Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen VI, 1972, págs. 125 - 165

COTAS PARA LOS CARACTERES DE LOS GRUPOS DE CHEVALLEY[1]

por

Vicente LANDÁZURI

INTRODUCCIÓN

El afán actual por clasificar las estructuras estudiadas en las matemáticas, tal vez encuentra su mayor manifestación en los esfuerzos que se están haciendo para clasificar los grupos simples.

El desarrollo de esta rama de la matemática es relativamente reciente si se tiene en cuenta que a principios del siglo los únicos grupos simples conocidos eran los llamados grupos clásicos : grupos de transformaciones lineales de espacios de dimensión finita sobre campos de Galois. Por muchos años se hicieron esfuerzos por construir grupos simples finitos partiendo de las álgebras de Lie. Le correspondió a Chevalley en 1956 dar la definición adecuada de estos grupos y demostrar su simplicidad. Posteriormente, Steinberg y Ree encontraron otros grupos simples, los grupos trenzados, a partir de los grupos de Chevalley.

---

1) Este trabajo fue presentado como requerimiento parcial para obtener el grado de Magister Scientiae en la Universidad Nacional de Colombia. El autor agradece los consejos del profesor W. PATTON.

La teoría de grupos moderna se desarrolla en gran parte en base de representaciones y caracteres de los mismos ; si se conocen los caracteres de un grupo, puede deducirse prácticamente toda su estructura; es de esperar entonces que la determinación de los caracteres de los grupos presente gran dificultad; en general se trata de conseguir algunas de sus propiedades, entre otras, cotas para sus grados; leyendo libros tales como Feit [9] pueden verse sus aplicaciones.

En el presente desarrollo se estiman los grados de los caracteres de los grupos de Chevalley y de los grupos trenzados, obteniendo cotas inferiores para los mismos. El método que se sigue está fundamentado en la simplicidad de estos grupos, con lo cual sus caracteres son fieles; así, al restringir éstos a subgrupos de considerable tamaño tienen componentes no lineales; las cotas se derivan en base a los grados de estas componentes. Las cotas que se obtienen coinciden en el sumando de mayor exponente con el sumando de mayor exponente de caracteres conocidos.

En la primera sección expónese un teorema que muestra explícitamente los caracteres de grupos de tipo extraespecial; esta clase de grupos desempeñará un papel decisivo en las dos secciones siguientes : En la segunda sección se estiman los caracteres de los grupos clásicos en su representación matricial; posteriormente, en la sección III, se muestra un teorema general para caracteres de grupos de Chevalley usando las propiedades de las raíces de las álgebras de Lie simples, a saber : si χ es un carácter de un grupo de Chevalley G sobre un campo $GF(q)$ asociado a un álgebra de Lie, el grado de χ es mayor o igual a $\frac{1}{s}(q-1)^{\frac{|R(\rho)|-1}{2q}}$, donde $s=1$ ó 2 (está determinado en cada caso), $|R(\rho)|$ es el número de elementos del conjunto de raíces positivas que no están fijadas por la reflexión en el hiperplano de ρ (la mayor raíz).

A lo largo de este trabajo, usaremos la notación usual. Así, notaremos por $|A|$

el numero de elementos del conjunto A, $F = GF(q)$ un campo con q elementos, F^* los elementos no nulos de F, $[x,y] = xyx^{-1}y^{-1}$ el conmutador de dos elementos x,y de un grupo G, G' el grupo derivado de G, (χ, Ψ) el producto hermitiano de dos caracteres de un grupo, $\chi|_D$ la restricción del carácter χ de G a un subgrupo D de G; $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ los conjuntos de números enteros, racionales, reales y complejos, respectivamente.

SECCIÓN I

En la presente sección se demuestra un teorema sobre caracteres para una determinada clase de p-grupos, el cual juega un papel importante a lo largo de este trabajo. $Z(G)$ designa el centro de un grupo G.

Sea G un p-grupo; G se llama de *tipo extraespecial* si :

i) $G' = Z(G)$, $|Z(G)| = q = p^n$ para algún entero n;

ii) existe un subgrupo abeliano M de G tal que $Z(G) \subset M$, y $[G: M]^2 = [G: Z(G)]$;

iii) $G' = \{[h,g] \mid g \in G\}$ para todo $h \in M - Z(G)$.

TEOREMA 1. Sea G un p-grupo de tipo extraespecial. Si $|Z(G)| = q$, entonces G tiene exactamente $q-1$ caracteres irreducibles no lineales. Si θ es un carácter irreducible no lineal de G, grd $\theta = [G: M]$ y existe un carácter lineal λ de $Z(G)$, $\lambda \neq 1_{Z(G)}$ tal que :

$$\theta(g) = 0 \quad \text{si} \quad g \in G - Z(G),$$

$$\theta(g) = [G: M]\,\lambda(g), \quad \text{si} \quad g \in Z(G).$$

Demostración. Sea λ un carácter lineal de $Z(G)$, $\lambda \neq 1_{Z(G)}$; sea Ψ una prolongación de λ a M (Ψ es carácter lineal de M). Sea $\theta = \Psi_M^G$ el carácter de G inducido por Ψ, es decir, θ está definido por :

$\theta(g) = \frac{1}{|M|} \sum_{x \in G} \Psi_o(g^x)$, para todo $g \in G$; Ψ_o coincide con Ψ en M y vale 0 en $G-M$.

Por hipótesis, $G' \subset M$, luego M es normal en G, con lo cual, si $g \in G-M$, $g^x \notin M$ para todo $x \in G$, y así $\theta(g) = 0$.

Para $g \in M$ se tiene :

$$\theta(g) = \frac{1}{|M|} \sum_{x \in G} \Psi_o(g^x) = \frac{1}{|M|} \sum_{x \in G} \Psi(g[g^{-1}, x^{-1}]) = \frac{\Psi(g)}{|M|} \sum_{x \in G} \Psi([g^{-1}, x^{-1}])$$

$$= \frac{\Psi(g)}{|M|} \sum_{x \in G} \lambda([g^{-1}, x^{-1}]).$$

Si $g \in Z(G)$ entonces :

$$\theta(g) = \frac{\lambda(g)}{|M|} \sum_{x \in G} \lambda([g^{-1}, x^{-1}]) = \frac{|G|}{|M|} \lambda(g), \qquad \text{luego } \theta(1) = [G : M].$$

Si $g \in M - Z(G)$, la aplicación $T: G \to Z(G)$ definida por $T(x) = [g^{-1}, x^{-1}]$ es un epimorfismo. Si $\{ g_i \mid 1 \leq i \leq |Z(G)| \}$ es una transversal de $K = Ker(T)$ en G, entonces :

$$\theta(g) = \frac{\Psi(g)}{|M|} \sum_{x \in G} \lambda(T(x)) = \frac{\Psi(g)}{|M|} \sum_i \sum_{y \in K} \lambda(T(yg_i)) = \frac{\Psi(g)}{|M|} \sum_i \sum_{y \in K} \lambda(T(g_i))$$

$$= \frac{\Psi(g)|K|}{|M|} \sum_i \lambda([g^{-1}, g_i^{-1}]) = \frac{\Psi(g)\,|G|}{|M|\,|Z(G)|} \sum_{y \in Z(G)} \lambda(y) =$$

$$= \Psi(g)\,[G: M]\,(\lambda, 1)_{Z(G)} = 0 \quad (\text{pues } \lambda \neq 1_{Z(G)}) .$$

Por otra parte θ es irreducible ; en efecto :

$$(\theta,\theta)_G = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\theta(g)\,\overline{\theta(g)} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in Z(G)}[G: M]^2\,\lambda(g)\,\overline{\lambda(g)} = \frac{[G: M]^2}{|G|}\,|Z(G)|$$

$$= \frac{[G: M]^2}{[G: Z(G)]} = 1 .$$

Así, con cada carácter lineal λ_i de $Z(G)$, $\lambda_i \neq 1_{Z(G)}$, hemos , asociado un carácter irreducible no lineal θ_i de G tal que :

$$\theta_i(g) = 0 , \quad g \in G - Z(G) ,$$

$$\theta_i(g) = [G: M]\,\lambda_i(g) , \quad g \in Z(G) .$$

Como $|Z(G)| = q$, tenemos los caracteres $\theta_1, \ldots, \theta_{q-1}$ de la forma anterior. La siguiente igualdad muestra que éstos son todos los caracteres irreducibles no lineales de G :

$$[G: G'] + (q-1)[G: M]^2 = [G: G'] + (q-1)[G: G'] = q[G: G'] = |G| . \quad \blacksquare$$

SECCIÓN II

GRUPOS CLÁSICOS

2.1. En esta sección estudiaremos los cinco grupos clásicos lineales en la forma definida por Dickson [7] , a saber : el grupo lineal especial $SL(n, q)$, el grupo simpléctico $Sp(2n, q)$, los dos grupos ortogonales especiales $SO(m,q)$ y $SQ(2n, q)$ y el grupo unitario especial $SU(m, q^2)$. Nos restringimos en nuestras consideraciones al caso $q = p^n$ tal que p sea un primo impar.

Usaremos la siguiente notación :

$F = GF(q)$ el campo con q elementos;

$L = GF(q^2)$ la extensión de grado 2 de F ;

V_{2n+1} el espacio vectorial de dimensión $2n+1$ sobre F ó L (se aclarará en el desarrollo);

$\{s_j\}$, $j = n, n-1, \ldots, 0, \ldots, -n+1, -n$, la base canónica de V_{2n+1};

V_{2n} el subespacio de V_{2n+1} generado por la base $\{s_j\}$, $j \neq 0$;

V_n el subespacio de V_{2n+1} generado por la base $\{s_j\}$, $j > 0$;

$<,>$ denota una forma bilineal ó hermítica sobre el espacio vectorial V_m sobre F ó sobre L respectivamente $(m = 2n+1$ ó $2n)$.

Esta forma tiene una representación matricial natural : sea $J = (<s_i, s_j>)$ donde s_i, s_j son los elementos de la base; entonces $<v, w> = vJw^t$ para todo $v, w \in V_m$ en el caso bilineal; y $<v, w> = vJ\overline{w}^t$ para todo $v, w \in V_m$ en el caso hermítico, donde t denota la transpuesta, $-$ es el automorfismo de orden 2 de L que deja fijo F, $\overline{w}$ es la imagen de w al aplicar $-$ a cada componente.

Las matrices X tales que $J = XJX^t$, si la forma es bilineal, y tales que $J = XJ\overline{X}^t$, si la forma es hermítica, forman el grupo de las matrices que dejan la forma invariante.

2.2. DEFINICIÓN DE LOS GRUPOS.

1) $SL(n, q)$ es el grupo de todas las transformaciones lineales de V_n (sobre F) con determinante igual a 1.

2) $Sp(2n, q)$ es el grupo de transformaciones lineales de V_{2n} que dejan invariante la forma bilineal definida por la matriz

$$J = \begin{bmatrix} & & & & & 1 \\ & & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & & & 1 & & \\ & & -1 & & & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & & \\ -1 & & & & & \end{bmatrix}$$

3) $SO(m, q)$ es el grupo de transformaciones lineales de V_{2n} ó V_{2n+1} $(m = 2n$ ó $2n+1)$ con determinante igual a 1 que dejan invariante la forma bilineal definida por la matriz

$$J = \begin{bmatrix} & & & & 1 \\ & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & & 1 & & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & \\ 1 & & & & \end{bmatrix}$$

4) $S\underline{O}(2n, q)$ es el grupo de transformaciones lineales de V_{2n} con determinante igual a 1 que dejan invariante la forma bilineal definida por la matriz

$$J = \begin{bmatrix} & & & & & & 1 \\ & & & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & & & & 1 & & \\ & & \alpha & 1 & & & \\ & & 1 & \beta & & & \\ & 1 & & & & & \\ 1 \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & & & & \end{bmatrix}$$

donde $\alpha x^2 + 2x + \beta$ es un polinomio irreducible en $F[x]$.

5) $SU(m, q^2)$ es el grupo de las transformaciones lineales con determinante 1 de los espacios vectoriales V_{2n} ó V_{2n+1} $(m = 2n$ ó $2n+1)$ sobre L que dejan invariante la forma hermítica definida por la matriz

$$J = \begin{bmatrix} & & & & & 1 \\ & & & & \cdot & \\ & & & \cdot & & \\ & & 1 & & & \\ & \cdot & & & & \\ 1 & & & & & \end{bmatrix}$$

A continuación estudiaremos algunos subgrupos de los grupos antes mencionados con miras a la obtención de una cota inferior para los grados de sus caracteres.

Notaremos genéricamente por G un grupo clásico; H, K y D los subgrupos de G que se definen a continuación .

2.3. *SUBGRUPOS H, K, D.*

i) $G = SL(n, q)$, $n > 2$. Sean $x, y \in V_{n-2}$, $c \in F$, $a \in F^*$, notaremos :

$$h(x, y, c) = \begin{bmatrix} 1 & x & c \\ & I & y^t \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad k(a) = \begin{bmatrix} a & & \\ & a^{-1} & \\ & & I \end{bmatrix}$$

donde I es la matriz identidad $n-2$, y^t la transpuesta de y .

Se definen : $H = \{ h(x,y,c) \mid x,y \in V_{n-2}, c \in F \}$,

$K = \{ k(a) \mid a \in F^* \}$.

H y K son subgrupos de G, pues $det\, h(x,y,c) = det\, k(a) = 1$, y de acuerdo a la multiplicación usual de matrices :

$h(x,y,c)\, h(x',y',c') = h(x+x', y+y', c+c' + xy'^t)$ (nótese que xy'^t es un producto escalar) y,

$$k(a)\, k(b) = k(ab), \text{ así } k(a)^{-1} = k(a).$$

Además, K normaliza a H ; en efecto :

$$k(a)\, h(x,y,c)\, k(a)^{-1} = h(ax + (a^2-1)x_1 s_1, y + (a^{-1}-1)y_1 s_1, ac) ,$$

donde x_1, y_1 son las primeras componentes de x, y , respectivamente .

ii) $G = Sp(2n,q)$, $n \geqq 2$. Sean $x \in V_{n-1}$, $y \in W_{n-1}$ (V_{n-1}, W_{n-1} denotan los subespacios de V_{2n} generados por $\{ s_j \mid n-1 \geqq j \geqq 1 \}, \{ s_j \mid -1 \geqq j \geqq -n+1 \}$ sobre F, respectivamente) ; $c \in F$, $a \in F^*$ y J_o la restricción de J a $V_{2(n-1)} = V_{n-1} \oplus W_{n-1}$.

Se definen :

$$h(x,y,c) = \begin{bmatrix} 1 & x+y & c \\ & I & J_o(x+y)^t \\ & & 1 \end{bmatrix} , \quad k(a) = \begin{bmatrix} a & & \\ & I & \\ & & a^{-1} \end{bmatrix},$$

(I es la matriz identidad $2(n-1)$ por $2(n-1)$) .

$$H = \{ h(x,y,c) \mid x+y \in V_{2(n-1)}, \ c \in F \} ,$$

$$K = \{ k(a) \mid a \in F^* \} .$$

De acuerdo con la multiplicación usual de matrices:

$$J = h(x,y,c)\, J h(x,y,c)^t , \ J = k(a)\, J k(a)^t ,$$

$$h(x,y,c)\, h(x',y',c') = h(x+x', y+y', c+c' + (x+y) J_o (x'+y')^t),$$

$$k(a)\, k(b) = k(ab) ,$$

$$k(a)\, h(x,y,c)\, k(a)^{-1} = h(ax, ay, a^2 c).$$

Así, H y K son subgrupos de G tales que K normaliza a H.

iii) $G = SO(m,q)$ ó $SQ(m,q)$, $m \geqq 6$ en $SO(m,q)$ y $m \geqq 8$ en $SQ(m,q)$. Sean $x, y \in V_{m-4}$, $c \in F$, $a \in F^*$, J_o la restricción de J a V_{m-4}. Definimos :

$$h(x,y,c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x & c & -\frac{1}{2} x J_o x^t \\ & 1 & y - \frac{1}{2} y J_o y^t & -c - x J_o y^t & \\ & & 1 \ -J_o y^t & -J_o x^t & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & 1 & \end{pmatrix}$$

$H = \{ h(x, y, c) \mid x, y \in V_{m-4}, c \in F \}$.

$$k(a) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & a & & & & & \\ & & a & & & & \\ & & & I & & & \\ & & & & a^{-1} & & \\ & & & & & a^{-1} & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

I es la matriz identidad $m-3$ por $m-3$. $K = \{ k(a) \mid a \in F^* \}$.

Las siguientes relaciones muestran que H y K son subgrupos de G y que K normaliza a H :

$$J = h(x, y, c)\, J\, h(x, y, c)^t \quad , \quad J = k(a)\, J\, k(a)^t$$

$$h(x, y, c)\, h(x', y', c') = h(x + x', y + y', c + c' - x J_o y'^t)$$

$$k(a)\, k(b) = k(ab)$$

$$k(a)\, h(x, y, c)\, k(a)^{-1} =$$

$$= h(x + (a^{-1} - 1) x_{n-2} s_{n-2} + (a-1) x_{-n+2} s_{-n+2},\ ay + (1-a) y_{n-2} s_{n-2} + (a^2 - a) y_{-n+2} s_{-n+2}, ac)$$

donde x_{n-2}, x_{-n+2} denotan la primera y última componentes de x respectiva - mente; similarmente para y .

iv) $G = SU(m, q^2)$, $m \geqq 3$. Sea $i \in L$, $i \notin F$ tal que $i^2 + \alpha = 0$ para al - gún $\alpha \in F$, así $L = F(i)$ y todo elemento de L es de la forma $a + bi$ con $a, b \in F$ ($\overline{a + bi} = a - bi$) . Sean $x, y \in V_{m-2}$ con componentes en F, $c \in F$, $a \in F^*$ y J_o la restricción de J a V_{m-2} . Se definen :

$$h(x,y,c) = \begin{bmatrix} 1 & x+iy & -\frac{1}{2}(x+iy)J_o\overline{(x+iy)}^t + ic \\ & I & -J_o\overline{(x+iy)}^t \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$k(a) = \begin{bmatrix} a & & \\ & I & \\ & & a^{-1} \end{bmatrix}$$

donde I es la matriz identidad $m-2$ por $m-2$.

$H = \{ h(x,y,c) \mid x,y \in V_{m-2}$ con componentes en F, $c \in F \}$.

$K = \{ k(a) \mid a \in F^* \}$.

Las siguientes relaciones muestran que H, K son subgrupos de G y que K normaliza a H;

$J = h(x,y,c)\, J\, \overline{h(x,y,c)}^t \quad , \quad J = k(a)\, J\, \overline{k(a)}^t$

$h(x,y,c)\, h(x',y',c') = h(x+x', y+y', c+c' + xJ_o\bar{y}'^t - x'J_o\bar{y}^t)$

$k(a).k(b) = k(ab)$

$k(a)\, h(x,y,c)\, k(a)^{-1} = h(ax, ay, a^2c)$.

En todos los grupos considerados, K normaliza a H, el grupo D se define entonces por $D = KH$.

El siguiente paso es mostrar que H *es un grupo de tipo extraespecial*, para luego determinar sus caracteres mediante el teorema 1 de la sección I. La prueba se divide en cuatro partes :

a) $H' = Z(H) = \{ h(0, 0, c) \mid c \in F \}$.

De las relaciones anteriores se deducen las siguientes para los conmutadores :

$SL(n, q)$; $[h(x, y, c), h(x', y', c')] = h(0, 0, xy'^t - x'y^t)$

$Sp(2n, q)$: $[h(x, y, c), h(x', y', c')] = h(0, 0, 2(x+y) J_o (x' + y')^t)$

$\left.\begin{matrix} SO(m, q) \\ SQ(m, q) \end{matrix}\right\}$; $[h(x, y, c), h(x', y', c')] = h(0, 0, x' J_o y^t - x J_o y'^t)$

$SU(m, q^2)$; $[h(x, y, c), h(x', y', c')] = h(0, 0, 2(x J_o y'^t - x' J_o y^t))$

Luego $\{ h(0, 0, c) \mid c \in F\} \subset H'$, y, $\{ h(0, 0, c) \mid c \in F \} \subset Z(H)$.

Por otra parte, dado $c \in F$, basta tomar $x = cs_1$, $y = s_1$ en el caso $SL(n, q)$, $x = cs_{n-2}$, $y = -s_{-n+2}$ en los casos ortogonales y $x = cs_{n-1}$, $y = \frac{1}{2} s_{-n+1}$ en los casos simpléctico y unitario, para obtener :

$$[h(x, 0, 0), h(0, y, 0)] = h(0, 0, c); \text{ así } H' = \{h(0, 0, c) \mid c \in F\}$$

Finalmente, si $h(x, y, c) \in Z(H)$, entonces

$[h(x, y, c), h(x', y', c')] = h(0, 0, 0)$ para todo x', y', c'; de las relaciones para los conmutadores se obtiene respectivamente :

$SL(n, q) : xy'^t - x'y^t = 0$,

$Sp(2n,q) : (x+y)J_o(x'+y')^t = 0$,

$SO(m,q)$ y $S\underline{O}(m,q) : x'J_oy'^t - xJ_oy'^t = 0$,

$SU(m,q^2) : xJ_oy'^t - x'J_oy^t = 0$,

para todo x', y' en cada caso. Tomando $x' = 0$, se obtiene $xy'^t = 0$ en $SL(n,q)$; $xJ_oy'^t = 0$ en los grupos restantes; como el producto escalar usual y las formas (bilineales y hermíticas) que estamos tratando no son degenerados, $x = 0$. Similarmente para y, con lo cual $x = y = 0$.

b) Sea $M = \{ h(0,y,c) \mid h(0,y,c) \in H \}$. M es un subgrupo abeliano normal en H.

De acuerdo con las relaciones dadas para cada grupo: $h(0,y,c)\,h(0,y',c') = h(0,y+y', c+c')$; luego M es subgrupo abeliano de H. La normalidad se sigue de a), pues $H' \subset M$.

c) $Z(H) = \{ [h,g] \mid g \in H \}$, para todo $h \in M - Z(H)$.

Sean $h(0,y,c) \in M - Z(H)$, y $h(0,0,c') \in Z(H)$, como $y \neq 0$, sea y_j una componente de y diferente de 0; entonces :

$[h(0,y,c), h(-c'y_j^{-1}s_j, 0,0)] = h(0,0,c')$ en $SL(n,q)$,

$[h(0,y,c), h(-\frac{1}{2}c'y_j^{-1}s_{-j}, 0,0)] = h(0,0,c')$ en $Sp(2n,q)$,

$[h(0,y,c), h(c'y_j^{-1}s_{-j}, 0,0)] = h(0,0,c')$ en $SO(m,q)$ y $S\underline{O}(m,q)$,

$[h(0,y,c), h(-\frac{1}{2}c'y_j^{-1}s_{-j}, 0,0)] = h(0,0,c')$ en $SU(m,q^2)$.

d) Los órdenes de los subgrupos considerados son los siguientes :

$SL(n,q): \quad |H| = q^{2n-3}, \ |M| = q^{n-1}, \ |Z(H)| = q, \ [H;M] = q^{n-2}$

$Sp(2n,q): \quad |H| = q^{2n-1}, \ |M| = q^{n}, \ |Z(H)| = q, \ [H;M] = q^{n-1}$

$$\left.\begin{array}{l} SO(m,q) \\ SQ(m,q) \end{array}\right\} : \ |H| = q^{2m-7}, \ |M| = q^{m-3}, \ |Z(H)| = q, \ [H;M] = q^{m-4}$$

$SU(m,q^2): |H| = q^{2m-3}, \ |M| = q^{m-1}, \ |Z(H)| = q, \ [H:M] = q^{m-2}$

Se verifica entonces $[H:M]^2 = [H:Z(H)]$. ∎

Entonces, aplicando el teorema *1* (sección I) obtenemos :

LEMA 1. Si θ *es un carácter irreducible no lineal de* H, *el grado de* θ *es* q^{n-2}, q^{n-1}, q^{m-4}, q^{m-2} *para* H *en* $SL(n,q)$, $Sp(2n,q)$, $SO(m,q)$ *ó* $SQ(m,q)$, $SU(m,q^2)$, *respectivamente.*

Para mejorar la estimación de los caracteres, consideramos ahora el *índice del grupo de inercia* $I(\theta)$ de un carácter irreducible no lineal θ de H en $D=KH$.

Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ los caracteres lineales de $Z(H)$, $\lambda_q = 1_{Z(H)}$: de acuerdo con el teorema *1* (sección I) los caracteres irreducibles no lineales de H, $\theta_1, \ldots, \theta_{q-1}$, son tales que

$$\begin{array}{ll} \theta_i(h) = 0 \ , \ \text{para} \ h \in H - Z(H) & \\ & (*) \\ \theta_i(h) = [H:M]\,\lambda_i(h) \ , \ \text{para} \ h \in Z(H) & \end{array}$$

K opera, por conjugación, como un grupo de permutaciones de $Z(H)$:

$h(0,0,c)^{k(a)} = k(a)\, h(0,0,c)\, k(a)^{-1} = h(0,0,a^s c)$, $k(a) \in K$, $h(0,0,c) \in Z(H)$.

$s = 1$, para D en $SL(n,q)$, $SO(m,q)$, $SQ(m,q)$,

$s = 2$, para D en $Sp(2n,q)$, $SU(m,q^2)$.

Sea $F^{*s} = \{ a^s \mid a \in F^* \}$ $(s = 1$ ó $2)$, como $[F^*: F^{*s}] = s$, $Z(H)$ se divide en $s+1$ órbitas $\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_{s+1}$ tales que $\mathcal{O}_1 = E$[1], $|\mathcal{O}_i| = \frac{1}{s}(q-1)$ para $i = 2, \ldots, s+1$.

K opera también como grupo de permutaciones de $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_q\}$ por la aplicación : $\lambda_i \to \lambda_i^k$, $\lambda_i^k(h) = \lambda_i(h^k)$, para todo $k \in K$, $h \in Z(H)$: luego $\{\lambda_i, \ldots, \lambda_q\}$ se divide en $\mathcal{O}'_1, \ldots, \mathcal{O}'_{s+1}$ órbitas, $\mathcal{O}'_1 = \{\lambda_q\}$ y $|\mathcal{O}'_i| = \frac{1}{s}(q-1)$, $i = 2, \ldots, s+1$.

Así, de acuerdo con (*), al operar K sobre $\{\theta_1, \ldots, \theta_{q-1}\}$, por la aplicación : $\theta_i \to \theta_i^k$, $\theta_i^k(h) = \theta_i(h^k)$, $k \in K$, $h \in H$, divide a $\{\theta_1, \ldots, \theta_{q-1}\}$ en s órbitas cada una con $\frac{q-1}{s}$ elementos.

Finalmente, la aplicación $\theta_i^k \to I(\theta_i)k$ $(k \in K)$ es una biyección de la órbita de θ_i en las coclases a derecha de $I(\theta_i)$ en D; se deduce entonces :

LEMA 2. Si θ es un carácter irreducible no lineal de H, entonces $[D: I(\theta)] = q-1$ para D en $SL(n,q)$, $SO(m,q)$, $SQ(m,q)$ y $[D: I(\theta)] = \frac{1}{2}(q-1)$ para D en $Sp(2n,q)$, $SU(m,q^2)$.

Antes de proceder a la prueba del teorema principal, hacemos las siguientes observaciones :

---

1) E es el subgrupo que se reduce a la unidad.

1. Si G denota $SL(n,q)$, $Sp(2n,q)$ ó $SU(m,q^2)$, $G/Z(G)$ es simple (Dickson [7]) ; así el núcleo de todo carácter de G debe ser un subgrupo de $Z(G)$. El subgrupo D que estamos considerando es tal que $D \cap Z(G) = E$, luego todo carácter irreducible no lineal de G restringido a D es fiel.

2. Si G denota $SO(m,q)$ ó $S\underline{Q}(m,q)$, $G'/Z(G')$ es simple (Dickson [7]). El subgrupo D está contenido en G', pues G' contiene la parte p-Sylow de G, así $H \subset G'$; además

$$k(a) = u(a)\,(u(-a^{-1})^t)\,u(a)\,(u(1)\,u(-1)^t\,u(1)^{-1},$$

donde

$$u(a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \cdots & a & 0 & 0 \\ & & & & -a & 0 \\ & & & & \vdots & \vdots \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix};$$

$u(a) \in G'$ por ser elemento de la parte p-Sylow de G: $u(a)^t J u(a)$, luego $u(a)^t \in G$. Claramente, $u(a)^t$ está en un subgrupo p-Sylow de G; como G' contiene un subgrupo p-Sylow de G y es normal en G, contiene todos los subgrupos p-Sylow de G, luego $u(a)^t \in G'$. Se sigue $D = KH \subset G'$.

Se tiene también $Z(G') \cap D = E$; luego todo carácter irreducible no lineal de G' restringido a D es fiel. Además, todo carácter no lineal de G res -

tringido a G' tiene por lo menos una componente no lineal.

TEOREMA 2. Sean $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4, \chi_5$ *caracteres irreducibles no lineales de* $SL(n,q)$, $Sp(2n,q)$, $SO(m,q)$, $SO(2n,q^2)$, *respectivamente, entonces* $grd\ \chi_1 \geqq (q-1)q^{n-1}$, $grd\ \chi_2 \geqq \frac{1}{2}(q-1)q^{n-1}$, $grd\ \chi_3 \geqq (q-1)^{m-4}$, $grd\ \chi_4 \geqq (q-1)q^{2n-4}$, $grd\ \chi_5 \geqq \frac{1}{2}(q-1)q^{m-2}$.

Demostración. En efecto : sea G uno de estos grupos, χ un carácter irreducible no lineal de G (G' en los casos ortogonales); por las observaciones anteriores $\chi|_D$ es fiel, luego existe Ψ, carácter de D, tal que $(\chi|_D, \Psi) \geqq 1$ y $\Psi|_H$ no sea suma de caracteres lineales; porque si no $\chi|_H = \Sigma(\chi|_D, \Psi)\Psi|_H$ sería suma de caracteres lineales de H con lo cual $H' \subset Ker\,\chi$ y así $\chi|_D$ no sería fiel.

Sea entonces Ψ un tal carácter, puesto que H es normal en D, existe θ, carácter irreducible de H, y una constante $c \geqq 1$ tal que $\Psi|_H = c\,\Sigma\,\theta^{g_i}$, donde $\{g_i\}$ es una transversal de $I(\theta)$ en D. Como $\Psi|_H$ no es suma de caracteres lineales, θ es no lineal y así $\theta(E) = [G:M]$ (lema 1).

$[D:I(\theta)] = \frac{1}{s}(q-1)$, donde $s = 1$ ó 2 según se aclara en el lema 2. Luego $\Psi(E) = c\,\Sigma\,\theta^{g_i}(E) = c\frac{1}{s}(q-1)[G:M]$.

Como Ψ ocurre con multiplicidad no nula en $\chi|_D$, se sigue el teorema . ∎

NOTAS : 1) El carácter doblemente transitivo de $PSL(n,q)$ es de grado $q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q$ (Huppert [10] , II. 6. 11); puede entonces obtenerse un carácter para $SL(n,q)$ del mismo grado.

2) Para $Sp(2n, q)$, Ward [14] encontró un carácter de grado $\frac{1}{2}(q^n - 1)$.

3) Para $SO(2n+1, q)$, en Curtis [4] se exhibe un carácter de grado

$$\frac{q(q^{n-1}+1)(q^n+1)}{2(q+1)}.$$

COROLARIO. Los grupos citados en las notas 1, 2, 3 no contienen subgrupos de tipo extraespecial en la parte p-Sylow con orden mayor que el orden de H.

SECCIÓN III

GRUPOS DE CHEVALLEY

3.1. PRELIMINARES

3.1.1. ÁLGEBRAS DE LIE SEMISIMPLES. PROPIEDADES.

Denotaremos por L un álgebra de Lie de dimensión finita sobre $\mathbb{C}$; es decir un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{C}$ dotado de un producto bilineal $[xy]$, llamado producto de Lie, tal que

$$[xx] = 0,$$

$$[[xy]z] + [[yz]x] + [[zx]y] = 0$$

para todo $x, y, z \in L$.

De las propiedades anteriores se sigue $[xy] = -[yx]$.

Sean A, B subálgebras de L, se define $[AB]$ como el subespacio de L generado por $[ab]$ para todo $a \in A$, $b \in B$. Un ideal de L es un subespacio A de L tal que $[LA] \subset A$.

L se dice abeliano si $[LL] = 0$. Tomando $L^1 = L$ se define $L^{i+1} = [L^i L]$; L se dice nilpotente si $L^k = 0$ para algún k. Sea $L^{(o)} = L$, se define $L^{(i+1)} = [L^{(i)} L^{(i)}]$; L se dice soluble si $L^{(k)} = 0$ para algún k.

Un álgebra de Lie L se dice simple si todos sus ideales son triviales; se dice semisimple si no tiene ideales solubles. Se puede mostrar que cualquier álgebra de Lie semisimple sobre $\mathbb{C}$ se descompone en suma directa de álgebras simples.

El conjunto de las matrices n por n sobre $\mathbb{C}$ forman un álgebra de Lie con la multiplicación $[AB] = AB - BA$. Una representación de un álgebra de Lie es un homomorfismo de L en el álgebra de las matrices n por n bajo la multiplicación de Lie.

La transformación lineal de L en $L: a \to [xa]$ se denota por $ad\ x$; tenemos entonces

$$ad\ x\,[ab] = [ad\ x\,.\,a, b] + [a, ad\ x\,.\,b]\ ,$$

y así $ad\ x$ es una derivación de L. La representación de L dada por ad se llama representación adjunta.

Sea M un módulo sobre L, L nilpotente, M, L de dimensión finita sobre $\mathbb{C}$. Una aplicación $\alpha: x \to \alpha(x)$ de L en $\mathbb{C}$ se llama un *peso* de M si existe $m \in M$, $m \neq 0$ tal que $(ad\ x - \alpha(x)1)^k.\ m = 0$, para algún entero positivo k. El subespacio M_α de M de los elementos m de M tales que $(ad\,x - \alpha(x)1)^k.\ m = 0$, $x \in L$, se llama *el espacio peso* de α. M es la suma directa de espacios peso M_α (Jacobson [11]).

Sea A una subálgebra de L, el normalizador N de A se define como el conjunto de los elementos $x \in L$ tales que $[xa] \in A$ para todo $a \in A$. Una subálgebra H de L se llama subálgebra de Cartan si es nilpotente y es su propio normalizador. L siempre tiene subálgebras de Cartan y todas son de igual dimensión (Jacobson [11]); esta dimensión se llama el rango de L.

En adelante supondremos que L es semisimple.

Sea H una subálgebra de Cartan de L, puesto que $[HL] \subset L$, L puede considerarse un H-módulo y así $L = \oplus L_\alpha$, α :pesos de L relativos a H. Los pesos α no nulos de L (relativos a H) se llaman *raíces* de L, y el correspondiente L_α ,el *espacio raíz de* α. Denotaremos por ϕ el conjunto de las raíces de L; siguiendo a Jacobson [11] , $L_o = H$, y por lo tanto, $L = H \oplus \sum_{\alpha \in \phi} L_\alpha$.

Sea H_o^* el espacio vectorial generado por ϕ sobre Q. En H_o^* se puede definir un orden; por ejemplo, si $\{\alpha_j\}$ es una base de H_o^* , diremos que $\rho = \sum a_i \alpha_i > 0$ si el primer a_i diferente de 0 es positivo, y $\rho > \lambda$ si $\rho - \lambda > 0$. Notaremos ϕ^+ el conjunto de *raíces positivas*. Una raíz $\alpha > 0$ se dice *simple* si no se puede escribir como la suma de dos raíces positivas; llamaremos π al conjunto de raíces simples.

Sea $(\ ,\ )$ la forma de Killing definida sobre L por : $(a,b) = tr\,(ad\, a\, .\, ad\, b)$ para todo $a, b \in L$ (tr = *traza*) . Esta forma de Killing restringida a H no es degenerada, i.e., para $h \in H$ y $\rho \in H^*$ (H^* espacio dual de H) existe $h'_\rho \in H$ tal que $(h, h'_\rho) = \rho(h)$. Se define entonces, un producto escalar en H_o^* : $(\rho, \delta) = (h'_\rho, h'_\delta)$ para todo $\rho, \delta \in H_o^*$. Este producto es simétrico, no degenerado, positivo definido y bilineal.

A continuación enunciamos varios resultados establecidos para álgebras de Lie semisimples.

1) Si $\delta \in \phi$ entonces $-\delta \in \phi$, y $k\delta \notin \phi$ para todo entero $k \neq \pm 1$.

2) Dados $\rho, \delta \in \phi$, $[L_\rho L_\delta] \subset L_{\rho+\delta}$ si $\rho+\delta \in \phi$;. $[L_\rho L_\delta] = 0$, si $\rho+\delta \notin \phi$. Además $[L_\rho L_{-\rho}] \subset H$ para todo. $\rho \in \phi$.

3) $dim_{\mathbf{C}}\, H = dim_{\mathbf{Q}}\, H_o^* =$ cardinal de π.

4) a) Si $\rho, \delta \in \pi$, $\rho \neq \delta$., entonces $\rho - \delta \notin \phi$.

b) Si $\rho, \delta \in \pi$, $\rho \neq \delta$., entonces $(\rho, \delta) \leqq 0$.

c) Si $\rho \in \phi^+$ entonces $\rho = \sum_{\alpha \in \pi} k_\alpha \alpha$, donde k_α son enteros no negativos.

d) Si $\rho \in \phi^+ - \pi$, entonces existe $\delta \in \pi$., tal que $\rho - \delta \in \phi^+$.

5) Sean $\pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ y $h_\rho = 2/(\rho, \rho).\ h'_\rho$, para $\rho \in \phi$. Entonces h_ρ es combinación lineal de los h_{α_i} con coeficientes enteros. Además $\{h_{\alpha_i} \mid i = i, \dots, l\}$ es una base para H.

6) $2(\rho, \delta)/(\rho, \rho) \in \mathbf{Z}$ para todo $\rho, \delta \in \phi$; más aún,

$2(\rho, \delta)/(\rho, \rho) = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3.$

Sean $\rho, \delta \in \phi$; *la* ρ*-cadena de raíces a través de* ϕ es la sucesión $\delta - r\rho, \dots, \delta, \dots, \delta + q\rho$, donde $\delta + i\rho \in \phi$ para $-r \leqq i \leqq q$, pero $\delta - (r+1)\rho \notin \phi$, $\delta + (q+1)\rho \notin \phi$, En estas condiciones :

$$\frac{2(\rho, \delta)}{(\rho, \rho)} = r - q .$$

ϕ es invariante por todas las reflexiones $w_\alpha (\alpha \in \phi)$ (w_α es la reflexion en el hiperplano de H_α^* ortogonal a α, es decir, $w_\alpha v = v - \frac{2(v, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} v$). El grupo W generado por los w_α es llamado el *grupo de Weyl*. Se puede demostrar que W es generado por u_{α} con $\alpha \in \pi$.

Como antes $\pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$, y se define ahora $A_{ij} = \dfrac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)}$; $A = (A_{ij})$ se llama la *matriz de Cartan* de L relativa a H.

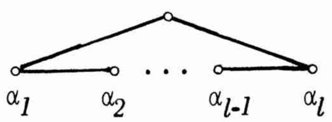
ϕ está determinado por la matriz de Cartan y el sistema simple π , pues se puede encontrar la ρ-cadena de raíces a través de δ para las raíces ρ ,δ, conocidas, a partir de las raíces de π . Así ,un álgebra de Lie semisimple sobre $\mathbb{C}$ está determinada por el sistema simple π y la matriz de Cartan A .

3.1.2. *ÁLGEBRAS DE LIE SIMPLES. CLASIFICACIÓN.*

Sea L un álgebra de Lie semisimple, $\pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ un sistema simple de raíces y $A = (A_{ij})$ la matriz de Cartan de L. A L asociamos un *diagrama de Dynkin* como sigue : se toman puntos $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ y se unen α_i con α_j $(i \neq j)$ por medio de $A_{ij} A_{ji}$ líneas; sobre cada punto α_i ponemos el valor de (α_i, α_i) . Si $A_{ij} = 0 = A_{ji}$, α_i no se une con α_j .

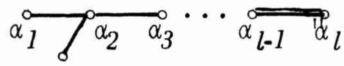
Se puede demostrar que L es simple si y sólo si su diagrama de Dynkin es conexo. Las álgebras de Lie simples sobre $\mathbb{C}$ se han determinado investigando los posibles diagramas de Dynkin conexos. A continuación damos una lista de los únicos diagramas de Dynkin que corresponden a álgebras de Lie simples (los diagramas están generalizados, es decir, contienen la máxima raíz).

A_l ;



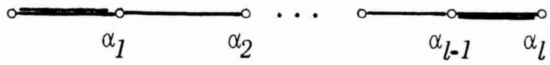
, $l \geq 1$

B_l :



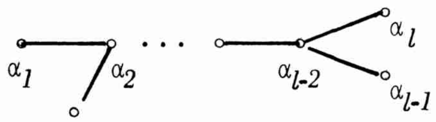
, $l \geqq 2$

C_l :



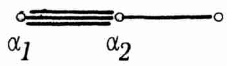
, $l \geq 3$

D_l :

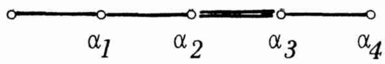


, $l \geqq 4$

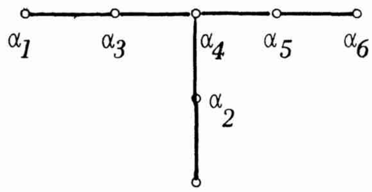
G_2 :



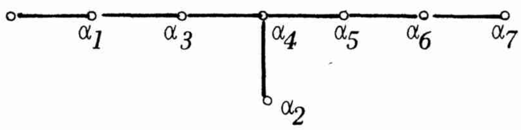
F_4 :



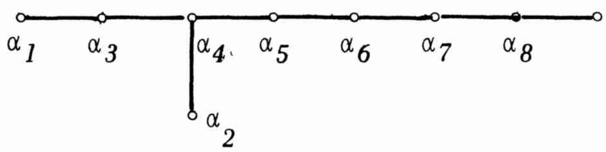
E_6 :



E_7 :



E_8 :



Así, las únicas álgebras de Lie simples son las de tipo $A_l, B_l, ,, .., E_8$.

3.1.3. BASES DE CHEVALLEY. DEFINICIÓN DE LOS GRUPOS DE CHEVALLEY.

Sea L un álgebra de Lie simple sobre $\mathbb{C}$, $L = H \oplus \sum_{\rho \epsilon \phi} L_\rho$. Para $\rho, \delta \epsilon \phi$ sea $r(\rho, \delta)$ el mayor entero tal que $\rho - r(\rho, \delta)\delta \epsilon \phi$. Chevalley mostró que se pueden escoger $e_\rho \epsilon L_\rho - \{0\}$ $(\rho \epsilon \phi)$ tales que :

$[e_\rho e_\delta] = 0$, si $\rho, \delta \epsilon \phi$, $\rho + \delta \notin \phi$, $\rho \neq -\delta$;

$[e_\rho e_\delta] = \pm (r(\rho, \delta) + 1) e_{\rho+\delta}$ (si $\rho, \delta, \rho + \delta \epsilon \phi$) ;

$[h_\rho e_\delta] = \dfrac{2(\rho, \delta)}{(\rho, \rho)} e_\delta$; $[h_\rho h_\delta] = 0$, $\rho, \delta \epsilon \phi$;

$[e_\rho e_{-\rho}] = h_\rho$, $\rho \epsilon \phi$.

$\{e_\rho, \rho \epsilon \phi ; h_\rho, \rho \epsilon \pi\}$ es una base para L sobre $\mathbb{C}$; ésta se llama una *base de Chevalley para* L .

De acuerdo con estas relaciones y con la propiedad 5 dada para las raíces, el producto de dos elementos de una base de Chevalley se expresa como una combinación lineal de los elementos de la base con *coeficientes enteros*. Este hecho es el que permite una definición simple de los grupos de Chevalley.

Para cada e_ρ $(\rho \epsilon \phi)$ la derivación $ad\ e_\rho$ es nilpotente, es decir , $(ad\ e_\rho)^n . L = 0$, para algún entero n. Lo mismo se sigue para la aplicación $s . ad\ e_\rho$, donde $s \epsilon \mathbb{C}$. Luego la aplicación $exp(s.ad\ e_\rho) = \sum_{k=o}^{\infty} \frac{s^k (ad\ e_\rho)^k}{k!}$ es un automorfismo de L. Tomando $x_\rho(s) = exp(s. ad\ e_\rho)$, $x_\rho(s)$ calculado en cualquier elemento de la base de Chevalley es una combinación lineal de los elementos de esta base cuyos coeficientes son polinomios en s con coeficientes enteros, luego si $X_\rho(s) = (a_{ij}(s))$ es la matriz de $x_\rho(s)$ con respecto a la base de Chevalley, $a_{ij} \in \mathbf{Z}[s]$.

Sea F un campo, sea L_F el conjunto de todas las combinaciones formales de elementos de $\{e_\rho, \rho \in \phi; h_\rho, \rho \in \pi\}$ con coeficientes en F. Puesto que los constantes de multiplicación de L con respecto a la base de Chevalley son enteros, podemos definir una multiplicación en L_F: si F es de característica 0, el producto de dos elementos de la base de Chevalley está en L_F; si F es de característica p, los enteros que resultan en el producto de elementos de la base de Chevalley se toman módulo p. Así, L_F es un álgebra de Lie sobre F.

Ahora, para $t \in F$ sea $X_\rho(t)$ la matriz obtenida de $X_\rho(s)$ reemplazando la variable compleja s por t, así $X_\rho(t) = (a_{ij}(t))$, como $a_{ij}(t) \in \mathbf{Z}[t]$ entonces $a_{ij}(t) \in F$. Finalmente, sea $x_\rho(t)$ la transformación lineal de L_F cuya matriz con respecto a la base de Chevalley es $X_\rho(t)$; $x_\rho(t)$ es, así, un automorfismo de L_F.

Sea $L(F)$ el grupo de automorfismo de L_F generado por $x_\rho(t)$, para todo $\rho \in \phi$, y todo $t \in F$. $L(F)$ se llama el grupo de Chevalley de tipo L sobre F. Si F es finito, $F = GF(q)$, $L(F)$ se notará por $L(q)$.

Todos los grupos de Chevalley $L(q)$ son simples, con excepción de $A_1(2)$, $A_1(3)$, $B_2(2)$, $G_2(2)$ (Steinberg [14]).

3.1.4. *ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS GRUPOS DE CHEVALLEY.*

A continuación daremos algunas propiedades de los grupos de Chevalley:

Siguiendo la notación anterior, sean $G = L(q) = < x_\rho(t) \mid \rho \in \phi\,,\ t \in F >$, $F = GF(q)$. Tenemos (Steinberg [14]) :

(1) : $x_\rho(t)\, x_\rho(u) = x_\rho(t+u)$;

(2): $x_\rho(t)\, x_\delta(u)\, x_\rho(t)^{-1} x_\delta(t)^{-1} = \Pi\, x_{i\rho + j\delta}(c_{ij} t^i u^j)$, si $\rho+\delta \neq 0$; el producto se toma para todas las raíces $i\rho + j\delta$ $(i, j \in \mathbf{Z}_+)$ siguiendo cierto orden fijo. Los c_{ij} son enteros dependientes de ρ, δ y del orden escogido, pero no de t ó de u. Además, $c_{11} = \pm (r(\rho, \delta) + 1)$.

(3) Sean $w_\rho(t) = x_\rho(t)\, x_{-\rho}(-t^{-1})\, x_\rho(t)$, $t \in F^*$, $h_\rho(t) = w_\rho(t)\, w_\rho(1)^{-1}$.
Entonces : $h_\rho(t)\, x_\delta(u)\, h_\rho(t)^{-1} = x_\delta(t^{n(\rho,\delta)} u)$, donde $n(\rho,\delta) = \dfrac{2(\rho,\delta)}{(\rho,\rho)}$.

Sea X_ρ el grupo $\{x_\rho(t) \mid t \in F\}$, este conjunto es un grupo isomorfo al grupo aditivo de F (se sigue de la relación (1)) .

Un conjunto S de raíces se llama *cerrado* si $\rho, \delta \in S$, $\rho+\delta \in \phi$ implica $\rho+\delta \in S$.

Sean S un conjunto cerrado, X_S el grupo generado por los X_ρ con $\rho \in S$. Si $\rho \in S$ implica $-\rho \notin S$, entonces todo elemento de X_S se escribe de manera única como $\Pi_{\rho \in S}\, x_\rho(t_\rho)$, $t_\rho \in F$; el producto se toma en un orden fijo.

Los grupos de Chevalley de tipo A_l, B_l, C_l, D_l se identifican con ciertos grupos clásicos, a saber (Carter [3]) :

$A_l(q) \approx SL(l+1, q)/ Z(SL(l+1, q))$,

$B_l(q) \approx SO'(2l+1, q)/ Z(SO'(2l+1, q))$,

$C_l(q) \approx Sp(2l, q) / Z(Sp(2l, q))$,

$D_l(q) \approx SQ'(2l, q)/ Z(SQ'(2l, q))$.

3.1.5. GRUPOS TRENZADOS (TWISTED)

A partir de los grupos de Chevalley, se definen los llamados *grupos trenzados* como sigue :

Supongamos que $G = L(F)$ admite dos automorfismos del mismo orden : $x_\rho(t) \to x_{\bar{\rho}}(t)$, donde $\rho \to \bar{\rho}$ es una simetría del diagrama de Dynkin de L, y $x_\rho(t) \to x_\rho(\bar{t})$, donde $t \to \bar{t}$ es un automorfismo de F. Sea σ el automorfismo $x_\rho(t) \to x_{\bar{\rho}}(\bar{t})$. Sean $U = \{x_\rho(t) \mid \rho \in \phi^+, t \in F\}$, $V = \{x_{-\bar{\rho}}(t) \mid \rho \in \phi^+, t \in F\}$. Tomando U', V' los conjuntos de elementos de U, V respectivamente invariantes por σ, se define $G^1 = L^1(K)$ como el subgrupo de G generado por U', V' y se le llama el *grupo trenzado asociado a* G. Los grupos G^1 son simples con una excepción.

Los grupos trenzados que se pueden construir son los siguientes : de $A_l(F)$ $(l \geq 2)$, $D_l(F)$ $(l \geq 4)$, $E_6(F)$, que tienen una simetría del diagrama de Dynkin de orden 2, pueden obtenerse $A_l^1(F)$, $D_l^1(F)$, $E_6^1(F)$ si F admite un automorfismo de orden 2. En particular, si $F = GF(q^2)$ se tiene el automorfismo de orden 2: $t \to \bar{t} = t^q$. Así se obtienen los grupos simples : $A_l^1(q^2)$, $D_l^1(q^2)$, $E_6^1(q^2)$. El grupo $A_2^1(2^2)$ es el único que no es simple. El grupo $D_4(F)$ tiene un automorfismo $x_\rho(t) \to x_{\bar{\rho}}(t)$ de orden 3, si F admite un automorfismo de orden 3 se puede obtener un grupo trenzado; lo denotaremos $D_4^2(F)$; en particular se obtiene $D_4^2(q^3)$, si $F = GF(q^3)$.

Los grupos $A_l^1(q^2)$, $D_l^1(q^2)$ se identifican con $SU(l+1, q^2)/Z(SU(l+1,q^2))$, $SQ'(2l, q)/Z(SQ'(2l, q))$ respectivamente (Steinberg [14]).

Siguiendo Steinberg [14] para $A_l^1(q^2)$, $D_l^1(q^2)$, $E_6^1(q^2)$, todo elemento

u de U^1 se escribe de manera única : $u = u_1 \ldots u_n$, donde los u_i son elementos de U^1 de una de las tres formas siguientes :

i) $x_\rho(t)$, con $t = \bar{t}$, si $\rho = \bar{\rho}$ y ρ no es de la forma $\delta + \bar{\delta}$;

ii) $x_\rho(t)\, x_{\bar{\rho}}(t)$, si $\rho \neq \bar{\rho}$ y $\rho + \bar{\rho}$ no es raíz ;

iii) $x_\rho(t)\, x_{\bar{\rho}}(\bar{t})\, x_{\rho+\bar{\rho}}(s)$ con $s + \bar{s} = \pm\, t\bar{t}$ si ρ, $\bar{\rho}$, $\rho + \bar{\rho}$ son raíces diferentes.

Se muestra que los casos (i) y (iii) no se dan simultáneamente en un grupo, y el caso (iii) se da únicamente en $A_l^1(q^2)$, para l par.

2. ESTIMACIÓN DE LOS CARACTERES.

Sea L un álgebra de Lie simple, ϕ el conjunto de raíces de L (relativo a alguna subálgebra de Cartan H de L), ϕ^+, π los conjuntos de raíces positivas y simples, respectivamente, $G = L(q)$ el correspondiente grupo de Chevalley sobre el campo $F = GF(q)$.

Para estimar los grados de los caracteres de G, nos referiremos primero a ciertos subconjuntos de ϕ^+. Supondremos $\pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$, con $l > 1$.

Sea ρ la mayor raíz de ϕ^+, w_ρ la reflexión en el hiperplano ortogonal a ρ, es decir,

$$w_\rho : x \to x - \frac{2(x,\rho)}{(\rho,\rho)}\rho\,, \quad \text{para todo} \quad x \in H_0^* .$$

Sea $R(\rho) = \{\delta \in \phi^+ \mid w_\rho(\delta) \neq \delta\}$.

LEMA 1. 1) $\rho \in R(\rho)$;

2) $R(\rho)$ *es un conjunto cerrado ;*

3) *Dado* $\delta \in R(\rho)$, $\delta \neq \rho$, *existe un* $\lambda \in R(\rho)$ *y un solo tal que* $\delta+\lambda \in \phi^+$; *más aún,* λ *es tal que* $\delta+\lambda = \rho$.

Demostración. Puesto que $w_\rho(\rho) = -\rho \neq \rho$, $\rho \in R(\rho)$, lo cual demuestra (1).

Sea $\delta \in \phi^+$, $w_\rho(\delta) = \delta - \frac{2(\delta,\rho)}{(\rho,\rho)}\rho$; por definición de $R(\rho)$, $\delta \in R(\rho)$ sí y sólo si $\frac{2(\delta,\rho)}{(\rho,\rho)} \neq 0$. Supongamos $\delta \in R(\rho)$, $\delta \neq \rho$, entonces $\frac{2(\delta,\rho)}{(\rho,\rho)} = r-q \neq 0$, donde r,q son los enteros positivos que determinan la ρ-cadena de raíces a través de δ (es decir, $\delta - r\rho, \ldots, \delta, \ldots, \delta+q\rho$ son raíces, y $\delta-(r+1)\rho$, $\delta+(q+1)\rho$ no son raíces). Puesto que ρ es la mayor raíz, $q = 0$. Si $r \geqq 2$ entonces $\delta - 2\rho$ es una raíz, luego $2\rho - \delta \in \phi^+$; comparando niveles : $|2\rho - \delta| = 2|\rho| - |\delta| \leqq |\rho|$, es decir, $|\rho| \leqq |\delta|$, por la maximalidad de $\rho, \delta = \rho$ (contradictorio), luego $r = 1$. Hemos mostrado entonces que dado $\delta \in \phi^+$, $\delta \neq \rho$, " $\delta \in R(\rho)$ si y sólo si $\frac{2(\delta,\rho)}{(\rho,\rho)} = r = 1$ ".

En particular, si $\alpha_k \in \pi$, $\alpha_k \in R(\rho)$ si y sólo si

$$\frac{2(\alpha_k,\rho)}{(\rho,\rho)} = r = 1 .$$

Sean $\delta, \lambda \in R(\rho)$ si $\delta+\lambda \in \phi^+$ entonces

$$w_\rho(\delta+\lambda) = \delta+\lambda - \frac{2(\delta,\rho)}{(\rho,\rho)}\rho - \frac{2(\lambda,\rho)}{(\rho,\rho)}\rho = \delta+\lambda-2\rho \neq \delta+\lambda \ ;$$

luego $\delta+\lambda \in R(\rho)$, y así $R(\rho)$ es cerrado, lo cual demuestra (2).

Finalmente, supongamos que $\delta \epsilon R(\rho)$, $\delta \neq \rho$, $\delta = \Sigma a_i \alpha_i$ $(a_i \epsilon \mathbf{Z}^{\cdot}_{+})$, $\frac{2(\delta,\rho)}{(\rho,\rho)} = \Sigma a_i \frac{2(\alpha_i,\rho)}{(\rho,\rho)} = 1$. Puesto que $\frac{2(\alpha_i,\rho)}{(\rho,\rho)}$ es un entero no negativo para todo $\alpha_i \epsilon \pi$, necesariamente existe un a_k y uno solo diferente de 0 tal que $\alpha_k \epsilon R(\rho)$; más aún, $a_k = 1$. De esto, dado $\delta \epsilon \phi^+$, $\delta \neq \rho$, $\delta = \Sigma a_i \alpha_i$ $(a_i \epsilon \mathbf{Z}_+)$, se tiene: " $\delta \epsilon R(\rho)$ si y sólo si existe un $a_k \neq 0$ y uno solo tal que $\alpha_k \epsilon R(\rho)$, $a_k = 1$ ".

Sea $\alpha_s \epsilon \pi$, $\alpha_s \epsilon R(\rho)$ (si no existe un tal α_s se tendría $w_\rho(\rho) = w_\rho(\Sigma a_i \alpha_i) = \Sigma a_i \alpha_i = \rho$), luego $\frac{2(\alpha_s,\rho)}{(\rho,\rho)} = r = 1$, es decir, $\alpha_s - \rho$ es raíz (pues $l > 1$) con lo cual $\rho - \alpha_s \epsilon \phi^+$; además,

$$w_\rho(\rho - \alpha_s) = \rho - \alpha_s - \frac{2(\rho,\rho)}{(\rho,\rho)}\rho + \frac{2(\alpha_s,\rho)}{(\rho,\rho)}\rho = \rho - \alpha_s - \rho = -\alpha_s \neq \rho - \alpha_s ,$$

luego $\rho - \alpha_s \epsilon R(\rho)$, como $\rho - \alpha_s \neq \rho$; entonces $\rho - \alpha_s = \Sigma a_i \alpha_i$, con un $a_k \neq 0$ y uno solo tal que $\alpha_k \epsilon R(\rho)$; además $a_k = 1$. Como $\rho = \alpha_s + \Sigma a_i \alpha_i$, hay dos posibilidades para $\rho = \Sigma b_i \alpha_i$:

a) hay dos enteros b_s, b_k iguales a 1, tales que $\alpha_s, \alpha_k \epsilon R(\rho)$ y si $\alpha_i \epsilon R(\rho)$, $i \neq s, k$, entonces $b_i = 0$;

b) hay un entero $b_s = 2$ tal que $\alpha_s \epsilon R(\rho)$ y si $\alpha_i \epsilon R(\rho)$, $i \neq s$, entonces $b_i = 0$.

Para probar (3), sea $\delta \epsilon R(\rho)$, $\delta \neq \rho$; como $\frac{2(\delta,\rho)}{(\rho,\rho)} = r = 1$ entonces $\delta - \rho$ es raíz; luego $\rho - \delta \epsilon \phi^+$, y tomando $\lambda = \rho - \delta$, se tiene $\delta + \lambda = \rho$. Sea $\delta = \Sigma a_i \alpha_i$; $a_k = 1$, $\alpha_k \epsilon R(\rho)$, $a_i = 0$ para todo $i \neq k$ tal que $\alpha_i \epsilon R(\rho)$, $\lambda = \Sigma c_i \alpha_i$, $\rho = \Sigma b_i \alpha_i$, entonces $\Sigma (a_i + c_i)\alpha_i = \Sigma b_i \alpha_i$; si

$c_i = 0$ para todo $\alpha_i \in R(\rho)$, ρ no es de la forma antes determinada, luego existe $c_i \neq 0$, tal que $\alpha_i \in R(\rho)$, así $\lambda \in R(\rho)$. Para verificar la unicidad, sea $\lambda' \in R(\rho)$ tal que $\delta + \lambda' \in \phi^+$; como $R(\rho)$ es cerrado, $\delta + \lambda' \in R(\rho)$; de la caracterización anterior de los elementos $R(\rho)$, se sigue $\delta + \lambda' = \rho$, y así $\lambda = \lambda'$. ∎

Observación. Como las raíces de $R(\rho)$ diferentes de ρ se agrupan dos a dos (de manera única) en tal forma que su suma sea ρ, $|R(\rho)| = 2m + 1$, $m \in \mathbb{Z}_+$.

Sea $\alpha_k \in \pi$; notaremos (α_k) la *torre sobre* α_k, definida como el conjunto de raíces $\delta \in \phi^+$ de la forma $\delta = \Sigma\, a_i \alpha_i$ $(a_i \in \mathbb{Z}_+)$ con $a_k \neq 0$.

Sea $\{ \alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_t} \} = \{ \alpha_i \in \pi \mid w_\rho(\alpha_i) \neq \alpha_i \} = \{ \alpha_i \in \pi \mid (\alpha_i, \rho) \neq 0 \}$. Luego

Luego $R(\rho) = \{ \Sigma\, a_j \alpha_j \in \phi^+ \mid a_{i_s} \neq 0$ para algún s, $1 \leq s \leq t \} =$

$= (\alpha_{i_1}) \cup \ldots \cup (\alpha_{i_t})$. Así, $R(\rho)$ es una unión de torres (α_k)

tales que ρ no es ortogonal a α_k. Mirando en las tablas de raíces (Bourbaki [2]) y manteniendo la notación usada hasta ahora para ellas, obtenemos $R(\rho)$ para los diferentes tipos de álgebras :

$$A_l : R(\rho) = (\alpha_l) \cup (\alpha_1)$$

$$B_l : R(\rho) = (\alpha_2)$$

$$C_l : R(\rho) = (\alpha_1)$$

$$D_l : R(\rho) = (\alpha_2) \qquad\qquad (I)$$

$$G_2 : R(\rho) = (\alpha_2)$$

$$F_4 : R(\rho) = (\alpha_1)$$

$$E_6 : R(\rho) = (\alpha_2)$$

$$E_7 : R(\rho) = (\alpha_1)$$

$$E_8 : R(\rho) = (\alpha_8)$$

En adelante supondremos el grupo de Chevalley $L(q)$ sobre $F = GF(q)$ tal que la característica de $F \neq 2, 3$ (esta condición se puede suprimir en varios casos si se considera cada grupo por separado).

Sea $R = R(\rho)$, definimos X_R como el subgrupo de $L(q)$ generado por los X_δ, para todo δ de R.

LEMA 2. *X_R es un subgrupo de $L(q)$ de tipo extraespecial y $|X_R| = q^{2m+1}$, donde $2m+1 = |R|$.*

Demostración. Sea $R = \{\delta_m, \ldots, \delta_1, \delta_o, \delta_{-1}, \ldots, \delta_{-m}\}$, donde $\delta_o = \rho$ (la máxima raíz) ; $\delta_i + \delta_{-i} = \delta_o$, $i = 1, \ldots, m$; $\delta_i + \delta_j \notin \Phi^+$ si $i + j \neq 0$.

Como R es cerrado, todo elemento g de X_R se escribe : $g = \prod_i x_{\delta_i}(t_i)$, de manera única $(t_i \in F)$, luego $|X_R| = q^{2m+1}$.

De acuerdo con las propiedades de los presentes grupos, el conmutador de dos generadores viene dado por :

$[x_{\delta_k}(t), x_{\delta_s}(u)] = \prod x_{i\delta_k + j\delta_s}(c_{ij} t^i u^j)$ $(t, u \in F)$, el producto tomándose sobre los $i, j \in Z_+$ tales que $i\delta_k + j\delta_s \in \Phi^+$; los c_{ij} no dependen de t, u ; $c_{11} = \pm (r(\delta_k, \delta_s) + 1)$. Sea $\delta_k \in (\alpha_n)$, $\delta_s \in (\alpha_h)$, $\alpha_n, \alpha_h \in R$, si $i\delta_k + j\delta_s$ es raíz, $i\delta_k + j\delta_s \in (\alpha_n) \cup (\alpha_h)$; luego $i\delta_k + j\delta_s \in R$; por otra parte :

$$i\delta_k + j\delta_s = ia_n\alpha_n + ja_h\alpha_h + \sum_{t \neq n,h} a_t\alpha_t, \; a_n \geqq 1, \; a_h \geqq 1.$$

De acuerdo con la prueba del lema 1, $i = j = 1$, y $\delta_k + \delta_s = \delta_o$, es decir, $r + s = 0$. Explícitamente :

$[x_{\delta_i}(t), x_{\delta_{-i}}(u)] = x_{\delta_o}(\varepsilon t u)$, donde $\varepsilon = c_{11} = \pm (r(\delta_i, \delta_{-i}) + 1)$ $\quad (a)$

$$[x_{\delta_i}(t),\ x_{\delta_j}(u)] = E \ , \quad \text{para} \quad i+j \neq 0 \qquad (a)$$

Así, $[x_{\delta_o}(t),\ x_{\delta_i}(u)] = E$, para todo $\delta_i \epsilon R;\ t, u \epsilon F$, luego $X_{\delta_o} \subset Z(X_R)$.

En la relación (a), $\varepsilon t u \neq 0$ si $t, u \neq 0$, pues de acuerdo con las propiedades de las raíces $\varepsilon = \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3$.

$X'_R = X_{\delta_o}$; en efecto: $X_{\delta_o} \subset X'_R$ por la relación (a). Recíprocamente sea $f, g \epsilon X_R$, entonces:

$$f = \prod_i x_{\delta_i}(t_i) \ , \quad g = \prod_j x_{\delta_j}(t_j) \ , \quad \text{y} \ ,$$

$[f,g] = [\prod_i x_{\delta_j}(t_i),\ \prod_j x_{\delta_j}(t_j)] = \prod_{i,j} [x_{\delta_i}(t_i),\ x_{\delta_j}(t_j)] \ \epsilon\ X_{\delta_o}$ (pues de (a) se deduce: $[x, y, z] = [x, y][x, z]$ para todo x, y, z, generadores de X_R).

$X_{\delta_o} = Z(X_R)$; en efecto: sea $f = \prod_i x_{\delta_i}(t_i)$ un elemento de $Z(X_R)$, entonces $[f, x_{\delta_j}(t)] = E$ para todo $\delta_j \epsilon R$ y todo $t \epsilon F$, es decir, $\prod_i [x_{\delta_i}(t_i),\ x_{\delta_j}(t)] = E$; si el producto se toma para algún $i_o \neq 0$, tenemos:

$$\prod_i [x_{\delta_i}(t_i),\ x_{\delta_{-i_o}}(1)] = [x_{\delta_{i_o}}(t_{i_o}),\ x_{\delta_{-i_o}}(1)] = x_{\delta_o}(\varepsilon t_{i_o}) = E' \ ,$$

luego $t_{i_o} = 0$, y así $x_{\delta_{i_o}}(t_{i_o}) = E$, luego $f = x_{\delta_o}(t_o) \ \epsilon\ X_{\delta_o}$.

Es decir, $Z(X_R) \subset X_{\delta_o}$; la otra contenencia se mostró antes.

Así, $X'_R = Z(R) = X_{\delta_o}$, y, $|Z(X_R)| = q$.

Por otra parte, sea $T = \{ \delta_m, \ldots, \delta_1, \delta_o \}$; puesto que la suma de dos elementos de T no es una raíz, T es cerrado. Sea X_T subgrupo generado por X_{δ_i}, $i = 0, \ldots, m$. Claramente X_T es abeliano (relación (a)) y contiene a X'_R, luego es normal en X_R. Además, si $g \in X_T$, $g = \prod_i x_{\delta_i}(t_i)$ (expresión única), luego $|X_T| = q^{m+1}$. Se tiene entonces $[X_R : X_T] = q^m =$
$= [X_R : Z(X_R)]^{1/2}$.

Finalmente, sea $g \in X_T - Z(X_R)$, sea $x_{\delta_o}(u) \in X'_R$,

$g = \prod_{i \in I} x_{\delta_i}(t_i)$, con $t_j \neq 0$, para algún $j \in I \neq 0$; tomando

$x_{\delta_{-j}}(t_j^{-1} \varepsilon^{-1} u)$, donde $\varepsilon = \pm (r(\delta_j, \delta_{-1}) + 1)$,

$$[g, x_{\delta_{-j}}(t_j^{-1} \varepsilon^{-1} u)] = \prod_{i \in I} [x_{\delta_i}(t_i), x_{\delta_{-j}}(t_j^{-1} \varepsilon u)] =$$

$$= [x_{\delta_j}(t_j), x_{\delta_{-j}}(t_j^{-1} \varepsilon^{-1} u)] = x_{\delta_o}(\varepsilon\varepsilon^{-1} u) = x_{\delta_o}(u).$$

Se ha mostrado, pues, que $X'_R = \{ [g, f] \mid f \in X_R \}$ para todo $g \in X_T - Z(X_R)$. Así termina la prueba del presente lema . ∎

Del teorema *1* y el lema *2* de esta sección, se concluye el

LEMA 3. El grado de todo carácter irreducible no lineal de X_R *es* q^m
$m = \frac{|R|-1}{2}$.

Siguiendo la notación anterior, $R = R(\rho)$ contiene (α_k) para algún $\alpha_k \in \pi$. Sea h_{α_k} y definamos $H = \{ h_{\alpha_k}(t) \mid t \in F^* \}$ (subgrupo de $L(q)$). Sea $D = \langle H, X_R \rangle$ subgrupo generado por H y X_R. De acuerdo con las propiedades dadas en la sección 3.1.1, H normaliza a X_R , luego X_R es normal en D y $D = HX_R$.

LEMA 4. Sea θ un carácter irreducible no lineal de X_R. Si $\dfrac{2(\alpha_k, \rho)}{(\alpha_k, \alpha_k)} = s$ *($s = 1$ ó 2) entonces* $[D: I(\theta)] = \dfrac{1}{s}(q-1)$.

Demostración. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ ($\lambda_q = 1_{Z(X_R)}$) los caracteres lineales de $Z(X_R)$. De acuerdo con el teorema *1*, los caracteres irreducibles no lineales de X_R, $\theta_1, \ldots, \theta_{q-1}$, son tales que :

$$\begin{aligned} &\theta_i(g) = [X_R : X_T]\, \lambda_i(g) \ , \quad g \in Z(X_R) \\ &\theta_i(g) = 0 \ , \quad g \notin Z(X_R) \ . \end{aligned} \qquad (b)$$

H opera sobre $Z(X_R)$ por conjugación como un grupo de permutaciones de $Z(X_R)$ *(3.1.1)* :

$$h_{\alpha_k}(t)\, x_\rho(u)\, h_{\alpha_k}(t)^{-1} = x_\rho(t^{n(\alpha_k, \delta_o)}u) \ , \quad \text{donde} \quad n(\alpha_k, \delta_o) = \frac{2(\alpha_k, \delta_o)}{(\alpha_k, \alpha_k)} = s$$

$(t \in F^*)$; luego $Z(X_R)$ se divide en $s+1$ órbitas $\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_{s+1}$: $\mathcal{O}_1 = E$. $|\mathcal{O}_i| = \dfrac{q-1}{s}$, $i = 2, \ldots, s+1$.

Por otra parte, H opera como grupo de permutaciones de $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_q\}$ por la aplicación

$\lambda_i \to \lambda_i^h$, $\lambda_i^h(g) = \lambda_i(g^h)$, para todo $h \in H$, $g \in Z(X_R)$; luego $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_q\}$ se divide en $\mathcal{O}'_1, \ldots, \mathcal{O}'_{s+1}$ órbitas, $\mathcal{O}'_1 = \{\lambda_q\}$ y

$|\mathscr{O}_i| = \frac{q-1}{s}$, $i = 2, \ldots, s+1$.

De acuerdo con (b), operando H sobre $\{\theta_1, \ldots, \theta_{q-1}\}$ por la aplicación :

$\theta_i \to \theta_i^h$, $\theta_i^h(g) = \theta_i(g^h)$, $h \in H$, $g \in X_R$, se divide a $\{\theta_1, \ldots, \theta_{q-1}\}$ en s órbitas, cada una con $\frac{q-1}{s}$ elementos.

Finalmente, sea $\theta \in \{\theta_1, \ldots, \theta_{q-1}\}$, la aplicación $\theta^h \to I(\theta)h$ $(h \in H)$ es una biyección de la órbita de θ sobre las co-clases a derecha de $I(\theta)$ en D , luego $[D: I(\theta)] = \frac{q-1}{s}$. ∎

OBSERVACIÓN . $\frac{2(\alpha_k, \rho)}{(\alpha_k, \alpha_k)}$ se calcula fácilmente a partir de la matriz de Cartan (A_{ij}), para cada álgebra simple ; pues $\frac{2(\alpha_k, \rho)}{(\alpha_k, \alpha_k)} = (a_1, \ldots, a_l) \cdot (A_{1k}, \ldots, A_{lk})^t$, si $\rho = \Sigma\, a_i\, \alpha_i$. Siguiendo las tablas en Bourbaki [2] obtenemos : $\frac{2(\alpha_k, \rho)}{(\alpha_k, \alpha_k)} = 1$, para toda álgebra de Lie simple L, excepto el caso $L = C_l$ en el cual $\frac{2(\alpha_k, \rho)}{(\alpha_k, \alpha_k)} = 2$.

TEOREMA 3 . Sea $G = L(q)$ un grupo de Chevalley sobre $F = GF(q)$, $R = R(\rho)$ el conjunto antes definido, sea $\alpha_k \in \pi$ tal que $(\alpha_k) \subset R$. Si χ es un caracter irreducible no lineal de G, grd $\chi \geqq \frac{1}{s}(q-1)\,q^m$, donde

$$s = \frac{2(\alpha_k, \rho)}{(\alpha_k, \alpha_k)} \quad (s = 1 \text{ ó } 2), \quad m = \frac{|R|-1}{2} .$$

Demostración . Sea χ un carácter irreducible no lineal de G, como G es simple, χ es fiel, y así $\chi|_D$ es fiel ; entonces existe un carácter irreducible Ψ de D tal que $(\chi|_D, \Psi) \geqq 1$ y $\Psi|_{X_R}$ no es suma de caracteres lineales, porque si no $\chi|_{X_R} = \Sigma(\chi|_D, \Psi)\Psi|_{X_R}$ sería suma de caracteres lineales y así $Z(X_R) \subset Ker\, \chi$ y G no sería simple. Sea, pues Ψ un tal carácter; puesto que X_R es normal en D, existe θ, carácter irreducible de X_R, tal que :

$$\Psi_{|X_R} = c\, \Sigma\, \theta^{g_i}, \quad \text{donde } \{g_i\} \text{ es una transversal de } I(\theta) \text{ en } D,\ c \geqq 1 .$$

Como $\Psi_{|X_R}$ no es suma de caracteres lineales, θ es no lineal, luego por los lemas 3 y 4 :

$$\Psi(E) = c\,\frac{q-1}{s}\, q^m .$$ De $grd\, \chi \geqq grd\, \Psi$ se sigue el teorema . ■

Siguiendo las tablas de raíces en Bourbaki y las tablas I se obtiene respectivamente :

$G_2 : |R(\rho)| = 5$, $F_4 : |R(\rho)| = 15$, $E_6 : |R(\rho)| = 21$,

$E_7 : |R(\rho)| = 33$, $E_8 : |R(\rho)| = 59$,

De esto, usando la observación anterior y el teorema 3, se sigue :

TEOREMA 4 . Sean $\chi_2, \chi_4, \chi_6, \chi_7, \chi_8$ *caracteres irreducibles no lineales de* $G_2(q)$, $F_4(q)$, $E_6(q)$, $E_7(q)$, $E_8(q)$, *respectivamente, entonces* $grd\, \chi_2 \geqq (q-1)\, q^2$, $grd\, \chi_4 \geqq (q-1)\, q^7$, $grd\, \chi_6 \geqq (q-1)\, q^{10}$, $grd\, \chi_7 \geqq (q-1)\, q^{16}$, $grd\, \chi_8 \geqq (q-1)\, q^{28}$. ■

NOTAS . *1)* Aplicando el teorema 3 a los grupos $A_l(q)$, $B_l(q)$, $C_l(q)$, $D_l(q)$ se obtienen cotas para los caracteres, exactamente iguales a las conseguidas (sección 2) para los correspondientes grupos clásicos isomorfos.

2) Sea $G^1 = L^1(q^2)$ un grupo trenzado. Sean $R = R(\rho)$ y X_R los conjuntos antes definidos. $R = (\alpha_1) \cup (\alpha_l)$ si $L = A_l$; $R = (\alpha_k)$ en los otros casos. Puesto que - es una simetría del diagrama de Dynkin, en el caso A_l : $\bar{\alpha}_1 = \alpha_l$, y en los otros $\bar{\alpha}_k = \alpha_k$; luego $R(\rho) = \overline{R(\rho)}$.

Sea $X_R^1 = U^1 \cap X_R$; se verifica fácilmente que X_R^1 es subgrupo de G^1 de tipo extraespecial. Por otra parte, en el caso A_l : los elementos $h_{\alpha_1}(t)\, h_{\alpha_l}(\bar{t})$ $(t \in F^*)$ pertenecen a G^1 y normalizan $X_R{}^1$; en los otros casos : $h_{\alpha_h}(t)$ $(t \in F_o^*)$ pertenece a G' y normaliza X_R^1. Podemos entonces tomar $D^1 = H^1 X_R{}^1$, donde

$$H^1 = \{\, h_{\alpha_1}(t)\, h_{\alpha_l}(\bar{t}) \mid t \in F^* \,\} \quad \text{en el caso } A_l ,$$

$$H^1 = \{\, h_{\alpha_k}(t) \mid t \in F_o{}^* \,\} \quad \text{en los otros casos} .$$

Así, razonando igual que antes, se pueden obtener cotas para los caracteres de los grupos trenzados. En los casos $A_l{}^1(q^2)$, $D_l{}^1(q^2)$, dichas cotas coinciden con las obtenidas en la sección 2, para los grupos clásicos isomorfos a estos, a saber : $SU(l+1, q)$, $SO(2\,l, q)$ respectivamente.

REFERENCIAS

1. E, ARTIN, *Geometric Algebra*, Interscience, London , 1957.
2. N. BOURBAKI, *Groupes et algèbres de Lie*, chapitres 4, 5, 6, Hermann, Paris 1968.
3. R. W. CARTER, *Simple groups ana simple Lie algebras*, J. London Math. Soc. 40 (1965), 193-240.
4. C. W. CURTIS, *Chevalley groups and related topics (in Finite simple groups)*, Academic Press, New York, 1971, 135-189.
5. C. CHEVALLEY, *Theory of Lie groups*, Princeton University Press, Princeton, 1946.

6. C. CHEVALLEY, *Sur certains groupes simples*, Tohoku Math. J. (2), 6 (1955).

7. L. E. DICKSON, *Linear groups*, Dover, New York, 1958 .

8. R. B. DYNKIN, *Semisimple subalgebras of simple Lie algebras*, Trans. Amer. Math. Soc., 6 ( ) ,111- '44

9. W. FEIT, *Characters of finite groups*, Benjamin, New York, 1967.

10. B. HUPPERT, *Endliche Gruppen*, I, Springer, Berlin, 1967.

11. N. JACOBSON, *Lie algebras*, Interscience, New York, 1966.

12. W. PATTON, *The minimun index for subgroups in some classical groups. A generalization of a theorem of Galois*, Ph. D. Dissertation, University of Illinois, 1972.

13. J. F. SERRE, *Lie algebras*, Benjamin, New York, 1964.

14. R. STEINBERG, *Lectures on Chevalley groups* (notes prepared by J. Faulkner and R. Wilson). Yale University, 1967.

15. H. N. WARD, *Representations of simpletic groups*, J. Algebra 20 (1972), 182-195.

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, D, E,. Colombia, Sur América .

(Recibido en agosto de 1972)