$ $i_L\# : \Pi_1(L) \to \Pi_1(T^3)$ ne soit pas injective possède au moins une feuille compacte. Ainsi le corollaire *1* implique qu' un feuilletage de T^3 sans feuille compacte est sans holonomie.

D'autre part H. Rosenberg et R. Roussarie ont montré dans [7] et [8] qu'un feuilletage sans holonomie de T^3 est topologiquement conjugué à un feuilletage linéaire de T^3. On obtient ainsi le théorème de classification suivant.

THEOREME 4. Un feuilletage de T^3 *sans feuille compacte est topologiquement conjugué à un feuilletage linéaire.*

En fait il est possible de classifier d'autres types de feuilletages de T^3 (voir [4]) :

- les feuilletages analytiques
- les feuilletages F, tels que pour toute feuille $L \epsilon F$, $i_{L}\#$ est un monomorphisme.

Signalons pour terminer que R. Bott et A. Haefliger ont construit récemment des classes caractéristiques "exotiques" pour les feuilletages de codimension quelconques. On dispose ainsi d'une nouveau critère (voir exposé de A. Haefliger, Séminaire Bourbaki, Juin 1972).

LITTERATURE

1. A. Denjoy: Sur les courbes définies par des équations différentielles a la surface du tore : J. Math. Pures Appl., 11 (1932).
2. A. Haefliger : Variétés feuilletées. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa., serie 3, 16 (1962).
3. R. Moussu : Sur les feuilletages de codimension 1. Thèse, Orsay (1971).
4. R. Moussu et R. Roussarie. Relations de conjugaison et de cobordisme entre feuilletages (à paraître aux Annales de L'IHES).
5. S. Novikov. Topology of foliations. Trudy Moskov. Mat. Obšč., 14 (19) 513-83.
6. G. Reeb: Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées. Actualités. Scien., Hermann (1952).

7. H. Rosenbergt R. Roussarie : Topological equivalence of Reeb foliations. Topology, 9 (1970).

8. R. Roussarie : Plongements dáns les variétés feuilletées et classification des feuilletages sans holonomie (à paraître dans Topology).

9. R. Sacksteder : Foliations and Pseudogroups. Amer. J. Math., 87 (1965)

10. D. Tischler : On fibering certain foliated manifolds, Topology, 9 (1970)

Département de Mathématiques
Université ae Dijon
Dijon, France
(Recibido el 15 de agosto de 1972)