Revista Colombiana de Matemáticas
Vol. VI No. 2 Pág. 17 - 56

DENSIDAD DE LOS OPERADORES DE SCHATTEN EN UN ESPACIO DE HILBERT

por

Yu TAKEUCHI

Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia

§ 1. *Introducción.*

En un espacio de Hilbert, dado un sistema ortonormal completo $\{\varphi_k\}$ y un sistema ortonormal (no necesariamente completo) $\{\psi_k\}$, se define un operador T como sigue :

$$T : T\varphi_k = \lambda_k \psi_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots), \tag{1}$$

donde $\{\lambda_k\}$ es una sucesión de números complejos. Los operadores de este tipo fueron estudiados antes de la aparición de la teoría espectral por P. A. M. Dirac [5] pues jugaban un papel importante en su conocida teoría de transformaciones en mecánica cuántica .

NOTA. Según Dirac, el operador (1) se denomina "Operador Ket" y se denota

$$T = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \mid \psi_k \rangle\langle \varphi_k \mid \tag{2}$$

Recientemente, Robert Schatten[1] trabajó con estos operadores en forma más sistemática con el objeto de estudiar los operadores completamente contínuos utilizando una notación parecida a la usada por Dirac :

$$T = \Sigma_{k=1}^{\infty} \lambda_k \, \psi_k \otimes \varphi_k \, . \tag{3}$$

En el presente trabajo a los operadores de este tipo los llamaremos " operadores de Schatten " y usaremos la notación (3). Los operadores de Schatten no forman una álgebra, razón por la cual no se han estudiado en la teoría de Algebras de Banach , salvo casos de operadores completamente contínuos .

EJEMPLO 1.

En el espacio $L_2(1, 2)$ el operador S :

$$S = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{4x^2}$$

es un operador de Schatten (ver el apéndice). También lo es el siguiente :

$$T = - \frac{d^2}{dx^2}$$

ya que

$$T = - \frac{d^2}{dx^2} = \Sigma_{n=1}^{\infty} \pi^2 n^2 \varphi_n \otimes \varphi_n$$

donde

$$\varphi_n = \sqrt{2}\ \mathrm{sen}\ \ n\pi x \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots\ ).$$

Por otra parte, el operador $T + S = \dfrac{1}{4x^2}$ no es de Schatten (ver el apéndice).

■

En este artículo se demuestra que los operadores de Schatten forman un conjunto denso dentro de cierta clase de operadores (acotados y no acotados), o sea que, para cualquier operador T tal que $T^* T$ tiene dominio denso en el espacio, dado $\varepsilon > 0$ existe un operador de Schatten T_ε tal que $T - T_\varepsilon$ es acotado y

$$\| T - T_\varepsilon \| < \varepsilon .$$

Esto es, si el dominio de $T^* T$ es denso en el espacio, el operador T es <u>aproximable</u> por los operadores de Schatten.

§ 2. *Nociones Preliminares*.

LEMA 1.

Sea H un operador hermítico, acotado y positivamente definido en un espacio de Hilbert $\mathfrak{H}$. Si

$$< H\varphi, \varphi > < \|\varphi\|^2$$

para algún $\varphi \in \mathfrak{h}$ entonces existe un $\varphi_o \in \mathfrak{h}$ tal que la sucesión

$$\{ \| H^{\nu} \varphi_o \| \}$$

converge a un valor finito.

OBSERVACION.

La demostración del Lema 1 es inmediata utilizando la teoría espectral de un operador auto-adjunto [2]; aquí daremos una demostración directa [3].

<u>Demostración.</u>

[I] Consideremos los subespacios:

$$\mathfrak{M} = \{ \varphi, H\varphi, H^2\varphi, \dots \}$$

$$\mathfrak{M}_n = \{ \varphi, H\varphi, \dots, H^{n-1}\varphi \} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Sea P_n la proyección de $\mathfrak{M}$ sobre $\mathfrak{M}_n$:

$$P_n \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_n .$$

El operador $H_n = P_n H P_n$ es un operador hermítico de $\mathfrak{M}$ en $\mathfrak{M}_n$, y se tiene que

$$\lim_{n \to \infty} H_n\, a = H a \qquad \text{para todo} \qquad a \in \mathfrak{M} .$$

Por la diagonalización de H_n, existe una base ortonormal $\{ e_1, e_2, \ldots, e_n \}$ del subespacio $\mathfrak{M}_n$, formada por los vectores propios del operador H_n :

$$H_n\, e_k = \lambda_k\, e_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) .$$

Sean

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_n = \{ e_k \mid \lambda_k \geqq 1 \} ,$$

$$\approx\!\!\!\!\mathfrak{M}_n = \mathfrak{M}_n \ominus \widetilde{\mathfrak{M}}_n ,$$

$$\varphi = \widetilde{\varphi}_n + \overset{\approx}{\varphi}_n , \quad \widetilde{\varphi}_n \in \widetilde{\mathfrak{M}}_n , \quad \overset{\approx}{\varphi}_n \in \overset{\approx}{\mathfrak{M}}_n . \tag{1}$$

Como $\{ \overset{\approx}{\varphi}_n \}$ es una sucesión acotada, existe una subsucesión que converge débilmente a un elemento de $\mathfrak{M}$, digamos a φ_o. Para mayor sencillez supongamos que :

$$\overset{\approx}{\varphi}_n \to \varphi_o \qquad (\text{débil}) . \tag{2}$$

(i) Primero demostremos que $\varphi_o \neq 0$.

Supongamos que $\varphi_o = 0$. Se tendría por (1) :

$$\widetilde{\varphi}_n \to \varphi \qquad (\text{débil}) , \tag{3}$$

luego :

$$\| \varphi \| \leqq \underline{\lim} \; \| \tilde{\varphi}_n \| \; . \tag{4}$$

De (1), se tiene que $\| \tilde{\varphi}_n \| \leqq \| \varphi \|$, o sea

$$\| \varphi \| \geqq \overline{\lim} \; \| \tilde{\varphi}_n \| \; . \tag{5}$$

De (3) y (5) :

$$\lim_{n \to \infty} \tilde{\varphi}_n = \varphi \, . \tag{6}$$

Por lo tanto :

$$< H \varphi , \varphi > = \lim_{n \to \infty} < H_n \tilde{\varphi}_n , \tilde{\varphi}_n > \geqq \lim_{n \to \infty} < \tilde{\varphi}_n , \tilde{\varphi}_n > = \| \varphi \|^2 ,$$

lo cual contradice a la hipótesis. Luego $\varphi_o \neq 0$.

(ii) De (2) se tiene :

$$(H_n)^\nu \tilde{\tilde{\varphi}}_n \to H^\nu \varphi_o \quad \text{(débil), para todo} \quad \nu \, ,$$

luego

$$\| H^\nu \varphi_o \| \leqq \underline{\lim} \; \| (H_n)^\nu \tilde{\tilde{\varphi}}_n \| \leqq \underline{\lim} \; \| \tilde{\tilde{\varphi}}_n \| \leqq \| \varphi \| \quad \text{(para todo } \nu)$$

esto es ,

$$\overline{\lim_{\nu \to \infty}} \; \| H^\nu \varphi_o \| \leqq \| \varphi \| < + \infty \tag{7}$$

[II]

$$\|H^{\nu}\varphi_o\|^2 = \langle H^{\nu}\varphi_o, H^{\nu}\varphi_o\rangle = \langle H^{\nu+1}\varphi_o, H^{\nu-1}\varphi_o\rangle \leqq \|H^{\nu+1}\varphi_o\| \, \|H^{\nu-1}\varphi_o\|,$$

por consiguiente :

$$\frac{\|H^{\nu}\varphi_o\|}{\|H^{\nu-1}\varphi_o\|} \leqq \frac{\|H^{\nu+1}\varphi_o\|}{\|H^{\nu}\varphi_o\|} \qquad (\text{para todo } \nu) .$$

Esto es, la sucesión $\{\|H^{\nu}\varphi_o / \|H^{\nu-1}\varphi_o\|\}$ es creciente. Si su límite es mayor que 1 se tiene que la sucesión $\{\|H^{\nu}\varphi_o\|\}$ diverge a $+\infty$. Por lo tanto, de (7) :

$$\lim_{\nu\to\infty} \|H^{\nu}\varphi_o\| \Big/ \|H^{\nu-1}\varphi_o\| \leqq 1 ,$$

o sea ,

$$\frac{\|H^{\nu}\varphi_o\|}{\|H^{\nu-1}\varphi_o\|} \leqq 1 , \quad \text{para todo } \nu . \tag{8}$$

O sea que la sucesión $\{\|H^{\nu}\varphi_o\|\}$ es decreciente , por lo tanto tiene límite finito .

∎

Nótese que

$$\|H\varphi_o\| \leqq \|\varphi_o\| \tag{9}$$

COROLARIO.

Sea H un operador hermítico, positivamente definido tal que

$$m\,\|\varphi\| \leqq \|H\varphi\| \leqq M\,\|\varphi\| \qquad (m\,,\,M \text{ son constantes })$$

para todo $\varphi \in \mathfrak{h}_\sigma$, entonces se tiene :

$$m\,\|\varphi\|^2 \leqq \langle H\varphi, \varphi\rangle \leqq M\,\|\varphi\|^2.$$

<u>Demostración</u>.

(i) $\langle H\varphi\,,\,\varphi\rangle \leqq \|H\varphi\|\,\|\varphi\| \leqq M\,\|\varphi\|\,\|\varphi\| = M\,\|\varphi\|^2$

(ii) Supongamos que existe φ tal que

$$\langle H\varphi\,,\,\varphi\rangle < m\,\|\varphi\|^2.$$

Entonces existe $r < m$ tal que

$$\langle H\varphi, \varphi\rangle < r\,\|\varphi\|^2 \quad .$$

Aplicando el Lema 1 al operador H/r , por (9) existe un elemento $\varphi_o \neq 0$ tal que

$$\left\|\frac{H}{r}\varphi_o\right\| \leqq \|\varphi_o\| \;,$$

esto es ,

$$\|H\,\varphi_o\| \leqq r\,\|\varphi_o\| < m\,\|\varphi_o\| \qquad (\text{ absurdo } !)$$

■

TEOREMA 1.

Sea T un operador acotado de $\mathfrak{h}$ en $\mathfrak{h}$, si

$$\operatorname{Sup}\frac{\|T\varphi\|}{\|\varphi\|} = M\,,\quad \operatorname{Inf}\frac{\|T\varphi\|}{\|\varphi\|} = m \quad (M \neq m)$$

entonces para todo λ, $m < \lambda < M$, existe una descomposición del espacio $\mathfrak{h}$:

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2$$

tal que

[1] $\varphi \in \mathfrak{M}_1$, $\psi \in \mathfrak{M}_2$ implica $\langle T\varphi, T\psi\rangle = 0$

[2] $\displaystyle \operatorname*{Sup}_{\varphi \in \mathfrak{M}_2} \frac{\|T\varphi\|}{\|\varphi\|} \leqq \lambda \leqq \operatorname*{Inf}_{\varphi \in \mathfrak{M}_1} \frac{\|T\varphi\|}{\|\varphi\|}$.

OBSERVACION .

Abreviadamente se nota la propiedad [1] como sigue :

$$T\mathfrak{M}_1 \perp T\mathfrak{M}_2\,, \quad \text{ó} \quad \langle T\mathfrak{M}_1, T\mathfrak{M}_2\rangle = 0\,.$$

<u>Demostración.</u>

Sea $H = T^* T$ (T^* es el adjunto de T) entonces H es her -

mítico y positivamente definido. Sean

$$\mathfrak{M}_2 = \{ \varphi \, \varepsilon \, \mathfrak{h}_0 \big/ \lim_{\nu \to \infty} \| (\frac{H}{\lambda^2})^\nu \varphi \| < + \infty \} \, ,$$

$$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{h}_0 \ominus \mathfrak{M}_2 \, .$$

(i) Si $a \, \varepsilon \, \mathfrak{M}_2$, $a \neq 0$ entonces se tiene que

$$\lim_{\nu \to \infty} \| (\frac{H}{\lambda^2})^\nu \; a \; \| < + \infty \, .$$

Por (9)

$$\| \frac{H}{\lambda^2} \, a \| \leqq \| a \| \, ,$$

o sea

$$\| H a \| \leqq \lambda^2 \| a \| \, .$$

Por lo tanto :

$$\| T a \|^2 = < H a \, , \, a > \leqq \| H a \| \; \| a \| \leqq \lambda^2 \| a \|^2 \, ,$$

esto es :

$$\sup_{\varphi \varepsilon \mathfrak{M}_2} \frac{\| T \varphi \|}{\| \varphi \|} \leqq \lambda \, .$$

(ii) Supongamos que :

$$\operatorname*{Inf}_{\varphi \varepsilon \mathfrak{M}_1} \frac{\|T\varphi\|}{\|\varphi\|} < \lambda \; .$$

Entonces existe $b \,\varepsilon\, \mathfrak{M}_1$ tal que

$$< H b,\, b> = \|T b\|^2 < \lambda^2 \; \|b\|^2 \, .$$

Como $H b,\, H^2 b, \ldots \;\varepsilon\; \mathfrak{M}_1$, por el Lema 1 existe $b_o \,\varepsilon\, \mathfrak{M}_1$ tal que

$$\lim_{\nu \to \infty} \left\| \left(\frac{H}{\lambda^2}\right)^{\nu} b_o \right\| < +\infty \; ,$$

o sea que $b_o \,\varepsilon\, \mathfrak{M}_2$ (absurdo !). Por lo tanto :

$$\operatorname*{Inf}_{\varphi \varepsilon \mathfrak{M}_1} \frac{\|T\varphi\|}{\|\varphi\|} \geqq \lambda \; .$$

(iii) Sean $\varphi \,\varepsilon\, \mathfrak{M}_1$, $\psi \,\varepsilon\, \overline{\mathfrak{M}_2}$. Entonces

$$H\varphi \,\varepsilon\, \mathfrak{M}_1 \; ,$$

luego

$$< T\varphi,\, T\psi > \; = \; < H\varphi, \psi > = 0$$

■

COROLARIO.

Sea T un operador acotado de $\mathfrak{h}$ en $\mathfrak{h}$ con $\|T\| = M$. Sean

$$\lambda_o = M > \lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_n > \lambda_{n+1} > \ldots \to 0,$$

entonces existe una familia de subespacios $\{\mathfrak{M}_k, k = 0, 1, 2, \ldots\}$ tal que

(i) $\mathfrak{h} = \mathfrak{M}_o \oplus \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus \ldots = \bigoplus_{k=o}^{\infty} \mathfrak{M}_k.$

(ii) $< T\,\mathfrak{M}_k, T\,\mathfrak{M}_j > = 0$ si $k \neq j.$

(iii) $\sup_{\varphi \in \mathfrak{M}_k} \dfrac{\|T\varphi\|}{\|\varphi\|} \leqq \lambda_{k-1}, \quad \inf_{\varphi \in \mathfrak{M}_k} \dfrac{\|T\varphi\|}{\|\varphi\|} \geqq \lambda_k, \quad T\mathfrak{M}_o = 0$

OBSERVACION.

$\mathfrak{M}_o$ es el núcleo de T, y $\mathfrak{M}_k$ es el subespacio correspondiente al intervalo $[\lambda_k, \lambda_{k-1}]$. Esta descomposición se llama " <u>una partición del espacio</u> $\mathfrak{h}$ correspondiente a la partición :

$$\{ M = \lambda_o, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots \quad , 0 \}.$$

De (i) y (ii) se tiene :

$$T\,\mathfrak{h} = T\,\mathfrak{M}_o \oplus T\,\mathfrak{M}_1 \oplus T\,\mathfrak{M}_2 \oplus \ldots = \bigoplus_{k=o}^{\infty} T\,\mathfrak{M}_k.$$

Demostración.

Aplicando el Teorema 1 para $\lambda = \lambda_k$ existen $\mathcal{N}_k$ y $\mathcal{N}'_k$ tales que

$$\mathfrak{H} = \mathcal{N}_k \oplus \mathcal{N}'_k , \quad < T\, \mathcal{N}_k , T\, \mathcal{N}'_k > = 0 ,$$

$$\operatorname*{Inf}_{\varphi \in \mathcal{N}'_k} \frac{\| T \varphi \|}{\| \varphi \|} \geqq \lambda_k , \quad \operatorname*{Sup}_{\varphi \in \mathcal{N}_k} \frac{\| T \varphi \|}{\| \varphi \|} \leqq \lambda_k .$$

Sean

$$\mathcal{M}_k = \mathcal{N}_{k-1} \ominus \mathcal{N}_k ,$$

$$\mathcal{M}_o = \text{el núcleo de } T ,$$

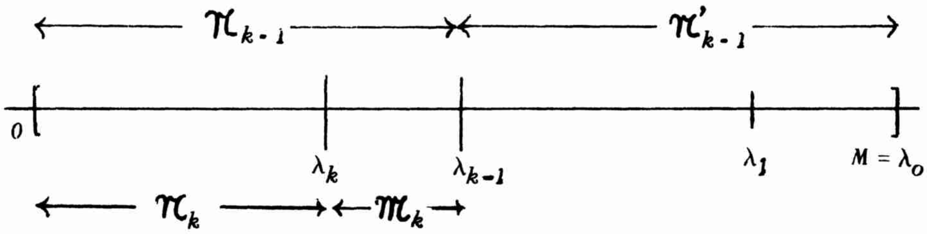

Fig. 1

entonces

$$\mathcal{M} = \overset{\infty}{\underset{k=1}{\oplus}} \mathcal{M}_k = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2 \oplus \quad . \; . \; . \; .$$

es un subespacio de $\mathfrak{h}_\gamma$. Si $\varphi \in \mathfrak{h}_\gamma \ominus \mathfrak{M}$ entonces

$$\varphi \perp \mathfrak{M}'_k \quad \text{(para todo } k)$$

o sea :

$$||T\varphi|| \leqq \lambda_k \, ||\varphi|| \quad \text{(para todo } k).$$

Esto es $||T\varphi|| = 0$, ya que $\lambda_k \to 0$ $(k \to \infty)$, o sea que $\varphi \in \mathfrak{M}_o$. Por lo tanto tenemos :

$$\mathfrak{h}_\gamma = \bigoplus_{k=o}^{\infty} \mathfrak{M}_k$$

■

OBSERVACION .

Sea $\{\mathfrak{M}_k, k = 1, 2, 3, \ldots\}$ una familia de subespacios de $\mathfrak{h}_\gamma$ y si T_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ son operadores acotados de $\mathfrak{M}_k$ en $\mathfrak{h}_\gamma$ tales que

$$||T_k|| \leqq C \quad (\text{para todo } k;\ C = \text{constante}),$$

$$< T_k \mathfrak{M}_k, T_j \mathfrak{M}_j > = 0 \quad (\text{para todo } k, j,\ k \neq j),$$ entonces se puede definir un operador T como sigue :

$$T\varphi = \Sigma_{k=1}^{\infty} T_k \varphi_k$$

donde φ_k es la proyección de φ sobre $\mathfrak{M}_k$. En realidad :

$$\varphi = \Sigma_1^{\infty} \varphi_k \quad , \quad \|\varphi\|^2 = \Sigma_1^{\infty} \|\varphi_k\|^2$$

luego :

$$\Sigma_k \| T_k \varphi_k \|^2 \leqq C^2 \Sigma_k \|\varphi_k\|^2 = C^2 \|\varphi\|^2 \ ,$$

esto es, el operador T está bién definido para todo $\varphi \varepsilon \underset{k}{\oplus} \mathfrak{M}_k$, además C es una cota de T. Evidentemente, la restricción de T al subespacio $\mathfrak{M}_k$ es igual a T_k.

■

§ 3. *Operadores acotados con inverso acotado.*

LEMA 2.

Sea H un operador hermítico tal que

$$m \|\varphi\|^2 \leqq \langle H\varphi, \varphi \rangle \leqq M \|\varphi\|^2 \qquad \text{para todo} \quad \varphi \varepsilon \mathfrak{h}$$

Si

$$\varepsilon = \sqrt{m(M - m)} \qquad \ll m \tag{10}$$

entonces

$$\langle \varphi, \psi \rangle = 0 \qquad \text{implica} \qquad |\langle H\varphi, \psi \rangle| \leqq \varepsilon \|\varphi\| \, \|\psi\| \, .$$

NOTA.

La condición (10) es equivalente a

$$\frac{M}{m} \ll 2 \tag{11}$$

Demostración.

Sin pérdida de generalidad supongamos :

$$< H\, \varphi, \psi > = a > 0\,, \quad ||\varphi|| = ||\psi|| = 1\,.$$

Si $\tau = \varphi + t\,\psi$ (t = real) se tiene :

$$\frac{< H\,\tau,\, \tau >}{||\tau||^2} = \frac{< H\,\varphi + t\,H\psi,\ \varphi + t\,\psi >}{1 + t^2}$$

$$= \frac{< H\,\varphi, \varphi >}{1+t^2} + \frac{2\,a\,t}{1+t^2} + t^2\,\frac{< H\psi, \psi >}{1+t^2} \geqq \frac{1}{1+t^2}\{\, m + 2\,a\,t + m\,t^2\,\}\,.$$

Tomando $t = a/m$ se obtiene :

$$M \geqq \frac{< H\,\tau, \tau >}{||\tau||^2} \geqq \frac{m}{1+\frac{a^2}{m^2}}\left(1 + \frac{3\,a^2}{m^2}\right)$$

o sea :

$$a^2 \leqq m^2\,\frac{M - m}{3m - M} \leqq \varepsilon^2$$

ya que

$$\frac{3m - M}{m} = 3 - \frac{M}{m} = 1 + \left(2 - \frac{M}{m}\right) > 1\,.$$

■

NOTA.

Se puede modificar la hipótesis del Lema 2 como sigue :

$$m\|\varphi\|^2 \leqq |\langle H\varphi, \varphi\rangle| \leqq M\|\varphi\|^2, \quad \text{para todo} \quad \varphi \in \mathfrak{h}_\gamma .$$

<u>Demostración.</u>

Si existen φ, $\psi \in \mathfrak{h}_\gamma$ tales que

$$\langle H\varphi, \varphi\rangle > 0, \quad \langle H\psi, \psi\rangle < 0$$

entonces tenemos, para t real :

$$\langle H(\varphi + t\psi), \ \varphi + t\psi\rangle = t^2\langle H\varphi, \varphi\rangle + 2t\,Re\langle H\varphi, \psi\rangle + \langle H\psi, \psi\rangle,$$

por lo tanto existe un valor real de t tal que

$$\langle H(\varphi + t\psi), (\varphi + t\psi)\rangle = 0 < m\|\varphi + t\psi\|^2,$$

y esto contradice a la hipótesis .

Por lo tanto, H es positivamente definido, ó , H es negativamente definido. Si H es negativamente definido, se aplica el Lema 2 al operador $-H$.

■

COROLARIO 1.

Sea T un operador acotado, si $\frac{\|T\varphi\|}{\|\varphi\|}$ = constante para todo φ entonces

$$\langle \varphi, \psi \rangle = 0 \qquad \text{implica} \qquad \langle T\varphi, T\psi \rangle = 0 .$$

COROLARIO 2.

Si $\frac{\|T\varphi\|}{\|\varphi\|} = \lambda$ (constante) para todo $\varphi \in \mathfrak{h}$, entonces T es un operador de Schatten .

En realidad, para cualquier sistema ortonormal completo $\{\varphi_k\}$ tenemos:

$$T = \sum_{k=1}^{\infty} (T\varphi_k) \otimes \varphi_k .$$

■

COROLARIO 3.

Sea H un operador hermítico tal que

$$\frac{\|H\varphi\|}{\|\varphi\|} = \lambda \qquad (\text{ constante }).$$

Entonces existe un sistema ortonormal completo, $\{\tilde{\varphi}_k, \tilde{\tilde{\varphi}}_k\}$, tal que

$$H = \sum \lambda\, \tilde{\varphi}_k \otimes \tilde{\varphi}_k + \sum (-\lambda)\, \tilde{\tilde{\varphi}}_k \otimes \tilde{\tilde{\varphi}}_k .$$

<u>Demostración.</u>

Los valores propios de H (si existen) son λ ó $-\lambda$.

Sean

$\mathfrak{h}_{\gamma+}$ = el subespacio determinado por todos los vectores propios correspondientes al valor propio λ ,

$\mathfrak{h}_{\gamma-}$ = el subespacio determinado por todos los vectores propios correspondientes al valor propio $-\lambda$,

entonces :

$$< \mathfrak{h}_{\gamma+}, \mathfrak{h}_{\gamma-} > = 0 \;, \quad H(\mathfrak{h}_{\gamma+} \oplus \mathfrak{h}_{\gamma-}) = \mathfrak{h}_{\gamma+} \oplus \mathfrak{h}_{\gamma-} \;.$$

Sea

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{h}_{\gamma} \ominus \{ \mathfrak{h}_{\gamma+} \oplus \mathfrak{h}_{\gamma-} \} \;,$$

entonces

$$H\,\mathfrak{M} \perp H(\mathfrak{h}_{\gamma+} \oplus \mathfrak{h}_{\gamma-}),$$

esto es :

$$H\,\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M} \;.$$

Si existe un $\varphi_1 \varepsilon \mathfrak{M}$ tal que $< H\varphi_1 , \varphi_1 > = 0$ entonces

$$\varphi_2 \doteq \frac{1}{\lambda} H\,\varphi_1 \perp \varphi_1 \;,$$

por lo tanto, $\{ \varphi_1 , \varphi_2 , \ldots \}$ es una base ortonormal .

Tenemos :

$$< H\varphi_1 , \varphi_2 > = < \lambda\; \varphi_2 , \varphi_2 > = \lambda = < \varphi_1 , H\varphi_2 > \;,$$

luego

$$H\varphi_2 = \lambda\,\varphi_1 + \ldots$$

Como $\| H\varphi_2 \| = \lambda$ se tiene $H\varphi_2 = \lambda\,\varphi_1$.

Por lo tanto se obtiene :

$$H(\varphi_1 + \varphi_2) = \lambda\,(\varphi_1 + \varphi_2),\ H(\varphi_1 - \varphi_2) = -\lambda\,(\varphi_1 - \varphi_2),$$

esto es imposible ya que H no tiene vectores propios en $\mathfrak{M}$.

O sea que

$$< H\varphi, \varphi > \neq 0 \qquad (\text{ para todo } \varphi \in \mathfrak{M}).$$

Si para algunos $\varphi, \psi \in \mathfrak{M}$ tenemos

$$< H\varphi, \varphi > \ > 0, \qquad < H\psi, \psi > \ < 0,$$

por la demostración de la Nota del Lema 2 existe un t real tal que

$$< H(\varphi + t\psi), (\varphi + t\psi) > = 0 \qquad (\text{ imposible ! }),$$

esto es, H es positivamente definido o negativamente definido en $\mathfrak{M}$.

Si H es positivamente definido, por el Corolario del Lema 1 tenemos :

$$< H\varphi, \varphi > = \lambda\, \|\varphi\|^2$$

por lo tanto :

$$H \varphi = \lambda \varphi \ ,$$

pero esto es imposible puesto que no hay vectores propios en $\mathfrak{M}$.

De la misma manera H no puede ser negativamente definido. Así se concluye que $\mathfrak{M} = \{ 0 \}$ o sea :

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_+ \oplus \mathfrak{h}_- .$$

Si $\{ \tilde{\varphi}_k \}$ es una base ortonormal de $\mathfrak{h}_+$ y $\{ \tilde{\tilde{\varphi}}_h \}$ es una base ortonormal de $\mathfrak{h}_-$ se tiene :

$$H = \Sigma_k \lambda \tilde{\varphi}_k \otimes \tilde{\varphi}_k + \Sigma_h (-\lambda) \tilde{\tilde{\varphi}}_h \otimes \tilde{\tilde{\varphi}}_h \ .$$

■

TEOREMA 2.

Sea T un operador acotado de $\mathfrak{h}$ sobre $\mathfrak{h}_1 = T \mathfrak{h}$ tal que

$$\sup_{\varphi \in \mathfrak{h}} \frac{\| T \varphi \|}{\| \varphi \|} = M \ , \quad \inf_{\varphi \in \mathfrak{h}} \frac{\| T \varphi \|}{\| \varphi \|} = m > 0 \ . \tag{12}$$

Si $\varepsilon = \sqrt{m(M - m)} \ll m,$ entonces existe un operador de Schatten, S tal que

$$\| T - S \| < \varepsilon \ , \ \| T^{-1} - S^{-1} \| < \frac{\varepsilon}{mM}$$

Además ,

$$m \leqq \frac{||S\varphi||}{||\varphi||} \leqq M , \qquad S\,\mathfrak{h}_{\gamma} = \mathfrak{h}_{\gamma 1} = T\,\mathfrak{h}_{\gamma} .$$

<u>**Demostración.**</u>

Por la condición (12) se tiene que el núcleo de T es $\{0\}$, para mayor sencillez supongamos que $\mathfrak{h}_{\gamma 1} = \mathfrak{h}_{\gamma}$.

El operador $H = T^{*}T$ es hermítico y positivamente definido. Entonces (F. Riez[2] pp. 263-265) existe un operador C, hermítico y positivamente definido tal que

$$C^{*}C = C^{2} = H .$$

Tenemos, para todo $\varphi \in \mathfrak{h}_{\gamma}$,

$$||C\varphi||^{2} = \langle C^{*}C\varphi, \varphi\rangle = \langle H\varphi, \varphi\rangle = \langle T^{*}T\varphi, \varphi\rangle = ||T\varphi||^{2} ,$$

luego

$$m||\varphi|| \leqq ||C\varphi|| \leqq M||\varphi|| , \quad m \neq 0 . \qquad (13)$$

Por (13) el operador C tiene inverso acotado, C^{-1}, definido en $\mathfrak{h}_{\gamma}$. Tomemos un sistema ortonormal completo $\{\varphi_k\}$ en el espacio $\mathfrak{h}_{\gamma}$.

Sean :

$$C\varphi_i = \Sigma_k C_{ik}\varphi_k , \quad C^{-1}\varphi_i = \Sigma_k B_{ik}\varphi_k \qquad (i = 1, 2, \ldots\ldots)$$

Se define :

$$\psi_i = \Sigma_k B_{ik} T \varphi_k \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots) \tag{14}$$

entonces

$$\psi_i = T \Sigma_k B_{ik} \varphi_k = T C^{-1} \varphi_i \; , \tag{15}$$

luego :

$$< \psi_i , \psi_l > = < T C^{-1} \varphi_i , T C^{-1} \varphi_l >$$

$$= < C^{-1} T^* T C^{-1} \varphi_i , \varphi_l > = < C^{-1} H C^{-1} \varphi_i , \varphi_l >$$

$$= < C^{-1} C^2 C^{-1} \varphi_i , \varphi_l > = < \varphi_i , \varphi_l > = \delta_{il} \; .$$

O sea que $\{ \psi_i \}$ es un sistema ortonormal. Como el operador $T C^{-1}$ tiene inverso acotado (nótese que estamos suponiendo : $T \mathfrak{h}_\gamma = \mathfrak{h}_\gamma$), entonces se tiene que $\{ \psi_i \}$ es completo. Si

$$x = \Sigma x_i \varphi_i \varepsilon \mathfrak{h}_\gamma \; , \; y = \Sigma y_i \varphi_i \varepsilon \mathfrak{h}_\gamma$$

entonces

$$| \sum_{\substack{i,k \\ i \neq k}} C_{ik} x_i \overline{y}_k | = | \sum_{i,k} C_{ik} x_i \overline{y}_k - \Sigma_i C_{ii} x_i \overline{y}_i |$$

$$= | < C x , y > - \Sigma_i C_{ii} x_i \overline{y}_i | \quad . \tag{16}$$

Sea $$y = ax + \tilde{x} \ , \ < x, \tilde{x} > = 0$$

entonces :

$$\bar{a} = \frac{< x, y>}{||x||^2} = \frac{\Sigma_i \ x_i \ \bar{y}_i}{||x||^2}$$

Tenemos :

$$\begin{aligned} < Cx, y> &= < Cx, \ ax> + < Cx, \tilde{x}> \\ &= \bar{a} < Cx, \ x> + < Cx, \tilde{x}> \\ &= \frac{\Sigma x_i \ \bar{y}_i}{||x||^2} < Cx, \ x> + < Cx, \tilde{x}> . \end{aligned} \qquad (17)$$

De (16) y (17) :

$$|\sum_{\substack{i,k \\ i \neq k}} C_{ik} x_i \bar{y}_k| \leqq | \sum_i x_i \bar{y}_i \{ \frac{< Cx, x>}{||x||^2} - C_{ii} \} | + | < Cx, \tilde{x}> |$$

$$\leqq \sum_i | x_i \bar{y}_i | \, | \frac{< Cx, x>}{||x||^2} - \frac{< C\varphi_i, \varphi_i>}{||\varphi_i||^2} | + | < Cx, \tilde{x}> |$$

(por el Corolario del Teorema 1 y por el Lema 2)

$$\leqq ||x|| \ ||y|| \ (M - m) + \varepsilon \ ||x|| \ ||y|| = \varepsilon \left(1 + \frac{\varepsilon}{m}\right) ||x|| \ ||y|| \fallingdotseq \varepsilon ||x|| \ ||y|| , \qquad (18)$$

puesto que $\varepsilon \ll m$.

Si en la desigualdad (18) tomamos

$$y_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{\infty} C_{ij}\, x_i \,,$$

tenemos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big| \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{\infty} C_{ik}\, x_i \Big|^2 \leqq \varepsilon \|x\| \Big\{ \sum_{k=1}^{\infty} \Big| \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{\infty} C_{ik}\, x_i \Big|^2 \Big\}^{\frac{1}{2}} \,,$$

esto es

$$\Big\{ \sum_{k=1}^{\infty} \Big| \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{\infty} C_{ik}\, x_i \Big|^2 \Big\}^{\frac{1}{2}} \leqq \varepsilon \Big\{ \sum_i |x_i|^2 \Big\}^{\frac{1}{2}} . \qquad (19)$$

Por lo tanto :

$$\Big\| \sum_i x_i\, T \varphi_i - \sum_{k=1}^{\infty} C_{kk}\, x_k\, \psi_k \Big\| \qquad \text{(por (14))}$$

$$= \Big\| \sum_{k,i} x_i\, C_{ik}\, \psi_k - \sum_{k=1}^{\infty} C_{kk}\, x_k\, \psi_k \Big\|$$

$$= \Big\| \sum_k \Big\{ \sum_{i \neq k} x_i\, C_{ik} \Big\} \psi_k \Big\| = \Big\{ \sum_k \Big| \sum_{i \neq k} C_{ik}\, x_i \Big|^2 \Big\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqq \varepsilon \Big\{ \sum_i |x_i|^2 \Big\}^{\frac{1}{2}} . \qquad (20)$$

Definimos ahora el operador de Schatten S como sigue :

$$S = \sum_k C_{kk}\, \psi_k \otimes \varphi_k \qquad (\text{ó} \quad S\varphi_k = C_{kk}\, \psi_k). \qquad (21)$$

Entonces, para $x = \sum x_i \varphi_i$, se tiene :

$$||Tx - Sx|| = || \sum_{i=1}^{\infty} x_i T\varphi_i - \Sigma_k C_{kk} x_k \psi_k || \leqq \varepsilon ||x|| ,$$

esto es :

$$|| T - S || \leqq \varepsilon \quad . \tag{22}$$

■

También, de (21) y de (14) :

$$\begin{aligned} S^{-1} &: S^{-1}\psi_k = \frac{1}{C_{kk}} \varphi_k & (k = 1, 2, 3, \ldots) \\ T^{-1} &: T^{-1}\psi_k = \Sigma_i B_{ki} \varphi_i , & (k = 1, 2, 3, \ldots) \end{aligned} \tag{23}$$

$$\frac{1}{M} \leqq \frac{||T^{-1}\varphi||}{||\varphi||} \leqq \frac{1}{m} \quad .$$

Aplicando el procedimiento anterior al operador T^{-1} se tiene :

$$|| T^{-1} - S^{-1} || \leqq \varepsilon' \tag{24}$$

donde

$$\varepsilon' = \sqrt{\frac{1}{M}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{M}\right)} = \frac{\varepsilon}{mM} << \frac{1}{M}$$

ya que $\varepsilon << m$.

■

Nótese que el operador S definido en (21) es hermítico si T es hermítico y positivamente definido puesto que :

$$C^*C = C^2 = H = T^*T = T^2 \quad ,$$

$$C = T \; ,$$

por (15) :

$$\psi_i = \varphi_i \qquad\qquad (i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ ) .$$

§ 4. *Densidad de los operadores de Schatten.*

TEOREMA 3.

Sea T un operador acotado de $\mathfrak{H}$ sobre $\mathfrak{H}_1 = T\,\mathfrak{H}$. Dado $\varepsilon > 0$ existe un operador de Schatten S tal que

$$\|T - S\| < \varepsilon \; , \; T\,\mathfrak{H} = S\,\mathfrak{H} \; .$$

Si T^{-1} existe entonces existe S^{-1} y

$$\|T^{-1} - S^{-1}\| < \varepsilon \qquad (\text{ en } \mathfrak{H}_1) .$$

<u>Demostración.</u>

Sea $M = \|T\|$. Dado $\varepsilon > 0$ existe N (natural) tal que

$$\frac{\sqrt{\log N}}{\sqrt{N}} < \varepsilon .$$

Consideremos la siguiente partición del intervalo $(0 , M]$:

$$M = \lambda_o , \lambda_1 , \ldots , \lambda_n = \frac{1}{\log N} , \frac{1}{\log(N+1)} , \ldots , \frac{1}{\log(N+k)} , \ldots \to 0 \qquad (25)$$

donde

$$(\log N)^4 (\lambda_{j-1} - \lambda_j) \lambda_j < \varepsilon^2 . \qquad (26)$$

Correspondiente a la partición (25) obtenemos la partición del espacio $\mathfrak{h}_0$ (ver el Corolario del Teorema 1) :

$$\mathfrak{M}_0 \oplus \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{M}_n \oplus \widetilde{\mathfrak{M}}_1 \oplus \widetilde{\mathfrak{M}}_2 \oplus \cdots \oplus \widetilde{\mathfrak{M}}_k \oplus \cdots$$

donde $\mathfrak{M}_o$ es el núcleo de T, $\mathfrak{M}_k$ es el subespacio correspondiente al intervalo $[\lambda_k , \lambda_{k-1}]$ y $\widetilde{\mathfrak{M}}_k$ es el subespacio correspondiente a

$$[\frac{1}{\log (N+k)} , \frac{1}{\log (N+k-1)}] .$$

Definimos los operadores de Schatten, S_o , S_k , $\widetilde{S}_j$ de acuerdo con el Teorema 2, correspondientes a las restricciones de T a los subespacios $\mathfrak{M}_o$, $\mathfrak{M}_k$ y $\widetilde{\mathfrak{M}}_j$ respectivamente. Entonces :

$$S_o = T \quad \text{en} \quad \mathfrak{M}_o ,$$

$$
\left.\begin{array}{lll}
\|S_k - T\| < \sqrt{\lambda_k(\lambda_{k-1}-\lambda_k)} < \varepsilon & \text{en} & \mathfrak{M}_k\,, \\[2ex]
\|\widetilde{S}_j - T\| < \dfrac{\log\left(1+\frac{1}{N}\right)}{\log(N+1)\sqrt{\log N}} < \varepsilon & \text{en} & \widetilde{\mathfrak{M}}_j\,.
\end{array}\right\} \qquad (27)
$$

Por la observación final del § 2 se puede construir un operador de Schatten S **como sigue :**

$$S = S_o \quad \text{en} \quad \mathfrak{M}_o \quad , \quad S = S_k \quad \text{en} \quad \mathfrak{M}_k \quad \text{y} \quad S = \widetilde{S}_j \quad \text{en} \quad \widetilde{\mathfrak{M}}_j\,.$$

De (27) tenemos :

$$\| S - T \| < \varepsilon\,.$$

Evidentemente se tiene :

$$T\,\mathfrak{h}_0 = S\,\mathfrak{h}_0 \quad .$$

Si T^{-1} **existe, entonces** $\mathfrak{M}_o = \{0\}$; **como** S_k , $\widetilde{S}_j$ **son invertibles también lo es el operador** S **. De (24) tenemos :**

$$\| S_k^{-1} - T^{-1} \| \leqq \varepsilon' \qquad \text{en} \qquad \mathfrak{M}_k\,,$$

$$\| S_j^{-1} - T^{-1} \| \leqq \varepsilon'' \qquad \text{en} \qquad \widetilde{\mathfrak{M}}_j\,,$$

donde :

$$\varepsilon' = \sqrt{\lambda_k(\lambda_{k-1}-\lambda_k)} \Big/ \lambda_k\lambda_{k-1} < \varepsilon \quad ,$$

$$\varepsilon'' = \{ \log(N+k-1) \log \frac{N+k}{N+k-1} \}^{\frac{1}{2}} \approxeq \{ \frac{\log(N+k-1)}{N+k-1} \}^{\frac{1}{2}} \leqq \frac{\sqrt{\log N}}{\sqrt{N}} < \varepsilon \, ,$$

por lo tanto :

$$\| T^{-1} - S^{-1} \| < \varepsilon \qquad \text{en} \qquad \mathfrak{h}_{\gamma 1} \; .$$

COROLARIO 1

Sea T un operador acotado, hermítico y positivamente definido, entonces el operador S en el Teorema 3 es hermítico de la forma :

$$S = \Sigma_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varphi_k \otimes \varphi_k \quad , \quad \lambda_k \geqq 0 \; .$$

(Ver la observación final del § 3) .

CUROLARIO 2 .

Sea T un operador tal que $Inf \frac{\|T\varphi\|}{\|\varphi\|} > 0$. Dado $\varepsilon > 0$ existe un operador de Schatten, S tal que

$$\| T - S \| < \varepsilon$$

Demostración .

En $T \mathfrak{h}_{\gamma} = \mathfrak{h}_{\gamma 1}$ el operador T^{-1} está definido y es acotado .

Basta entonces aplicar el Teorema 3 al operador T^{-1}. ∎

COROLARIO 3.

Sea H un operador hermítico y positivamente definido. Dado $\varepsilon > 0$ existe un operador de Schatten, $S = \Sigma_k \mu_k \varphi_k \otimes \varphi_k$, tal que :

$$\| H - S \| < \varepsilon$$

Demostración.

$H + I$ satisface la condición del Corolario 2, luego existe un operador S_1 de la forma :

$$S_1 = \Sigma_k \lambda_k \varphi_k \otimes \varphi_k$$

tal que

$$\| H + I - S_1 \| < \varepsilon \ .$$

Considérese entonces

$$S = S_1 - I = \Sigma_k (\lambda_k - 1) \varphi_k \otimes \varphi_k \ .$$

Nótese que

$$\lambda_{k-1} \geqq 0 \ .$$

∎

Ahora, consideremos un operador T, no necesariamente acotado, tal que el dominio de T^*T es denso en el espacio $\mathfrak{h}_\mathfrak{F}$. Por el Corolario 3, dado $\varepsilon > 0$ existe un operador de Schatten

$$S = \Sigma_{k=1}^{\infty} \mu_k \varphi_k \otimes \varphi_k \qquad (\mu_k \geqq 0)$$

tal que

$$\| T^* T - S \| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (\text{Supóngase } : \varepsilon << 1).$$

Sean

$$\mathfrak{M} = \{ \varphi_k / \mu_k \geqq 1 \} ,$$

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{h}_\mathfrak{F} \ominus \mathfrak{M} = \{ \varphi_k / \mu_k < 1 \} .$$

Si $\varphi \in \mathfrak{M}$ tenemos :

$$\| T^* T \varphi - S\varphi \| < \frac{\varepsilon}{2} \| \varphi \|$$

luego :

$$\| T^* T \varphi \| > (1 - \frac{\varepsilon}{2}) \| \varphi \|$$

ya que

$$\| S \varphi \| \geqq \| \varphi \| \quad \text{si} \quad \varphi \in \mathfrak{M} .$$

Por el Corolario 1, Lema 1, para todo $\varphi \in \mathfrak{M}$ tenemos :

$$||T\varphi||^2 = \langle T\varphi, T\varphi\rangle = \langle T^*T\varphi, \varphi\rangle > (1-\frac{\varepsilon}{2})\,||\varphi||^2. \qquad (28)$$

Por el Corolario 2 de este parágrafo existe un operador de Schatten, S_1, definido en $\mathfrak{M}$, tal que

$$||T - S_1||_{\mathfrak{M}} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad T\mathfrak{M} = S_1\mathfrak{M}. \qquad (29)$$

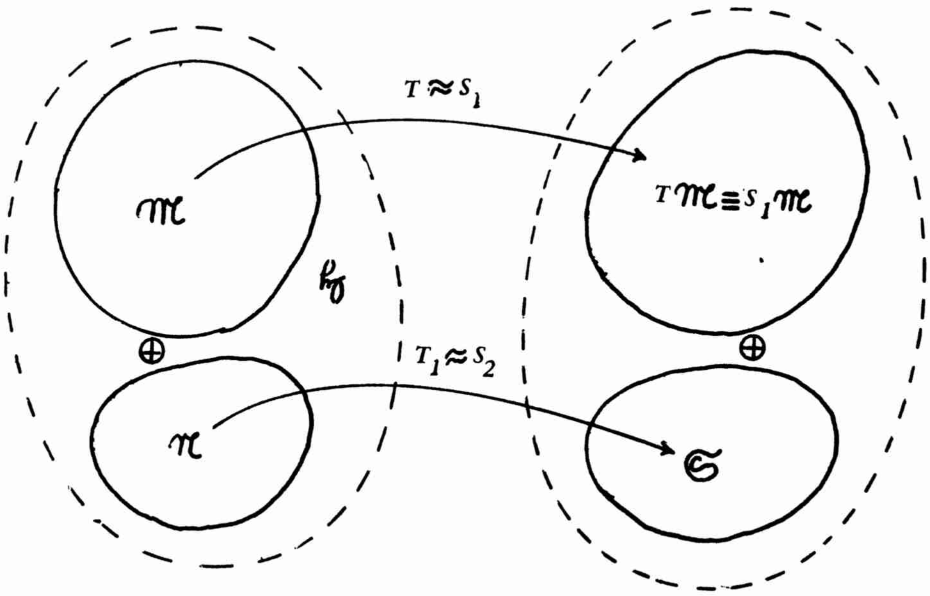

Fig. 2

Si $\varphi \in \mathfrak{M}$, $\psi \in \mathfrak{N} = \mathfrak{h}_\gamma \ominus \mathfrak{M}$ tenemos :

$$|\langle T\varphi, T\psi\rangle| = |\langle T\varphi, T\psi\rangle - \langle S\varphi, \psi\rangle|$$

$$= |\langle (T^*T - S)\varphi, \psi\rangle| \leqq \frac{\varepsilon}{2}||\varphi||\;||\psi||$$

$$= \frac{\varepsilon}{2}||T^{-1}T\varphi||\;||\psi|| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{1-\frac{\varepsilon}{2}}}||T\varphi||\;||\psi|| \approx \frac{\varepsilon}{2}||T\varphi||\;||\psi|| \qquad (30)$$

Sea

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{H}_0 \ominus S_1 \mathfrak{M} = \mathfrak{H}_0 \ominus T \mathfrak{M} ,$$

Dado $\psi \varepsilon \mathfrak{N}$ **, descompongamos** $T\psi$ **como sigue :**

$$T\psi = \psi_1 + \psi_2 , \ \psi_1 \varepsilon \mathfrak{S} , \ \psi_2 \varepsilon \overline{S_1 \mathfrak{M}} = \overline{T \mathfrak{M}}.$$

De (30) tenemos :

$$\|\psi_2\|^2 = <\psi_2, T\psi> \leqq \frac{\varepsilon}{2} \|\psi_2\| \, \|\psi\| ,$$

o sea

$$\|\psi_2\| \leqq \frac{\varepsilon}{2} \|\psi\| . \qquad (31)$$

Se define un operador T_1 **como sigue :**

$$T_1 \varphi = T \varphi \qquad \text{si} \qquad \varphi \varepsilon \mathfrak{M} ,$$

$T_1 \psi = \psi_1 =$ **la proyección de** $T\psi$ **sobre** $\mathfrak{S}$ **, si** $\psi \varepsilon \mathfrak{N}$ **.**

De (31) se sigue que

$$\|T - T_1\| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Como T **es acotado en** $\mathfrak{N}$ $(1 + \frac{\varepsilon}{2}$ **es una cota),** T_1 **es acotado**

en $\mathfrak{N}$ y $T_1 \mathfrak{N} \subset \mathfrak{S}$. O sea :

$$< T_1 \mathfrak{M} \ , \ T_1 \mathfrak{N} > = 0 \, .$$

Por el Teorema 3, existe un operador de Schatten S_2 de $\mathfrak{N}$ en $\mathfrak{S}$, tal que :

$$\| T_1 - S_2 \|_{\mathfrak{N}} < \frac{\varepsilon}{2} \, . \qquad (32)$$

Componiendo los operadores S_1 (definido en $\mathfrak{M}$) y S_2 (definido en $\mathfrak{N}$) se obtiene un operador de Schatten, S_o , cuyas restricciones a los subespacios $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{N}$ son S_1 y S_2 respectivamente. De (29) y (32) :

$$\| T_1 - S_o \| < \frac{\varepsilon}{2} \ ,$$

por lo tanto :

$$\| T - S_o \| \leqq \| T - T_1 \| + \| T_1 - S_o \| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \, .$$

■

Así obtenemos el siguiente teorema :

TEOREMA 4.

Sea T un operador no necesariamente acotado tal que el dominio $\mathfrak{D}$ de T^*T es denso en $\mathfrak{h}$. Dado $\varepsilon > 0$ existe un operador de Schatten , S_o , definido en $\mathfrak{D}$, tal que $T - S_o$ es acotado y :

$$\| T - S_o \| < \varepsilon \ .$$

■

Observación.

Un operador no siempre es aproximable por los operadores de Schatten.

EJEMPLO 2.

Sea $\{ e_1, e_2, e_3, \dots \}$ un sistema ortonormal completo en el espacio $\mathfrak{h}$ y sea $\mathfrak{D}$ el espacio lineal (no necesariamente cerrado) determinado por $\{ e_1, e_2, \dots \}$. Definimos un operador T en $\mathfrak{D}$ como sigue :

$$T e_k = e_1 \qquad \text{(para todo } k) .$$

Entonces el dominio $\mathfrak{D}^*$ del operador adjunto T^* es $\mathfrak{h} \ominus \{ e_1 \}$.

<u>Demostración</u>.

Si $\varphi \in \mathfrak{h} \ominus \{ e_1 \}$ entonces

$$< T f, \varphi > = 0 = < f, 0 > \quad \text{para todo} \quad f \in \mathfrak{D}$$

esto es :

$$T^* \varphi = 0 \ .$$

Sea $\varphi \in \mathfrak{D}^*$, descomponiendo φ como sigue :

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \ , \ \varphi_1 \varepsilon \{ e_1 \} , \ \varphi_2 \varepsilon \quad \mathfrak{h} \ominus \{e_1\} \ ,$$

entonces, para todo $f \varepsilon \mathfrak{D}$, tenemos

$$< Tf, \varphi> = <Tf, \varphi_1 + \varphi_2> = <Tf, \varphi_1> = <f, T^* \varphi> \ ,$$

o sea

$$\varphi_1 \varepsilon \ \mathfrak{D}^* .$$

Si $\varphi_1 \neq 0$ entonces $e_1 \ \varepsilon \ \mathfrak{D}^*$ (imposible !), esto es :

$$\varphi_1 = 0 \ , \qquad .$$

o sea que :

$$\mathfrak{D}^* \subset \mathfrak{h} \ominus \{e_1\} \ ,$$

esto es :

$$\mathfrak{D}^* = \mathfrak{h} \ominus \{e_1\} \ .$$

∎

Supongamos que para $\varepsilon = \frac{1}{2}$ existe S tal que

$$S : S\varphi_k = \mu_k \psi_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$|| S - T || < \varepsilon \ .$$

Sea $\varphi_k = \Sigma_{j=1}^{\infty} u_{kj} \, e_j \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$

donde (u_{kj}) es una matriz unitaria. Tenemos :

$$\| S\varphi_k - T\varphi_k \| < \varepsilon , \quad T\varphi_k = (\Sigma_{j=1}^{\infty} u_{kj})\, e_1 ,$$

luego

$$\| T\varphi_k \| = |\Sigma_{j=1}^{\infty} u_{kj}| > \| S\varphi_k \| - \varepsilon = |\mu_k| - \varepsilon .$$

Para $k \neq h$:

$$|< T\varphi_k , T\varphi_h > | = | < (T\varphi_k - S\varphi_k) + S\varphi_k , (T\varphi_h - S\varphi_h) + S\varphi_h > |$$

$$= | < (T-S)\varphi_k , (T-S)\varphi_h > + < (T-S)\varphi_k , S\varphi_h > + < S\varphi_k , (T-S)\varphi_h > +$$

$$+ < S\varphi_k , S\varphi_h > | \leqq \varepsilon^2 + \varepsilon |\mu_h| + \varepsilon |\mu_k| .$$

Por otra parte :

$$|< T\varphi_k , T\varphi_h > | = | (\Sigma_{j=1}^{\infty} u_{kj}) \overline{(\Sigma_{i=1}^{\infty} u_{hi})} | \geqq \{ |\mu_k| - \varepsilon \} \{ |\mu_h| - \varepsilon \} .$$

Entonces :

$$\varepsilon \{ \varepsilon + |\mu_k| + |\mu_h| \} \geqq \{ |\mu_k| - \varepsilon \} \{ |\mu_h| - \varepsilon \} ,$$

o sea :

$$|\mu_k| |\mu_h| \leqq 2\varepsilon (|\mu_k| + |\mu_h|) = |\mu_k| + |\mu_h| ,$$

$$(1 - |\mu_k|)(1 - |\mu_h|) \leqq 1 .$$

esto es imposible, ya que $\{\mu_k\}$ es una sucesión no acotada (T es un operador no acotado).

■

APENDICE

[I] En el espacio de Hilbert $L_2(1,2)$, el operador S:

$$S = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{4x^2}$$

es hermítico bajo la condición de frontera :

$$\varphi(1) = \varphi(2) = 0 .$$

Sean t_n las raíces de la ecuación :

$$J_o(t)\, Y_o(2t) - J_o(2t)\, Y_o(t) = 0 .$$

Entonces, los elementos propios del operador S correspondientes a los valores propios $\lambda_n = (t_n)^2$ son :

$$\varphi_n = C_n \sqrt{x}\ \{ J_o(t_n x)\, Y_o(t_n) - Y_o(t_n x)\, J_o(t_n) \},\quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

donde C_n es la constante de normalización. Por la teoría de Titchmarsh[4] se sabe que $\{\varphi_n\}$ es un sistema completo, por lo tanto se tiene :

$$S = \Sigma_{n=1}^{\infty} \lambda_n\, \varphi_n \otimes \varphi_n \qquad (\lambda_n = (t_n)^2\,) .$$

[II] Si un operador T es de Schatten :

$$T = \Sigma_{k=1}^{\infty} \lambda_k\, \psi_k \otimes \varphi_k$$

entonces se tiene :

$$< T\varphi_k , \psi_l > = <\lambda_k \psi_k , \psi_l > = \lambda_l \delta_{k,l} = < \varphi_k , \overline{\lambda}_l \varphi_l > \qquad (\text{ para todo } k)$$

esto es, ψ_l $(l = 1, 2, 3, \ldots)$ pertenecen al dominio de T^* .

Tenemos : $T^* T \varphi_k = T^* (\lambda_k \psi_k) = |\lambda_k|^2 \varphi_k$

o sea : $T^* T = \Sigma_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 \varphi_k \otimes \varphi_k$,

esto es, los elementos propios del operador $T^* T$ forman una base ortonormal del espacio .

El operador $\frac{1}{4x^2} \times$ es acotado en $L_2(1, 2)$, y el operador

$$\left(\frac{1}{4x^2}\right)^* \left(\frac{1}{4x^2}\right) = \frac{1}{16x^4} \times$$

no posee valores propios , razón por la cual el operador $\frac{1}{4x^2} \times$ no es de Schatten . ∎

REFERENCIAS

[1] Roberto Schatten : Norm ideals of completely continuous operators, Springer Verlay , New York , 1970.

[2] F. Riesz , B. Nagy: Functional Analysis, Frederick Ungar Pub. Co. Fourth Ed. New York, 1965.

[3] H. Nakano : Espacio de Hilbert, Kyoritsu, Tokyo, 1945 .

[4] E. C. Titchmarsh : Eigenfunction Expansions, Clarendon Press, Oxford 1962.

[5] P. A.M. Dirac : The principles of quantum mechanics, Oxford Uni. Press Third Ed. 1947 .